

準一様流を仮定できる定常3次元地下密度流の 数値解と最適井戸取水について

NUMERICAL ANALYSIS OF QUASI THREE-DIMENSIONAL STEADY
FLOW AND OPTIMAL WELL DISCHARGE IN COASTAL AQUIFERS

上田年比古*・藤野和徳**・平野文昭***・神野健二****
By Toshihiko UEDA, Kazunori FUJINO, Fumiaki HIRANO
and Kenji JINNO

1. まえがき

海岸付近に設置された井戸群による地下淡水の過剰取水によって、地下塩水くさびが陸側に極度に侵入して、海岸地下水の塩水障害を起こし、しばしば問題となっている。したがって、海岸付近の広域地下水領域について井戸群の取水等による塩水くさびの侵入状況を求める解析手法の確立および海岸地下水の水質保全と効果的地下淡水取水からみた合理的井戸取水計画の決定手法の確立が要請される。

これまで、地下密度流に関する研究は、断面2次元についての研究が多く、これには準一様流の仮定のもとでの定常状態、非定常状態の解析^{1)~4)}、複素ボテンシャル理論による定常状態の解析^{5)~7)}などがあり、また準一様流の仮定のもとでの定常3次元について井戸取水による軸対称流の解⁸⁾、海岸に1個の井戸がある断面対称流の理論解⁹⁾などがあげられる。しかし、地下密度流の広域を対象にした一般的3次元についての研究は、あまり見受けられないようである。次に、井戸群の最適取水の研究については、ある領域に整列された各井戸の揚水量（または注入量）に制約を与えて、井戸水位の合計を最大にする算定手法¹⁰⁾、井戸群の取水量、水位に与えた制約条件のもとでの最大取水量の算定手法¹¹⁾、与えられた総揚水量のもとで地盤沈下の合計量を最小にする取水量の算定手法の研究¹²⁾などがあげられる。しかし、地下密度流の場での最適井戸取水については、いまだ研究の例がないようである。以上のような状況で、現在海岸地域の井戸群による淡水取水は、経験的に取水量を決め、塩

水障害が発生すると取水量を減らすか取水を停止するかして、これに対応しているといつてもよい状態である。

本報は、水平不透水層上の不圧領域および被圧水平帶水層領域で、透水係数は場所的に変化する領域において、準一様流が仮定できる広域海岸地下水の定常状態を対象にしたもので、内容は2つに大別される。第1に上記の広域海岸地下水の定常時の数値解法を述べ、その適用例として透水係数一定の不圧領域について、くさび先端位置の数値解と実験結果を比較した。第2に塩害防止上から設定される塩水くさびの侵入限界線と地下水の異常低下の防止上から設定される井戸の低限界水位を超えない条件のもとで、各井戸の取水量の合計を最大にする状態を最適取水と定義して、この場合の各井戸の取水量を線形計画法から求める計算手法を提示し、その適用例を簡単なモデルについて示したものである。

2. 準一様流を仮定できる定常3次元地下密度流の数値解

(1) 基礎方程式

図-1のような一定水位の海岸の境界 B_1 (水位 H_s) と陸側の境界 B_2 (水位 H_0) および不透水壁 B_{III} , B_{IV} で囲まれた不圧あるいは被圧の海岸地下水領域について、塩水くさびの先端より陸側（塩水くさびの非侵入域）に井戸がある場合を考え、次の仮定のもとに解析することにする。① 流れはダルシー則に従い、取り扱った不圧領域は、水平な不透水層が下部に存在するものとし、また被圧領域は、水平な不透水層が上部と下部に存在するものとする。なお、透水係数は垂直方向には一定であるが、水平方向には場所的変化があるものとする。② 垂直方向の流速は、水平方向の流速に比べて小さいとしてこれを無視する。すなわち準一様流の仮定が成り立つも

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部水工土木学教室

** 正会員 工修 九州大学助手 工学部水工土木学教室

*** 学生会員 九州大学大学院水工土木学専攻修士課程

**** 正会員 工博 九州大学助教授 工学部水工土木学教室

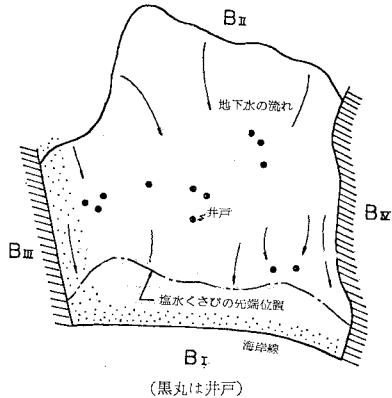
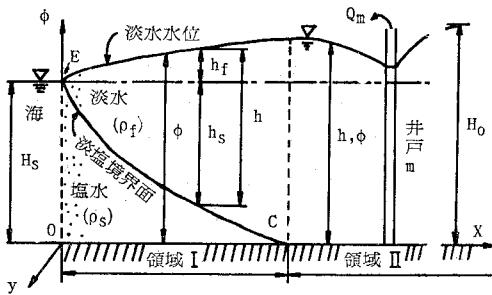
図-1 地下密度流領域モデル ($B_I \sim B_{IV}$ は境界)

図-2 不圧領域地下密度流断面図

のとする。③ 淡塩境界面上の淡水と塩水の拡散混合は小さいとしてこれを無視する。

a) 不圧地下水の場合

図-2 のように、直交する x, y 軸を水平な不透水層面にとり、垂直上向きに水位の軸をとる。 h を淡水流动層の厚さ、 H_s を不透水層から海面までの高さ、 h_s を淡塩境界面から海面までの高さ、 h_f を海面から淡水地下水面までの高さ、 ϕ を不透水層からとった淡水水頭、 H_0 を、不透水層からとった領域上端境界の淡水水位(一定)、 ρ_f, ρ_s を淡水および塩水の密度、 k を透水係数とすれば、 x, y 方向の単位幅当たりの流量 q_x, q_y は、

$$q_x = -kh(\partial\phi/\partial x), \quad q_y = -kh(\partial\phi/\partial y) \quad \dots(1)$$

