

立体骨組構造の増分つり合い方程式とその解法

AN INCREMENTAL FORMULATION FOR COMPUTER ANALYSIS OF SPACE FRAMED STRUCTURES

吉田 裕*・増田陳紀**・森本 剛***・広沢規行****

By Yutaka YOSHIDA, Nobutoshi MASUDA, Takeshi MORIMOTO
and Noriyuki HIROSAWA

1. はじめに

幾何的非線形問題の支配方程式の定式化は、Lagrange 流に空間に固定した座標系に基づく方法と、Euler 流に部材上に固定した座標系に基づく方法とに大別することができる。構造物の幾何的非線形解析にマトリックス法を適用した初期の研究に、節点の変位に伴う座標変換行列の変化を介して非線形性を評価したもの¹⁾があるが、これは後者に属する。ついで、座標変換行列の変化は単に部材剛性行列の座標変換に対してのみの問題ではなく、初期応力の存在のもとではその方向変化を与えることも非線形性に対する大きな要因であることに注目して、支配方程式が提案された²⁾。一方、Lagrange 流の定式化の場合には、座標変換行列は個々の部材について一定であり、ひずみ-変位関係の評価に非線形性がとり込まれ、仮想仕事の原理などに基いて部材の非線形剛性行列が誘導された^{3), 4)}。この場合、対象とする問題の非線形性の程度に応じて高次の非線形項が必要となり、部材剛性行列の作成に対する努力が払われてきた^{5)~8)}。しかし、非線形性の強い問題に対処しようとする場合に、むやみに高次の項まで導入し複雑な剛性行列を作成するのは現実的ではないということが認識され、その結果、各増分段階の出発点については Euler 流にそれまでの変形に基づいて座標変換行列を更新し、一増分間については Lagrange 流の増分関係式に基づいて解析すること(いわゆる up-dated Lagrangian formulation)が試みられた⁹⁾。他方、Euler 流の解析においても、一般に部材座標系と全体座標系との間の非線形の座標変換関係を有限の大きさの変位に対して解析的に評価するの

が困難であるため、一部の特殊な場合を除いて、step by step の計算を前提として高次の非線形項を省略した微分型の増分法が用いられているのが通常である^{10)~12)}。すなわち、従来の増分法においては、Lagrange 流にせよ Euler 流にせよ、一増分間の増分関係には程度の差はあるものの高次項を省略した関係式が用いられている場合がほとんどである。したがって、数値的な精度および安定性の面からとり得る増分量はごく小さい範囲に抑えられるのが普通である。

具体的な計算においては、変形後の座標変換行列および部材剛体回転を的確に評価するうえで、有限な回転をどのように取り扱うかが重要な問題となる。そのため、回転行列の概念を導入したり^{13), 14)}、Euler の角座標を導入したり^{12), 15)}、あるいはベクトル則に従うような新たな回転変位を定義導入する¹⁶⁾ことが行われている。

構造非線形問題の解法としては、Newton-Raphson 法を代表とし、収束計算を加速するための工夫^{17), 18)}や、特異点の通過に関する工夫¹⁹⁾も交えて、種々の反復解法がとられている^{20), 21)}。

本論文は、幾何的非線形性を節点における諸量の座標変換過程だけで表現する代りに、節点の動きを、各節点で異なった原点を有する変位によってではなく、共通の原点に基づいて評価される座標そのものによって描き、微小項を省略することなく変形後のつり合い条件を正しく満たす増分関係式を定式化することを試みたものである。本論文の範囲においては、構造全体の変形が非常に大きな場合でも個々の部材の変形は小さいとみなせる程度に要素分割を細かくすることを前提として、座標変換過程の処理を行う前の基本となる部材剛性行列には通常の一線形剛性行列を用いている。また、部材上に固定した部材座標系と空間に固定した全体座標系との間の節点変位の変換関係は、変形に直接寄与する変位成分と剛体変位成分とを明確に分離することにより忠実に評価している。得られる増分方程式は、通常微分型の増分方程

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 武蔵工業大学講師 工学部土木工学科

*** 宅地開発公団(研究当時・東京工業大学学生)

**** 学生会員 東京工業大学大学院修士課程

式^{2),10),14),22)}ではなく、増分そのものによって表された陰形式で非線形方程式となり、その解法が問題となる。ここでは、得られた増分方程式を微小項を省略することなくできるだけ精確に解き進むことが数値的に安定で精度のよい解を得るうえで重要な意味をもつものと考え、提示する増分つり合い方程式の独自性を踏まえて、座標変換行列および剛体回転など変位増分の関数である項と変位増分自身との増分つり合い式中における役割の相違を考慮した、予測子-修正子型の2段階近似-反復修正解析過程を構成している。

2. 部材座標系の定義および部材座標系での節点力増分-節点変位増分関係

(1) 部材座標系の定義

前述したように、本論文においては、個々の部材の部材座標系での節点力-節点変位関係は部材の変形が微小であるとの前提のもとに、線形関係が成り立つものと仮定している。この仮定ができるだけ任意の変位に対して妥当であるためには、部材座標系での変位にできるだけ剛体回転が含まれない方がよい。そのためは、部材の両端を結ぶ軸を部材軸の1つとすることが考えられ、部材座標系をここでは次のように定義する。このような部材座標系のとり方は、部材に固定の座標系としてはごく一般的であり、たとえば、前田・林¹⁴⁾によっても用いられている。

a) 初期状態での部材座標系 (x_0^*, y_0^*, z_0^* -系)

部材が真直で断面が部材軸に垂直な初期状態においては、節点1を原点、節点1より節点2を望む方向を z_0^* 軸、節点1における部材断面の強軸方向を x_0^* 軸とし、 y_0^* 軸は右手直交系となるように定める(図-1(a)参照)。なお、以下の記述において、* は部材座標系に関する諸量を表す記号であり、0 は初期状態での諸量を表す添字である。

b) 変形後の部材座標系 (x^*, y^*, z^* -系)

曲げとねじりの作用を受けて変形した状態において、原点と z^* 軸に関しては、a) の場合と同様に定義する。 x^*, y^* 軸に関しては次のように定める。いま、初期状態において節点1の断面に固定した x_0^*, y_0^* 軸および断面1に垂直な z_0^* 軸が変形(節点1の回転および移動)に伴って、 x^*, y^*, z^* 軸となったものとする。このとき、 z^* 軸と z_0^* 軸とのなす面に直交し節点1を通る軸 M の回りに x^*, y^*, z^* 軸を回転させて z^* 軸を z_0^* 軸に一致させたときに得られる直交系を x^*, y^* および z^* 軸と定義する(図-1(b)参照)。

