

2 相混合体理論からみた有効応力の定義について

ON THE DEFINITION OF EFFECTIVE STRESS
BY THE THEORY OF 2-PHASE MIXTURE岡 二三生*
By Fusao OKA

1. ま え が き

Terzaghi^{1),2)}によって明確に意識され、提案された、有効応力の概念は、土質力学の分野において中心的な役割を果たしており、経験的に有用な概念であることが知られている。しかしながら、その物理的意味の検討は、十分であるといいたいがたいのが現状である。Terzaghi は有効応力の原理を飽和土に関する、圧縮性と強度に関する実験データを基礎に、提案した。その後、Rendulic³⁾らを始めとする、間隙水圧の測定を基礎として、その有用性が明らかにされ、さらに Bishop⁴⁾や Skempton⁵⁾によって、有効応力自体についての考察が行われてきた。それ以前の有効応力の概念の歴史については、Skempton⁶⁾によって詳しくまとめられている。今日における有効応力についての説明は、そのほとんどすべてが Bishop と Skempton によって行われた検討によるといっても過言ではない。Terzaghi は有効応力を使用して、1 次元圧密理論を導いたが、現在では、Biot による 2 相混合体理論を使用する多次元圧密問題⁷⁾や混合体理論を使った液状化解析⁸⁾が取り上げられている。

いいかえれば、2 相系の混合体としての取扱いは、便宜的なものではなく、飽和土の運動を解析するうえで、本質的なものであるといえる。したがって、2 相混合体の理論^{9)~11)}と有効応力の概念の関係を明らかにしておくことは重要である。Bishop^{12),13)}らによって、間隙水圧係数については、独自の立場から調べられているが、有効応力と混合体理論の関係は不十分である。本論の目的は、Terzaghi の有効応力の意味を 2 相混合体理論により明らかにし、より正確な定義を与え、その適用範囲を明らかにすることにある。現在行われている有効応力の説明は、土粒子接触面積を考慮した、力のつり合いを中心に行われてきたが、本論では変形の面からも考察を

行った。圧密現象においては土中の水が排水されない限り土の圧縮変形は進行しない。これは等方的応力が作用した場合、飽和土の変形は水の運動に依存していること、いいかえれば、間隙水は土粒子骨格の運動の自由を制限している。つまり、圧縮性の低い間隙水が土の運動を拘束していることになる（以後、拘束という言葉をこの意味で使うことにする）。ここではこの点に着目し、ミクロな粒子構造を問題にすることなく、有効応力の定義を行った。

2. 2 相混合体の構成式と有効応力の定義

2 相混合体の理論としては、Biot¹⁰⁾をはじめとして、Green & Naghdi¹⁴⁾や Müller¹⁵⁾によって一般化された理論が存在する。著者はすでに、Green & Naghdi の理論による全応力の定義に基づいて、飽和粘性土の構成理論を導いている⁹⁾。そこでは、土粒子と間隙水の圧縮性を考慮した場合、固体相と流体相の間に相互作用が発生することを指摘した。ここでは、土粒子（固体相を構成する物体）の圧縮性と間隙水の圧縮性を考慮するが、相互作用は圧縮変形に対してのみあると仮定する。その理由は、実際に飽和土において、間隙水が固体相の運動の自由を制限するのは、圧縮変形に対してだけとみなし得るからである。したがって以下の解析では、応力ひびきみ関係として、圧縮変形に対するものだけを取り上げる。

固体と流体からなる 2 相混合体理論においては、混合体を固体相と流体相という抽象的な 2 つの連続体としての相の重ね合せで表現する。固体相は、物理的には土粒子で構成される土粒子骨格を表す連続体を示しており、流体相は間隙水から構成される連続体を示している。

図—1 は、相の重ね合せを示す模式図である。以上述べた 2 つの相が抽象的であるという理由は、図—1 に示すような密度が $(1-n)\rho^{(s)}$, $n\rho^{(f)}$ の連続体は現実には

* 正会員 工博 岐阜大学講師 工学部土木工学科

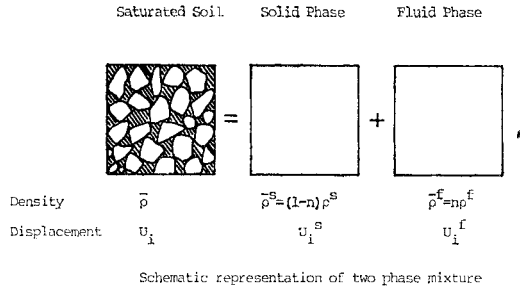


図-1 2相混合体の模式図

存在しないが、現実の土を2つの相に写像し、その重ね合せとして、土の挙動を表現するからである。図-1で $U_i^{(s)}$, $U_i^{(f)}$ は、それぞれの相の変位ベクトルであるが、これらの量は実際の土からみれば、平均的な量となっている。

