

流量時系列のみによる流出解析について*

ANALYSIS OF RUNOFF FROM TIME SERIES OF
DAILY DISCHARGE

日野 幹 雄**・長谷部 正 彦***

By Mikio HINO and Masahiko HASEBE

1. ま え が き

本論文は、日単位の流量時系列のみを用いて、流域の流出特性の推定、降雨時系列の逆推定、および降雨の流出成分分離則の推定を行う一方法を提案するものである。これは、水文現象における逆探問題 (I.P.: Inverse Problem) である。

従来の流出解析のほとんどは、入力と出力 (すなわち降雨量と流出量) の両方の資料を利用して、システム特性 (単位図, 流出核等) を求める D.P. (Direct Problem) で、一般には同定問題 (Identification) とよばれる。ところで降雨の流出成分の分離則の推定は、システムの内部構造の情報を部分的に含む地球化学的水文資料 (たとえば、河川に溶出する鉱物イオン Na^+ , Ca^+ 等) が利用できれば可能である。これに反し、システムの内部構造の情報を直接には含まない。いわば丸められた出力情報である流出量だけから表面流出, 中間流出および地下水流出の応答関数, 核関数等のサブシステムの特性的のほか, 入力およびそのサブシステムへの分離則 (降雨の成分分離則) を推定しようとする本論文の問題は、より複雑で高度な問題といえるだろう。

入力情報である降雨資料は多くの場合, 出力 (流出量) とともに与えられる。にもかかわらず, 本論文においてこれを積極的に利用しないのは, 一見不利のように思われる。しかし降雨資料は, 入力資料としての広域の代表性, 信頼性が高いとは限らないし, また有効降雨そのものではないから本論文の方法は, 必ずしも有意な資料をわざわざ捨てるわけではない。このような理由から, 本論文では, 日単位の降雨時系列が白色雑音であると仮定できる²⁾ことから, 流量時系列の資料のみより I.P. の立

* 本論文は, 文献 1) を修正改良した応用例を示し確認したものである。

** 正会員 工博 東京工業大学教授 土木工学科

*** 正会員 工修 東京工業大学助手 土木工学科

場で流出機構の把握と降雨時系列の逆推定を試みた。

なお, 系からの出力のみから入力, 系の 2 つ以上のサブシステムの構造, 入力の分離則をすべて逆推定することは一般的には不可能である。しかし, 系の特性に関する物理的理解が進んでいる場合には, 以下のようにこれが可能となる。

なお, ground water models における逆探問題については, Biswas (1976)³⁾ により紹介されている。しかし, Biswas による逆探問題は, やや広い意味で用いられている。

2. 流量時系列の高, 低周波成分分離の方法

降雨は, 地表面に達したのち, 表面流出, 中間流出, 地下水流出の成分として, システム内を流れ, これらが合流して流出するものとして概念的にとらえられている (図-1)。このような流出成分への分離の方法には, たとえば, 日野 (1970)⁴⁾, 橋本 (1978)⁵⁾ による相互相関係数, コヒーレンス, フェイズ等による方法, 吉川ら (1979)⁶⁾ による標準遞減曲線による方法, 石原・高棹・池淵 (1971)⁷⁾ による土湿量変化に及ぼす蒸発散の効果等を取り入れた各流出成分の推定法が報告されている。ま

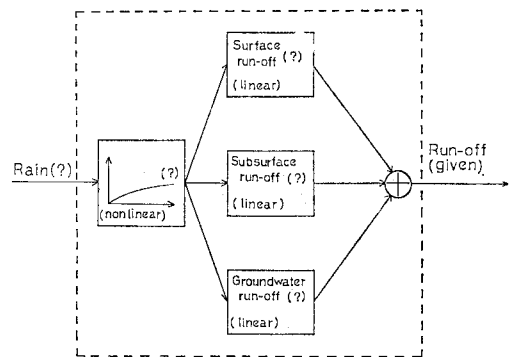


図-1 降雨流出システムの概要図

た地球化学的手法, つまり河川水中に溶出する鉱物質のイオン濃度による流出成分の分離法として, G.F. Pinder (1969)⁸⁾, 中村 (1971)⁹⁾, J.J. Drake (1974)¹⁰⁾, 佐友ら (1976)¹¹⁾, 日野・長谷部(1980)¹²⁾等の方法がある.

(1) 分離周期の推定法

流量時系列の成分分離には, 大きく分けて流量時系列のみによる分離法と, 降雨と流出量の2つを用いる分離法(コヒーレンス, フェイズによる方法)がある.

a) 自己回帰係数による分離

時系列 y_i が, 自己回帰式で表されるとする.

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + \dots + a_k y_{i-k} + \epsilon_i \dots (1)$$

ここに, a_1, a_2, \dots, a_k : 自己回帰係数, ϵ_i : ランダム入力.

自己回帰係数は, 時刻 $t(=i\Delta t)$ 以前の $i-1, i-2, \dots, i-k$, すなわち時刻 k 以後の時刻 t に影響する流量の重みと考えられる. 重み a_k が小さくなる時点 $t=k\Delta t$ を分離日数 T_c と定義する.

また, 自己回帰式の項数の決定には, 赤池¹³⁾による FPE (Final Prediction Error) と AIC (Akaike Information Criterion) がある.

$$(FPE)_M = \{(N+m+1)/(N-m-1)\} S_M^2 \quad (2)$$

ここに, $S_M^2 = \sum_{i=m+1}^N (y_i + r_{m1}y_{i-1} + r_{m2}y_{i-2} + \dots + r_{mm}y_{i-m})^2$, $r_{mi} (= -a_{mi})$: 予測誤差フィルター, N : 資料数, M : 決定すべき項数, m : 次数.

$$\left. \begin{aligned} AIC &= N \cdot \log(\hat{C}) + 2M \\ \hat{C} &= C(0) + \sum_{i=1}^M r_{mi} \cdot C(-i) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ここに, N, M は, 前出と同じ記号, C : 自己相関関数. FPE, AIC とを参考にして自己回帰係数から, t 日流量に影響する $T_c (=k\Delta t)$ が判断される.

b) 自己相関構造による分離

流出量 $y(t)$ の自己相関関数は, 次式で定義される.

$$C_{00}(\tau) = \overline{y(t) \cdot y(t+\tau)} - \mu_y^2 \dots (4)$$

ここに, μ_y は $y(t)$ の平均値であり, $\overline{\quad}$ は, 時間平均を意味する. また, 自己相関係数を $\rho(\tau) = C(\tau)/C(0)$ とすると, $\rho_{00}(\tau) = 0$ になるときの遅れ時間 τ_0 の長短により流出分離日数を定め得る.

c) コヒーレンスによる分離

降雨-流出系の資料が整っている場合には, コヒーレンス, フェイズにより降雨-流出系の線形性および分離周期が検証される¹⁴⁾.

$$\left. \begin{aligned} C_0 h^2(f) &= \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f) \cdot S_{yy}(f)} \\ \theta_{xy}(f) &= \tan^{-1} \left(\frac{Q_{xy}(f)}{K_{xy}(f)} \right) \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

ここに, $S_{xx}(f)$: 入力スペクトル, $S_{yy}(f)$: 出力スペ

クトル, $S_{xy}(f)$: クロススペクトル, $Q_{xy}(f)$: クオドスペクトル, $K_{xy}(f)$: コスペクトル.

(2) 数値フィルターによる流出成分の分離

a) 沓波特性の鋭い数値フィルター: 沓波特性の鋭い high frequency cut-off filter は, 次のようになる¹⁴⁾.

$$w(r\Delta t) dt = \left[\sin \left(\frac{\pi h r}{m} \right) \right] / \pi r \dots (6)$$

ここに, $r=0, 1, 2, \dots, N$, Δt : 時間間隔, h, m : 整数パラメーター.

b) 沓波特性の緩やかな数値フィルター: 現実の現象として, ある周波数できっぱりと成分に分離沓波されるのは, むしろ特異であり, 緩やかな沓波特性をもつ数値フィルターが望ましい. また, 水文現象は, 一般に高階常微分方程式で記述できるが, その短期流出成分は, 応答核(単位流出関)の特性からみて, 低次の常微分方程式で表されると考えられる. そこで簡単に扱える共振回路型の沓波特性式(7)をもつ数値フィルターを用いる(図-2).

$$|x| = 1 / \sqrt{\{1 - (f/f_c)^2\}^2 + \delta^2 (f/f_c)^2} \dots (7)$$

ここに, δ : 減衰係数, $|x|$: 応答特性, f_c : 分離周波数. このような応答特性をもつ数値フィルターは, 式(8)で求まる¹⁴⁾.

$$w(n\Delta t) = 2 \int_0^{1/2\Delta t} \sqrt{|x|^2} \cos(2\pi n\Delta t) df \dots (8)$$