ここに定義した部材座標系は一増分間においても部材

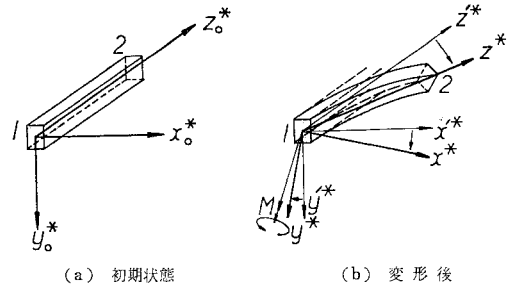


図-1 部材座標系- x^*, y^*, z^* -の定義

に固定されており、したがって、節点1の部材座標系での並進変位3成分、および節点2の x^*, y^* 軸方向並進変位2成分は常に0である。

(2) 部材座標系での節点力増分-節点変位増分関係

部材座標系を上記のように定義することにより、部材座標系での節点変位は剛体回転および剛体並進変位を含まず、部材変形に直接関与する成分のみによって構成される。したがって、部材の変形が微小な範囲では、部材座標系での節点変位も微小であり、部材座標系での節点力ベクトル f^* -節点変位ベクトル u^* 関係は線形関係が成り立つものと仮定する。これらの増分関係を次のように表す。

$$\Delta f^* = k^* \cdot \Delta u^* \dots \dots \dots (1)$$

ここで、節点変位成分は、 x^*, y^*, z^* 軸方向の並進変位3成分 u^*, v^*, w^* および x^*, y^*, z^* 軸回りの回転変位3成分 $\theta_{x^*}, \theta_{y^*}, \theta_{z^*}$ であり、対応する節点力成分は、 x^*, y^*, z^* 軸方向力 $F_{x^*}, F_{y^*}, F_{z^*}$ および x^*, y^*, z^* 軸回りのモーメント $M_{x^*}, M_{y^*}, M_{z^*}$ である(図-2参照)。すなわち、 k^* は、通常の 12×12 の線形剛性行列である。なお、内容の誤解を招かないように、本文中のベクトル記号はすべて列ベクトルとして用いている。

3. 全体座標系での節点変位から部材座標系での節点変位への変換

節点の動きを、変位によってではなく、座標そのもの

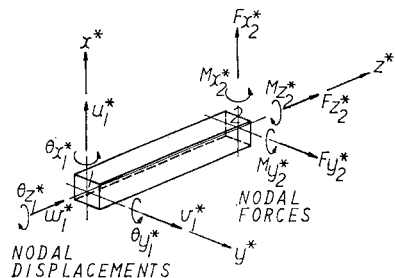


図-2 部材座標系での節点力および節点変位

と回転とによって描くならば、全体座標系での節点変位と部材座標系での節点変位の変換関係が容易に求まる。

(1) 並進変位成分

節点 i ($i=1, 2$) の部材座標系での並進変位成分ベクトル $d_i^{*(n)}$ は現段階 (第 n つり合い段階) での部材座標系での座標ベクトル $x_i^{*(n)}$ と初期状態での座標ベクトル $x_i^{*(0)}$ との差であるから、部材座標系の原点が節点 1 であることを考慮すると次のように表される (図-3 (a) 参照)。

$$d_i^{*(n)} = x_i^{*(n)} - x_i^{*(0)} = \{ \lambda \cdot (x_i - x_1) \}_{(n)} - \{ \lambda \cdot (x_i - x_1) \}_{(0)} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 x_i は節点 i の全体座標系での座標ベクトルであり、 λ は全体座標系から部材座標系への回転に関する座標変換行列である。すなわち、 $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ をそれぞれ、 x^*, y^*, z^* 軸の全体座標系 (x, y, z -軸) に対する方向余弦ベクトルとすると、

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_x^* \\ \lambda_y^* \\ \lambda_z^* \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3)$$

である。ただし、 T は転置を表すものとする。節点 i の座標ベクトル x_i は、初期状態での座標ベクトル $x_{i(0)}$ と現段階までの並進変位成分ベクトル d_i との和として、

$$x_i = x_{i(0)} + d_i \dots \dots \dots (4)$$

のように表されるから、式 (2) は、全体座標系と部材座標系との間の並進変位成分の変換関係として次のように書き直される。

$$d_i^{*(n)} = \{ \lambda \cdot [(x_{i(0)} - x_{1(0)}) + (d_i - d_1)] \}_{(n)} - \{ \lambda \cdot (x_{i(0)} - x_{1(0)}) \}_{(0)} \dots \dots \dots (5)$$

(2) 回転変位成分

節点 i の部材座標系での回転変位成分ベクトル $\theta_i^{*(n)}$ は、全体座標系での節点 i の回転成分ベクトルを $\theta_{i(n)}$ 、部材の剛体回転ベクトルを $\rho^{(n)}$ とすれば次式で与えられる (図-3 (b) 参照)。

$$\theta_i^{*(n)} = \{ \lambda \cdot (\theta_i - \rho) \}_{(n)} \dots \dots \dots (6)$$

(3) 部材節点変位ベクトルの変換関係

以上により部材座標系での節点変位と全体座標系での節点変位とが明確に関係づけられた。式 (5)

および (6) について、節点 1, 2 に関してまとめ、さらにそれらを合わせれば、部材単位の節点変位ベクトルの変換関係が次のように得られる。

$$u^{*(n)} = \left\{ T \cdot G \cdot \left(u + \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ -r \end{bmatrix} \right) \right\}_{(n)} - \left\{ T \cdot G \cdot \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_{(0)} \dots \dots \dots (7)$$

ここに、

$$u^{*(n)T} = \langle d_1^{*T} d_2^{*T} \theta_1^{*T} \theta_2^{*T} \rangle_{(n)} \dots \dots \dots (8)$$

$$u_{(n)}^T = \langle d_1^T d_2^T \theta_1^T \theta_2^T \rangle_{(n)} \dots \dots \dots (9)$$

$$x_{(0)}^T = \langle x_1^T x_2^T \rangle_{(0)} \dots \dots \dots (10)$$

$$r_{(n)}^T = \langle \rho^T \rho^T \rangle_{(n)} \dots \dots \dots (11)$$

$$T_{(n)} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{(n)} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (12)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \dots \dots \dots (13)$$

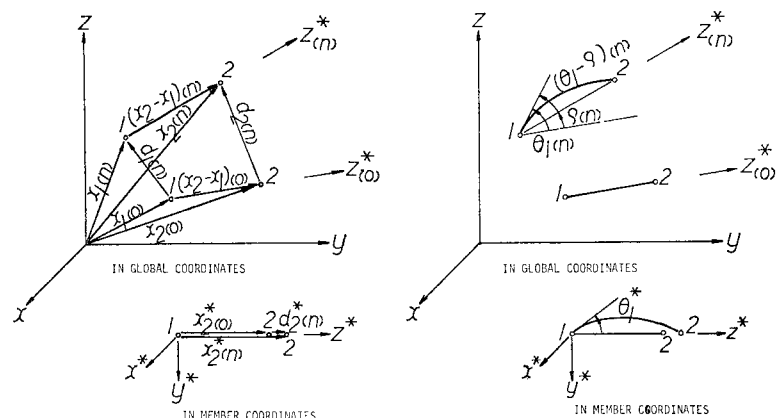
である。また、 I は 3×3 の単位行列、 0 は式 (7) では 6×1 の 0 ベクトルであり、式 (12) および (13) では 3×3 の 0 行列である。

(4) 増分関係

式 (7) から、部材座標系での節点変位増分ベクトル Δu^* は、全体座標系での諸量により次のように表される。

$$\Delta u^* = u^{*(n+1)} - u^{*(n)} = T_{(n+1)} \cdot G \cdot \left(\Delta u + \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta r \end{bmatrix} \right)_{(n)} + \Delta T \cdot G \cdot \left(u + \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ -r \end{bmatrix} \right)_{(n)} \dots \dots \dots (14)$$

ここに、 Δ は増分を表す記号であり、 $T_{(n+1)}$ 、 ΔT およ



(a) 並進変位成分 (b) 回転変位成分

図-3 全体座標系での節点変位と部材座標系での節点変位

び Δr , つまりそれらを構成する $\lambda_{(n+1)}$, $\Delta \lambda$ および $\Delta \rho$ は, 節点変位増分ベクトル Δu の関数である.