自由エネルギー密度を $\psi^{(s)}$ (固体相に対して), $\psi^{(f)}$ (流体相に対して) とおくと、応力テンソルは次式より求めることができる⁹⁾。

$$\sigma_{ij}^{(s)} = \bar{\rho}_o^{(s)} \frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial \varepsilon_{ij}^{(s)}} \dots \dots \dots (1)$$

$$\sigma_{ij}^{(f)} = \bar{\rho}_o^{(f)} \frac{\partial \psi^{(f)}}{\partial \varepsilon_{ij}^{(f)}} \dots \dots \dots (2)$$

σ_{ij}^0 : 応力テンソル (s, f はそれぞれ固体相, 流体相を示す指標である)

ε_{ij}^0 : ひずみテンソル

$\bar{\rho}_o^0$: 初期密度

次に、エネルギー関数の具体的な形を式(3)と式(4)で与える。以下すべて微小変形勾配を仮定する。

$$\bar{\rho}_o^{(s)} \psi^{(s)} = \frac{1}{2} \gamma_1 \varepsilon_{ij}^{(s)} \varepsilon_{ij}^{(s)} + \frac{1}{3} \gamma_2 \varepsilon_{KK}^{(s)} \varepsilon_{KK}^{(s)} \dots \dots \dots (3)$$

$$\bar{\rho}_o^{(f)} \psi^{(f)} = \frac{1}{6} \gamma_3 \varepsilon_{KK}^{(f)} \varepsilon_{KK}^{(f)} + \frac{1}{3} \gamma_4 \varepsilon_{KK}^{(f)} \varepsilon_{KK}^{(s)} \dots \dots \dots (4)$$

ただし、 $\gamma_i (i=1\sim 4)$ は材料定数である。

式(1)~(3)と式(4)より、

$$\sigma_{ij}^{(s)} = \gamma_1 \varepsilon_{ij}^{(s)} + \frac{1}{3} \gamma_2 \varepsilon_{KK}^{(s)} \delta_{ij} \dots \dots \dots (5)$$

$$\sigma_{ij}^{(f)} = \frac{1}{3} \gamma_3 \varepsilon_{KK}^{(f)} \delta_{ij} + \frac{1}{3} \gamma_4 \varepsilon_{KK}^{(s)} \delta_{ij} \dots \dots (6)$$

(δ_{ij} はクロネッカーのデルタを示す)

等方成分についてのみ書き直すと、

$$\sigma_{KK}^{(s)} = \gamma_1 \varepsilon_{KK}^{(s)} + \gamma_2 \varepsilon_{KK}^{(f)} \dots \dots \dots (7)$$

$$\sigma_{KK}^{(f)} = \gamma_3 \varepsilon_{KK}^{(f)} + \gamma_4 \varepsilon_{KK}^{(s)} \dots \dots \dots (8)$$

相互作用が2相間で等しいとすると、 $\gamma_2 = \gamma_4$ となる。

$\sigma_{ij}^{(s)}$ と $\sigma_{ij}^{(f)}$ は混合体としての面上で定義される量である。式(7)で固体相の応力が2つの相のひずみに依存する形をとっているのは、飽和土を考えた場合、完全

な排水条件以外では、固体相の応力が間隙水の挙動にも支配されるということであり、式(8)についても同様のことが成立する。

以上のようにして求められた2相混合体の応力-ひずみ関係は、Biotの線形理論に一致する。Biotの理論に表れる応力-ひずみ関係の定数と土の物理定数との関係は、すでに石原^{(6), (17)}が詳しく論じている。したがって以下、石原による記号を用いることにする。式(7)と式(8)を書き直すと、

$$\sigma^{(s)} = \alpha_b \varepsilon_{KK}^{(s)} + \alpha_c \varepsilon_{KK}^{(f)} \dots \dots \dots (9)$$

$$\sigma^{(f)} = \alpha_c \varepsilon_{KK}^{(s)} + k_c \varepsilon_{KK}^{(f)} \dots \dots \dots (10)$$