ここに, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$, n が 0 を中心に正負の

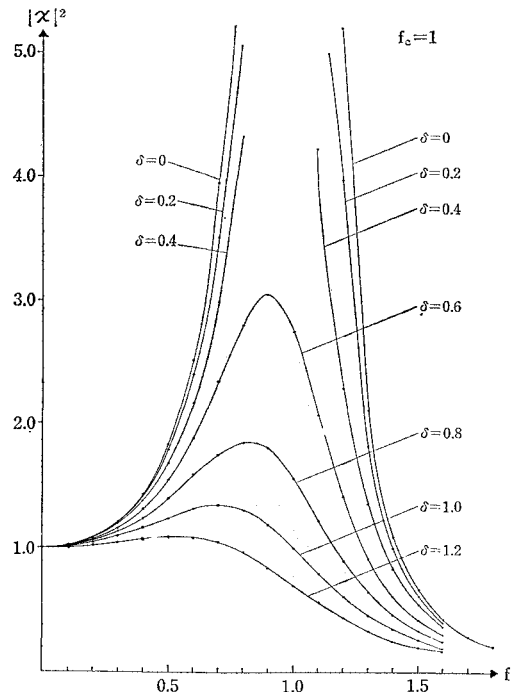


図-2 共振回路型の沓波特性をもつ数値フィルターの特性

範囲にわたり、応答関数 $h(\tau)$ とは異なることに注意を要する。

汨波後の出力 $\bar{y}(t)$ は、式 (9) になる。

$$\bar{y}(t) = \alpha \sum_{-R}^R w(t-\tau) y(\tau) d\tau \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 α : weight.

さて、重さ α を 1 とした low pass filter 式 (8) に通したものを、そのまま地下水流出成分 $y_1(t)$ とみなすと、表面流出成分 ($y(t) - y_1(t)$) には、低周波成分がまったく含まず負になることがある。したがって、表面流出成分 y_2 が負にならないようにフィルターの重さ α を決める必要がある。

$$\text{Min}\{y(t) - \alpha \sum w_k y(t-k)\} \geq 0 \dots\dots\dots (10)$$

3. システム特性の表現法と相互変換式

(1) 線形システムの種々な数式表現法¹⁴⁾

以下の解析に必要な線形システムの種々の数学的表現法を簡単に述べる。

a) 積分方程式による表現：河川流出量 (の各成分) $\{y_i\}$ は、日降雨 $\{x_i\}$ により駆動される線形系 $h(\tau)$ からの出力であり、重畳積分式 (11) により表すことができる。

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau \dots\dots\dots (11)$$

式 (11) の左辺項 $y(t)$ をフーリエ変換し、周波数領域で次のように表現する。

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt$$

式 (11) の入出力関係をフーリエ変換し、周波数領域で表すと式 (12) になる。

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega) \dots\dots\dots (12)$$

式 (12) を変形すると、

$$X(\omega) = H^{-1}(\omega) \cdot Y(\omega) = G(\omega) \cdot Y(\omega) \dots\dots (13)$$

となり、関数 $G(\omega) = H^{-1}(\omega)$ は、時系列 $\{y_i\}$ を再びもとの $\{x_i\}$ に戻すシステム関数である。

b) 微分方程式による表現：入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ は次の微分方程式系で表現し得る。

$$k_m \frac{d^m y}{dt^m} + k_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \dots + k_0 y = x(t) \dots\dots\dots (14)$$

c) 回帰式による表現：入力 $\{x_i\}$ と出力 $\{y_i\}$ が離散系の場合、次のような回帰式による表現がなされる。

$$y_i = a_1 y_{i-1} + a_2 y_{i-2} + \dots + a_p y_{i-p} + \varepsilon_i \dots\dots\dots (AR) \text{ 式 } \dots\dots\dots (15 \cdot a)$$

あるいは、これを一般化して表すと式 (15・b) になる。

$$y_i - a_1 y_{i-1} - a_2 y_{i-2} - \dots - a_p y_{i-p} =$$

$$b_0 \varepsilon_i + b_1 \varepsilon_{i-1} + \dots + b_q \varepsilon_{i-q} \text{ (ARMA)} \dots\dots\dots (15 \cdot b)$$

ここで、 ε_i は白色雑音で、日降雨に比例すると考えられる (後述)。また、Backward shift operator B を用いると、式 (15・c)、(15・d) になる。

$$\phi(B) y_i = \varepsilon_i \text{ (AR)} \dots\dots\dots (15 \cdot c)$$

$$\phi(B) y_i = \theta(B) \varepsilon_i \text{ (ARMA)} \dots\dots\dots (15 \cdot d)$$

ここに、

$$\phi(B) = 1 - a_1 B - a_2 B^2, \dots, -a_p B^p$$

$$\theta(B) = b_0 + b_1 B + b_2 B^2, \dots, +b_q B^q$$

なお、この自己回帰係数 a_i を求めるには、Yule-Walker 法と MEM スペクトルの予測誤差 filter τ_k から求める方法がある ($\tau_i = -a_i$)¹⁴⁾。

MEM スペクトル法ではまず予測誤差フィルターが計算されるので、その符号を逆にすれば自己回帰係数となる。また、夏季のデータを用いるので、資料が比較的少ない本論文のような場合に有利な MEM スペクトル法を用いる。

一般に、式 (11)、(12) の形によると、 $h(\tau)$ の離散項数は多く、データ数の少ない場合に $h(\tau)$ を求めるには必ずしも適切ではない。これに反し AR、ARMA の式 (15・a)、(15・b) によると項数は比較的少なくすむという利点がある¹⁴⁾。さらに入力 ε_i や x_i が白色雑音と仮定し得る場合、次のような利点加わる。deconvolution の関係により (分離した) 流量時系列を白色雑音性の降雨により駆動される線形系と仮定できるので、後に示すように、おのおのの系列に自己回帰モデルを適用し流域の流出特性を求め、この流出特性をもつ流量時系列をつくる降雨時系列を逆算することができる。つまり、流出系 \rightarrow 降雨系を探る逆探問題の立場に帰着する。

(2) 種々の数式表現法の相互関係

a) 常微分方程式と応答関数の対応

次節以下の流出系の特性の計算のために、必要となる種々のシステム表示法の相互関係を述べる。

式 (14) の両辺にラプラス変換を施し、これを整理すると、システム関数 $H(\omega)$ と常微分方程式 (14) の係数 k_i の関係が求まる¹⁴⁾。

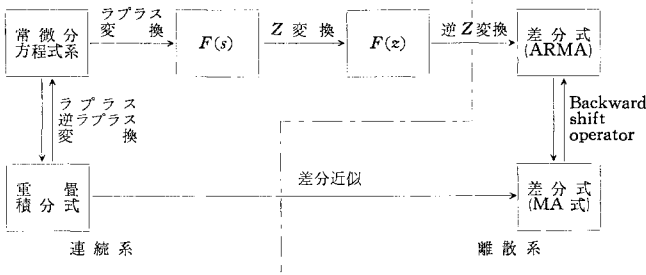
$$H(\omega) = 1 / \{k_p (i\omega)^p + k_{p-1} (i\omega)^{p-1} + \dots + k_1 (i\omega) + k_0\} \dots\dots\dots (16)$$

システム関数 $H(\omega)$ の逆 Fourier 変換として応答関数 $h(\tau)$ も求まり、結局 $h(\tau)$ と k_i が関係づけられる。

b) 回帰式と常微分方程式表示との関係 (Z 変換による離散系への変換)

水文資料など離散系は、AR の式 (15・a) により表される。このように離散データに AR モデルをあてはめ、係数 a_i が決定されると、これに対応する連続系である

表一 常微分方程式と差分式の関係



$$h(\tau) = \begin{cases} e^{-\frac{c_1}{2}\tau} \sinh \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0} \tau / \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0} & \left(c_0 - \frac{c_1^2}{4} \geq 0 \right) \\ \dots\dots\dots (20 \cdot a) \end{cases}$$

式 (20) の連続型の表示式を離散型に変換するには、入力を 0 次ホールドし Z 変換より G(z) を求め、さらに逆 Z 変換を施すと式 (21) になる。

$$y_t - a_1 y_{t-1} - a_2 y_{t-2} = (e_1 x_{t-1} + e_2 x_{t-2}) / c_0 \dots\dots\dots (21)$$

常微分方程式あるいは重畳積分式系に変換した方が、系の特性をよりよく把握し得る。

さて、常微分方程式 (14) の係数 k_i を AR 式 (15・a) の係数 a_j に直すのに常微分方程式を単純に離散化したのでは、差分式が発散型となる危険性があり、避けなければならない。常微分方程式系を安定な差分型に変換するには Z 変換の方法がよい (表一)¹⁵⁾。

ここに、 a_1, a_2 と c_0, c_1 の関係は、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (e^{-r_1 \delta t} + e^{-r_2 \delta t}), \quad a_2 = -e^{-(r_1+r_2)\delta t} \\ r_j &= \{c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_0}\} / 2, \quad r_1 \cdot r_2 = c_0, \quad r_1 + r_2 = c_1 \\ e_1 &= 1 + (r_2 e^{-r_1 \delta t} - r_1 e^{-r_2 \delta t}) / (r_1 - r_2) \\ e_2 &= e^{-(r_1+r_2)\delta t} - (r_1 e^{-r_1 \delta t} - r_2 e^{-r_2 \delta t}) / (r_1 - r_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