4. 全体座標系での増分つり合い方程式

(1) 全体座標系での節点力と部材座標系での節点力

節点力についての全体座標系と部材座標系との間の変換関係は, 節点変位の場合と異なり, 前述の座標変換行列 λ を用い, 通常の変換関係によって与えられる. すなわち, 部材座標系での節点 i の節点変位成分ベクトル, d_i^* , θ_i^* に対応する節点力成分ベクトルを s_i^* , m_i^* とし, 全体座標系での節点変位成分ベクトル d_i , θ_i に対応する節点力成分ベクトルを s_i , m_i とすれば,

$$s_i = \lambda^T \cdot s_i^* \dots\dots\dots (15)$$

$$m_i = \lambda^T \cdot m_i^* \dots\dots\dots (16)$$

である. 節点変位の場合と同様に, これを部材単位に拡大し, さらに増分をとれば, 次式を得る.

$$\Delta f = T_{(n+1)}^T \cdot \Delta f^* + \Delta T^T \cdot f^*_{(n)} \dots\dots\dots (17)$$

ここに,

$$f^T = \langle s_1^T \ s_2^T \ m_1^T \ m_2^T \rangle \dots\dots\dots (18)$$

$$f^*T = \langle s_1^*T \ s_2^*T \ m_1^*T \ m_2^*T \rangle \dots\dots\dots (19)$$

である.

(2) 全体座標系での増分つり合い方程式

式 (17) に式 (1) および式 (14) を代入すれば, 本解析法の基礎となる 全体座標系での 部材の節点力増分-節点変位増分関係が次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \Delta f &= T_{(n+1)}^T \cdot k^* \cdot \Delta u^* + \Delta T^T \cdot f^*_{(n)} \\ &= T_{(n+1)}^T \cdot k^* \cdot T_{(n+1)} \cdot G \cdot \left(\Delta u + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\Delta r \end{Bmatrix} \right) \\ &\quad + T_{(n+1)}^T \cdot k^* \cdot \Delta T \cdot G \cdot \left(u + \begin{Bmatrix} x^{(0)} \\ -r \end{Bmatrix} \right)_{(n)} \\ &\quad + \Delta T^T \cdot f^*_{(n)} \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

式 (20) は, 式 (1) が成り立つという前提のうえで, 以後の定式過程においてはいっさい微小項の省略を行わずに誘導された式であり, したがって, 式 (20) に基づく増分つり合い方程式は, 部材の変形が微小であるという前提のもとで, 変位増分の大きさによらず任意の増分に対して増分後のつり合い条件を満たす.

5. 増分つり合い方程式の反復修正解析過程

式 (20) に基づく増分つり合い方程式は, 通常の変形型の方程式ではなく, 増分そのものによって変形後のつり合い条件を正しく表した式である. この非線形で陰形式の要素増分つり合い方程式に基づいて, 具体的にどの

ように構造全体系の増分つり合い方程式を構成し, それを解くかがここでの問題である. 構造全体系の方程式を構成するために, 式 (20) の要素関係式を変位増分に関して線形なものとして評価し, 線形計算の繰り返しによる求解過程を考える. 問題は, 節点変位増分 Δu の関数である増分後の座標変換行列 $\lambda_{(n+1)}$, 座標変換行列の変化量 $\Delta \lambda$ および剛体回転増分 $\Delta \rho$ を反復計算の流れの中でどのように評価するかということになる.

ここでは, 次のような解法を提案する. すなわち, まず, 2段階近似によって精度のよい近似解を求め, その近似解をもとにして反復修正計算を行う方法である.

いま, つり合い径路を模式化して示した図-4において, 点Aを第 n つり合い段階のつり合い点とし, 第 $n+1$ つり合い段階のつり合い点Hを, 荷重制御により求めるものとする.

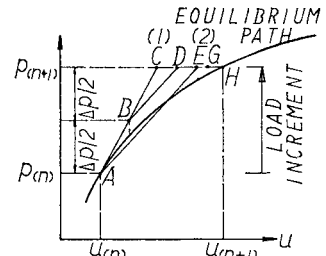


図-4 解析過程の概念図 (荷重制御)

(1) 2段階近似過程

a) 第1近似

第 n つり合い段階に対する情報しか得られていない最初の状態では, $\lambda_{(n+1)}$ については点Aでの値 $\lambda_{(n)}$ で近似し, $\Delta \lambda$ および $\Delta \rho$ については点Aで Δu に関して線形化して, 荷重増分 $\Delta \rho$ に対する第1近似解 Δu_1 を求める. 第 $n+1$ つり合い段階の第1近似つり合い点は図-4において点Cに相当する.

b) 第2近似

次に, 第2近似を求めるに際しては, $\lambda_{(n+1)}$ については, 第1近似つり合い点Cでの値 $\lambda_{(c)}$ を用いて近似する. 一方, $\Delta \lambda$, $\Delta \rho$ については, 増分間の平均的な変化率を与えるために, $\Delta u_1/2$ によって与えられるACの中点Bにおいて線形化し, 第2近似解 Δu_2 を求める. 第 n つり合い段階の第2近似つり合い点は図-4において点Eに相当する.

(2) 反復修正過程

以後は, 十分収束するまで反復修正計算を行う. ここでは, $\lambda_{(n+1)}$, $\Delta \lambda$ および $\Delta \rho$ のいずれについても変位増分自身 Δu との相対で変動の少ない量であると考え, $\Delta \lambda$, $\Delta \rho$ についても線形化は行わず, $\lambda_{(n+1)}$ と同様に1つ前の近似点(点G)において評価し, Δu のみを未知数として新たな近似解 Δu を求める.

以上の1増分間の求解過程において, 部材に固有の線

形剛性行列 k^* 、マトリックス G 、および初期座標ベクトル $x_{(0)}$ 、ならびに、第 n つり合い段階での内力ベクトル $f^*_{(n)}$ 、節点変位ベクトル $u_{(n)}$ および剛体回転ベクトル $r_{(n)}$ は既知量である。

なお、数値計算上、収束基準との関連で残存する不つり合い力については、一般的に行われているように次の増分段階の荷重増分に付け加えるものとする。

6. 変形後の座標変換行列および剛体回転の評価

具体的な数値計算を行ううえでは、全体座標系での節点変位 u が与えられたときにその関数である各部材の座標変換行列 λ および剛体回転 ρ を実際にどのように評価するかが重要な問題となる。ここでは、 λ, ρ の評価ならびにそれらの増分の変位増分 Δu に関する線形化の方法について述べる。下記の、ベクトルの回転を用いる λ の評価方法に関しては前田・林⁽⁴⁾によって詳しく展開されたところであるが、 ρ の評価ならびに $\Delta \lambda, \Delta \rho$ の線形化について述べるうえで重要な意味をもつので具体的に記述することとする。

(1) 単位ベクトル $\bar{\lambda}$ 回りにベクトル y を角 $\bar{\theta}$ だけ回転させたときに得られるベクトル a について

はじめに、以下の議論の都合上、ベクトルの回転について触れる。ベクトル y を、その始点を通る単位ベクトル $\bar{\lambda}$ を軸として角 $\bar{\theta}$ だけ回転させたときに得られるベクトルを a とすると、 a は次式によって与えられる(図-5 参照)。

$$\begin{aligned} a &= \overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MC'} \\ &= (\bar{\lambda} \cdot y) \cdot \bar{\lambda} + \{y - (\bar{\lambda} \cdot y) \cdot \bar{\lambda}\} \cdot \cos \bar{\theta} \\ &\quad + (\bar{\lambda} \times y) \cdot \sin \bar{\theta} \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ただし、 \cdot 、 \times はそれぞれスカラー積およびベクトル積を表す。