ここで、

$$\sigma^{(s)} = \frac{1}{3} \sigma_{KK}^{(s)}, \sigma^{(f)} = \frac{1}{3} \sigma_{KK}^{(f)}$$

である。式(9)と式(10)を解いて、ひずみで書き直すと、

$$\varepsilon_{KK}^{(s)} = \frac{1}{\alpha_b k_c - \alpha_c^2} (k_c \sigma^{(s)} - \alpha_c \sigma^{(f)}) \dots \dots (11)$$

$$\varepsilon_{KK}^{(f)} = \frac{1}{\alpha_b k_c - \alpha_c^2} (\alpha_b \sigma^{(f)} - \alpha_c \sigma^{(s)}) \dots \dots (12)$$

(α_b, α_c, k_c は材料定数である)

さらに、 $\varepsilon_{KK}^{(s)}$, $\varepsilon_{KK}^{(f)}$ と土粒子実質部分の体積ひずみ e_s , 水の体積ひずみ e_w と間隙の体積ひずみ e_p の関係は、

$$\varepsilon_{KK}^{(s)} = n e_p + (1-n) e_s \dots \dots \dots (13)$$

$$\varepsilon_{KK}^{(f)} = e_w + (1-n) (e_s - e_p) \dots \dots \dots (14)$$

n : 間隙率

飽和土を非被覆の状態(つまり、メンブレンなどをつけない状態)で水中におき、水圧 u を作用させた場合(石原⁽¹⁷⁾はこのような試験を浸水試験とよんでいる)、

$$\varepsilon_{KK}^{(s)} = e_p = e_s$$

となり、

$$e_s = c_s u, \dots \dots \dots (15)$$

$$e_w = c_l u \dots \dots \dots (16)$$

$$c_s = - \frac{(n-1) k_c + n \alpha_c}{\alpha_b k_c - \alpha_c^2} \dots \dots \dots (17)$$

$$c_l = \frac{(n-1) \alpha_c + n \alpha_b}{\alpha_b k_c - \alpha_c^2} \dots \dots \dots (18)$$

c_s は、土粒子実質部分の圧縮率、 c_l は、水の圧縮率である。

次に、排水試験を考える。このとき、 $\sigma_{kk}^{(f)} = 0$ だから、

$$\varepsilon_{KK}^{(s)} = \frac{k_c}{\alpha_b k_c - \alpha_c^2} \sigma^{(s)} = c_b \sigma^{(s)} \dots \dots \dots (19)$$

c_b は土粒子骨格の圧縮率である。さらにこのとき、

$$\varepsilon_{KK}^{(f)} = \frac{-\alpha_c}{\alpha_b k_c - \alpha_c^2} \sigma^{(s)} \dots \dots \dots (20)$$

c_p を間隙の圧縮率であるとすると、式(13)と式(14)から

$$\varepsilon_{KK}^{(s)} = \varepsilon_{KK}^{(f)} + e_p$$

となるから、

$$e_p = \frac{k_c + \alpha_c}{\alpha_b k_c - \alpha_c^2} \sigma^{(s)} = c_p \sigma^{(s)} \dots\dots\dots(21)$$

以上で、混合体のパラメーターと土の力学定数が求められた。したがって、有効応力を定義する際に基本的であると考えられる、等方的外圧 σ が非排水状態の飽和土に作用したときの、固相と流体相に対する応力の分配率を求める。非排水状態では $\varepsilon_{KK}^{(s)} = \varepsilon_{KK}^{(f)}$ だから、式(11)と式(12)から、

$$k_c \sigma^{(s)} - \alpha_c \sigma^{(f)} = -\alpha_c \sigma^{(s)} + \alpha_b \sigma^{(f)} \dots\dots\dots(22)$$

$\sigma = \sigma^{(f)} + \sigma^{(s)}$ だから、式(22)より、

$$\sigma^{(f)} = \frac{\alpha_c + k_c}{k_c + 2\alpha_c + \alpha_b} \sigma \dots\dots\dots(23)$$

式(17)、(18)と式(19)から式(23)を書き換えると、

$$\sigma^{(f)} = \frac{c_b - c_s}{\frac{1}{n} c_b - \left(1 + \frac{1}{n}\right) c_s + c_e} \sigma \dots\dots\dots(24)$$

