

実験計画法によるローゼ桁橋の振動軽減法評価

VIBRATION CONTROL OF LOHSE GIRDER BRIDGES
USING DESIGN OF EXPERIMENTS

本田秀行*・小堀為雄**

By Hideyuki HONDA and Tameo KOBORI

1. まえがき

既設道路橋の静的および動的安定性の問題が指摘されてから久しい。この問題は、近年の急激な交通量の増大や車両の大型化などの荷重側の原因と、橋梁の設計理論の進歩や使用材料の高強度化による比較的剛性の小さい橋梁の出現など橋梁側の原因、ならびに、それら両原因の相乗作用による橋梁の劣化や破損の原因によって生じることを示していると思われる。

著者らの研究室で行っている橋梁の調査では、特に、設計荷重が20t以下の旧設計示方書に基づいて架設された道路橋が自動車荷重の影響を受けて過大な応力や振動の発生、さらに、歩行者が橋梁を通行するときに不快感や歩きにくさを感じることなどが認められている。このような劣化の著しい橋梁を将来も供用する場合の対策としては、供用荷重算定による重量制限や、あるいはなんらかの補強工事が従来から行われている。しかし、既設道路橋を補強する場合、これらの静的および動的安定性の検討のほかに、歩行者が受けける振動感覚の面からの橋梁の使用性¹⁾をも含めた対策が必要であると思われる。このような補強工事にあたって、補強材として何を使用するか、あるいは、その補強材が橋梁の静的および動的安定性、さらに、使用性の向上にどの程度寄与するかを知ることは重要である。より複雑な構造系を有する橋梁の補強に実験計画法を導入した理由は、より効果の高い補強方法を見い出し、あわせて経済的な施工に主眼をおくためである。

そこで、本論文では、一例として静的および動的安定性の対策が望まれているローゼ桁橋をモデル橋として、ローゼ桁橋の振動軽減の方法を実験計画法²⁾におけるデータ解析の方法を用いて、その評価を行うことを試み

た。

実験計画としては、歩行者がローゼ桁橋を通行していくときに、1台の大型車が通過して橋梁および歩行者に振動を与えるような実験の“場”を想定した。そして、橋梁に生じる振動の大きさを応答加速度で代表すると考え、歩行者に与える心理的な影響については応答速度³⁾で評価することとした。これら応答加速度および応答速度を実験の特性値（結果）とした。特性値に影響を及ぼすであろう原因としては自動車外力などが考えられるが、本論文では自動車荷重の規制は困難であることを考え、ローゼ桁橋の構造系自体の変更に原因を考えた。この構造系を変更するために想定された6個の斜吊材を考え、これらを実験の因子とした。各因子の水準は、斜吊材を〈配置する〉、〈配置しない〉の2水準とした。すなわち、ローゼ桁橋に斜吊材を追加して、ローゼ桁の構造系そのものを変更することによって振動軽減を図る方法である。本論文では、ローゼ桁に曲げ剛性のある斜吊材を追加して補強した構造系を補強ローゼ桁形式とした。そして、これらの斜吊材をどのような形に組合せてローゼ桁に配置すれば最も振動軽減の効果が上がるかについて、推測統計的解析法から評価する方法について論じた。

まず、特性値の構造模型を定義し、各因子を直交配列表にわりつける1/2実施の直交配列実験とした。わりつけられた各因子の処理条件に従って、単一歩行車両による橋梁の動的応答解析から特性値を求める机上実験^{4),5)}を行った。各特性値に対する各因子の要因効果を最小二乗法から推測し、さらに、分散分析によって各因子の有意性検定を行った。その結果、特性値に重要でない要因効果を切り捨て、重要な要因効果のみから、推測統計的解析法によって推定された特性値の処理母平均を最小にする斜吊材の最適な組合せを求めた。

続いて、この最適な斜吊材の組合せを対象としたモデル橋に配置した場合の配置効果について、静的および動

* 正会員 工修 金沢工業大学講師 土木工学科

** 正会員 工博 金沢大学教授 工学部建設工学科

的の面から、さらに使用性の面からも検討を行った。

これらの研究から、実験計画法を導入して橋梁の構造形式まで変更し、橋梁の振動軽減させるための最適値を得られることが立証できたので、その方法について以下に報告する。

2. 実験計画

実験計画法の目的は特性値である実験結果と、原因系として考えられる因子との因果関係を明らかにし、さらに特性値を最大、あるいは最小にする因子の最適な組合せを見い出すことにある。実験計画法では次の(1)～(3)の特色があげられる。

- (1) 現象の予測は特性値の構造模型で表現できる。
- (2) 構造模型は因子の単独効果（主効果）と因子相互間の効果（交互作用）によって成立する。
- (3) 各実験因子の組合せは無作為化の原理を用いた配置法で行う。

本論文における実験計画の概略を図-1に示し、このフローチャートに従って解析を行う。

本節においては、特性値に影響を及ぼすであろう因子を抽出し、その因子を直交配列表にわりつける直交配列の計画として説明する。

(1) 特性値および因子抽出

本論文でモデル橋としたローゼ桁橋の諸元を図-2に示す。このモデル橋は昭和14年の鋼道路橋示方書案（自動車荷重13t）に基づいて設計され、昭和30年に架設されている。スパンが36mという小スパン橋に対してローゼ桁橋を採用したのは、桁下空間の制限や当時まだ高張力鋼が開発途上であったことなどの理由であろう。しかし、近年の交通量の増大や車両の大型化により、設計荷重をはるかに超える車両が多数通過するため、床版コンクリートが部分的に落下したことがある。また、表-1のように現行設計示方書に基づいて基本耐荷力⁶⁾を計算すると、床版および補剛桁が不足している。さらに、著者らの研究室で行った動的性状の調査では、補剛アーチ系特有の逆対称1次振動の変位が卓越し、この振動数が自動車の懸架部の固有振動数とほぼ一致しているため、多くの歩行者が歩きにくさを感じていることがわかった。このような状況下におかれたモデル橋は静的な問題としては耐荷力の向上があり、動的な問題には橋梁の動的応答問題として振動軽減を考えるほかに、あわせて歩行者へ与える心理的影響から振動刺激の軽減を図って使用性を向上させることも含まれており、それらの対策が望まれている橋梁である。そこで、これらの問題を解析するために、歩行者がモデル橋を通行中