(2) 座標変換行列 λ

初期状態の部材座標系(対応する座標軸の方向余弦ベクトルは $\lambda_{x_0^*}, \lambda_{y_0^*}, \lambda_{z_0^*}$ である)は通常のコードアング

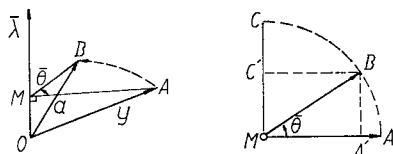


図-5 ベクトルの回転

ルの指定によって定める。変形後の部材座標系は、2. の部材座標系の定義に従って次のように評価する。

まず、節点 1 の全体座標系での回転成分ベクトル $\theta_1^T = \langle \theta_x \ \theta_y \ \theta_z \rangle_1$ の方向の単位ベクトル

$$\lambda_{\theta_1} = \theta_1 / |\theta_1| \dots\dots\dots (22)$$

を用いれば、図-1 (b) における変形後の断面 1 の方向余弦ベクトル $\lambda_{x_1^*}, \lambda_{y_1^*}, \lambda_{z_1^*}$ は、それぞれ初期状態の部材座標軸の方向余弦ベクトル $\lambda_{x_0^*}, \lambda_{y_0^*}, \lambda_{z_0^*}$ を λ_{θ_1} の回りに、角 $\theta_{t_1} = \sqrt{\theta_{x_1}^2 + \theta_{y_1}^2 + \theta_{z_1}^2} = |\theta_1|$ だけ回転することによって得られる。これは式 (21) を用いればよい。ただし、 $|\cdot|$ は、ベクトルのノルムを表す記号である。

$\lambda_{z_1^*}$ は、変形後の部材両節点を結ぶ軸の方向余弦ベクトルであるから、

$$\lambda_{z_1^*} = (x_2 - x_1) / |x_2 - x_1| \dots\dots\dots (23)$$

によって与えられる。したがって、図-1 (b) における回転軸 M の方向余弦ベクトル λ_M および回転量 θ_M は、

$$\lambda_M = (\lambda_{z_1^*} \times \lambda_{z_0^*}) / |\lambda_{z_1^*} \times \lambda_{z_0^*}| \dots\dots\dots (24)$$

$$\theta_M = \sin^{-1} (|\lambda_{z_1^*} \times \lambda_{z_0^*}|) = \cos^{-1} (\lambda_{z_1^*} \cdot \lambda_{z_0^*}) \dots\dots (25)$$

によって与えられるから、式 (21) を用いて $\lambda_{x_1^*}, \lambda_{y_1^*}$ を回転させることにより、変形後の部材座標軸の方向余弦ベクトル $\lambda_{x_1^*}, \lambda_{y_1^*}$ が定まる。

(3) 剛体回転 ρ

剛体回転は、部材の初期状態での座標軸方向余弦ベクトル $\lambda_{x_0^*}, \lambda_{y_0^*}, \lambda_{z_0^*}$ を、ある 1 つの軸 L 回りに回転させて、現在の座標軸方向余弦ベクトル $\lambda_{x_1^*}, \lambda_{y_1^*}, \lambda_{z_1^*}$ に一致させるときの回転によって評価する。このような 1 つの軸 L は、 $\lambda_{x_0^*}$ と $\lambda_{x_1^*}$ との 2 等分面上になければならず、同様に、 $\lambda_{y_0^*}$ と $\lambda_{y_1^*}$ との 2 等分面上、 $\lambda_{z_0^*}$ と $\lambda_{z_1^*}$ との 2 等分面上になければならない。したがって、これらの 2 等分面の交線として軸 L が定まる。実際には、2 つの 2 等分面の交線を求めれば十分である。

$\lambda_{x_0^*}$ と $\lambda_{x_1^*}$ の 2 等分面は、その面の法線ベクトル μ_x によって一義的に定められるが、 μ_x は、たとえば、

$$\mu_x = (\lambda_{x_0^*} \times \lambda_{x_1^*}) \times (\lambda_{x_0^*} + \lambda_{x_1^*}) \dots\dots\dots (26)$$

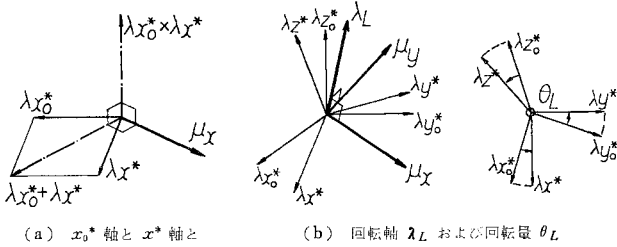
によって与えられる(図-6 (a) 参照)。 $\lambda_{y_0^*}$ と $\lambda_{y_1^*}$ との 2 等分面に対する法線ベクトルを同様に μ_y とすれば、求める回転軸 L の方向余弦ベクトル λ_L は、たとえば、

$$\lambda_L = (\mu_x \times \mu_y) / |\mu_x \times \mu_y| \dots\dots\dots (27)$$

のように得られる(図-6 (b) 参照)。

回転の大きさ θ_L は、 $\lambda_{x_0^*}, \lambda_{y_0^*}, \lambda_{z_0^*}$ のいずれかを、 λ_L の回りに回転させて $\lambda_{x_1^*}, \lambda_{y_1^*}, \lambda_{z_1^*}$ のうちの対応するベクトルに一致させるに必要な回転角として求める。

以上より、部材の剛体回転 ρ を次式によって評価する。



(a) x_0^* 軸と x^* 軸との2等分面に対する法線ベクトル μ_x

(b) 回転軸 λ_L および回転量 θ_L

図-6 剛体回転 $\rho = \theta_L \cdot \lambda_L$ の評価

$$\rho = \theta_L \cdot \lambda_L \dots\dots\dots (28)$$

(4) $\Delta\lambda$ の線形化

座標変換行列の増分 $\Delta\lambda$ を，全体座標系での節点変位増分 Δu に関して線形化するわけだが，ここでは，まず，線形化を行う状態 Γ における部材座標系を中間座標系 ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ -系) として固定し，節点変位増分によって移動する部材座標系と中間座標系との間の座標変換行列を考える。すなわち，まず中間座標系から部材座標系への座標変換行列 $\bar{\lambda}$ について，その増分 $\Delta\bar{\lambda}$ を中間座標系での節点変位増分 $\Delta\bar{u}$ に関して線形化する。ついで得られた表示式を全体座標系での表示式に変換する。

線形化を行う状態 Γ での座標変換行列 $\bar{\lambda}$ は，明らかに

$$\bar{\lambda}^T = [\bar{\lambda}_{x^*} \ \bar{\lambda}_{y^*} \ \bar{\lambda}_{z^*}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

である (図-7 (a) 参照)。

$\bar{\lambda}_{x^*}$ の $\Delta\bar{u}_1$ に関する変化率は 図-7 (b) を参照すれば，

$$\frac{\partial \bar{\lambda}_{x^*}}{\partial \Delta\bar{u}_1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/l \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