さて、離散信号を連続系に入力するにはホールド (δt の間、入力 $x(t)$ が、そのまま保持される最も単純な場合を 0 次ホールドとよぶ) を通す必要がある。0 次ホールドを通すということは、伝達関数 $H(s)$ に次の $H_0(s)$ をかけることに相当する。

$$H_0(s) = (1 - e^{-s\delta t}) / s \dots\dots\dots (17)$$

0 次ホールドを通した場合の $H(s) \cdot H_0(s)$ を Z 変換すれば、離散型の合成伝達関数 $G(z)$ が得られる。

$$G(z) = Z\{H_0(s) \cdot H(s)\} = Z\left\{\frac{1 - e^{-s\delta t}}{s} H(s)\right\} \dots\dots\dots (18)$$

結局、Z 変換後の入出力の関係は次のようである。

$$Y(z) = G(z) \cdot X(z) \dots\dots\dots (19)$$

上式に逆 Z 変換を施せば、0 次ホールドを通した場合の差分式 (離散型表示式) が得られる。

$$\begin{aligned} y_t - a_1 y_{t-1} - \dots - a_p y_{t-p} \\ = b_0' x_t + b_1' x_{t-1} + \dots + b_q' x_{t-q} \\ = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q} \end{aligned}$$

ここに、 $\varepsilon_t = b_0' x_t, \quad b_i = b_i' / b_0'$
したがって、式 (14) の離散表示式は、一般形で示すと ARMA 過程である。AR モデルは、右辺の項が一項のみの場合である。

ここに、例を示そう。簡単な 2 階の線形微分方程式、

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + c_1 \frac{dy}{dt} + c_0 y = x(t) \dots\dots\dots (20)$$

の場合の単位インパルス応答関数は、式 (20・a) である (図-3)。

$$\left[= e^{-\frac{c_1}{2}\tau} \sin \sqrt{c_0 - \frac{c_1^2}{4}} \tau / \sqrt{c_0 - \frac{c_1^2}{4}} \right]$$

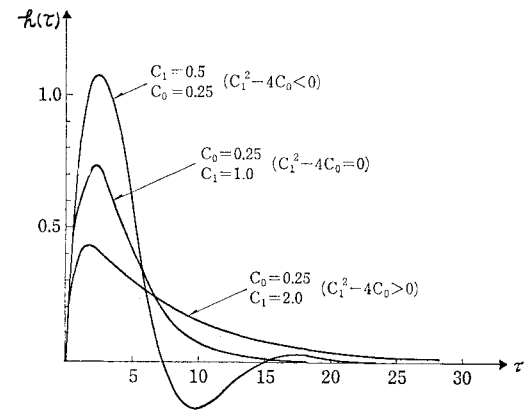


図-3 単位インパルス応答関数

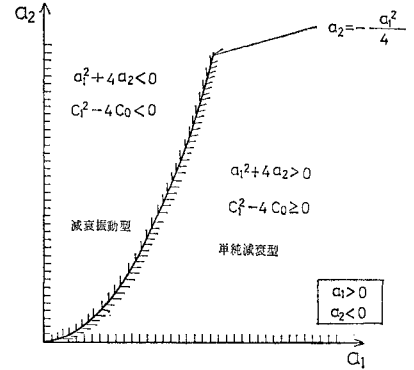


図-4 自己回帰係数と微分方程式の係数の関係および振動型の区分

c) 重畳積分式と AR と ARMA の関係

重畳積分式を離散化すれば、式 (23) になる。

$$y_i = h_0 x_i + h_1 x_{i-1} + h_2 x_{i-2} + \dots + h_m x_{i-m} \\ = c(B) x_i \dots \dots \dots (23)$$

ここに、

$$c(B) = h_0 + h_1 B + h_2 B^2 + \dots + h_m B^m \dots \dots (24)$$

で、 B は、Backward shift operator である。また、単位インパルス入力に対して連続条件 $\int y(t) dt = 1$ が成立しなければならないから、

$$h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_m = 1 \dots \dots \dots (25)$$

一方、ARMA は、式 (15・c)、(15・d)、(23) により、 $c(B) \cdot \phi(B) = \theta(B) / \beta$ の関係が得られる。

$$(1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots - a_p B^p) \cdot \\ (h_0 + h_1 B + h_2 B^2 + \dots + h_m B^m) \\ = (b_0 + b_1 B + b_2 B^2 + \dots + b_q B^q) / \beta \dots (26)$$

ただし、 $\varepsilon(t) = x(t) / \beta$ 。 ε_i と x_i の変換率 β は、一定入力の場合を考えると、式 (26) と $(h_0 + h_1 + \dots + h_m) = 1$ の関係より、

$$\beta = (b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_q) / (1 - a_1 - a_2 - \dots - a_p) \\ \dots \dots \dots (26 \cdot a)$$

さらに、 y が (m^3/s) 、したがって、 ε も (m^3/s) で表され、 x が mm/day で表されている場合には、変換係数 β は、

$$\beta = \frac{86.4}{A(Km^2)} \cdot \frac{b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_q}{1 - a_1 - a_2 - \dots - a_p} \dots (26 \cdot b)$$

となる。ここに、 A は Km^2 で表した流域面積、上式 (26) で a_i 、 b_i が既知の場合には、下記の関係式から応答関数 h_0 、 h_1 、 \dots 、 h_m が求められる。

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= 0 \\ h_1 &= \frac{(a_1 + b_1)}{\beta} \\ h_2 &= (b_2 + b_1 a_1 + a_2 + a_1^2) \frac{1}{\beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26 \cdot c)$$

ここに、 $b_0 = 0$ 、 $b_1 \neq 0$ 、 $b_2 = b_3 = \dots = b_q = 0$ 。

4. 流出特性・降雨時系列の逆推定および流出成分分離則の推定

(1) 理 論

降雨-流出系は自己回帰式 (27) で表される。

$$\varepsilon' = \phi(B) \cdot y_i' \dots \dots \dots (27)$$

ここに、 ε' ($\varepsilon' = 0$) は白色雑音、 y_i' ($= y_i - \bar{y}$) は流出変動成分 (表面流出または地下水流出成分) 時系列。

本論文の流出解析は、次の順序で行われる。

① まず成分分離された第 l 成分の流量時系列 $y_i^{(l)}$ から回帰係数 $a_i^{(l)}$ として流出サブシステムの特徴が求められる。もし、AR モデルで構成された流出量と実測

のそれとに差が生じると、この分は 2 次以上の非線形モデルで構成する必要がある。しかし、後に具体的に示すようにその必要はなかった。

② 次に式 (27) より、与えられた流量時系列を発生させる降雨時系列を逆推定する。ただし、降雨時系列は $\hat{\varepsilon}^{(l)}$ に前出の一定の係数 β を掛けたもの $\hat{x}^{(l)} = \beta \hat{\varepsilon}^{(l)}$ である。

③ また、逆推定された降雨 $\hat{\varepsilon}^{(l)}$ を用いて式 (28) により、回帰式表示の適合性が検討される (へは推定値を示す)。

$$\hat{y}_i^{(l)} = c'(B) \hat{\varepsilon}_i^{(l)} = c'(B) \hat{x}_i^{(l)} / \beta^{(l)}, \quad l=1, 2, 3 \\ \dots \dots \dots (28)$$

ここに、 $c'(B)$ は、式 (27) と式 (28) より、

$$c'(B) = 1 / \phi(B) = 1 / (1 - a_1 B - a_2 B^2 - \dots - a_p B^p),$$

すなわち、流量系列から推定された降雨を用いて、再び流量系列を式 (28) で求めて、始めの与えられた流量と一致していることを確かめればよい。確率過程的には、AR 過程から MA 過程に転換できることである。このようにして流域の特性および降雨時系列が決定される。

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_s &= \beta_s \hat{\varepsilon}_s \\ \hat{x}_{ss} &= \beta_{ss} \hat{\varepsilon}_{ss} \\ \hat{x}_G &= \beta_G \hat{\varepsilon}_G \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

ここに、添字 s は表面流出成分、 ss は中間流出成分、 G は地下流出成分の区別を示す。これらの和 (有効降雨) を \hat{x} とすると次式が得られる。

$$\hat{x} = \beta_s \hat{\varepsilon}_s + \beta_{ss} \hat{\varepsilon}_{ss} + \beta_G \hat{\varepsilon}_G \dots \dots \dots (30)$$

$$\hat{X} = \beta_s \sum_{i=1}^k \hat{\varepsilon}_{si} + \beta_{ss} \sum_{i=1}^k \hat{\varepsilon}_{ssi} + \beta_G \sum_{i=1}^k \hat{\varepsilon}_{Gi} \dots \dots (31)$$