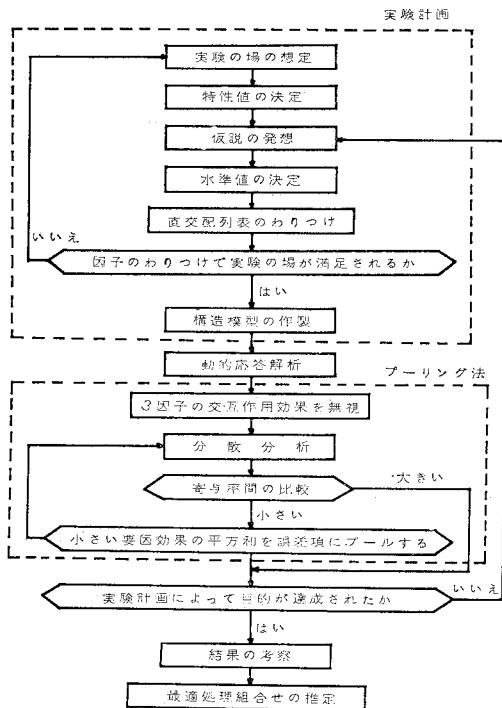


図-1 実験計画と解析のフローチャート

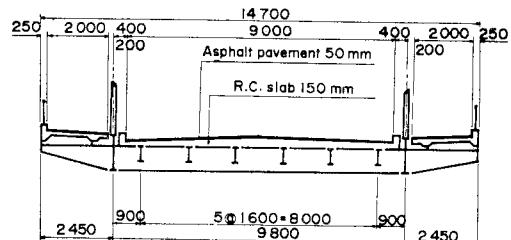
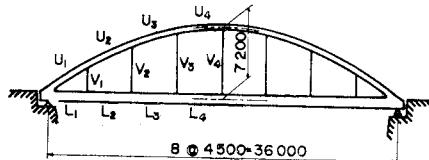


図-2 モデル橋の諸元（昭和30年に架設された都市内道路橋である）

に1台の大型車が通過して橋梁および歩行者に振動を与えるような実験の“場”を想定する。

ローゼ桁橋の振動を軽減するという問題解決のために想定された実験の場において、特性値として橋梁に生じる振動の大きさを応答加速度で考えた。また、歩行者へ与える振動刺激に対しては応答速度³⁾で評価することにする。

この特性値に影響を及ぼすであろうおもな原因を示す

表-1 モデル橋の基本耐荷力 $P = 20 \frac{\sigma_a - \sigma_d - \sigma_w}{\sigma_{l+i}}$ (t)

部材	許容応力 σ_a (kg/cm ²)	死荷重応力 σ_d (kg/cm ²)	群集応力 σ_w (kg/cm ²)	活荷重応力 σ_{l+i} (kg/cm ²)	基本耐荷力 P (t)
床	鉄筋	1 200	134		1 538 13.9
版	コンクリート	50	6		64 13.8
アーチ	U ₁	1 041	578	75	324 24.0
チ	U ₂	1 053	533	66	350 25.9
弦	U ₃	1 059	557	56	325 25.8
材	U ₄	1 062	545	47	298 26.5
補剛	L ₁	1 300	410	109	1 098 14.2
桁	L ₂	1 300	482	116	810 17.3
	L ₃	1 300	583	94	669 18.6
	L ₄	1 300	615	89	669 17.8
吊材	V ₁	1 300	605	72	316 39.4
	V ₂	1 300 × 1.25	476	56	247 25.3
	V ₃	1 300 × 1.25	534	63	308* 36.2
	V ₄	1 300 × 1.25	534	63	308* 36.2

吊材の 1.25 は主荷重と風荷重との載荷されたときの許容応力の割り増し率

* 風荷重による応力

と図-3 のようになる。ここで、衝撃は橋梁に与える走行自動車の強制力であり、特性値を小さくするために不整な路面の改修や交通量の規制によって期待できよう。しかし、重要路線では交通量や車両重量の規制が困難であるなどの問題がある。また、橋梁を渡る歩行者に対しても、年令や歩く速度、あるいは姿勢などの規制はできない。そこで、本論文では特性値に与える原因を橋梁自体に考える。この場合、特性値を小さくする、すなわち、橋梁の振動を軽減する方法としては次のようなことが考えられよう。

- i) 橋梁の減衰性を高める。
 - ii) 橋梁と車両の固有振動数の一致を防ぐ。
 - iii) 橋梁の固有振動モードの変更
- i) の方法はダンパー や吸振器などでいくらか実現可能であろう。ii) は大型車の固有振動数の範囲から橋梁の固有振動数を外し共振を防ぐ方法⁷⁾であり、そのためには iii) の方法も含めて、ローゼ桁の構造系そのものを変更する必要がある。

そこで、構造系を変更するため、ニールセン型ローゼ桁橋の振動性状⁸⁾や著者らが行ったローゼ桁橋の模型実験によって得られた結果⁹⁾から、ローゼ桁に斜吊材を追加して、ローゼ桁を補強ローゼ桁形式に構造系を変えることにする。模型実験では斜吊材を配置することによって、橋梁の減衰性が高められることが認められている。特性値に影響を及ぼすと考えられる原因系としては、図-4 のように対称に配置された斜吊材を実験の因子と

した。実験計画の段階において、この実験因子と特性値との因果関係はまだ明らかになったものではない。しかし、ローゼ桁橋の理論解析、あるいは模型実験から、斜吊材を追加することによって静的および動的性状が相違することから、本論文では、実験の因子として斜吊材を考えた。また、実験計画法では、分散分析によつて特性値と因子の因果関係を確かめることもある。そして、これら各因子の水準は斜吊材を〈配置する〉、〈配置しない〉の 2 水準とした。しかし、斜吊材をどのように配置すれば最も効果がよいのかを知るために、推測統計的解析法から推定された特性値の処理母平均を最小にする最適な斜吊材の組合せを求めるのである。

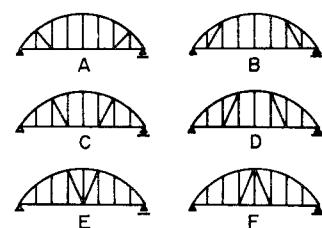


図-4 実験の因子

(2) 構造模型

(1) では実験の因子として斜吊材を考えた。そこで、実験の一般平均と各因子の要因効果の和が処理母平均を与えるという仮定から、特性値の構造模型は次式のように表現できる。

$$Y = X\mu + \epsilon \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 Y は特性値ベクトルを、 X は実験計画から与えられる計画行列を、 μ は Y を規定する未知母数ベクトルを示し、 $X\mu$ は各因子の組合せによる処理母平均を表している。また、 ϵ は 3. の動的応答解析で用いる仮定による仮定誤差ベクトルを示している。本論文では、この計画行列に対して、各因子を直交配列表にわりつけた直交配列計画とする。