塩水くさびの侵入域の領域Ⅰでは、

$$\begin{aligned} h &= h_f \{\rho_s / (\rho_s - \rho_f)\} \\ &= \{\rho_s / (\rho_s - \rho_f)\} \phi - \{\rho_s / (\rho_s - \rho_f)\} H_s \end{aligned} \quad \dots(2)$$

塩水くさびの非侵入域の領域Ⅱでは、

$$h = \phi \quad \dots(3)$$

したがって、 h は領域Ⅰ、領域Ⅱとも次のような ϕ の同じ1次式で表される⁹⁾。

$$h = \alpha\phi + \beta \quad \dots(4)$$

ここに、領域Ⅰでは、

$$\alpha = \rho_s / (\rho_s - \rho_f), \quad \beta = -\{\rho_s / (\rho_s - \rho_f)\} H_s \quad \dots(5)$$

領域Ⅱでは、

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0 \quad \dots(5)$$

である。式(4)を式(1)に代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -k \cdot \partial [(\alpha/2) \{\phi + (\beta/\alpha)\}^2] / \partial x \\ q_y &= -k \cdot \partial [(\alpha/2) \{\phi + (\beta/\alpha)\}^2] / \partial y \end{aligned} \right\} \quad \dots(6)$$

いま、

$$\phi = (\alpha/2) \{\phi + (\beta/\alpha)\}^2 + C \quad (C \text{ は定数}) \quad \dots(7)$$

とすれば、式(6)は、

$$q_x = -k(\partial\phi/\partial x), \quad q_y = -k(\partial\phi/\partial y) \quad \dots(8)$$

したがって、 q_x, q_y に関する連続の式と式(8)より次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\partial [k\partial\phi/\partial x] / \partial x + \partial [k\partial\phi/\partial y] / \partial y \\ &= \sum_m Q_m \cdot \delta(x - x_m) \cdot \delta(y - y_m) \end{aligned} \quad \dots(9)$$

ここに、 x_m, y_m は井戸 m の x, y 座標、 Q_m は井戸 m の取水量、 $\delta(x), \delta(y)$ はデルタ関数である。すなわち、ここで与えられる ϕ は、塩水くさびの侵入域と非侵入域からなる全浸透領域に対する境界条件を満足し、式(9)を満足する ϕ として得られるもので、くさびの侵入域、非侵入域の区別なく、全浸透領域にわたって共通の値である。さて、先に O.D.L. Strack⁹⁾ が定義したくさびの侵入域と非侵入域の両域にわたって共通に用いられる流量ポテンシャルは、その誘導過程で透水係数 k を一定としている。その流量ポテンシャルと、ここで新たに定義する式(7)のポテンシャル ϕ とを比較すると、 ϕ には k が含まれていない点が相違しているが、この ϕ を用いることにより、透水係数が場所的に変化する領域にも対処できるようになったものと考える。

次に ϕ は、その場所的微分値が式(8)のように、流量そのものを示してはいないが、流量に対応した値であることから、ここでは ϕ を Strack と同様に一応流量ポテンシャルとよんでおくことにする。

領域Ⅰの流量ポテンシャルは、式(5), (7) より、

$$\phi_1 = (1/2) \{\rho_s / (\rho_s - \rho_f)\} (\phi - H_s)^2 + C_1 \quad \dots(10)$$

領域Ⅱの流量ポテンシャルは、

$$\phi_2 = (1/2) \phi^2 + C_2 \quad \dots(11)$$

ここに、 C_1, C_2 はそれぞれ領域Ⅰおよび領域Ⅱでの定数である。いま、 ϕ_1, ϕ_2 の値をその境界位置すなわち塩水くさびの先端位置 C の断面で接続させるため塩水くさびの先端位置の淡水水頭 ϕ_c に関する式

$$\phi_c = (\rho_s / \rho_f) H_s \quad \dots(12)$$

を式(10), (11)の ϕ に入れ、両者が等しいとおけば、 $C_1 - C_2 = (1/2) H_s^2 (\rho_s / \rho_f)$ となる。一般に、ポテンシャルは相対的大きさが問題となることから、 C_1 または C_2 の一方にある一定値を与えるても解的一般性を失うことはない。したがって、いま $C_1 = 0$ とすれば、 $C_2 = -(1/2) H_s^2 (\rho_s / \rho_f)$ が得られる。

こうすれば、領域Ⅰの流量ポテンシャルは、

$$\phi_1 = (1/2) \{\rho_s / (\rho_s - \rho_f)\} (\phi - H_s)^2 \quad \dots(13)$$

領域Ⅱの流量ポテンシャルは、

からなるべく正三角形に近くなるようにして分割を行う。ついで、各節点の座標と各三角形要素に対して透水係数 k の値を設定する。

こうして領域内の各節点の流量ポテンシャルを次のように求める¹¹⁾。基礎式(9)に対応する汎関数は、

$$\begin{aligned} z(\phi) = & (1/2) \int \int k \{ \partial \phi / \partial x \}^2 + \{ \partial \phi / \partial y \}^2 dx dy \\ & + \int \int \sum_m Q_m \cdot \delta(x - x_m) \cdot \delta(y - y_m) \phi dx dy \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (28)$$