であることがわかる。ここに， l は部材の長さである。

同様に，各節点変位成分に関する変化率を求め，これらをならべれば，

$$\frac{\partial \bar{\lambda}_{x^*}}{\partial \Delta\bar{u}^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/l & 0 & 0 & -1/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

を得る。ここに $\mathbf{0}$ は 3×3 の 0 行列である。

したがって， $\Delta\bar{\lambda}_{x^*}$ は $\Delta\bar{u}$ に関して次のように線形化される。

$$\Delta\bar{\lambda}_{x^*} = \frac{\partial \bar{\lambda}_{x^*}}{\partial \Delta\bar{u}^T} \cdot \Delta\bar{u} \dots\dots\dots (32)$$

$\Delta\bar{u}$ および $\Delta\bar{\lambda}_{x^*}$ は，全体座標系から中間座標系への座標変換行列 $\lambda_{(\Gamma)}$ を用いて，通常座標変換により，

$$\Delta\bar{u} = T_{(\Gamma)} \cdot \Delta u \dots\dots\dots (33)$$

$$\Delta\bar{\lambda}_{x^*} = \lambda_{(\Gamma)} \cdot \Delta\lambda_{x^*} \dots\dots\dots (34)$$

のように，全体座標系での諸量に変換できるから，結局，

$$\Delta\lambda_{x^*} = \lambda_{(\Gamma)}^T \cdot \frac{\partial \bar{\lambda}_{x^*}}{\partial \Delta\bar{u}^T} \cdot T_{(\Gamma)} \cdot \Delta u \dots\dots\dots (35)$$

$$\Delta u^T = \langle \Delta u_1 \ \Delta v_1 \ \Delta w_1 \ \Delta u_2 \ \Delta v_2 \ \Delta w_2 \ \Delta\theta_{x1} \ \Delta\theta_{y1} \ \Delta\theta_{z1} \ \Delta\theta_{x2} \ \Delta\theta_{y2} \ \Delta\theta_{z2} \rangle \dots\dots\dots (36)$$

が得られる， $\Delta\lambda_{y^*}$ ， $\Delta\lambda_{z^*}$ についても同様である。

ただし，

$$\frac{\partial \bar{\lambda}_{y^*}}{\partial \Delta\bar{u}^T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & 0 & 0 & -1/l & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (37)$$

$$\frac{\partial \bar{\lambda}_{z^*}}{\partial \Delta\bar{u}} = \begin{bmatrix} -1/l & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (38)$$

である。

(5) $\Delta\rho$ の線形化

$\Delta\rho$ の場合も， $\Delta\lambda$ の場合とまったく同様にして，次の線形式式を得る。

$$\Delta\rho = \lambda_{(\Gamma)}^T \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \Delta\bar{u}^T} \cdot T_{(\Gamma)} \cdot \Delta u \dots\dots\dots (39)$$

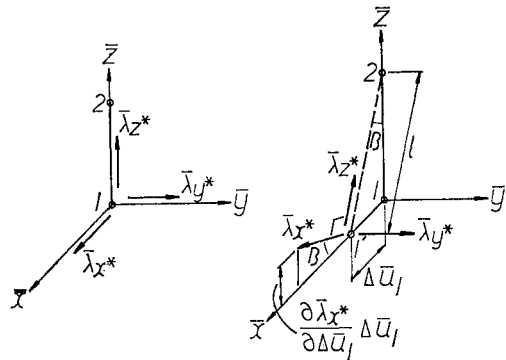
ここに，

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \Delta\bar{u}^T} = \begin{bmatrix} 0 & 1/l & 0 & 0 & -1/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/l & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (40)$$

である。すなわち 図-8 および部材座標系の定義より，

$$\Delta\bar{\rho}_{x^*} = (\Delta\bar{v}_1 - \Delta\bar{v}_2)/l \dots\dots\dots (41)$$

$$\Delta\bar{\rho}_{y^*} = (\Delta\bar{u}_2 - \Delta\bar{u}_1)/l \dots\dots\dots (42)$$



(a) 中間座標系 ($\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ -系) (b) $\frac{\partial \bar{\lambda}_{x^*}}{\partial \Delta\bar{u}_1}$

図-7 座標変換行列の変化量の線形化

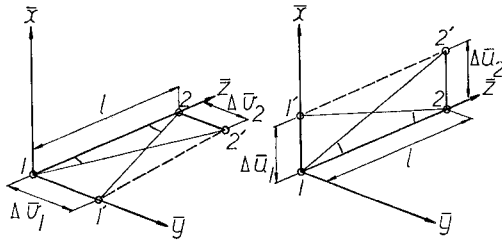


図-8 剛体回転増分の線形化

$$d\bar{p}_{2*} = \Delta\bar{\theta}_2, \dots \dots \dots (43)$$

である。

7. 数値解析例に基づく提案する解析法の妥当性の検証

以上に提示した骨組構造の大変位解析法の特長および有効性を具体的な数値解析例に基づいて検討した結果、本論文で定式化した増分つり合い方程式は、提案した解法とあいまって、大きな増分に対しても数値的に安定で精度のよい解を与えることが明らかとなった。以下にいくつかの解析例を示し、本解析法の特長、妥当性を実証する。

(1) 線形部材剛性行列を用いることの妥当性の検証

最も基本的な問題の1つである、軸圧縮を受ける一軸部材のエラスティカの問題を対象として、部材座標系での剛性行列には線形剛性行列を用いた本解析法、大変位問題に対する適用の妥当性を、楕円積分分解との比較を通じて検証する。解析対象は図-9(a)に示すような一端固定、他端自由の柱が自由端に鉛直方向の集中荷重を受ける問題であり、長さ方向に8等分割として解析を行っている。構造諸元は図中に示したとおりである。解析にあたっては初期たわみとして図中に示したような正弦波形を与えている。得られた荷重-変位曲線を図-9(b)に示す。図中●印は荷重-横たわみ曲線、●印は荷重-鉛直方向変位曲線である。実線が楕円積分分解である。計算結果は、8分割というかなり少ない分割数での結果にもかかわらず、図中にCで示したような非常に大きな変形を生ずる領域までも、楕円積分分解とよく一致している。

(2) 立体トラス構造に対する適用性の検証

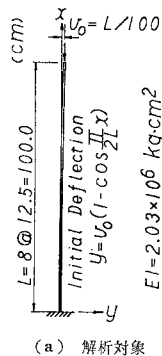
本解法は、軸力部材に限定した解法で

はなく、軸力、曲げおよびねじりを同時に受ける部材を対象とした解法であるが、そのような部材で立体的に構成される構造の有限変位問題に関しては、比較の対象となるような結果があまり報告されていない。したがってここでは立体構造に対する基本的な適用性を検証するために、Hangai, Kawamata²³⁾が与えた、図-10(a)に示すようなトラスドーム構造を対象として解析を行う。構造諸元は図中に示すとおりである。