ここに、 \hat{X} は累加雨量、 k は累加日数。

最後に、逆推定降雨 \hat{x} と一成分、たとえば、 $\hat{x}^{(1)} = \hat{x}_G$ をプロットすれば、降雨の分離則が求められる。

$$f_G = \beta_G \cdot \hat{\varepsilon}_G / \hat{x} = \hat{x}_G / \hat{x}$$

5. 実流域の水文資料解析とその特性

(1) 実測資料

解析に用いた実流域の資料は、秋田県雄物川流域柳田橋観測所における融雪の影響のない昭和 35 年*1、および昭和 40 年の 7~9 月の夏季 3 か月間の日単位データ、および埼玉・群馬両県にわたる利根川水系神流川流域渡瀬観測所における昭和 28 年、昭和 34 年の 5~10 月の 6 か月間の日単位データである。2 河川の河相、流域の特徴を記す。

雄物川：柳田橋観測点の流域面積は 477.3 km^2 で、幹

*1 第 23 回水理講演会で発表しているのでここでは省略する。

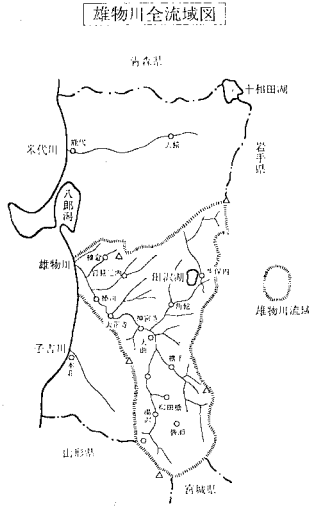


図-5 雄物川流域

川長は約 130 km である。雄物川全流域図を 図-5、昭和 40 年の解析の資料を 図-6 に示す。

神流川：渡瀬観測点の流域面積は 373.6 km² で、流域形状は 図-7 に示したとおり細長い。最高点の海拔 1828 m から、最低点の海拔 100 m まで幹川長が約 68 km である。地質的には古生層であり、急勾配であるために土壌の厚さは比較的薄い。そして流域全体は適度に森林におおわれている。解析年の資料を 図-8、9 に示す。

適用例は、両流域について、2., 3., 4. と順を追って検討していく。

(2) 流出成分時系列分離の検討

a) 雄物川の場合

自己回帰係数，自己相関係数，コヒーレンスを表-2，図-10，11 に示す。流量データのみから得られる表-2，図-10 から判断すると分離周期は， $T_c=7$ 日である。それを検証するために、降雨・流量のコヒーレンスを求める(図-11)と分離周期は、やはり $T_c=7$ 日となり、流量データのみからの推定と一致している。

b) 神流川の場合

神流川については、降雨が平均的降雨型の昭和 28 年と洪水型の昭和 34 年について検討する。自己相関係数を 図-10 に示す。両例の平均降雨強度は、 $\bar{R}_{28}=5.93$ (mm/day)， $\bar{R}_{34}=7.56$ (mm/day) である。また、自己回帰係数により判断すると昭和 28 年は、自己回帰係数が 5 次で 0 になり、 $T_c=5$ 日である。昭和 34 年も、 $T_c=5$ 日に相当する。しかし、表-2 によれば、昭和 34 年では表面、中間流出成分の自己回帰係数は、2~3 次に 1 度 0 に接近して

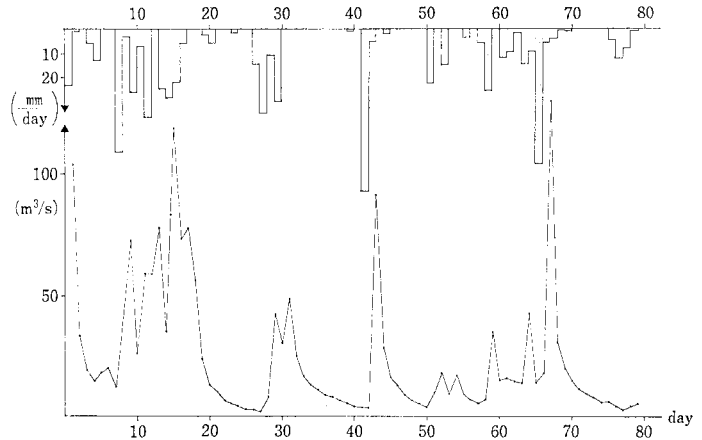


図-6 昭和 40 年の実測のハイドログラフ

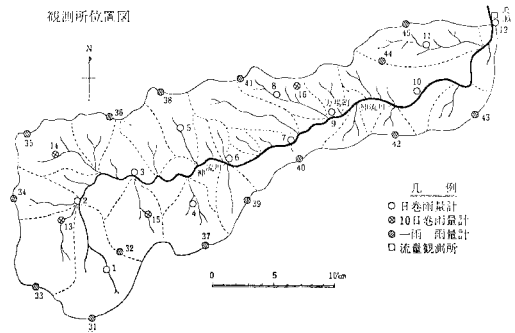


図-7 神流川流域

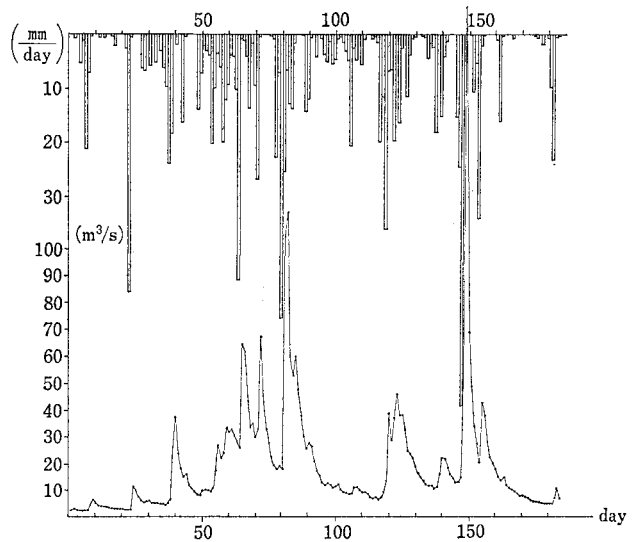


図-8 昭和 28 年の実測のハイドログラフ

いる。このことは、昭和 34 年は、自己相関構造から、豪雨パターンと考えられ、短期流出成分が、さらに表面流出成分と中間流出成分に分離できると推察される*2。長期流出成分は、昭和 28 年と同様に、 $T_c=5$ 日で分

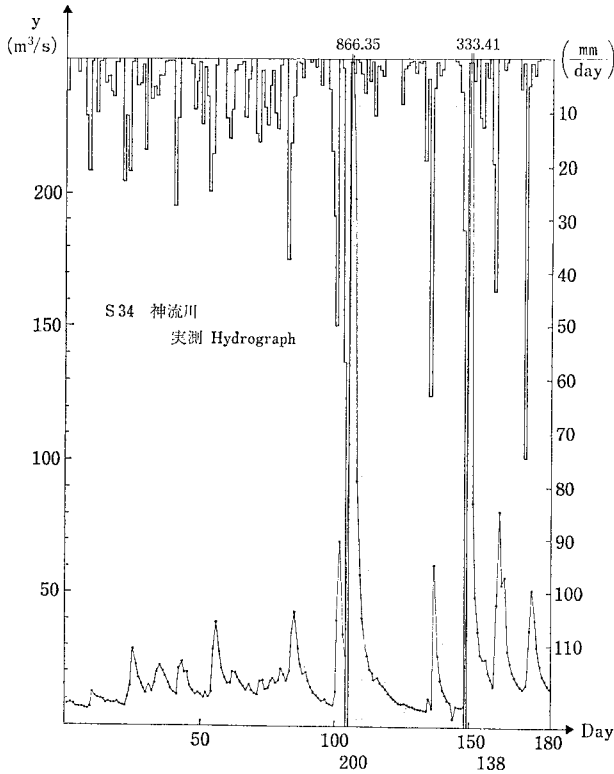


図-9 昭和 34 年の実測のハイドログラフ

表-2 全流量に対する自己回帰係数

次数	全流量に対する自己回帰係数		
	雄物川	神流川 (S28)	神流川 (S34)
1	0.317	0.655	0.318
2	0.205	-0.072	0.005
3	0.121	0.090	0.014
4	-0.009	0.018	0.045
5	-0.113	0.032	0.000
6	-0.028	0.006	0.002
7	0.006	—	—
8	-0.003	—	—

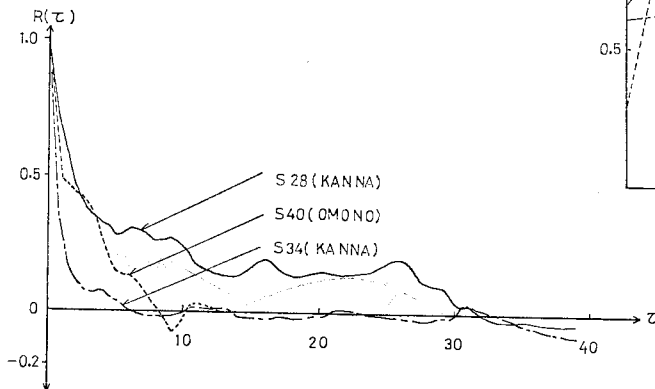


図-10 全流量に対する自己相関係数

離する. この検証のために, 2例についての降雨・流量のコヒーレンスを示す(図-11). 図より, 両例ともコヒーレンス・ギャップは, $f_c=0.2$ で, $T_c=5$ 日にある.