式(24)より、外圧 σ が作用したとき、 $\sigma^{(f)}$ は $c_s = 0$ で、かつ $c_l/c_b = 0$ のときに限り、 $\sigma^{(f)} = n\sigma$ となる。同時に、 $\sigma^{(s)}$ は、

$$\sigma^{(s)} = \frac{\left(\frac{1}{n} - 1\right) c_b - \frac{1}{n} c_s + c_l}{\frac{1}{n} c_b - \left(1 + \frac{1}{n}\right) c_s + c_l} \sigma \dots\dots\dots(25)$$

式(25)より、 $c_s = 0$ で $c_l/c_b = 0$ のときには、 $\sigma^{(s)} = (1-n)\sigma$ となる。このように、関係式 $\sigma^{(f)} = n\sigma$ 、 $\sigma^{(s)} = (1-n)\sigma$ は、非圧縮性材料の場合に Biot が導いている式に一致している。つまり、非圧縮性材料の場合に限って、有効応力テンソルの定義として次式が成立する。

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^{(s)} - (1-n)u'\delta_{ij} \dots\dots\dots(26)$$

$$\sigma_{ij}^{(f)} = nu'\delta_{ij}$$

ただし、

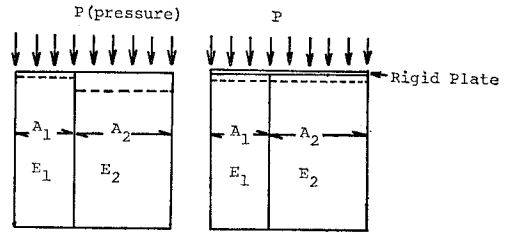
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} + \sigma_{ij}^{(f)}$$

u' は間隙水圧である。

以上の考察から、非排水状態で外圧 $\sigma \left(= \frac{1}{3} \sigma_{KK} \right)$ が作用したときに固体相(土粒子骨格)と流体相(間隙水)が受け持つ応力の分配率は、固相構成物質(土粒子自身)の圧縮性、固体相(土粒子骨格)の圧縮性と間隙流体の圧縮性によって決まる。

非排水試験と非被覆の浸水試験を1次元で模式的に説明するために示したのが、図-2である。混合体が E_1 と E_2 という2つの圧縮性の異なる材料でできているとする。

単位面積(混合体としての)当りに、圧力 P が加わるとき、非排水試験では変形の拘束 ($\varepsilon_{KK}^{(s)} = \varepsilon_{KK}^{(f)}$) があるため(図-2では、この拘束を剛な平板で表している)、応力の分配は、 E_1 と E_2 の違いにより、



Model for unjacketed test Model for undrained test

----- Shape after deformation ($E_1 > E_2$)

図-2 非排水試験と非被覆試験の模式図

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{P(A_1 + A_2)}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2} \dots\dots\dots(27)$$

$$A = A_1 + A_2$$

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{P(A_1 + A_2)}{\frac{E_1}{E_2} A_1 + A_2} \dots\dots\dots(28)$$

$\bar{\sigma}_1$ 、 $\bar{\sigma}_2$: 断面積 A_1 、 A_2 当りの応力である。したがって、2相混合体としてはそれぞれの相に、

$$\sigma_1 = \frac{P}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2} \dots\dots\dots(29)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{\frac{E_1}{E_2} A_1 + A_2} \dots\dots\dots(30)$$

これに対して、非被覆試験では、

$$\sigma_1 = \frac{A_1 P}{A} \dots\dots\dots(31)$$

$$\sigma_2 = \frac{A_2 P}{A} \dots\dots\dots(32)$$

となって、応力の分配は、混合体単位面積当りに占める各相の面積の割合によって決まる。この A_1/A を、間隙率に相当するとすれば、 $\sigma_1 = nP$ 、 $\sigma_2 = (1-n)P$ となり、式(26)で表す関係が常に成り立つ。

次に、さらに進んで、有効応力を定義する。ここでいう“有効”という意味は、非排水状態で等方圧が作用したときの変形が無視し得る場合、これ以外の変形を起こし得る応力を有効応力とよぶということである。

非排水状態で等方圧 $\frac{1}{3} \sigma_{KK} (= \sigma)$ が作用したとき、間隙内で観測される流体圧を u' とすると、 $\sigma^{(f)}$ は次式で与えられる。

$$\sigma^{(f)} = nu' \dots\dots\dots(33)$$

したがって、固相に対しては、 $\sigma^{(s)} = \sigma - \sigma^{(f)}$ より、

$$\sigma^{(s)} = \frac{\left(\frac{1}{n} - 1\right) c_b - \frac{1}{n} c_s + c_l}{c_b - c_s} nu' \dots\dots\dots(34)$$