いま、三角形要素 e 内で ϕ の 1 次分布を仮定し、 ϕ を各節点の ϕ_i と節点座標で表して、式(28)の ϕ に代入して後、 ϕ_i についての変分 $\partial z / \partial \phi_i$ をとり 0 とおけば、節点の流量ポテンシャル ϕ_i を未知数とする連立方程式が得られる。これをマトリックス表示すると次のようである。

$$A\phi + Q = 0 \dots \dots \dots (29)$$

ここに、 A は各三角形要素に対する透水係数と節点座標からなる係数行列、 ϕ は節点の流量ポテンシャルベクトル、 Q は井戸の取水量ベクトルである。

したがって、境界条件式(25)～(27)のもとに、式(29)を解き、各節点の流量ポテンシャル ϕ を求めれば、以後は前述のように、これらの ϕ からくさび先端の ϕ に関する条件式(15)に一致する位置を按分比例で挿入してゆき、塩水くさびの先端位置が求められる。次に、これから領域をくさびの侵入域と非侵入域に分けて、それぞれの淡水水頭 ϕ を式(13)および式(14)から求めることができる。これによって、準一様流を仮定できる 3 次元定常地下密度流の数値解が得られる。この計算手法は、くさび先端位置の決定に試算が含まれず、また先端位置の決定後の淡水水頭の算定もすでに計算されている各節点の流量ポテンシャル ϕ からただちに算定されるもので、定常地下密度流の数値解をかなり簡易化し得たものといえよう。

(4) 数値解と実験結果との比較

a) 実験装置

実験水槽は、図-4 のような長さ 160 cm、幅 100 cm、高さ 40 cm で、側面および底面が透明の塩化ビニール樹脂製の直方体水槽である。長さ方向の両端をヘッドタンクとし、それぞれ淡水と塩水を満たし、浸透層との界面に金網を設け、浸透層には平均粒径 0.5 mm の砂を均一に詰めている。塩水側ヘッドタンクのオーバーフローは境界に沿って 3 個設置して、砂層の上層から浸透流出していく淡水をなるべく速やかに排出させている。なお塩水は色素ウラニン（フルオレセインナトリウム）で着色し、塩水くさびの先端位置と形状が側面と底面から観測できるようにしている。この実験浸透領域の平面図

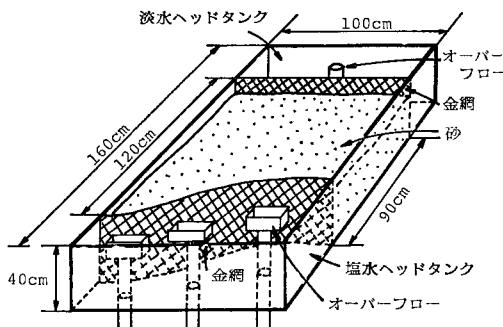


図-4 地下密度流実験装置

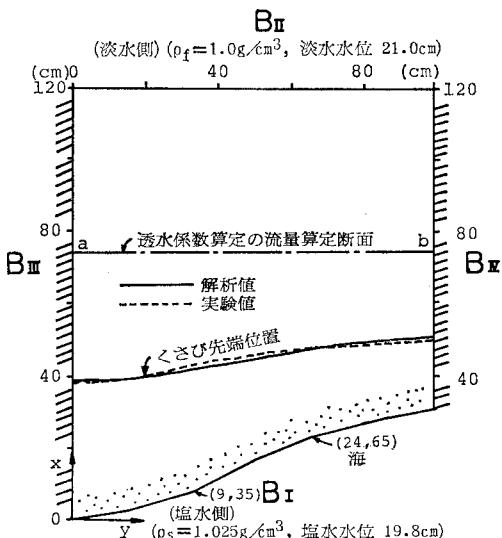


図-5 解析領域と定常時の塩水くさび先端位置
(透水係数 $k=0.2$ cm/s)

を図-5 に示している。ここでは座標原点と座標軸 x 、 y を図のようにとり、また下流塩水側の境界線 B_1 には任意の曲線を用いている。なお図には、曲線上の適当な 2 点に座標値を示している。

b) 透水係数の決定

図-4 の水槽両端のヘッドタンクにいずれも淡水を満たしてこれに水頭差 ΔH をつけ、定常状態を形成した後の全流量 q_T を測定した。一方、この実験での境界条件を用い、浸透層の透水係数を一定として、有限要素法により数値解を行い領域内の各節点の水頭を算出し、これから流れ方向に直角な断面(図-5 中の ab 断面)での水頭勾配 dh/dx を求めた。こうして先に実験で求めた全流量 q_T とから、次の式

$$k = q_T / \left\{ - \int_a^b h (dh/dx) dy \right\} \dots \dots \dots (30)$$

を用いて透水係数を算出した。水頭差 ΔH を変えた実験結果を表-1 に示している。これより透水係数として、その平均値 $k=0.2$ cm/s を以後の解析では用いる

こととする。

c) 実験と解析結果
の比較

定常地下密度流の実験は、図-5に示す領域で、淡水密度 $\rho_f = 1.00 \text{ g/cm}^3$ 、塩水密度 $\rho_s = 1.025 \text{ g/cm}^3$ の淡水、塩水を用い、淡水側ヘッドタンク（図-5のB_{II}）を水位 21.0 cm、塩水側ヘッドタンク（図-5のB_I）を水位 19.8 cm の一定値に保ち、塩水くさびの先端の侵入が停止したところ（ほぼ3時間後）を定常状態のくさび先端位置とした。

図-5に定常状態の塩水くさび先端位置の実験結果と本法による計算結果を示しているが両者はよい一致を示しているといえる。以上の適用例は井戸がない場合（式(29)の $Q=0$ としたもの）であるが、井戸がある場合の計算例としては後述の図-12にその結果を示している。

以上によって、準一様流を仮定できる任意境界の定常3次元地下密度流の数値解の方法を提示し得たものと考える。

3. 井戸群の最適取水の解析

塩水くさびの非侵入域に設置された井戸群による取水にあたって、塩水くさびの先端が塩害防止の面からあらかじめ設定されたくさび先端の侵入限界線（制限線）（以後くさび侵入限界線とよぶことにする）および地下水の異常低下による地盤沈下などの防止の面から設定される各井戸の低限界水位の制限を超えないという条件のもとに、各井戸の取水量の総和が最大になる状態を最適取水として、この状態の各井戸の取水量を有限要素法と線形計画法によって求める算定法を述べよう。