雄物川に用いた数値フィルターは, 2. の (a) の filter を用いた. ただし, 項数を 21 項と少なくし緩やかな汜波特性をもたせた. フィルター特性を 図-12 に示す項数を多くとった汜波特性の鋭い数値フィルターは, 図-12 ($R=100$) のように高周波成分に低周波成分がまったく含まず不合理である. それゆえ項数を減らし (21 項) 滑らかな filter とした. 神流川の 2 例の filter 特性は 図-2 の $\delta=1.0$ のフィルターである. $\delta=1.0$ とした理由は, f_c を決め, そのときの応答特性 $|z^2|=1.0$ となるように選ぶ.

(3) 流域特性の検討

a) 雄物川の場合

分離した 2 成分 (中間流出成分³⁾, 地下水流出成分) に AR モデルを適用して得られた両成分のそれぞれの自己回帰係数を表-3 に示す. 自己回帰係数の項数は, 中間流出成分は少なく, 地下水流出成分のそれは多い. このことはとりも直さず, 地下水流出成分が長時間で流出してくることを示している. また, 地下水流出, 中間流出の自己回帰の定常条件を検討すると両成分とも定常条件と転換条件を満たしている⁴⁾. なお, 両流出成分の次数の決定には, FPE, AIC あるいは予測誤差 (MA 過程により発生した流出時系列と実測の流出時系列の差) の分散が最小の

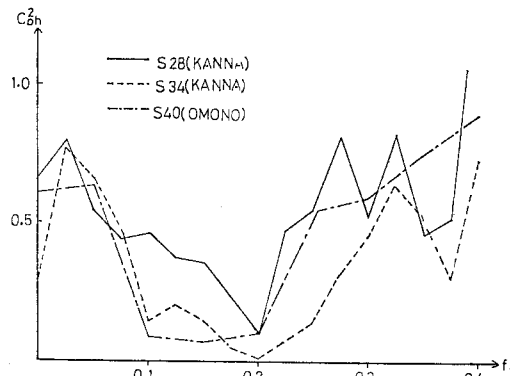


図-11 コヒーレンス

³⁾ ラグ τ が大きくなると相関係数の信頼度が低下する¹⁶⁾から, 断定には注意を要する.

⁴⁾ ここでの中間流出成分とは, (表面流出+中間流出) 成分を意味する.

⁵⁾ 定常条件, 転換条件とは, AR モデルで $\phi(B) = 1 - a_1B - \dots - a_pB^p$ を B の多項式とすると B の根が単位円の外側にあることである.

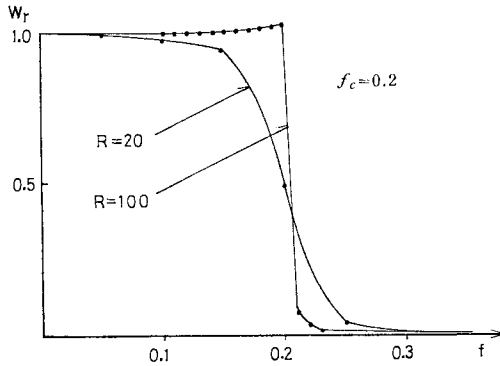


図-12 雄物川に用いた数値フィルターの特性

表-3 分離された時系列の自己回帰係数

次数	雄物川		神流川 (S28)		神流川 (S34)		
	表面流出成分	地下水流出成分	表面流出成分	地下水流出成分	表面流出成分	中間流出成分	地下水流出成分
1	0.483	1.516	0.500	2.171	0.071	1.279	2.171
2	-0.225	-0.792	-0.038	-1.824	-0.033	-0.786	-1.824
3		0.228		0.762		0.203	0.762
4		-0.135		-0.210		0.025	-0.210
5		0.054		-0.013		-0.042	-0.013
6				0.217		0.019	0.217
7				-0.251		-0.009	-0.251
8				0.128			0.128
9				-0.012			-0.012
10				-0.015			-0.015

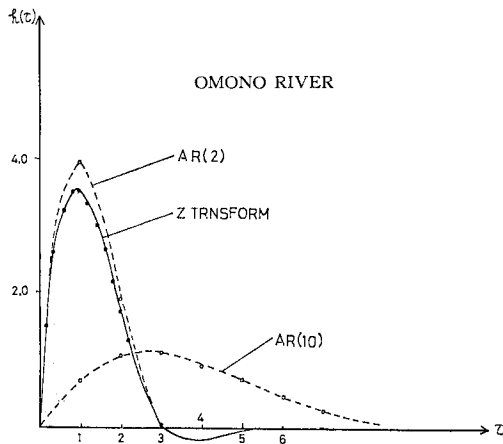


図-13 雄物川の表面流出成分と地下水流出成分の応答関数

判定基準がある。この場合には、FPE・AIC による適正次数は、最小二乗誤差の方法に比べて少なくなる。表-4 に昭和 34 年の地下流出成分についての次数と FPE, AIC, 最小二乗誤差の 3 つの判定基準の比較を示す。

このようにして、自己回帰係数が求まったので、この流域の流出成分の応答関数が、連続系の表示による Z 変換の方法、式 (23) (表面流出成分のみ) と離散型の表示による AR 式 (26・c) により決定された(図-13)、Z 変換により得られた応答関数と AR 式より求めた応

表-4 F.P.E., A.I.C., 最小二乗誤差の判定基準 (項数の決定)

次数	F.P.E.	A.I.C.	分散
1	71.70	502.0	—
2	11.00	281.0	39.94
3	4.38	172.0	18.75
4	4.20	167.0	8.76
5	4.26	169.0	4.12
6	4.33	171.0	2.62
7	4.41	173.0	2.25
8	4.48	175.0	2.25
9	4.56	177.0	1.90
10	4.64	179.0	1.37

答関数は、一致している。この図から、地下水流出成分は、ピークが 3 日ぐらいいあって、かつ流出時間は、9 日ぐらいまでである。逆に表面中間流出成分については、ピークは 1 日ぐらいいである。

b) 神流川の場合

昭和 28 年、昭和 34 年の自己回帰係数を表-3 に示す。2 例とも、中間流出成分の AR モデルの次数は、2 次のオーダーであり、地下水流出成分は、10 次のオーダーである。また、5. の (2) で述べたように昭和 34 年の流出分離には、まず、 $f_c = 0.2$ で長短期流出成分にわけ、さらに短期流出成分を、この成分時系列の自己

回帰係数により $f_c = 1/3$ で、表面流出成分と中間流出成分に分離した。各流出成分の自己回帰係数は表面流出、中間流出、地下水流出になるにつれて、項数が増える。この傾向は雄物川の例にもあてはまる。昭和 28 年の応答関数を 図-14 に示す。表面流出成分は、1 日後にピークがあり、3 日ぐらいい流出している。地下水流出は、ピークが 4~5 日ぐらいいあり、数日ぐらいい流出している。雄物川に比べ、ほぼ同一流域面積にもかかわらず

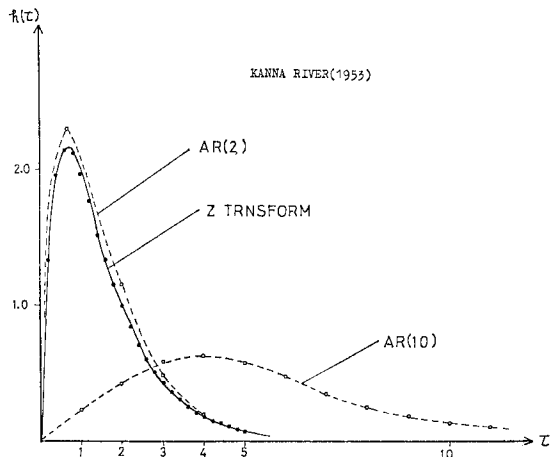
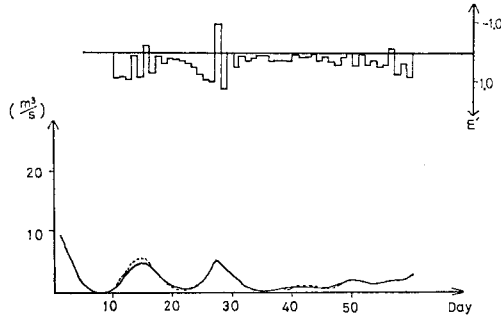
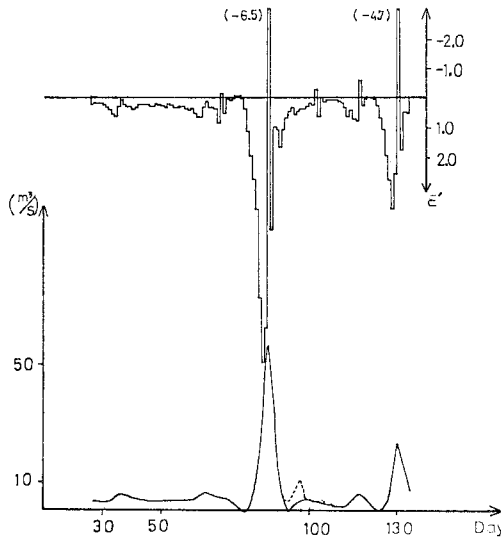