(3) 因子のわりつけ

直交配列表は、有限体および有限拡大体の元を基礎として、既約多項式を法(mod)とする相合式から構成される¹⁰⁾。そして、 S 種の文字 ($S \geq 2$) を N 行 k 列に並べた行列 A において、 A の任意の d 列 ($2 \leq d < k$) を取ったとき、 S 種の文字の d 個の並び方、すなわち、 S^d 通りのすべての組合せが N 行の中に平等に λ 回ずつ含まれているとき、行列 A を大きさ N 、制約数 k 、水準 S 、強さ d の直交配列とよび、 $OA(N, k, S, d)$ で表され、 $N = \lambda S^d$ の関係がある¹¹⁾。この直交配列表を用いた直交計画は 1 つの特性値をいく重にも使って推測効果を極度に高めようとする計画であるため、実験の回数を減らせる利点がある。また、わりつけられた各因子は互いに直交構成であるから、特性値の構造模型は解析が非常に簡単になる。

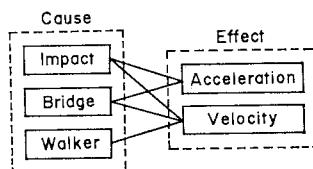


図-3 要因特性図

表-2 直交配列表 OA(32, 31, 2, 2) と因子のわりつけ

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
3	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
5	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	
6	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	
7	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	
8	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	
9	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	
10	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	
11	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	
12	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	
13	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	
14	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	
15	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	
16	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	
17	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	
18	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
19	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	
20	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	
21	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	
22	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	
23	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	
24	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
25	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	
26	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	
27	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	
28	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	
29	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	
30	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	
31	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	
32	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	

そこで、表-2 に示す直交配列表 OA(32, 31, 2, 2) に図-4 で示した実験の因子 6 個をわりつけることとする。つまり A, B, C, D, E および F の各因子を 1, 2, 4, 8, 16 および 31 の各列にわりつける。この計画は 1/2 実施実験*であるから、直交配列表の 1 つの列は互いに 2 つの要因効果の情報を与える（別名関係）。たとえば、主効果 A は 5 因子の交互作用 BCDEF と別名で、2 因子交互作用 AB は CDEF の 4 因子交互作用効果と別名関係となる。ここで、各因子が直交配列表にわりつけられた特性値の構造模型を次式のように書き改める。

$$\begin{aligned}
 Y = & x_1\mu_1 + x_A\mu_A + x_B\mu_B + x_{AB}\mu_{AB} + x_C\mu_C \\
 & + x_{AC}\mu_{AC} + x_{BC}\mu_{BC} + x_{ABC}\mu_{ABC} \\
 & + x_D\mu_D + \dots + x_{EF}\mu_{EF} + x_F\mu_F \\
 & + x_{AE}\mu_{AE} + \dots + x_{AF}\mu_{AF} + x_{F}\mu_F + \varepsilon
 \end{aligned} \quad (2)$$

* 水準数が 2 で因子が 6 である場合の全組合せは $2^6 = 64$ 通りであるが、本解析の場合は N=32 であるから 1/2 実施の実験となる。

ここに、 $x_i\mu_i$ は実験全体の一般平均を表している。また、 $x_A\mu_A$ から $x_F\mu_F$ までの各項のサフィックスは各因子の組合せを示しており、これら各項は一般平均からの差として示される各因子の処理効果を表している。さらに、前述した別名関係から一例として、 $x_{ABC}\mu_{ABC} = x_{DEF}\mu_{DEF}$ なる関係がある。式(2)で示される特性値に影響を及ぼすと考えられる各因子の要因効果を推測するために分散分析するのであるが、まだ特性値が求まっていないので、次節において、想定された実験の場における橋梁の動的応答解析から、応答加速度および応答速度の両特性値を求める。

3. 動的応答解析

1 台の大型車がランダムな路面凹凸を有する橋梁上を走行したとき、橋梁に生じる振動の大きさを応答加速度で考え、歩行者の受ける心理的な影響は応答速度で評価することにする。そして、これら両特性値を求めるため、不規則振動論から動的応答解析を行う。

(1) 不規則振動解析¹²⁾

この項で述べることの詳細は文献12)に記されているので、ここでは本論文で必要なことのみをあげる。

図-5はタイヤ部と懸架部の2質量系にモデル化された大型自動車が、ランダムな路面凹凸を有するローゼ桁橋上を一定速度で走行している場合を示す。

いま、支点からの距離が x における動たわみを $y(t, x)$ とするとき、一般座標 $q_n(t)$ と基準関数 $\varphi_n(x)$ を用いて次式のように表される¹³⁾。

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \varphi_n(x) \quad \dots \dots \dots (3)$$

ここで、 t は自動車が橋梁に入った瞬間からの時間である。また、 $\varphi_n(x)$ は n 次振動の固有振動モードを示し、一般的な形として次式のような正弦級数で示されるものとする。

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad \dots \dots \dots (4)$$

ただし、上式での係数 a_{nm} は $\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}^2 = 2/\rho L$ となるように正規化されているものとする。

さて、ローゼ桁橋と自動車の運動方程式をエネルギー法から求めると次式を得る。

$$\ddot{q}_n(t) + 2h_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2q_n(t) = -(M\ddot{z} + M_T\ddot{z}_T)\varphi_n(Vt) \quad \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 h_n は橋梁の n 次振動における減衰定数を示している。また、 M および M_T はそれぞれね上部およびね下部の質量を、 \ddot{z} および \ddot{z}_T はね上部とね下部の加速度をそれぞれ示している。

式(5)の右辺を外力と考えると、 $-(M\ddot{z} + M_T\ddot{z}_T)$ は自動車がランダムな凹凸をもつ路面を走行したときに橋面へ与える定常外力 $f(t)$ であり、 $\varphi_n(Vt)$ は自動車が移動するために生じる非定常性を表す確定関数であると考えることにすれば、式(5)は非定常外力を受ける1自由度系の線形応答問題¹²⁾に帰着される。

そこで、本論文は、1台の大型車が走行したとき、橋梁の応答加速度および応答速度を特性値としていることから、自動車が走行している間の平均的な応答量として、二乗平均値を求ることにする。自動車が橋梁に到