式(33)と式(34)より、間隙内の流体圧が u' と観測されるとき全応力 σ は、

表一 材料の体積圧縮率

Material	Compressibility (cm ² /kg) × 10 ⁻⁶	
	C _b	C _s
Quartzitic sand stone	5.8	2.7
Quincy granite (100 ft deep)	7.5	1.9
Vermont marble	17.5	1.9
Concrete (approx. value)	20	2.5
Sedimentary Rock* (porous tuff)	110-680	—
Dense sand	1800	2.7
Loose sand	9000	2.7
London Clay (over-consolidation)	7500	2.0
Gasport Clay (normally-consolidation)	60000	2.0

C_l (compressibility of water) = 48 × 10⁻⁶ (cm²/kg)
 Table 1 (after Skempton,⁵⁾ * after Akai et al.¹⁸⁾

$$\sigma = nu' + \frac{(1-n)c_b - c_s + c_l n}{c_b - c_s} u' \dots\dots\dots (35)$$

となる。式 (35) の意味するところは、間隙水圧が u' と観測されるとき、土が平衡を保つには、 σ は式 (35) で与えられねばならないということであって、このときの変形は、圧力 u' の流体に拘束されている。式 (35) の結果として、有効応力は次式で与えられる。

$$\sigma^e = \sigma - mu' \dots\dots\dots (36)$$

$$m = n + \frac{(1-n)c_b - c_s + c_l n}{c_b - c_s} \dots\dots\dots (37)$$

一般的には、

$$\sigma_{ij}^e = \left(\frac{1}{3} \sigma_{KK} - mu' \right) \delta_{ij} + s_{ij} \dots\dots\dots (38)$$

(σ_{ij}^e : 有効応力テンソル, s_{ij} : 偏差応力テンソル)

$c_s = 0$ とおくと、

$$\sigma^e = \sigma - \left(1 + \frac{c_l}{c_b} \right) u' \dots\dots\dots (39)$$

となり、さらに $c_l/c_b = 0$ の条件下では、

$$\sigma^e = \sigma - u' \dots\dots\dots (40)$$

となって、Terzaghi による古典の結果に一致する。

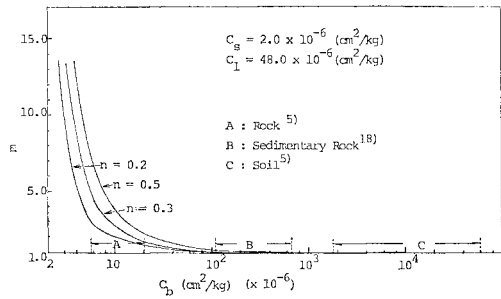
式 (35) を逆にみれば、Bishop の求めた間隙圧係数の B 値が求められる。

$$u' = \frac{c_b - c_s}{c_b - c_s + n(c_l - c_s)} \sigma = B\sigma \dots\dots\dots (41)$$

$$B = \frac{c_b - c_s}{c_b - c_s + n(c_l - c_s)} \dots\dots\dots (42)$$

Bishop¹³⁾ は式 (42) を求めるために、非排水状態を浸水状態と、間隙水圧を一定に保って全応力を増加させる過程の和であるとして求めている。このような求め方に対して、本論の方法は間隙水の圧縮性が低いために土の変形が拘束されているという物理的考察に基づいている。

表一に Skempton⁵⁾ による各種材料の体積圧縮率の



図一 有効応力パラメーター m と C_b との関係

データに、赤井ら¹⁸⁾による多孔質凝灰岩(大谷石)のデータを加えたものを示す。 c_l を水の圧縮率とし、 c_s と c_b として正規圧密粘土のデータを式(36)に代入すると、 $n=0.5$ として、