(1) 節点の配置と領域の分割

領域内の三角形要素による分割は2.(3)で述べたようにして行うが、ここではさらに、最適取水問題における制約条件を取水井戸と侵入限界線に与える必要上、取水井戸とともに、侵入限界線上にも節点をとる。

次に、節点番号を計算の便宜上次のようにつける。まず取水井戸節点（総数 M ）に節点番号 1, 2, …, M を、ついで、くさび侵入限界線上の節点（以後くさび侵入限界節点とする）に $M+1, M+2, \dots, N$ の通し番号をつけ、次に、 $N+1, N+2, \dots$ の番号を取水井戸とくさび侵入限界節点および境界節点を除いた領域内任意節点（以後、単に領域内任意節点とよぶことにする）につけて、残り最後の番号を境界節点に順につける。

表-1 透水係数の決定

$\Delta H (\text{cm})$	$q_T (\text{cm}^3/\text{s})$	$k (\text{cm}/\text{s})$
8.6	35.43	0.173
5.3	23.70	0.202

(2) 最適取水の解

領域内に配置された各節点の流量ポテンシャル Φ と、境界条件、井戸取水量 Q などの関係式は式(29)で示される。いま、流量ポテンシャル Φ を分割して、 Φ_1 を井戸節点とくさび侵入限界節点、 Φ_2 を領域内任意節点、 Φ_3 を境界節点に対する流量ポテンシャルとすれば、領域内任意節点および境界節点での取水量は 0 であるから、式(29)は次のような小行列に分割できる。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (31)$$

ここで、くさび侵入限界節点には実際には井戸は存在しないが、線形計画問題の式表示の便宜上から、この節点に井戸を仮想し、この流量は後で 0 とおいて仮想の井戸を除去することにする（後述式(43)の $Q_s=0$ のように）。式(31)の第1行より、

$$A_{11}\Phi_1 + A_{12}\Phi_2 + A_{13}\Phi_3 = -Q_1 \quad \dots \quad (32)$$

また、第2行より、

$$A_{21}\Phi_1 + A_{22}\Phi_2 + A_{23}\Phi_3 = 0 \quad \dots \quad (33)$$

これを式(32)に代入すれば、

$$Q_1 = B\Phi_1 + C \quad \dots \quad (34)$$

ここに、

$$B = -[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}] \quad \dots \quad (35)$$

$$C = [A_{12}A_{22}^{-1}A_{23} - A_{13}\Phi_3] \quad \dots \quad (35)$$

この係数行列 B および列ベクトル C は、対象領域の境界条件と井戸の配置すなわち x, y 座標値および各三角形要素に与えられた透水係数の関数であり、取水に関する領域固有の特性量である。

いま、取水井戸節点に添字 w 、くさび侵入限界節点に添字 s をつけると、

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \Phi_w \\ \Phi_s \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} Q_w \\ Q_s \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_w \\ C_s \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{WW} & B_{WS} \\ B_{SW} & B_{SS} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (36)$$

したがって、式(34)は、

$$\begin{bmatrix} Q_w \\ Q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{WW} & B_{WS} \\ B_{SW} & B_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_w \\ \Phi_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_w \\ C_s \end{bmatrix} \quad \dots \quad (37)$$

次に Φ_w^* および Φ_s^* をそれぞれ取水井戸節点およびくさび侵入限界節点の流量ポテンシャルの低限界値（揚水障害などから、この値より下がってはいけない値）とし、

$$\Phi_w' = \Phi_w - \Phi_w^*, \quad \Phi_s' = \Phi_s - \Phi_s^* \quad \dots \quad (38)$$

とすれば、式(37)は、

$$\begin{bmatrix} Q_w \\ Q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{WW} & B_{WS} \\ B_{SW} & B_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_w' + \Phi_w^* \\ \Phi_s' + \Phi_s^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_w \\ C_s \end{bmatrix} \quad \dots \quad (39)$$

いま、

$$E = \begin{bmatrix} E_W \\ E_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{WW} & B_{WS} \\ B_{SW} & B_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_W^* \\ \Phi_S^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_W \\ C_S \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (40)$$

とすれば、

$$\begin{bmatrix} Q_W \\ Q_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{WW} & B_{WS} \\ B_{SW} & B_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{W'} \\ \Phi_{S'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_W \\ E_S \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots \quad (41)$$

したがって、総取水量を最大にする最適取水問題は、井戸の取水量を Q_m (m は $1 \sim M$, M は井戸総数) とすれば、次のような線形計画の問題、すなわち、

$$Q_W = B_{WW}\Phi_{W'} + B_{WS}\Phi_{S'} + E_W \geq 0 \dots\dots(42)$$

$$Q_S = B_{SW}\Phi_{W'} + B_{SS}\Phi_{S'} + E_S = 0 \dots \dots \dots (43)$$

$$\Phi_{W'} \geq 0 \quad \dots \dots \dots \quad (44)$$

の条件のもとに目的関数

を最大とする解を求める問題になる。いま、 m, l をいずれも井戸およびくさび侵入限界節点の番号（総数 N 、うち井戸総数は M ）とし、式（42）～（45）において行列 \mathbf{B} の成分を B_{ml} 、列ベクトル Φ'_W および Φ'_S の成分を ϕ'_l 、 \mathbf{E}_W および \mathbf{E}_S の成分を E_m, Q_W および Q_S の成分を Q_m とすれば、式（42）、（43）の始めの等式は成分表示すると一般に、

$$Q_m = \sum_{l=1}^N (B_{ml} \phi_l') + E_m \quad \dots \dots \dots \quad (47)$$

となり、したがって、式(42)～(45)は ψ'_1 の連立1次不等式となる。また、式(47)の Q_m を用いれば、式(46)は、

二三

すなわち、この問題は井戸およびくさび侵入限界節点の流量ポテンシャル ϕ'_1 に関する連立 1 次不等式の制約条件式 (42)～(45) のもとに、これら ϕ'_1 に関する 1 次形の式 (48) で与えられる f を最大にする ϕ'_1 を求めることになり、これはシンプレックス法¹³⁾により算定できる。この計算のフローチャートを 図-6 に示している。こうして、 ϕ'_1 が求まれば、式 (47) より最適状態の井戸取水量 Q_m を求めることができ、また、この ϕ'_1 を式 (33) の Φ_1 に代入すれば Φ_2 が求められ、したがって最適取水状態における定常 3 次元地下密度流の流量