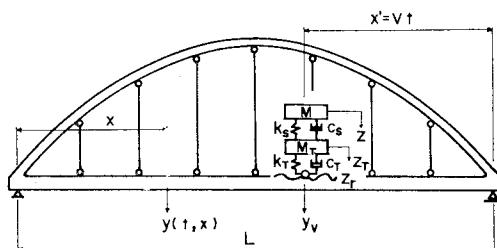


図-5 振動系模型

着する以前に橋梁は静止しているものと仮定し、しかも定常外力 $f(t)$ のパワースペクトル密度を $S_f(\omega)$ で表すと、ある着目点 x における応答速度および応答加速度の二乗平均値の期待値は次式のようになる。

$$E[\dot{y}^2(t, x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \{E[\dot{q}_n^2(t)]\}\varphi_n^2(x) \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$E[\ddot{y}^2(t, x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \{E[\ddot{q}_n^2(t)]\}\varphi_n^2(x) \quad \dots \dots \dots (7)$$

ここで、

$$E[\dot{q}_n^2(t)] = \frac{2e^{-2h_n\omega_nt}}{\bar{\omega}_n^2} \int_0^{\infty} S_f(\omega) \times \left[\left\{ -h_n\omega_n I_S(\omega, t) + \frac{\partial I_S(\omega, t)}{\partial t} \right\}^2 + \left\{ -h_n\omega_n I_C(\omega, t) + \frac{\partial I_C(\omega, t)}{\partial t} \right\}^2 \right] d\omega \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$E[\ddot{q}_n^2(t)] = \frac{2e^{-2h_n\omega_nt}}{\bar{\omega}_n^2} \int_0^{\infty} S_f(\omega) \times \left[\left\{ (h_n\omega_n)^2 I_S(\omega, t) - 2h_n\omega_n \frac{\partial I_S(\omega, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 I_S(\omega, t)}{\partial t^2} \right\}^2 + \left\{ (h_n\omega_n)^2 I_C(\omega, t) - 2h_n\omega_n \frac{\partial I_C(\omega, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 I_C(\omega, t)}{\partial t^2} \right\}^2 \right] d\omega \quad \dots \dots \dots (9)$$

ここで $\bar{\omega}_n = \omega_n \sqrt{1-h_n}$ である。なお、式(8), (9)における $I_S(\omega, t)$, $I_C(\omega, t)$, $\partial I_S(\omega, t)/\partial t$, $\partial I_C(\omega, t)/\partial t$, $\partial^2 I_S(\omega, t)/\partial t^2$ および $\partial^2 I_C(\omega, t)/\partial t^2$ は文献12)の付録にその結果が示されている。

ここで、橋梁の振動の大きさとしては応答加速度の実効値(二乗平均値の平方根)の最大値を採用することにする。また、歩行者の受ける心理的な影響については応答速度の実効値の平均を特性値として採用し、次式のように定義する。

$$\bar{\sigma}_v = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T E[\dot{y}^2(t, x)] dt \right\}^{1/2} \quad \dots \dots \dots (10)$$

ここで、 $T=L/V$ であり、式(10)は走行する大型車が橋梁に入った瞬間から出るまでの間に、歩行者が受ける平均的な振動刺激を示している。

ここで、定常外力のパワースペクトル密度について考える。一般に、路面の周波数と凹凸振幅の強度特性については、定常ランダムなガウス過程としてパワースペクトル密度を用いて表されている。そこで、本論文では図-6に示す路面凹凸のパワースペクトル密度を用いた。この値は、モデル橋のセンターラインから50cmの位置の縦断面を10cm間隔のレベル測量で得られたデータに対して、最大エントロピー法(MEM)¹⁴⁾で求めた実測値である。このような定常路面を表-3に示すような総重量が20tの大型車が走行した場合、自動車が橋面に与える外力のパワースペクトル密度に対しては

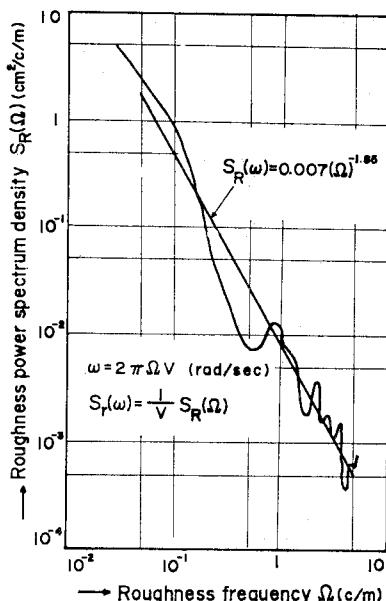


図-6 路面凹凸のパワースペクトル密度

表-3 路面と走行自動車の諸元

走行速度 (V) : 10 m/s (40 km/h 相当)	
路面凹凸波長：最小 20 cm, 最大 20 m	
路面凹凸パワースペクトル密度 ($\text{cm}^2 \cdot \text{s}$) :	
$S_r(\omega) = 0.007 V^{0.85} (\omega/2\pi)^{-1.85}$	
車両重量 : 20 t (ばね上部 18 t, ばね下部 2 t)	
ばね定数	懸架部 (k_S), 4 000~6 000 kg/cm タイヤ部 (k_T), 8 000~12 000 kg/cm
減衰係数	懸架部 (C_S), 25 kg/cm/s タイヤ部 (C_T), 30 kg/cm/s
自動車外力のパワースペクトル密度 (有帯域パワー) (イトノイズ)	有帯域 $3\pi \sim 7\pi \text{ rad/s}$, $S_f(\omega) = 1830400 \text{ kg}^2 \cdot \text{s}$ (1.5~3.5 Hz) 有帯域 $20\pi \sim 40\pi \text{ rad/s}$, $S_f(\omega) = 311300 \text{ kg}^2 \cdot \text{s}$ (10~20 Hz)

文献12)で指摘されたように、2つの有帯域ホワイトノイズで表すことにした。これはさまざまな周波数の特性を有する大型車がモデル橋を走行する場合を考えたためである。すなわち、表-3の最下段に示すように、第1の有帯域スペクトルとしては $\omega = 3\pi \sim 7\pi \text{ rad/s}$ (1.5~3.5 Hz) の範囲に仮定し、第2の有帯域としては $\omega = 20\pi \sim 40\pi \text{ rad/s}$ (10~20 Hz)とした。なお、両ホワイトノイズの強度は自動車外力の平均パワー（分散値）が等しくなるように決めた。