$$\sigma^e = \sigma - 1.0004 u'$$

となる。ただし、 $c_l = 48 \times 10^{-6}$ (cm²/kg)。

$c_s = 2.0 \times 10^{-6}$ cm²/kg としたとき、 n をパラメーターにして、 m と c_b/c_l の関係をプロットすると、図一3が得られる。図一3より、 c_b が大きければ、ほとんど $m = 1.0$ としてよいが、 c_b が小さくなってくると、 m は大きくなる。ここで重要なことは、流体の圧縮率が低く、非排水状態で等方圧が加わったときのひずみ(土粒子骨格のひずみ)が無視できる場合は、 $m = 1.0$ としてTerzaghiの有効応力を定義することに意味があるが、間隙流体の圧縮性が大きい場合(たとえば空気の場合)は、ここでいう有効応力を定義する意味がないということである。式(24)で $c_s = 0$ のとき、 $c_l \rightarrow \infty$ とすると、 $\sigma^{(f)} \rightarrow 0$ かつ $\sigma^{(s)} \rightarrow \sigma$ となり、全応力で解析すればよい。乾燥砂などはこの場合に当たる。堆積軟岩である多孔質凝灰岩(大谷石)では、 $n = 0.37$ 、 $c_s = 2.7 \times 10^{-6}$ cm²/kgとして、表一より $m = 1.025 \sim 1.156$ となる。このときの、非排水状態で等方圧が作用した場合の体積ひずみ $\epsilon_{KK}^{(s)}$ は、測定された間隙水圧 u' を10~30 kg/cm²とすると、 $\epsilon_{KK}^{(s)} = 1.975 \sim 5.925 \times 10^{-4}$ 程度である。ただし、 $c_b = 160 \times 10^{-6}$ cm²/kgとした。つまり、本論で定義した有効応力式から、この材料では、非排水変形に使われる等方圧は、 u' の約1.1倍ということになる($c_b = 160 \times 10^{-6}$ cm²/kgの場合)。この場合、非排水変形を無視すれば、他の変形を起こす応力は、 $\sigma^e = \sigma - 1.1 u'$ となっている。このように、本論で述べた方法を使えば、どのような変形にどのような応力が対応しているかということが合理的に明らかとなる。図一1の密な砂の場合、 $n = 0.3$ とすると、 $\epsilon_{KK}^{(s)} = 1.63 \times 10^{-5} u'$ の関係がある。このとき、 m はほとんど1.0に近いので、 $\sigma^e = \sigma - u'$ となる。

砂や粘土に比べて、軟岩では、式(36)を使った場合と、Terzaghiの有効応力式を使用した場合を比較して、

等方的に働く有効応力の算出にかなりの違いがでてくることになる。2. で述べてきたことから、Terzaghi の有効応力を解釈すれば、有効応力式 (Terzaghi) が成立するのは、全応力から有効応力 (式 (36) によって) を差し引いた応力による等方的非排水圧縮変形が無視でき、かつ $m=1.0$ が近似的に成立する場合であると結論できる。

3. 古典的な有効応力の解釈との比較

Skempton⁵⁾ は Terzaghi の有効応力は近似であり、真の有効応力ではないと考え、有効応力の一般化を試みた。Skempton は次の3つの定義について調べている。

(I) $\sigma^e = \sigma - (1 - a_c)u'$ (43)

σ^e : 有効応力
 a_c : 粒子接触面積
 u' : 間隙水圧

(II) $\sigma^e = \sigma - u'$ (44)

(III) $\sigma^e = \sigma - (1 - a_c \tan \psi / \tan \phi')u'$ (せん断強度に対して) (45)

$\sigma^e = \sigma - (1 - c_s/c)u'$ (体積変化に対して) (46)

ϕ' : 土のせん断抵抗角
 ψ : 土粒子自身のせん断抵抗角
 c : 土の圧縮率
 c_s : 土粒子自身の圧縮率

Skempton は (I)~(III) の定義について、(III) が最も有効であり、(II) は (III) の近似として、土に対してのみ有効であるが、(I) は土の挙動を表現するものではないと結論している。しかしながら、(III) の定義は次のような欠点を有している。

- (a) せん断強度に対する定義と圧縮性に対する定義とが異なっている。
- (b) 式 (45) を導く際に、接触応力 (粒子の) と外力の関係を明らかにするために導入された種々のパラメーターは明確な物理的基礎をもっていない。
- (c) 式 (45) を導く際に、Coulomb の強度方程式を先験的に認めている。
- (d) 式 (46) の誘導において、間隙流体の圧縮性が考慮されていない。

(c) については、Mitchell¹⁹⁾ がすでに指摘しており、圧縮とせん断に対して同じ形の有効応力式でなければ、土の構成式の変数として意味がない。本論においては、間隙流体と土粒子骨格との相互作用は、体積変化についてのみ存在すると仮定しているため、せん断変形、体積変化ともに、式 (36) で有効応力を定義している。Skempton は、式 (46) を導くために、体積変化を (非