図-14 神流川(昭和 28 年)の表面流出成分と地下水流出成分の応答関数



図一15 昭和40年の地下水流出の自己回帰係数により求めた昭和35年の $\hat{\epsilon}_G$ と $\hat{\epsilon}_G$ より推定した地下水流出成分(点線)と実測分離した昭和35年の地下水流出成分(実線)の比較図(雄物川)

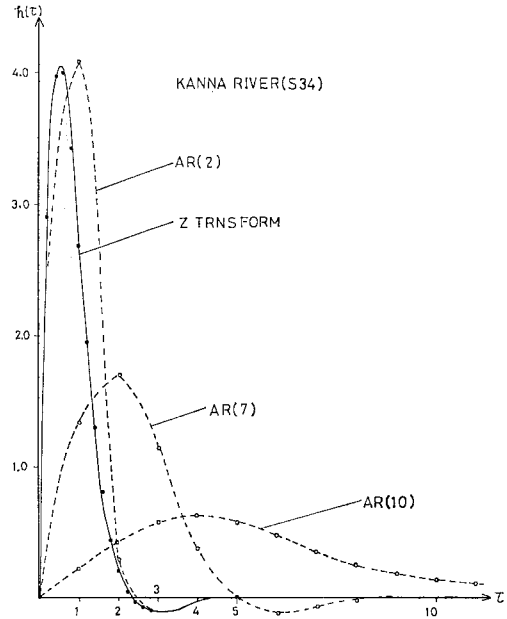


図一16 昭和28年の地下水流出のAR係数により求めた昭和34年の $\hat{\epsilon}_G$ と $\hat{\epsilon}_G$ より推定した地下水流出成分(点線)と実測分離した昭和34年の地下水流出成分の比較図(神流川)

流出時間が長いのは、先に考えたように保水性が大きいことに原因があると思われる。

(4) 流域特性の不変性の検討

1つの流域において、地下水流出成分の自己回帰係数または応答関数は、降雨いかににかかわらず、invariantと考えられる。実際、神流川については、昭和28年の流出時系列に関して求められた地下水流出成分の自己回帰係数を用いて、昭和34年の地下水流出成分時系列に式(27)を適用し、降雨の逆推定、その降雨系列から流量系列を発生すると実測の分離した地下水流出成分と一致している(図一15)。雄物川についても昭和40年の自己回帰係数による昭和35年の逆推定とは一致する(図一



図一17 昭和34年の表面流出成分、中間流出成分、地下水流出成分の応答関数

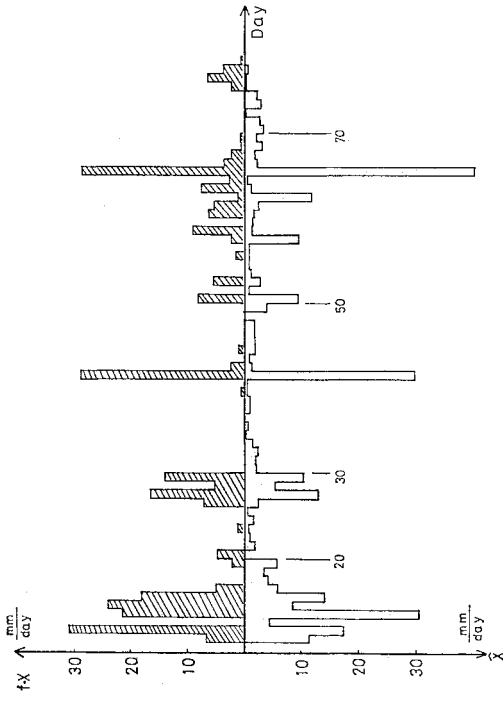
16)。つまり、両流域とも地下水流出成分の自己回帰係数および応答関数は、不変であることを示している。式(26)によりARからMAに変換し求めた昭和34年の応答関数を図一17に示す。

(5) 逆推定降雨・流量時系列について

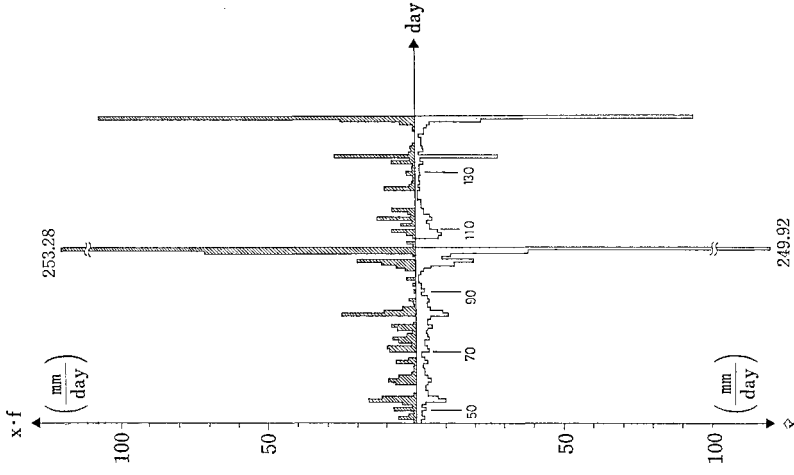
このように決定されたARモデルの係数を用いて、式(27)により各流量成分を発生させる入力(降雨)を逆推定できる(図一18~20)。この際の変換係数 β を表一5に示す。この逆推定した降雨($\hat{x} = \hat{x}_s + \hat{x}_{ss} + \hat{x}_G$)と実測の有効降雨^{*5}とを比較すると、雄物川、神流川の昭和28年の両者は、かなりよい一致を示している。神流川の昭和34年では、60~80日、105~106日の間では、両者の差がみられる。実際データの降雨-流出の対応を調べると、この間では、降雨がかなりあるにもかかわらず流出量が少ない。このように、このモデルから逆に降雨-流出系での観測降雨の代表性(平均雨量等のとり方)を逆推定した降雨との関係から検証できる。

次に、この $\hat{\epsilon}_s$ 、 $\hat{\epsilon}_{ss}$ および $\hat{\epsilon}_G$ よりARを変換したMAモデルによる各成分の流量時系列(\hat{y}_s 、 \hat{y}_{ss} 、 \hat{y}_G)と、数値フィルターを通して分離された実測流量時系列の比較を図一21~24に示す。両者はよく一致しており、さらに非線形モデルで説明する流出成分は無視できることが示された。また参考のために実測の有効累加雨量と逆推定した累加雨量との比較を図一25~27に示

*5 一雨ごとの総降雨量と総流出量の比から算出した。



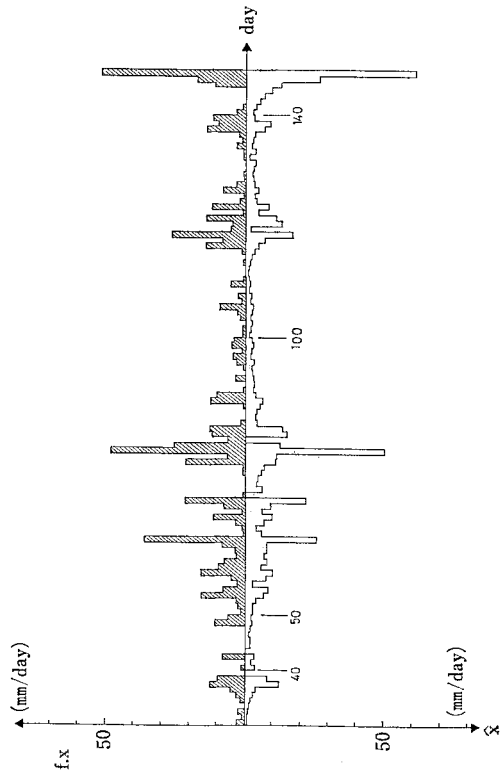
図一18 雄物川の逆推定した降雨(下)と実測有効降雨(上)との比較図



図一20 神流川の昭和34年の逆推定した降雨(下)と実測有効降雨(上)との比較図

表一5 雄物川 S28, S34 の係数 β

雄物川		神流川(S28)		神流川(S34)	
β_s	β_G	β_s	β_G	β_s	β_{ss}
0.283	0.819	0.430	4.920	0.240	0.744