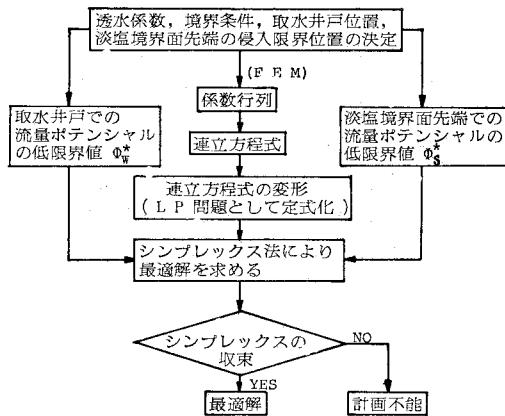


図-6 最適取水算定のフローチャート

ポテンシャルが求められ、問題の解が得られる。

(3) Φ_S^* , Φ_W^* について

さて上述の計算にあたっては、流量ボテンシャルの低限界値 Φ_s^* , Φ_w^* の値を設定しなければならない。 Φ_s^* については次のようにある。塩水くさびの先端位置の流量ボテンシャルは式(15)であるから、くさび侵入限界節点では式(15)の値以上の流量ボテンシャルをもてば、塩水くさびはこの節点を超えて侵入することはないとえる。したがって、 Φ_s^* としては式(15)の値を与えればよい。次に Φ_w^* の値については、一般に井戸水位をあまり低下させるとその付近の地盤沈下あるいは海岸付近では塩水の侵入をきたすことから、この面からの制約が生ずる。ここでは塩水侵入の制約はすでに Φ_s^* で与えられているので、地盤沈下の面からの制約のみを考えればよい。たとえば、地盤沈下量 db' は、 dh を水頭の低下量、 b' を沈下地盤の層厚、 m_v を地盤の圧縮係数、 r_w を水の単位体積重量とすれば、

で示されている¹⁴⁾。したがって、これを参考として井戸の水位低下量の制約を考えて井戸の淡水水位 ϕ を与えればよく、この値 ϕ^* によって式(14)から Φ_{W^*} が与えられる。このように Φ_{S^*} , Φ_{W^*} を与えると前述の算定手法によりくさび侵入限界線と井戸の低限界水位の両者から制約を受けた最適値すなわち両者のうち、いずれか厳しい条件によって規制を受けた最適取水量が得られることになる。

(4) くさび先端の安定性の検討

海岸付近に 1 個の井戸がある場合、一般にその流れの平面図および断面図は 図-7(a), (b) のようになり、これは塩水くさびの侵入域でやや相違はあるが、ほぼ平行流中に 1 個の sink がある場合の流れと類似のものと

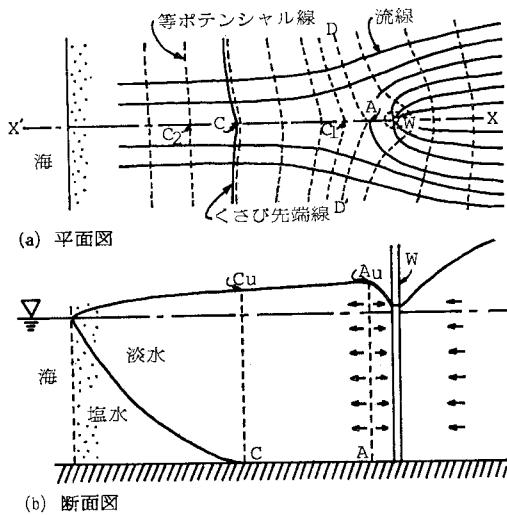


図-7 海岸付近に井戸がある場合の流れ（一般図）

なる。いま、図-7(a)に示すように、井戸Wを通る淡水地下水の主流に沿う断面XX'上に生ずるよどみ点すなわち図-7(b)の井戸への流れと海への流れとの分岐点の不透水層面上の位置をA点、その鉛直線上の水面の位置をAu点(WX'線に沿う淡水地下水位はA点で最高となる)とし、XX'線上の塩水くさび先端位置をC点、C点を通る鉛直線上の水面位置をCu点とする。いま、井戸の揚水量を増すと、A点は海側に進むとともに、C点は井戸側に進み、ついには図-8のようにA点とC点とが一致する。このときさらに揚水量を増し、C点がA点を突き抜ける事態が発生すると、C点は一気に井戸まで侵入してしまう。すなわち、C点がA点に接近した場合はくさび先端は不安定な状態にあるといえる。これに反し、C点がA点より海側に、十分の距離を保っている場合は、井戸の揚水量が少しくらい変動しても、C点がA点を突き抜けるまでにはいたらなく、安定したくさび先端の状態を保持すると考えられる。したがって、前述の最適取水状態が算定された場合、各井戸のよどみ点Aの位置を吟味して、これがくさび先端位置に接近している場合には、くさび先端は不安定な状態にあることから、この場合はその井戸を陸

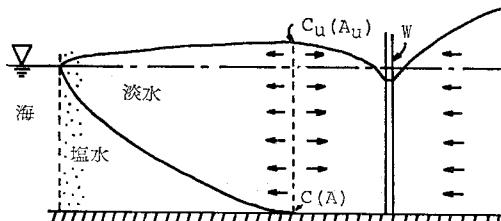


図-8 海岸付近に井戸がある場合の流れ（よどみ点Aとくさび先端位置Cが一致した場合）

側に移して再度最適取水量の計算をやり直すか、あるいはその井戸の取水量を、算出された最適値より減少させて再度、地下水位の計算を行いA点よりC点が海側に十分の距離を保っていることを確認しなければならないと考えられる。なお、上記の目的から考えて、CとAとの平面図上の位置関係は概略がわかれればよく、したがって、よどみ点Aの位置はそれほど高い精度で求める必要はないので、これまで述べた方法で算定された各節点の水位から図-7(b)に示すような淡水位の断面図を描いて、その最高点を求めれば、A点の概略の位置が推定できよう。