排水状態での) 次式で表した。

$$-dV/V = c(d\sigma - du) + c_s du \dots\dots\dots (47)$$

$-dV/V$: 体積変化
 $d\sigma$: 全応力の増分
 du : 間隙水圧の増分

式 (47) を次のように変形する。

$$-dV/V = c \left\{ (d\sigma - du) + \frac{c_s}{c} du \right\} \\ = c \left\{ d\sigma - \left(1 - \frac{c_s}{c} \right) du \right\} \dots\dots\dots (48)$$

式 (48) より、式 (46) が導かれている。ただし、式 (48) では、等方圧の変化が粒子構造の変化に対して与える影響は入っていない。式 (48) の意味としては、土粒子の圧縮性を無視した場合、体積変形は $(d\sigma - du)$ によって生じると仮定していることになり、すでに Terzaghi の有効応力式を前提としている。したがって、式 (46) は定義として意味をもたない。Skempton は間隙流体の圧縮性を考慮していないが、実際に、圧密現象において、間隙水が非圧縮性に近いため変形が遅れて生じ、全応力では解析できない事実を考えれば、有効応力の定義において間隙流体の圧縮性を考慮しないのは不自然であり、認めることができない。

Skempton をはじめ、現在の土質力学の分野でなされている有効応力の説明において間隙流体の圧縮性が陽な形で考慮されていない原因は、有効応力を粒子間応力としてとらえていることにある^{12), 17)}。

Biot²⁰⁾ は、2相系の非圧縮性材料に流体圧 u が作用した場合、流体相に働く応力は、 $\sigma_{ij}^{(f)} = \frac{1}{3} nu \delta_{ij}$ (n : 間隙率)、骨格系には、 $\sigma_{ij}^{(s)} = \frac{1}{3} (1-n) u_{ij}$ としているが、他の場合にこのような応力の分配が正しいのは、すでに述べたように、土のエレメントを水の中に非被覆で浸し、水圧をかける場合である。さて、先に述べた応力の分配が常に成立するとすると、式 (49) となる。

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^{(s)} - (1-n)u' \delta_{ij} \dots\dots\dots (49) \\ \sigma_{ij}^f = nu' \delta_{ij}, \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} + \sigma_{ij}^{(f)} \\ (\sigma_{ij}^e : \text{有効応力テンソル})$$

式 (49) の σ_{ij}^e を、石原¹⁷⁾ は粒子間力を断面積で割ったものとして説明を試みているが、このような説明は、力のつり合いに対する取扱いに偏っており、粒状性をモデルにした式 (49) の解釈にすぎない。2相系の混合体理論に粒状性を導入する必要はない。式 (49) から得られる結果は、 $\frac{1}{3} \sigma_{KK}^e = \frac{1}{3} \sigma_{KK} - u'$ となり、Terzaghi の定義と一致するが、混合体理論としては積極的な意味がなく、論理体系としては公理としてとらえる以外に式 (49) の意味はない²¹⁾。

粒子間に働くさまざまな粒子間力は、土の構成関係の

一部である圧縮特性を通して、有効応力にかかわる。したがって、変形過程における土の構造骨格の変化も考慮に入れねばならない。図-3 から、間隙流体が水の場合、 $m \approx 1.0$ としてよい。土の圧縮率 C_b の範囲はかなり広いために、Terzaghi の有効応力の概念は土においてはほぼ成立するであろう。このように厳密に言えば、式 (49) は式 (36) と式 (37) で置き換えられるべきであり、Terzaghi による定義は、式 (36) と式 (37) から近似として求められる。現在行われている有効応力の説明は、そのほとんどが Skempton^{19), 22)~25)} の研究に基づいているため不合理であり、本論の論理と矛盾する。

2. 結 論

本論文の結果を要約すると、以下のようになる。

(1) Terzaghi による有効応力の定義について、飽和土を 2 相系の材料と考え、応力のつり合いだけでなく、間隙流体、土粒子の圧縮性および土粒子骨格の圧縮性の面から再検討を行い有効応力を式 (36) と式 (37) で定義した。その結果、Terzaghi による有効応力式は、土粒子自身が非圧縮性でかつ、間隙水が非圧縮性的場合に厳密に成立することが明らかとなった。