図一19 神流川の昭和28年の逆推定した降雨(下)と実測有効降雨(上)との比較図

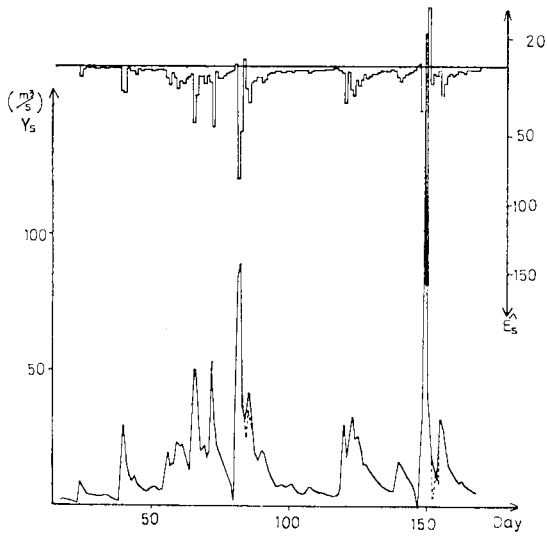


図-21 昭和 28 年の $\hat{\epsilon}_s$ と式 (27) により推定された流量時系列 \hat{y}_s (点線) と実測分離 y_s (実線) の比較図

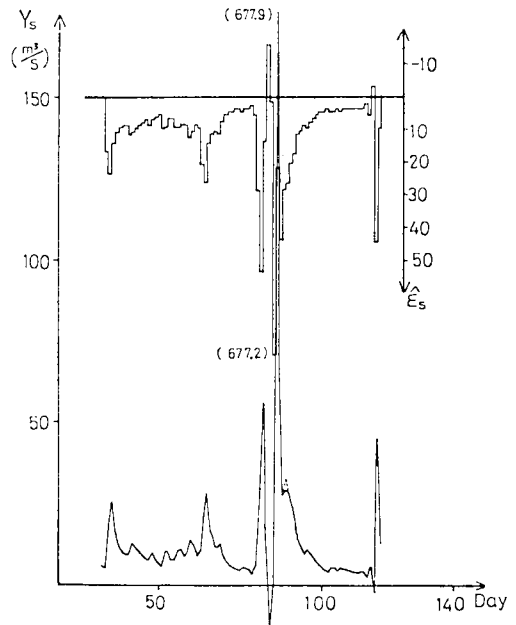


図-23 昭和 34 年の $\hat{\epsilon}_s$ と \hat{y}_s (点線) と y_s (実線) との比較図

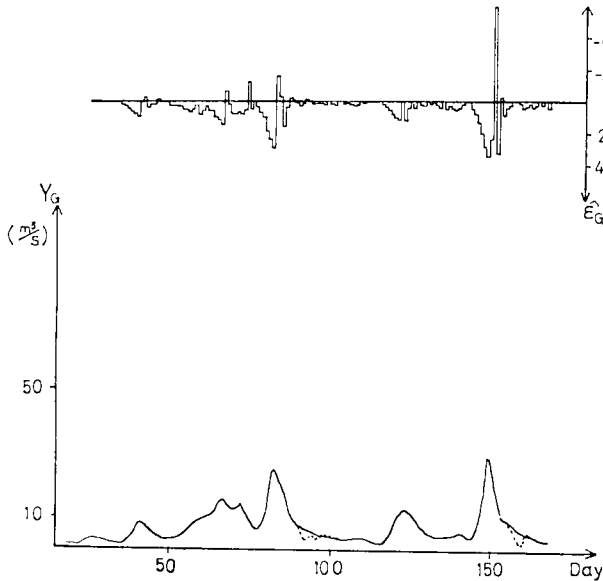


図-22 昭和 28 年の $\hat{\epsilon}_G$ と \hat{y}_G (点線) と y_G (実線) との比較図

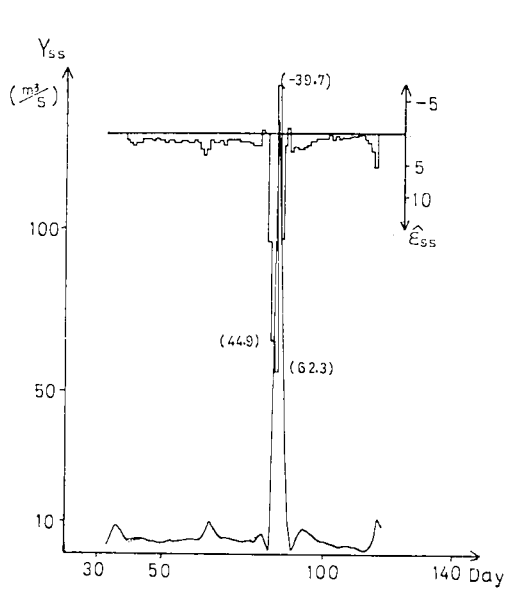


図-24 昭和 34 年の $\hat{\epsilon}_{ss}$ と \hat{y}_{ss} (点線) と y_{ss} (実線) との比較図

す。

(6) 降雨の成分分離則

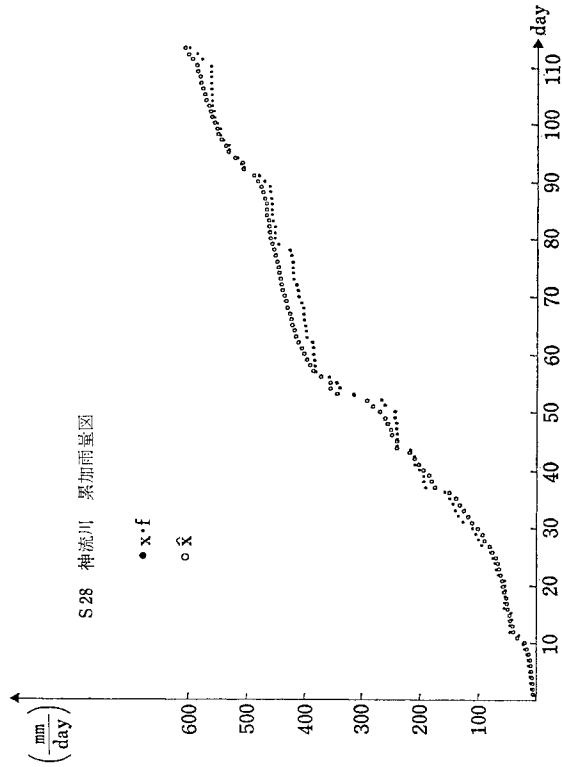
降雨の各成分への分離則は $\hat{x}_G (= \beta_G \hat{\epsilon}_G) \sim \hat{x}$, および $\hat{x}_s (= \beta_s \hat{\epsilon}_s) \sim \hat{x}$ の関係で表される (図-28, 29)。この図から降雨の少ない場合には、降雨のほとんどが地下水流出成分となり、降雨量が多くなると一定の飽和傾向に

近づくことが読み取れる。

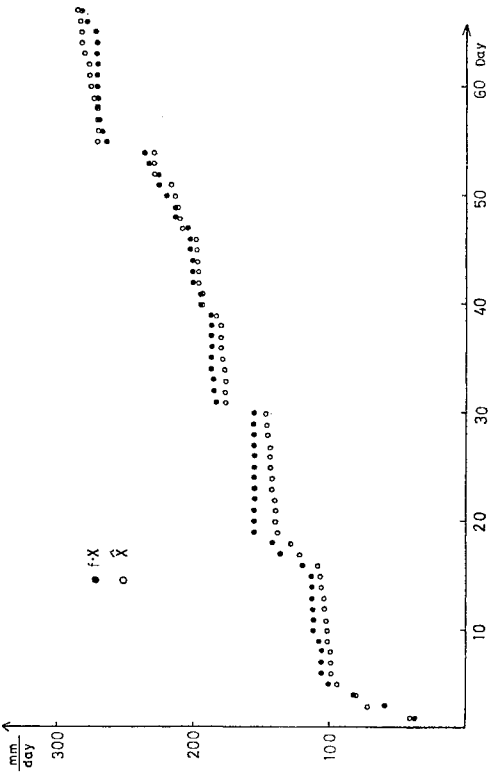
なお、降雨量の小さいときは（おそらく前行降雨・季節・植生等の影響で）流出率は、ばらついている。