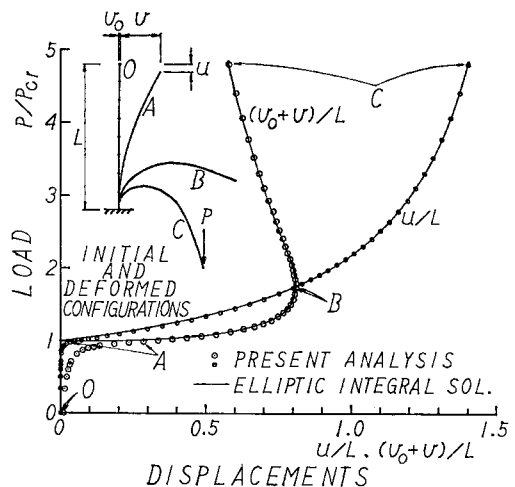
頂点(節点A)に鉛直方向集中荷重が作用する場合の解析結果を図-10(b)~(d)に示す。図-10(b)~(d)はそれぞれ、節点Aの荷重-鉛直変位曲線、節点Bの荷重-鉛直変位曲線および荷重-水平変位曲線である。図中●印が本解析結果であり、一点鎖線は Hangai, Kawamata による振動法を用いた結果、破線は Jagannathan, Epstein, Christiano²⁴⁾によるトラスシェルを対象とした解法による結果である。

変形の小さな領域においては、本解析結果は Hangai らの結果とよく一致しているが、変形がさらに大きくなった領域においては両者の結果に相違がみられる。本問題は構造および荷重条件に対称性があり、したがって、節点Aの荷重-変位曲線は鉛直変位が $v=4\text{ cm}$ のとき荷重 0 となるはずであり、同時に、節点Bの荷重-変位曲線は荷重-変位図の原点を通過するはずである。本計算結果は Jagannathan らの結果とともにこの点を満足している。

一方、Jagannathan らの結果は上記の点を満足するものの全体的に本計算結果と異なっており、特に、変形の小さな領域においても、この領域ではほぼ正解を与えていると思われる Hangai らによる結果と異なった結果を与えている。以上の結果から判断すれば、ここにあ



(a) 解析対象



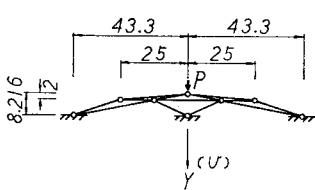
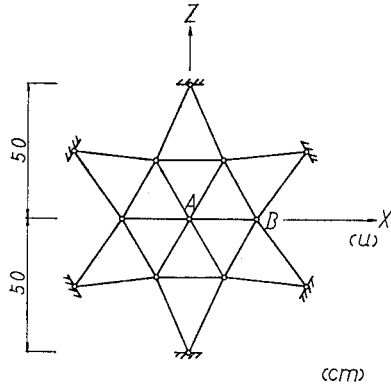
(b) 荷重-変位曲線および変形図

図-9 エラスティカ

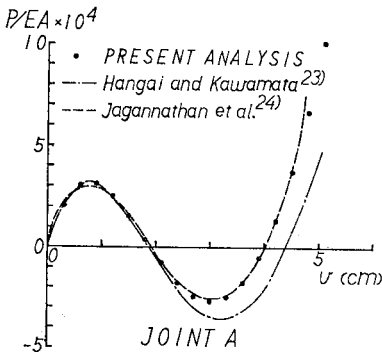
げた3つの解法の中では、本論文で提示した解析法が最も信頼し得る結果を与えているものと考えられる。

(3) 曲げおよびねじりを受ける問題に対する適用性の検証

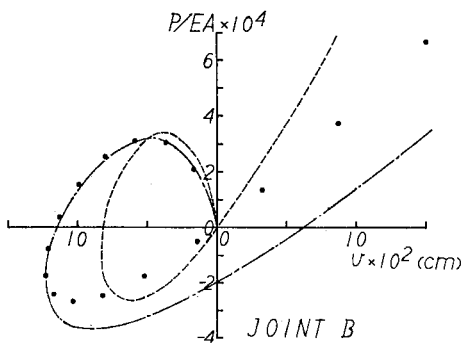
ここでは、曲率中心に向かう等分布荷重を受ける両端



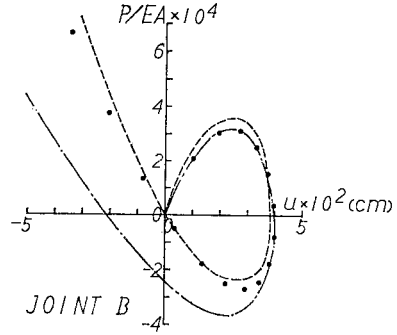
GEOMETRY OF THE TRUSSED DOME
(a) 解析対象



(b) 節点Aの荷重-鉛直方向変位曲線



(c) 節点Bの荷重-鉛直方向変位曲線



(d) 節点Bの荷重-水平方向変位曲線

図-10 トラスドーム

固定円弧アーチの面外座屈問題を取り上げ、深沢²⁵⁾による理論解および実測値との比較を通じて、曲げおよびねじりを受ける問題に対する本解法の適用性を検証する。解析対象は 図-11 (a) に示すような $f/l=0.15$ の円弧アーチであり、構造諸元は図中に示したとおりである。

荷重条件については、理論的には、a) 曲率中心に向かう円弧上に沿った等分布荷重 q に対して解かれており、実験的には、b) 水平方向に等分布の鉛直方向荷重 w に対して扱われていることを考慮し、本解法では、これら2つの場合のそれぞれに対応する計算を行っている。ただし、本解析においては、全長を円弧上に沿って16等分割し、荷重を節点に作用する集中荷重として扱っている。なお、ここでは、変形後の荷重の作用方向が常に初期状態の荷重の作用方向に平行な場合を対象とする。

初期たわみとして、頂点の水平方向変位 $u_0=0.01$ cmを与えた場合の解析結果より、頂点の荷重-水平方向変位曲線を 図-11 (b) に示す。深沢によれば、 $f/l < 1/5$ では、荷重条件 a) および b) による相違は数%以下であるが、本計算結果においても両者の相違は3~4%程度である。ただし、荷重条件 b) については、 $q=w \cdot l/L$ によって、等分布荷重 w を、荷重条件 a) の場合の等分布荷重 q に換算してある。図-11 (b) において、破線は実測による荷重-変位関係であり、一点鎖線は曲げねじり剛性を0とした場合の座屈荷重の理論解である。本解法による座屈荷重の計算結果は、実測結果と比較すると30%以上低めの値を与えているが、これは主として曲げねじり剛性を無視したためと考えられ、曲げねじり剛性を0とした場合の理論解とはほぼ等しい座屈荷重を与えている。

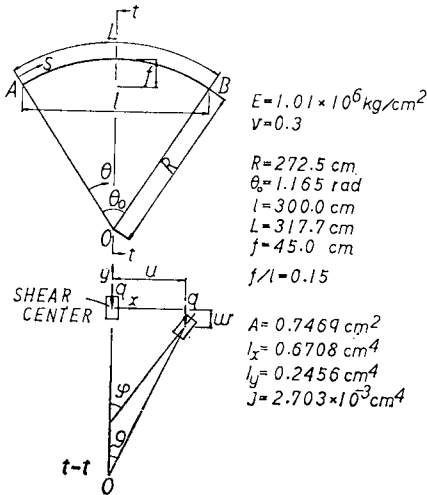
図-11 (c) は曲げねじれ座屈波形を比較して示したものである。ここに、 θ および φ は 図-11 (a) 中に定義したような角である。図は座屈波形を無次元化して表したものであるが、本解析結果は、固定端近傍におけるねじれ角 φ に関する相違があるものの、全体的には、実