次に図-7(a)のように等ポテンシャル線の形状は、よどみ点Aを通る線ではDAD'線のようにA点で凸形に尖った形状を示し、A点から下流側に離れるにつれ、C₁、C₂を通る線のように、凸形は次第に消えてフラットな形状になってゆく。したがって、最適取水の計算で得られたくさび先端の平面图形（式(12)で示される1つの等ポテンシャル線に相当する）が、図-7(a)のC₁線のように井戸に向かってかなり凸形の形状をなしていれば、その凸形の先端の位置は、よどみ点にかなり近いみなされ、したがってCとAが接近していることになり、注意する必要があるといえよう。

(5) 適用例

前章の適用例で用いた図-5の領域について（境界条件および k 、 ρ_f 、 ρ_s は図-5に記載の値を用いる）、塩水くさび非侵入域に井戸を3個と2個設置した場合の最適取水問題を解いてみよう。いま、塩水くさび先端の侵入限界線を、境界B_{II}に平行で、 $x=70\text{ cm}$ の位置の直線とする。また、 Φ_{s*} 、 Φ_{w*} の値については、海岸に近い井戸では一般に井戸水位に課せられる低限界水位の制約を受ける前に、くさび侵入限界線からの制約を先に受けて井戸水位が規制されることが普通であり、ここではくさび侵入限界線による制約に着目することを目的にして、井戸水位の低限界水位としては $\phi^*=0$ をとった。すなわち、式(14)から $\Phi_{w*}=-(1/2)H_s^2(\rho_s/\rho_f)=-200.92\text{ cm}^2$ を与えることにした。また Φ_{s*} は前述のように式(15)の値 $\Phi_{s*}=(1/2)H_s^2(\rho_s/\rho_f)\{(\rho_s-\rho_f)/\rho_f\}=5.023\text{ cm}^2$ を与えた。

a) 取水井戸3個の例

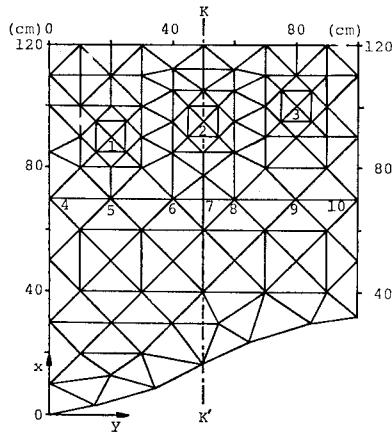
井戸が図-9の1~3の位置にある場合を考える。まず領域を図のように三角形要素に分割し（三角形要素数171個、節点数100個）、井戸節点（番号1~3）とくさび侵入限界節点（番号4~10）を定め、ついで順を追って領域内の節点に番号をつけ、最後に境界節点に番号をつける。各節点の座標、境界条件から算定された式(42)~(49)における制約条件と目的関数の係数行列 B

表-2 B および E 表 (図-9 に対するもの)(単位: cm^3/s)

m	l	$B (B_{ml})$										$E (E_m)$
		井戸節点			くさび侵入限界節点							
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
井戸節点	1	-1.989	0.200	0.012	0.253	0.547	0.220	0.040	0.021	0.007	0.001	75.223
	2	0.200	-2.063	0.200	0.013	0.082	0.199	0.203	0.205	0.110	0.018	70.904
	3	0.012	0.200	-1.995	0.001	0.005	0.018	0.033	0.144	0.312	0.178	76.642
くさび侵入 限界節点	4	0.253	0.013	0.001	-1.285	0.650	0.077	0.016	0.011	0.005	0.001	-10.884
	5	0.547	0.082	0.005	0.650	-2.534	0.623	0.075	0.049	0.018	0.003	-26.032
	6	0.220	0.199	0.018	0.077	0.623	-3.045	1.276	0.198	0.048	0.008	-17.989
	7	0.040	0.203	0.033	0.016	0.075	1.276	-3.264	1.274	0.074	0.012	-11.415
	8	0.021	0.205	0.144	0.011	0.049	0.198	1.274	-3.062	0.669	0.064	-15.311
	9	0.007	0.110	0.312	0.005	0.018	0.048	0.074	0.669	-2.589	0.724	-17.692
	10	0.001	0.018	0.178	0.001	0.003	0.008	0.012	0.064	0.724	-1.337	-8.121

表-3 F および G 表 (図-9 に対するもの)(単位: cm^3/s)

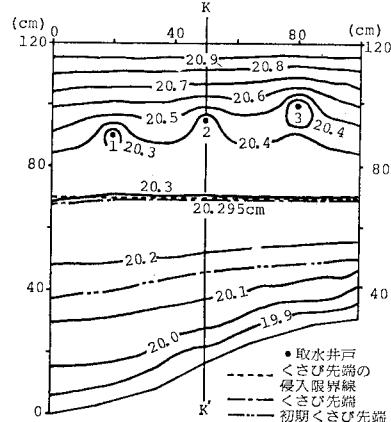
l	井戸節点			くさび侵入限界節点							G
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$F (F_l)$	-1.778	-1.663	-1.784	0.267	0.633	0.437	0.277	0.371	0.429	0.197	222.770



(図中 1~3 は井戸節点, 4~10 はくさび侵入限界節点)

図-9 井戸配置図 (井戸 3 個の場合)