以上より、橋梁の固有振動数と固有振動モードの係数 a_{nm} を求めることができれば両特性値（応答加速度と応答速度）を計算することができる。

(2) 特性値の計算

表-4に示す処理条件は各因子がわりつけられた直交

表-4 処理条件による固有振動数と特性値

No.	処理条件						固有振動数 (Hz)	応答加速度 (cm/s²)	振動刺激 (cm/s)
	A	B	C	D	E	F			
1	0	0	0	0	0	0	3.06	4.12	48.77
2	0	0	0	0	1	1	3.12	6.23	21.66
3	0	0	0	1	0	1	3.73	6.86	20.38
4	0	0	0	1	1	0	3.79	7.03	19.21
5	0	0	1	0	0	1	3.84	6.87	19.32
6	0	0	1	0	1	0	3.86	6.31	18.61
7	0	0	1	1	0	0	3.84	4.62	22.78
8	0	0	1	1	1	1	3.85	8.06	18.34
9	0	1	0	0	0	1	3.73	5.80	22.60
10	0	1	0	0	0	0	3.18	4.22	46.05
11	1	0	1	0	1	0	3.79	4.50	21.60
12	0	1	0	1	1	1	3.84	7.82	19.21
13	0	1	1	0	0	0	3.89	4.55	23.04
14	0	1	1	0	1	1	3.90	7.42	18.53
15	0	1	1	1	0	1	3.88	7.31	18.83
16	0	1	1	1	1	0	3.89	7.23	18.14
17	1	0	0	0	0	1	3.87	6.00	21.32
18	1	0	0	0	1	0	3.93	5.47	19.67
19	1	0	0	1	0	0	3.88	4.43	22.66
20	1	0	0	1	1	0	3.93	7.86	18.94
21	1	0	1	0	0	0	3.94	4.44	23.18
22	1	0	1	0	1	1	3.97	7.44	18.33
23	1	0	1	1	0	1	3.94	7.30	18.77
24	1	0	1	1	1	0	3.95	7.23	18.06
25	1	1	0	0	0	0	3.39	4.41	39.40
26	1	1	0	0	1	1	3.95	6.61	19.86
27	1	1	0	1	0	1	3.90	6.92	19.97
28	1	1	0	1	1	0	3.95	7.04	18.73
29	1	1	1	0	0	1	3.97	6.93	18.62
30	1	1	1	0	1	0	3.98	6.36	17.87
31	1	1	1	1	0	0	3.96	4.51	22.94
32	1	1	1	1	1	1	3.98	8.05	18.16

No. 1, 10, 25 では1次振動数が逆対称モードに、そのほかは対称振動モードになる。

配列表の各列を抜き取って並べたものであり、0は斜吊材が配置されないことを、1は配置されることを示している。まず、実験順序の処理条件に従って、図-2に示したモデル橋および各斜吊材（2本の形鋼 CT 118×249×8×8 をタイプレートでH型にしたもの）の組合せが配置された補強ロゼット形式を骨組構造の面内自由振動の固有値問題¹⁵⁾として解析し、固有振動数と固有振動モードを2次振動まで求めた。その結果を表-4に示した。なお、質量マトリックスを作成するに必要なデータとして、主構部材はそれぞれの断面積から分布質量が計算されるようにしているが、縦桁、床桁、床版、舗装、地覆、高欄、補剛材、上横構および下横構などは構造上から各節点に集中する質量であると考え、設計断面量から集中質量として扱った。

さらに、(1)で述べた動的応答解析から、直交配列表にわりつけられた各因子の処理条件に従って、橋梁の応答加速度実効値の最大値と応答速度実効値の平均の両特性値をそれぞれ求めた。その結果を表-4に示す。橋梁の減衰定数 h_n はモデル橋の動的調査による実測値

0.017 を用い、斜吊材の配置によっても変化しないものとした。また、橋梁の重量には各処理条件の斜吊材分の重量も加えている。

以上の計算から、各処理条件における両特性値に対する各因子の寄与の度合、すなわち、各因子の要因効果（主効果と交互作用効果）を知るために、次節において分散分析を行うこととする。

4. 分散分析と最適組合せ

統計的検定を行う前に、本実験計画で考えた斜吊材が特性値に対してなんら影響を及ぼさないであろうとする帰無仮説と、影響を及ぼすであろうとする対立仮説の両仮説を用意しておく。そして、分散分析ではこれらの仮説を棄却したり、あるいは採択したりして、特性値と斜吊材の因果関係を確かめる方法をとる。

（1）分散分析

式（2）で与えた特性値の構造模型の処理母平均を構成する未知母数 μ を推定する方法としては、最小二乗法¹⁶⁾、関係環による方法¹⁷⁾などがあるが、本論文では、より一般的な最小二乗法を用いて解析を行う。この未知母数 μ の推定は、一般に残差平方和を最小にする、 $\partial(\epsilon^t \epsilon) / \partial \mu = 0$ なる関係から、次式の正規方程式が求まる。ここで、 t は転置を示す。

$$X^t X \mu = X^t Y \quad \dots \dots \dots \dots (11)$$

いま、 μ の推定量を $\hat{\mu}$ とすると式（11）から次式を得る。

$$\hat{\mu} = (X^t X)^{-1} X^t Y \quad \dots \dots \dots \dots (12)$$

ここに、 $E[\hat{\mu}] = \mu$, $E[(\hat{\mu} - \mu)^t (\hat{\mu} - \mu)] = (X^t X)^{-1} \sigma^2$ なる不偏性、および最小分散性の関係がある。

本論文は、各因子を直交配列表にわりつける直交構成の計画であることから、式（12）の未知母数の推定量 $\hat{\mu}$ を用いて各要因効果の成分を示す平方和を求めると次式を得る¹⁸⁾。

$$\begin{aligned} YY^t &= \hat{\mu}_1 x_1^t Y + \hat{\mu}_A x_A^t Y + \hat{\mu}_B x_B^t Y \\ &\quad + \hat{\mu}_{AB} x_{AB}^t Y + \hat{\mu}_C x_C^t Y + \hat{\mu}_{AC} x_{AC}^t Y \\ &\quad + \dots + \hat{\mu}_{ABC} x_{ABC}^t Y + \hat{\mu}_D x_D^t Y \\ &\quad + \dots + \hat{\mu}_{AF} x_{AF}^t Y + \hat{\mu}_F x_F^t Y \dots \dots (13) \end{aligned}$$

式（13）を各要因効果の自由度でそれぞれ割ると不偏分散となり、 σ^2 の推定量となる。分散分析では要因効果を統計的に判断するため、要因と誤差の不偏分散比（ F 値）が必要である。しかし、式（13）では誤差項がないので F 値が求まらない。この打開方法としてブーリング法²⁾を行った。まず1回目として、3因子以上の高次の交互作用効果の平方和を無視して、誤差の推定量 $\hat{\mu}_0 x_0^t Y$ とする（無視された項数が誤差の自由度 ϕ_0 を