測結果とも理論解ともかなりよく一致している。

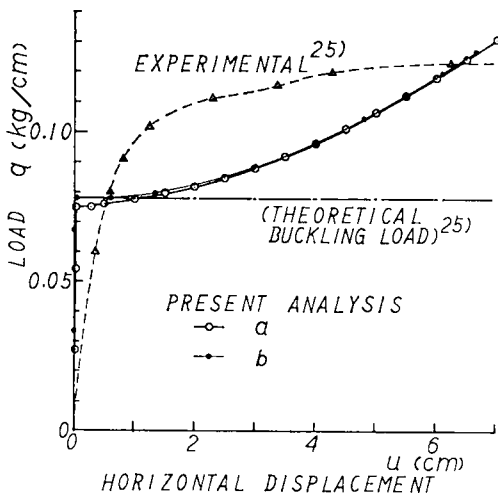
(4) 非常に大きな増分に対する数値的安定性の検証

図-12 (a) に示すような、一端固定、他端ヒンジの深いアーチが中点に鉛直方向集中荷重を受けるときの大変位問題を対象に解析を行った結果、本解析法が増分計算のみで座屈および座屈後の挙動を連続的に追跡することができ、かつ非常に大きな増分に対しても数値的に安定な解法であることが明らかとなった。以下に解析結果を示す。構造諸元は 図-12 (a) 中に示したとおりであり、用いた分割数は 48 である。

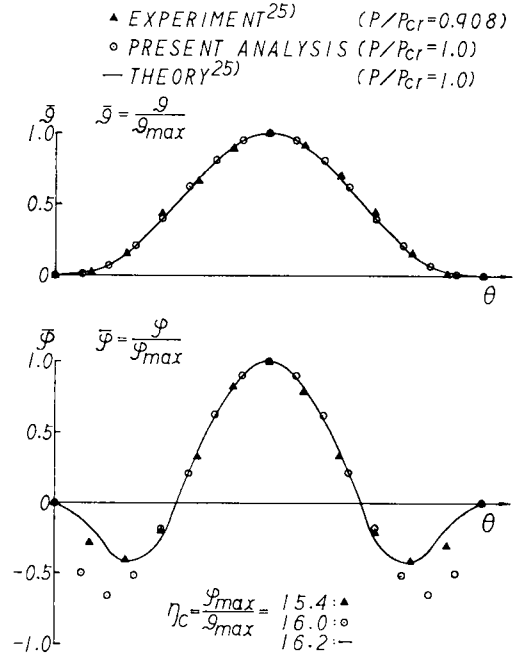
得られた結果より、荷重作用点の荷重-鉛直変位および荷重-水平変位挙動を解析解²⁶⁾と比較して 図-12 (b) に示すが、解析解は 図中 $\lambda=7.23$ として示したところまでしか求められていない。◎印が本解析結果であり、



(a) 解析対象



(b) 頂点の荷重-水平方向変位曲線



(c) 曲げねじり座屈波形

図-11 円弧アーチの面外座屈

破線が解析解である。この問題は、鉛直変位 V が半径 R に対して $V=1.2R$ の近傍において、つり合い形状が 図-12 (c) に示すように非常に急激に変化し、荷重低下を生ずる問題である。本解析法によれば、急激な形状変化部 (図-12 (b) の点線部) において反復回数が多くなり、解の収束が困難になるが、不つり合い力の次増分段階への繰り越しによって、その後のつり合い径路が再び安定に得られている。

また、 $V/R=1.0$ というような非常に大きな増分を一気に与えた場合にも解は一義的に収束し、その場合の反復回数についても、この間を 10 等分割で計算した場合の各反復回数 5 回と比較して、不つり合い力に対する同じ収束判定基準のもとで 2 倍に満たない 8 回という回数で収束解が得られる。

さらに、極大荷重を超えた、 $V/R=1.2$ というような増分を一気に与えた場合にも解は収束する。図-12 (d) はこのときの収束状況を、変形形状の推移によって示したものであるが、この場合には、反復回数 20 回程度で図では区別できない程度に収束解に達している。

なお、以上に示した計算結果はすべて変位増分を制御して行った結果である。

8. おわりに

骨組構造の大変位解析に関する研究においては、部材

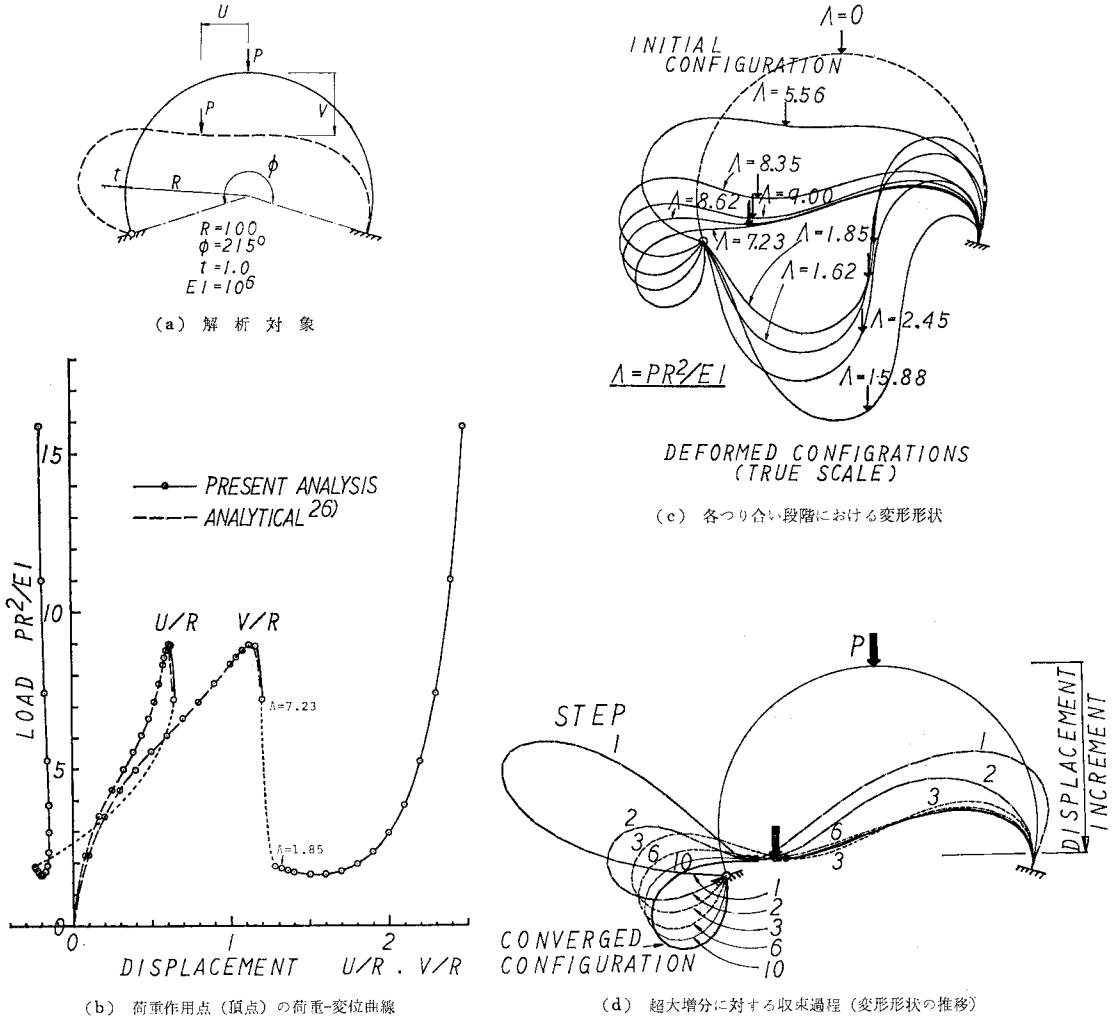


図-12 一端ヒンジ, 他端固定アーチ

の力学的挙動を表現する際に種々の有限変位場の概念が導入され, それに基づいて幾何剛性行列が誘導されるのが通常である. これに対して本論文においては, 個々の部材の変形に関する非線形性についてはひとまず無視することとし, 構造全体系の変形に関する非線形性, いかえれば, 個々の部材の位置の変化に基づく幾何的非線形性, を対象とする大変位解析法を提示した. すなわち, 提示した解析法においては, 個々の節点の動きを単なる変位によってではなく, 座標および回転角によって描くことにより, 任意の増分に対して部材の移動および形状変化を的確に把握している. その結果, 全体座標系での節点力増分と節点変位増分とを関係づける増分つり合い方程式を, 部材の変形が微小であるとみなせる程度に要素分割を細かくするという前提のもとで, 増分量によらず増分後のつり合い条件を満足する形で定式化している.