(成分値 B_{ml}) と列ベクトル E (成分値 E_m), F (成分値 F_l) および G を参考のため表-2, 3 に示す。表-2 の B_{ml} は式 (47) から, ϕ'_l (井戸またはくさび侵入限界節点の流量ポテンシャルでその節点の水位に対応するもの) の単位上昇による井戸 m の取水量の増加量を示すものである。 B_{ml} の対角線要素が負であることは、考える井戸 m の取水量が増大すると、その井戸自身の流量ポテンシャルが減少することを示し、また、対角線要素の絶対値がほかに比べて著しく大きいことは、井戸 m の取水量に対して、その井戸自身の流量ポテンシャルの与える影響が、 m 以外の井戸またはくさび侵入限界節点の流量ポテンシャルの与える影響より著しく大きいことを示している。また、表-2 の E_m は式 (47) からすべての ϕ'_l が 0 のときの井戸 m の取水量であり、表-3 の F_l は式 (48), (49) から ϕ'_l の単位の上昇

図-10 最適取水時の地下淡水位等高線
(井戸 3 個の場合)

による取水量の合計 f の増加量で、 G は式 (48), (49) から E_m の合計すなわちすべての ϕ'_l が 0 のときの取水量の合計を示している。

次に、表-2, 3 の値を用いて算定された井戸 1~3 の最適取水量は、 $Q_1=2.39 \text{ cm}^3/\text{s}$, $Q_2=2.14 \text{ cm}^3/\text{s}$, $Q_3=3.19 \text{ cm}^3/\text{s}$, 合計量 $7.72 \text{ cm}^3/\text{s}$ となり、このときの地下淡水位等高線は図-10 のようになる。図-10 をみると、塩水くさびの先端位置 (1 点鎖線) がその侵入限界線 (点線) のほぼ全線にわたって一致していることがわかる。

次に、井戸のよどみ点の位置を推定して、くさび先端の安定度を検討してみよう。くさび先端を示す図-10 の 1 点鎖線をみると、図-7(a) の C_1 線のような井戸に向かって顕著な凸形の图形になっていない、フラットな線をなしているので前述のように、よどみ点はくさ

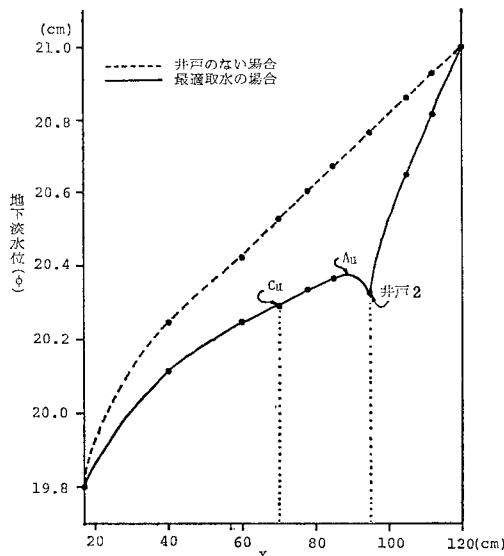
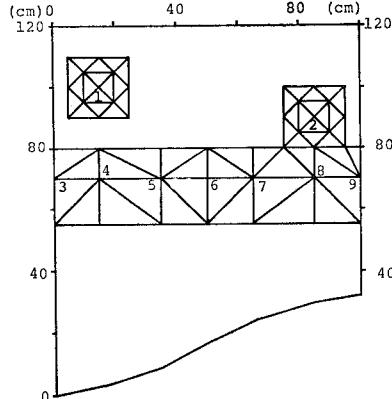


図-11 図-9, 10 の KK' 断面地下淡水位 (A_u , C_u は図-7 (b) に示す点)

び先端より十分陸側に離れていることが想定できるが、いま、たとえば井戸 2 についてこれを吟味してみよう。井戸 2 を通り境界 B_m に平行な断面 KK' (井戸のない場合の淡水のほぼ主流方向) 上の節点について、最適取水の計算で得られた淡水水位を示すと図-11 の実線となる。これよりよどみ点は図の A_u 点と推定され、図-10 に示されるくさび先端位置、図-11 の C_u 点とかなりの水平距離があることが確認され、くさび先端は十分安定であるといえよう。なお、図-11 の点線は図-5 に示す井戸がない場合の数値計算結果における断面 KK' 上の淡水水位を示したもので、参考としてあげている。

次に、比較のため以上と同じ井戸配置で各井戸が最適取水を行っていない場合を計算してみよう。いま、上述の最適取水計算で得られた総取水量 $7.72 \text{ cm}^3/\text{s}$ を同じ



(図中 1, 2 は井戸節点, 3~9 はくさび侵入限界節点)
図-13 井戸配置図 (井戸 2 個の場合)

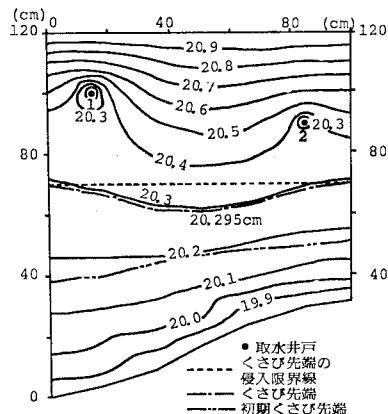


図-14 最適取水時の地下淡水位等高線
(井戸 2 個の場合)

にして、これの 3 分の 1 の $2.573 \text{ cm}^3/\text{s}$ ずつを各井戸の取水量とした場合について前章 2. の方法で算定した結果を図-12 に示している。この場合は、くさび先端はくさび侵入限界線を超えて侵入していて、これから最適取水量算定の効果を知ることができよう。

b) 取水井戸 2 個の例

井戸の配置が図-13 の 1, 2 の場合を考え、同様にして、三角形要素の分割と節点番号をつける (三角形要素数 164 個、節点数 99 個)。これらにより算定された井戸 1, 2 の最適取水量は、 $Q_1=4.72 \text{ cm}^3/\text{s}$, $Q_2=2.39 \text{ cm}^3/\text{s}$ 、合計量 $7.11 \text{ cm}^3/\text{s}$ となり、地下淡水位等高線は図-14 となる。この図から、井戸個数が少なくなると、塩水くさび先端の位置がくさび侵入限界線に到達していない部分がかなり生ずることがわかる。