表-5 分散分析の結果

特 性 値	要 因 効 果
応 答 加 速 度	$C^{**}, D^*, E^{**}, F^{**}, CD^{**}, EF^{**}$
振 動 刺 激	$C^{**}, D^{**}, E^{**}, F^{**}, EF^{**}$

*有意水準 5%

**有意水準 1%

与える）。無視されない平方和および自由度を $\hat{\mu} x^t Y$ および ϕ で表すと、 F 値は次式となる。

$$F^* = (\hat{\mu} x^t Y / \phi) / (\hat{\mu}_0 x_0^t Y / \phi_0) \dots \dots \dots \dots (14)$$

式（14）の F 値は不偏分散比が独立のとき、 $F(\phi, \phi_0, \alpha)$ の F 分布に従う。さらに、特性値全体の変動に対する各要因効果の変動、すなわち、寄与率¹⁹⁾ ν は次式より求めることができる。

$$\nu = 100 \times [\hat{\mu} x^t Y - (\phi \hat{\mu}_0 x_0^t Y / \phi_0)] / YY^t \dots \dots \dots \dots (15)$$

F 検定とは、帰無仮説に対して次式で示される。

$$F^* \geq F(\phi, \phi_0, \alpha) \dots \dots \dots \dots (16)$$

式（16）の場合は有意水準 α で帰無仮説を棄却して対立仮説が採択され、因子の要因効果を認める。このよいうな1回目の分散分析から、 F 値および寄与率でもって変動の小さい要因効果の平方和をさらに誤差項にプールして、図-1に示したように2回目以降の計算を行う。

以上のような繰り返し計算を行い、特性値に影響を及ぼすであろう要因効果を求めた結果を表-5に示す。この表から、主効果としては C, D, E, F 、交互作用効果としては EF が高度に有意となり、両特性値に対しては非常に影響を与えることがわかる反面、 A, B の因子はあまり効果がないことがわかる。このように、6個の因子の中でも特性値の変動に効果がある因子とあまり効果のない因子がある。そこで、これら斜吊材の因子をどのような形に組合せてローゼ桁に配置すればローゼ桁橋の振動軽減を最も効果的に行えるかについて述べる。

（2）最適処理の組合せ

斜吊材配置の最適性については、前節の分散分析から有意となった要因効果を用いて、これらの各処理条件に対して推定された特性値の処理母平均を最小にする斜吊材の組合せを最適処理の組合せと定義し、本節では、それを満たす配置を求めるにすることにする。この最適処理の組合せを求めるることは、最も低い特性を与える斜吊材の組合せを求めるのであるが、解析的には未知母数の推定量 $\hat{\mu}$ を用いて、次のような処理母平均および分散の推定を行うことである²⁰⁾。

$$\begin{aligned} \hat{\mu}\{A_i, B_j, C_k, D_l, E_m, F_n\} \\ = t(\phi_0, \alpha) \sqrt{\sigma^2} [\hat{\mu}\{A_i, B_j, C_k, D_l, E_m, F_n\}] \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \sigma^2 [\hat{\mu}\{A_i, B_j, C_k, D_l, E_m, F_n\}] = (\hat{\mu}_0 x_0^t Y / \phi_0)^* / n_g \\ \dots \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

ここで、 i, j, k, l, m および n は各因子の水準数を示す。 n_g は有効反復数で、 $1/n_g$ は田口の式¹⁹⁾を用いた。また、 $(\hat{\mu}_0 \mathbf{x}_0^T \mathbf{Y}/\phi_0)^*$ はブーリング法による繰り返し計算で最終な誤差の不偏分散比を示している。

本論文では、ローゼ桁橋の振動軽減を目的としていることから、特性値として応答加速度を考えた。この応答加速度に対する斜吊材の最適処理の組合せを求めるため、処理母平均の推定に逆 Yates の方法²⁰⁾を行った。また、最終の分散分析で有意とならなかった処理効果 $\hat{\mu} \mathbf{x}^T \mathbf{Y} = 0$ とした。すなわち、応答加速度の変動にあまり効果のない因子を切り捨てたことになる。このようにして推定された処理母平均を最小にする斜吊材の最適処理の組合せは図-7 になる。この図では CDE の斜吊材の組合せを配置した場合、応答加速度に対して最も効果が大きいことを意味しており、A, B, F を配置することはあまり効果がないことを意味している。すなわち、ローゼ桁橋の振動を軽減するためには格間にすべて斜吊材を配置しなくとも、一部の斜吊材を追加するだけでよいことを示している。この最適組合せによる斜吊材の配置効果については次節で論じる。

5. 配置効果

前節において、実験計画法のデータ解析からモデル橋の構造系そのものを変更させて振動軽減を可能にする斜吊材の最適な組合せが求められた。ここでは、この最適な斜吊材の組合せである C, D および E がモデル橋に配

置された場合の効果について、静的および動的の面から検討を加える。さらに、歩行者に対する使用性についても検討を行う。

(1) 静的効果

ローゼ桁を 2 次元面内骨組構造物として、各部材断面量の影響線を変形法²⁰⁾によって求めた。その結果の一例として、補剛桁の曲げモーメントの影響線を図-8 に示す。実線はモデル橋のローゼ桁を、点線は C, D および E の斜吊材が配置された補強ローゼ桁形式を示している。載荷点での曲げモーメントを比較してみると $L/4$ 点載荷の場合は $1/3$ に減少している。図-8 には示していないが、アーチ弦材については両載荷点で約 $1/4 \sim 1/5$ に減っている。また、載荷点でのたわみを比較すると、アーチ弦材と補剛桁とも約 $1/2 \sim 1/4$ 程度に減少している。ところが軸方向力はわずかであるがローゼ桁よりも補強ローゼ桁の方が大きくなる。せん断力については、補強ローゼ桁がローゼ桁の 50%程度になる。いま、軸応力と曲げ応力との合成応力度の影響線を求めてみると補剛材およびアーチ弦材とも明らかに補強ローゼ桁の方が小さい結果が得られた。したがってアーチ弦材および斜吊材の軸方向力による座屈の検討さえ十分に行えば、斜吊材 C, D および E を追加することによって、静的にはニールセン型ローゼ桁形式と同様な特徴^{3), 21), 22)}が確認でき、橋梁全体の耐荷力を高めることがわかる。特に補剛桁の耐荷力が不足している本モデル橋に対しては有効であると思われる。

(2) 動的効果

橋梁の動的性状として、モデル橋のローゼ桁形式では 3.06 Hz の逆対称振動数と 4.12 Hz の対称振動数が得られた。この 3.06 Hz は大型車の有する固有振動数に近いために大型車と共に振る、逆対称 1 次振動が卓越す