6. 結 論

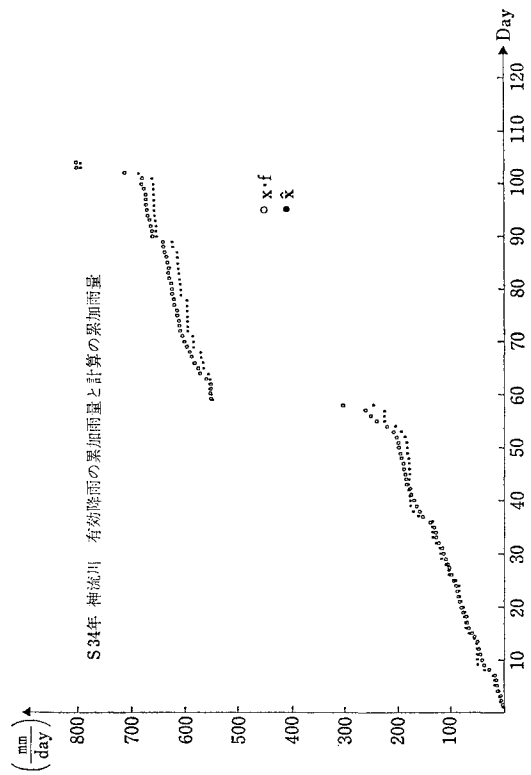
本論文では、降雨-流出系の逆探問題としての立場か



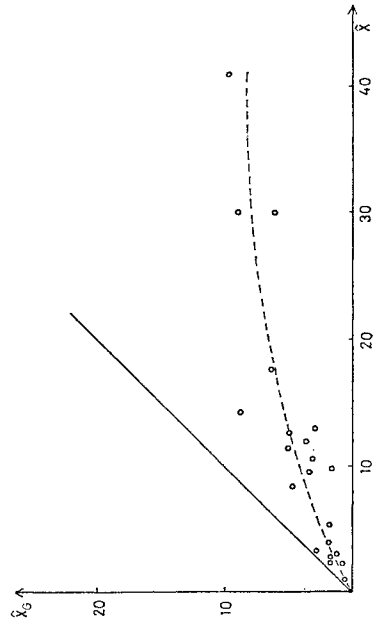
図—26 昭和 28 年の逆推定した累加雨量(\hat{X})と実測有効累加雨量($f \cdot X$)との比較



図—25 雄物川の逆推定した累加雨量(\hat{X})と実測有効累加雨量($f \cdot X$)との比較



図—27 昭和 34 年の逆推定した累加雨量(\hat{X})と実測有効累加雨量($f \cdot X$)との比較



図—28 雄物川における降雨の非線形分離: $\hat{x}_G \sim \hat{x}$ の関係

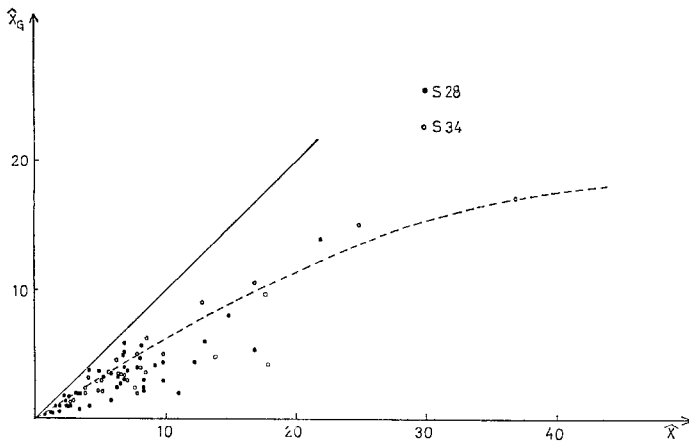


図-29 神流川における降雨の地下流出成分への非線形分離則： $x_g \sim x$ の関係

ら、流量資料のみを用いて、① 流出量の表面流出，中間流出，地下水流出の3成分への流出成分分離，② 流域の各サブシステムの流出特性，③ 降雨時系列の逆推定，④ 降雨量の流出成分分離則の推定を行う手法を提案した。

ここで、流出サブシステムを線形系で構成していることについて一言する。たとえ nonlinear model でも、これには一般に linear 分が含まれ、linear (1 次の nonlinear) + (2 次以上の nonlinear) を意味する。したがって、まず linear で説明し得る分を抽出し、それで説明し得ない分があれば、これを2次以上の nonlinear で説明することになる。本論文では流出成分はほぼ linear 成分で説明でき、これからはずれる nonlinear 分が無視し得ることを示し得た。したがって、各流出成分を2次以上の nonlinear で構成する必要性はない。

そして、流出系の非線形の大部分は降雨の非線形分離則にあるとわれわれは主張したい。

最近の R.P. Beston & J.B. Marius¹⁶⁾(1969)，T. Dunne & R.D. Black(1970)¹⁷⁾らの geophysical な現地観測でも、この方向の結論を示唆している。

このように系の出力時系列のみから、入力時系列、入力のサブシステムへの非線形分離則、サブシステムの応答特性を逆推定をすることは、一般論として不可能であるが、日単位の水文時系列の場合には入力が白色雑音であることおよびサブシステムの物理機構の理解のもとにこれが可能となった。

この手法を雄物川流域と神流川に適用し、流出サブシステムの特性や降雨分離則を論じた。各節ごとに順次流域について検討したが結論としてまとめてみる。

(1) 流量時系列を表面流出，中間流出，地下水流出の成分に分離するには、自己回帰係数と自己相関構造を利用できる。一方、降雨と流量の時系列が利用し得る場

合には、降雨と流出のコヒーレンス、フェイズによって分離周期を検証できる。

(2) 分離した各成分に AR モデルを適用し、各流出成分の自己回帰係数(応答関数)を決定できる。両流域とも表面中間流出成分については、自己回帰係数の項数は2次である。当然ながら、表面流出，中間流出，地下水流出と順番に自己回帰係数の項数が多くなっている。

(3) 自己回帰係数から連続系(Z変換)に変換して求めた応答関数(表面流出系)と、Backward shift operator を用いて離散型で求めた応答関数によると、表面中間流出は、2~3日ぐらい、地下水流出は、数十日ぐらいの単位で大部分

分流出すると推定できる。また両流域とも地下水流出成分の応答関数は、降雨、年度によらず invariant である。

(4) 地下水流出量と総流出量の比は、雄物川で50%ぐらい、神流川で40%ぐらいであり、このことから降雨は地中に浸透し、その後徐々に流出してくると考えられる。なお、地球化学的手法の前出の文献^{9)~10)・12)}によれば、地下水流出成分は、総流出成分に対する比として50~60%、千葉県小糸川の例で、流出量を地下水流出，中間流出，表面流出に分離して解析した例によると表面流出は全体の20%以内(例外として48%)と報告されており、本論文の結論と矛盾しない。

(5) 図-28, 29 に示したように、 x , x_g の関係から、降雨分離則が推定できる。これによれば、降雨強度が強くなると浸透降雨量が一定値に近づく非線形性を示す。水文流出現象の非線形性の大部分は、この降雨分離則の非線形性によると結論される。

(6) 本方法による流量のみから逆推定した降雨時系列は、実測の有効降雨時系列とかなりよい一致を示しており、これから本推定法がほぼ妥当であるといえる。

参 考 文 献

- 1) 日野幹雄・長谷部正彦：流量時系列のみによる降雨時系列，流域の流出特性および流出分離の推定について，第23回水理講演会論文集，1979。
- 2) 日野幹雄：情報理論の水文学への序説 I, II, III, 東京工業大学・土木工学科研究報告 No. 4, No. 6, 1968。
- 3) Biswas, A.K.: System approach to water management, McGraw-Hill, 1976。
- 4) Hino, M.: Runoff forecasts by linear predictive filter, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, No. HY 3, March, 1970。
- 5) 橋本 健・大西亮一・砂田憲吾・藤野浩一・確率統計水文学 (3), 土木学会誌 Vol. 63, 2, 1978。
- 6) 吉川秀夫・砂田憲吾・グェン・ソン・フン：洪水流量逓減曲線の特性を考慮した流出モデルに関する研究，土木

- 学会論文報告集，第 283 号，3，1979.
- 7) 石原藤次郎・高棟琢馬・池淵周一：長期間流出解析法に関する 2, 3 の考察，土木学会論文報告集，No. 196, 1971.
 - 8) Pinder, G.F. and J.F. Jones : Determination of the ground water component of peak discharge from the chemistry of total runoff, Water Resources Research Vol. 5, No. 2, April, 1969.
 - 9) Nakamura, R. : Runoff analysis by electrical conductance of water, Journal of Hydrology, Vol. 14, 1971.
 - 10) Drake, J.J. and D.C. Ford : Hydrochemistry of the Athabasca and North Saskatchewan River in the Rocky Mountains of Canada, Water Resources Research, Vol. 10, No. 6, December, 1974.
 - 11) 住友 恒・松本志生：水質からみた降雨の流出予測，第 20 回水理講演会論文集，1976.
 - 12) 日野幹雄・長谷部正彦：地球化学的水文資料による流出成分分離について，東京工業大学・土木工学科研究報告 No. 26, 1980.
 - 13) Akaike, H. : Canonical correlation analysis of time series and the use of an information criterion, System Identification, Advances and Case Studies, Mathematics in Science and Engineering Vol. 126, 1976.
 - 14) 日野幹雄：スペクトル解析，朝倉書店，1977.
 - 15) 茅 陽一：自動制御工学，大学講座電子工学 20，共立出版，1969.
 - 16) Bestion, R.P. and J.B. Marius : Source areas of storm runoff, Water Res. Res., Vol. 5, No. 3, 1969.
 - 17) Dunne, T. and R.D. Black : Partial area contributions to storm runoff in a small New England watershed, Water Res. Res., Vol. 6, No. 5, 1970.

(1979.7.17・受付)