4. むすび

本報は海岸付近の水平不透水層上の不圧浸透領域および上下を水平な不透水層ではさまれた被圧浸透領域で、

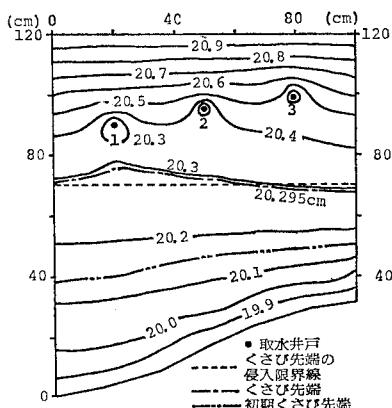


図-12 等取水量時の地下淡水位等高線
($Q_1=Q_2=Q_s=2.573 \text{ cm}^3/\text{s}$)

透水係数は場所的に変化するものとして、淡塩境界面の塩分拡散を無視でき、準一様流を仮定できる定常3次元地下密度流について、その数値解法を提示し、ついで海岸付近に設置された井戸群の最適取水の算定方法を述べたものである。内容を要約すると次のようである。

(1) 提示した数値解は、O.D.L. Strack が定義した塩水くさびの侵入域と非侵入域の両域にわたって共通に用いられる流量ポテンシャルの誘導過程を参考にして、新たに、透水係数が場所的に変化する領域にも適用できるポテンシャル ϕ (同様に流量ポテンシャルとよんでおく) を導入し、これに関するラプラスの式を有限要素法で解き、各節点の ϕ を求める。ついでこれらの ϕ とくさび先端の ϕ の条件から、くさび先端位置を決定し、さらに領域内の水頭分布を算定する方法である。なお、くさび先端位置の本法による算定結果を室内浸透実験結果と比べてよく一致することを確認した。この計算手法は、くさび先端位置の決定に試算が含まれず、定常地下密度流の数値解析をかなり簡易化し得たものといえる。

(2) 最適取水では、塩水くさびの非侵入域に設置された井戸群の取水にあたって、塩害防止上から設定される塩水くさびの侵入限界線と地下水の異常低下の防止上から設定される井戸の低限界水位とを超えない範囲内で、各井戸の淡水取水量の総和が最大になる状態を最適取水と定義して、この場合の各井戸の取水量を、上述の流量ポテンシャルを用いて、有限要素法と線形計画法から求める計算手法を提示し、その適用例として不圧領域で井戸が3個と2個の場合の計算結果を示した。なお、算定された最適取水状態において、くさび先端位置と取水井戸のよどみ点(平行流中に1個の揚水井戸がある場合の流れで、平行流の下流方向と井戸方向に流れが分岐する点)とが接近する場合は、塩水くさびの先端は取水量の比較的小量の増加によりよどみ点を容易に突き抜ける不安定な状態となるので、その井戸は海岸より遠ざかるか、あるいは最適取水の計算で得られた取水量を減じて、再検討する必要があることを述べている。また、揚水障害からみたくさび先端の侵入限界位置については今後の十分な検討が必要と考えられる。

なお、適用例は主として、不圧領域について行ったが、本文でも述べているように被圧領域についても同様に算定できる。また、最適の井戸配置については今後検討してゆきたいと考えている。

参考文献

- 1) Rumer, R.R. and D.R.F. Harleman : Introduced salt-water wedge in porous media, Proc. of A.S.C.E., Vol. 89, No. HY 6, pp. 194~220, November, 1963.
- 2) Tamai, N. and S. Shima : Salt-water wedge in unconfined coastal aquifers, 土木学会論文集, No. 139, pp. 31~38, 1967年3月.
- 3) Bear, J. and G. Dagan : Moving interface in coastal aquifers, Proc. of A.S.C.E., Vol. 90, No. HY 4, pp. 193~216, July, 1967.
- 4) 川谷 健：海岸帶水層内の地下水位と淡塩界面に関する数値解析, 土木学会論文報告集, No. 238, pp. 89~98, 1975年6月.
- 5) Bear, J. and G. Dagan : The use of the hodograph method for ground water investigations, Technion, Haifa, Dept. of Civil Eng., 1962.
- 6) 上田年比古・杉尾 哲：晴きよからの淡水注入による淡塩界面の解析, 土木学会論文報告集, 第225号, pp. 43~52, 1974年5月.
- 7) 崎山・青柳・阿部・細川：河口貯水池下部地層への淡水注入による塩水排除について, 土木学会論文報告集, 第268号, pp. 75~90, 1977年12月.
- 8) Iwasa, Y. and H. Takeuchi : Control of sea water level in coastal porous media by means of double pumping, Proc. of the 13th Congr. of I.A.H.R., pp. 391~400, 1969.
- 9) Strack, O.D.L. : A Single-Potential Solution for Regional Interface Problems in Coastal Aquifers, Water Resour. Res., 12(6), pp. 1165~1174, 1976.
- 10) Aguado, E. and I. Remson : Ground-Water Hydraulics in Aquifer Management, Proc. of A.S.C.E., Vol. 100, No. HY 1, pp. 103~118, January, 1974.
- 11) 上田・神野・長野：広領域地下水からの最適取水について, 土木学会論文報告集, 第283号, pp. 33~43, 1979年3月.
- 12) 佐藤邦明・渡辺邦夫：地下水の適正揚水システム化に関する研究, 水資源に関するシンポジウム前刷集, pp. 429~434, 1977.
- 13) たとえば、石井吾郎：数理計画法入門, サイエンス社, 1976.
- 14) 水収支研究グループ, 柴崎達雄編：地下水盆の管理, 東海大学出版会, pp. 47~75, 1976.

(1979.9.18・受付)