るものと思われる。ところが、斜吊材 C, D および E を追加した補強ローゼ桁形式にすることによって、逆対称振動は 7.20 Hz まで高められ、対称振動数は 3.85 Hz と逆に低くなる。しかし、1 次振動数だけを考えれば、 3.06 Hz から 3.85 Hz に高められたことであり、さらに、逆対称から対称振動へモードの変換が行われたことになる。この 3.85 Hz は空車の大型車や中型車と共に振る可能性はあるが、加振力が小さいので振動は大きくなることは少なく、影響は小さいものと考えられる。

図-9 は式(7)から求めた応答加速度の実効値を示している。実線はローゼ桁の $L/4$ 点での値であり、点線は斜吊材 C, D および E を追加し

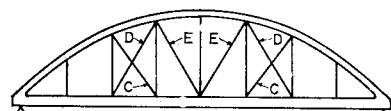


図-7 斜吊材の最適組合せ CDE

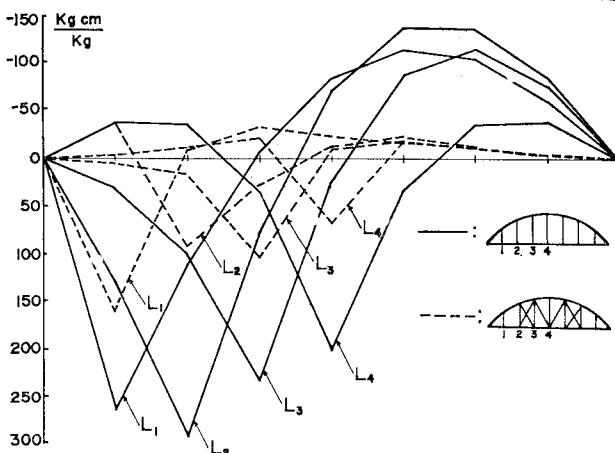


図-8 補剛桁の曲げモーメントの影響線

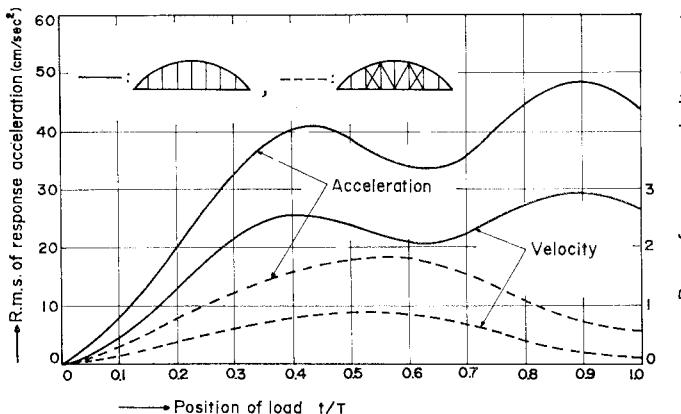


図-9 構造形式と特性値の比較

た補強ローゼ桁形式の $L/2$ 点での値である。実効値の最大値を比較すると減少は顕著であり、応答加速度は $1/2.7$ 程度に減っている。したがって、斜吊材 C, D および E を追加してローゼ桁の構造形式を変更することによって、動的な性状は大きく変化し、静的と同様にニールセン型ローゼ桁形式と同様な特徴^{8), 21), 22)} が確認され、当初の懸念であった逆対称 1 次振動の卓越を拘束することができ、振動を小さくすることが可能であると思われる。

なお、本解析結果によると、斜吊材 A, B および F は C, D および E に比べて効果の少ないことになった。これは、斜吊材 A, B および F は C, D および E に比べてせん断こわさへの寄与が少ないためと考えられる。

(3) 使用性

橋梁の使用性¹¹⁾を評価するため、歩行者への振動刺激として応答速度の実効値を式(6)から求めた。その結果を図-9に示す。実線はローゼ桁の $L/4$ 点での値であり、点線は斜吊材 C, D および E を追加した補強ローゼ桁形式の $L/2$ 点での値である。実効値の最大値を比較すると約 $1/3$ に減少し補強効果は顕著に現れている。さらに、自動車が橋梁に入ってから出るまでの間に歩行者が受けける平均的な振動刺激量（実効値の平均）を式(10)から求めると、ローゼ桁では 2.163 cm/s で、補強ローゼ桁形式では 0.561 cm/s となる。この 2.163 cm/s は文献3)によれば、歩行者の 90% は振動を明らかに感じており、また、40% の人は少し歩きにくいという反応を示すことになる。一方、 0.561 cm/s は 50% の歩行者が振動を少し感じており（50% の人は感じない）、明らかに感じた人は 10% に満たない。このように、少し歩きにくいという反応から振動を感じない、あるいは少し感じる程度まで振動を軽減できることは、

歩行者が受ける心理的影響から使用性を評価するならば、補強ローゼ桁形式にすることによって本モデル橋の使用性は明らかに向上したといえる。

6. あとがき

本論文は、実験計画法のデータ解析法から求められた最適な斜吊材の組合せをローゼ桁橋に追加し、補強することによって振動の軽減を図る方法を試みたものである。また、従来の橋梁の補強方法ではほとんど考慮されていない橋梁の振動が歩行者に与える心理的影響についても

考えた。ローゼ桁橋の振動軽減に関して、著者らは先に実橋の $1/10$ の模型橋から実験計画法によって求めたことがある⁹⁾が、この方法では模型橋を製作するのに多額の費用がかかる。しかし、本論文では、特性値である橋梁の動的応答量を不規則振動解析によって求める機上実験を行うことから、模型橋を製作する必要はない。また本解析による斜吊材の最適な組合せは模型実験から得られた結果⁹⁾と一致している。しかし、本解析によって得られた斜吊材の最適な組合せはあくまでも統計的判断であり、現象を解明する厳密性という点から考えれば、他の分野における実験計画法の適用と同様に、その精度に問題点がある。

実験の計画は各因子を直交配列表にわりつける $1/2$ 実施の直交計画であることから、実験回数は半分ですむ。そして、各因子の処理条件は直交構成であることから、解析が非常に簡単になる。

実験計画法から求めた最適な斜吊材が配置された補強ローゼ桁とローゼ桁形式との静的および動的性状、さらには歩行者側からの使用性についての配置効果を検討した結果、次のような点を指摘することができた。