増分つり合い方程式の定式化は, 節点座標, 節点変位, 節点力, 座標変換行列など, すべて節点における諸量の, 空間に固定した全体座標系と, 部材とともに移動する部材に固定した部材座標系との間の座標変換過程によって処理される.

得られた非線形の増分つり合い方程式に対する解法として, ここでは, 微小項を省略することなくできるだけ忠実にかつ効率的に解き進むべく, 座標変換行列, 剛体回転などの変位の関数である非線形項の, つり合い方程式中での役割, ならびにつり合い方程式に与える影響度を考慮して反復修正解析過程を構成した.

2軸回りの有限な回転を生ずる問題に対する適用性の検証など, いまだ種々検討すべき事項が残されていることも事実であり, 立体骨組構造解析のための解法としての完全な検証は本論文の範囲内では行い得ていないが, 具体的な数値解析例により, 本解法の基礎的な特性を明

らかにすることができたと考える。

本解法の基礎的な特性を要約すると、

(1) 個々の要素の剛性行列を線形としても、構造全体の幾何的非線形形状を十分表現し得る。

(2) 固有値解析など特別な手法を要することなく、増分計算のみで急激な形状変化を伴う挙動を追跡することができる。

(3) 通常とられている増分と比べてかなり大きな増分に対しても発散することがなく数値的に安定である。などである。

本論文中の計算は、すべて、東京工業大学付属総合情報処理センターの計算機 M-180 を用いて行われたことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Turner, M.J., E.H. Dill, H.C. Martin and R.J. Melosh: Large deflections of structures subjected to heating and external loads, *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 27, pp. 97~106, Feb., 1960.
- 2) Argyris, J.H.: Continua and discontinua, *Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. Tech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, pp. 151~169, Oct., 1965.
- 3) Mallet, R.H. and P.V. Marcal: Finite element analysis of non-linear structures, *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 94, No. ST 9, pp. 2081~2105, Sep., 1968.
- 4) Martin, H.C.: Finite elements and the analysis of geometrically nonlinear problems, *Recent Advances in Matrix Methods and Structural Analysis and Design*, Univ. of Alabama Press, pp. 343~381, 1971.
- 5) Tezcan, S.S. and B.C. Mahapatra: Tangent stiffness matrix for space frame members, *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 95, No. ST 6, pp. 1257~1268, June, 1969.
- 6) Tada, Y. and G.C. Lee: Finite element solutions to an elastica problem of beams, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 2, pp. 229~241, 1970.
- 7) Marcal, P.V.: Large strain, large displacement analysis/Instability analysis using the incremental stiffness matrices, *Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics*, Univ. of Alabama Press, 1973.
- 8) 篠崎 武: 平面骨組の大変形解析, 土木学会論文報告集, 第224号, pp. 47~53, 1974年4月.
- 9) Gallagher, R.H.: Finite element analysis of geometrically nonlinear problems, *Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis*, Proc. 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis, pp. 109~123, 1973.
- 10) 大地幸三: 構造解析とコンピュータ, 第6章, pp. 239~249, 1971年5月.
- 11) 山田嘉昭: 塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座 II-2-A, 培風館, 1972年5月.
- 12) Besseling, J.F.: Non-linear analysis of structures by the finite element method as a supplement to a linear analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No. 3, pp. 173~194, 1974.
- 13) Oran, C.: Tangent stiffness in space frames, *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 99, No. ST 6, pp. 987~1001, June, 1973.
- 14) 前田幸雄・林 正: 立体骨組構造物の有限変位解析, 土木学会論文報告集, 第253号, pp. 13~27, 1976年9月.
- 15) Bathe, K.J. and S. Bolourchi: Large displacement analysis of three-dimensional beam structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, pp. 961~986, 1979.
- 16) Argyris, J.H., P.C. Dunne and D.W. Scharpf: On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 14, pp. 401~451, 1978; No. 15, pp. 99~135, 1978.
- 17) Nayak, G.C. and O.C. Zienkiewicz: Note on the 'alpha-constant stiffness method for analysis of non-linear problems', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 4, pp. 579~582, 1972.
- 18) 前田幸雄・林 正・中村 守: 増分法による平面骨組構造物の大変位解析の加速計算法, 土木学会論文報告集, 第223号, pp. 1~9, 1974年3月.
- 19) 細野 透: 弧長法による弾性座屈問題の解析/(その1) 座屈点における増分解の性質, 日本建築学会論文報告集, 第242号, pp. 41~49, 1976年4月, (その2) 数値解析方法としての弧長法, 第243号, pp. 21~31, 1976年5月.
- 20) Oden, J.T.: *Finite Element of Nonlinear Continua*, Chap. IV, McGraw-Hill, pp. 229~344, 1972.
- 21) 西脇威夫・後藤茂夫・平谷裕彦: 骨組構造物の幾何学的非線形問題/(その1) 概論/(その2) 主として長径間つり橋に関する非線形問題について/(その3) 振動法による弾性安定問題の解析, 骨組構造解析法要覧(成岡昌夫・中村恒善共編), 培風館, pp. 51~67/pp. 68~90/pp. 91~117, 1976年4月.
- 22) 後藤茂夫・羽根悟朗・田中達朗: 接線剛性法による骨組構造物の大変位解析, 土木学会論文報告集, 第238号, pp. 31~42, 1975年6月.
- 23) Hangai, Y. and S. Kawamata: Analysis of geometrically nonlinear and stability problems by static perturbation method, *Report of the Inst. of Industrial Science, the Univ. of Tokyo*, Vol. 22, No. 5 (Serial No. 143), 1973.
- 24) Jagannathan, D.S., H.I. Epstein and P.P. Christiano: Snap-through buckling of reticulated shells, *Proc. Instn Civ. Engrs*, Part 2, Vol. 59, pp. 727~742, Dec., 1975.
- 25) 深沢泰晴: 軸圧縮力を受ける円弧アーチの曲げねじれ座屈に関する研究, 土木学会論文集, 第96号, pp. 29~47, 1963年8月.
- 26) Da Deppo, D.A. and R. Schmit: Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load, *Trans. ASME*, pp. 894~896, Dec., 1975.
- 27) Zienkiewicz, O.C.: *The Finite Element Method*, the third edition, Chp. 19, McGraw-Hill, pp. 500~526, 1977.
- 28) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆: 薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法, 土木学会論文報告集, 第288号, pp. 41~55, 1979年8月.