- (1) 斜吊材を格間にすべて配置する必要がなく、一部の斜吊材だけで振動の軽減が十分期待できる。
- (2) 斜吊材の配置によって、静的にはアーチ弦材および補剛桁ともたわみおよび応力制御として期待でき、特に補剛桁の耐荷能力の増大が可能である。
- (3) 動的には橋梁の固有振動数が高められるとともに、固有振動モードの変換が行われ、走行車両によるローゼ桁橋特有の逆対称 1 次振動の卓越を消去し、振動の軽減が期待できる。
- (4) 振動を受ける歩行者が、少し歩きにくいという反応から、少し感じるか、あるいは感じない程度まで使用性を高めることができること。
- (5) 斜吊材の取り付けは交通を長い期間全面的に遮

断する必要がないことから、重要路線の橋梁でも可能である。

以上のことから、斜吊材による配置効果が認められ、対象としたモデル橋に対しては 1 つの有効な補強方法となる。と同時に、不安のあるまま供用されているローゼ桁橋における一補強方法となり得ることが確認できた。

本論文で得られた斜吊材の最適な処理組合せはすべてのローゼ桁橋にそのまま適用できる結果ではなく、対象としたモデル橋だけに適用できる結果である。しかし、特性値の計算として、単一走行車両による橋梁の動的応答解析をモーダル解析によって求めていることから、橋梁の固有振動数と固有振動モードがわかれれば、ほかのローゼ桁橋にも適用できる方法である。ほかのローゼ桁橋に適用する場合、因子の数を m とすると、そのすべての組合せは 2^m 通りになる。本論文では $m=6$ であるが、格間数が多ければ当然因子の数は多くなり、その組合せは膨大になる。しかし、実験の計画段階において、工学的判断から 3 因子以上、あるいは一部の 2 因子交互作用は存在しないものとすれば、本解析法は各因子のわりつけにおいて、 $1/2$ から $1/4$ 、さらに $1/8$ 実施の直交配列計画を行うことが可能である。したがって、因子の数が多くても工学的判断から特性値に対して重要でないと思われる要因効果を考えないならば、本解析法によれば計算回数を減ずることができ、実験計画法を本研究のような問題に適用できることの有意性が立証できた。

実際の施工に際しては、本解析の計算結果だけから決まるものではない。当然、斜吊材の配置による橋梁の美観も問題になるものと思われる。参考までに、本論文でモデルとした中島大橋の補強工事²³⁾では、本解析の計算結果と橋梁の美観から斜吊材をワーレン状 (A , D および E) に組合せて配置された。そして、補強前と補強後の振動調査から、振動が非常に小さくなるなど、補強効果が顕著に現れた²⁴⁾。

今後、本論文で得られた知見が設計の参考になれば幸いである。

最後に、本稿をまとめるにあたり、終始、助言をいただいた金沢大学工学部の梶川康男講師に深謝の意を表します。また、路面凹凸など、モデル橋の特性調査に協力いただいた金沢大学の城戸隆良技官と金沢工業大学土木工学科・橋梁研究室の学生諸氏に感謝の意を表する。なお、数値計算には金沢工业大学計算機センターの IBM 3031 を使用した。

参考文献

- 1) 梶川・小堀：動的応答から見た歩道橋の使用性に関する

確率論的考察、土木学会論文報告集、第 266 号、pp. 51~61、1977 年 10 月。

- 2) 朝尾・楠・安藤・中村：最新・実験計画法、日科技連、pp. 105~122、1973 年 1 月。
- 3) 小堀・梶川：橋梁振動の人間工学的評価法、土木学会論文報告集、第 230 号、pp. 23~31、1974 年 10 月。
- 4) 田口玄一：新版・実験計画法上、丸善、pp. 513~516、1962 年 10 月。
- 5) 長尾義三：Box-Wilson 法による円弧すべりの計算法—デジタル・コンピューターによる計算一、土木学会誌、pp. 69~77、Vol. 45、1960 年 7 月。
- 6) 橋梁ハンドブック編集委員会編：設計・施工のための橋梁ハンドブック、建設産業調査会、pp. 47~48、1976 年 12 月。
- 7) Page, J. : Dynamic Forces Generated by Vehicles on Bridges, Department of the Environment, Transport and Road Research Laboratory (T.R.R.L.) Report, pp. 1~6, August, 1975.
- 8) 高木・玉川・益田・永井・是松：安芸大橋（ニールセン型ローゼ桁橋）の実験報告、土木学会論文報告集、第 171 号、pp. 1~8、1970 年 5 月。
- 9) 小堀・三上・服部：ローゼ桁橋の振動軽減に関する研究、土木学会第 30 回年次学術講演会講演概要集、I-295, pp. 605~606、1970 年 10 月。
- 10) Raghavarao, D. : Constructions and Combinational Problems in Design of Experiments, John-Wiley, pp. 8~31, 1971.
- 11) Seiden, E. and R. Zemach : On Orthogonal Arrays, The Annals of Mathematical Statistics (A.M.S.), pp. 1355~1360, May, 1965.
- 12) 小堀・梶川：單一動荷重に対する道路橋の振動感覚、土木学会論文報告集、第 248 号、pp. 11~23、1976 年 4 月。
- 13) 吉村・平井：ランガー桁の動的解析、土木学会論文集、第 101 号、pp. 1~14、1964 年 1 月。
- 14) 日野幹雄：スペクトル解析、朝倉書店、pp. 210~224、1978 年 2 月。
- 15) 川井忠彦：マトリックス法振動および応答、培風館、pp. 176~196、1971 年 2 月。
- 16) 石井吾郎：実験計画法の基礎、サイエンス社、pp. 9~40、1972 年 10 月。
- 17) 石井吾郎：実験計画法／配置の理論、培風館、pp. 83~102、1972 年 9 月。
- 18) 中村慶一：技術者のための統計解析、山海堂、pp. 82~100、1970 年 6 月。
- 19) 田口玄一：新版・実験計画法下、丸善、pp. 820~833、1962 年 10 月。
- 20) 成岡・服部・加藤・後藤・上田：骨組構造解析、培風館、pp. 3~42、1971 年 6 月。
- 21) 小堀・三上：既設道路橋の静および動的補強の一方法、橋梁、Vol. 12, pp. 4~12, 1977 年 1 月。
- 22) 小西一郎編：鋼橋設計編 II、丸善、pp. 871~885、1976 年 1 月。
- 23) 関 昭邦：中島大橋補修工事、道路、pp. 55~59、1979 年 6 月。
- 24) 小堀・本田・城戸：中島大橋（ローゼ桁）の補強に関する調査報告、橋梁と基礎、Vol. 13, pp. 16~22、1979 年 9 月。

(1979.7.1・受付)