(2) 本論で有効応力とは、等方的非排水圧縮変形以外の変形を生じさせる応力である。つまり、通常の土では、非排水圧縮変形は、全体の変形に対して無視することができ、かつ、式 (36) の m がほとんど 1.0 に等しいため、Terzaghi の式が成立する。したがって、そうでない場合は、Terzaghi の有効応力を使用することが無意味となり、より一般的理論である混合体理論によって土の変形を解析することが必要となる。

最後に、本研究に対して貴重な助言および討議をいただいた、赤井浩一京都大学教授、足立紀尚京都大学防災研究所助教授、太田秀樹京都大学助教授、田村 武京都大学助手に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Terzaghi, K. : Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der Hydrodynamischen Spannungserscheinungen, reprinted in from Theory to Practice in Soil Mechanics, John Wiley & Sons., New York, pp. 133~146, 1923.
- 2) Terzaghi, K. : Theoretical Soil Mechanics, John Wiley & Sons., New York, pp. 11~15, 1943.
- 3) Rendulic, L. : Ein Grundgesetz der Tonmechanik und sein experimenteller Beweis, Bauingenieur, 18, pp. 459~467, 1937.
- 4) Bishop, A.W. : The Principle of Effective Stress, Norwegian Geotechnical Institute, No. 32, pp. 1~5, 1960.
- 5) Skempton, A.W. : Effective Stress in Soils, Concrete and Rocks, Conf. Pore Pressure and Suction in Soils, pp. 4~16, 1960.
- 6) Skempton, A.W. : Significance of Terzaghi's Concept of Effective Stress, from Theory to Practice in Soil Mechanics, John Wiley & Sons., pp. 42~53, 1960.
- 7) 赤井浩一・田村 武 : 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文報告集, 第 269 号, pp. 95~104 1978 年 1 月.
- 8) Goto, H., F. Oka and K. Kawamoto : Liquefaction of Soil and Dynamic Response of Ground, Proc. of 5th Japan Earthquake Engineering Symposium, pp. 637~680, 1978.
- 9) Oka, F. : Constitutive Theory for Solid-Fluid Mixture and Its Application to Stress Wave Propagation Through Cohesive Soil, Proc. of JSCE, No. 272, pp. 117~130, Apr., 1978.
- 10) Biot, M.A. : Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media, J. Appl. Phys., Vol. 33, pp. 1482~1498, 1962.
- 11) Ishihara, K. : Propagation of Compressional Waves in a Saturated Soil, Proc. of Int. Symp. of Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Univ. of New Mexico Press, pp. 195~206, 1968.
- 12) Bishop, A.W. and G. Eldin : Undrained Triaxial Tests on Saturated Sands and Their significance in the General Theory of Shear Strength, Geotechnique, 2, No. 1, pp. 13~32, 1950.
- 13) Bishop, A.W. : The influence of an Undrained change in Stress on the Pore Pressure in Porous Media of Low Compressibility, Geotechnique 23, No. 3, pp. 435~442, 1973.
- 14) Green, A.E. and P.M. Naghdi : A Dynamical Theory of Interacting Continua, Int. J. Eng. Sci., Vol. 3, pp. 231~241, 1965.
- 15) Müller, I. : A Thermodynamic Theory of Mixtures of Fluids, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 24, pp. 370~403, 1967.
- 16) Ishihara, K. : Approximate Forms of Wave Equation for Water-Saturated Porous Materials and Related Dynamic Modulus, Soils & Foundations, Vol. 10, No. 4, pp. 10~38, 1970.
- 17) 石原研一 : 土質力学の基礎, 鹿島出版会, pp. 58~59, 昭和 51 年.
- 18) 赤井浩一・足立紀尚・西 好一 : 堆積軟岩 (多孔質凝灰岩) の弾塑性挙動, 土木学会論文報告集, 第 271 号, pp. 83~95, 昭和 53 年 3 月.
- 19) Mitchell, J.K. : Fundamentals of Soil Behavior, John Wiley & Sons., pp. 186~196, 1976.
- 20) Biot, M.A. : Theory of Elasticity and Consolidation for Porous Anisotropic Solid, J. Applied Physics Vol. 26, No. 2, pp. 182~185, Feb., 1955.
- 21) 岡 二三生・中川加明一郎 : 混合体理論よりみた有効応力概念について, 第 32 回土木学会年次学術講演会講演集, III-64, pp. 114~115, 昭和 52 年.
- 22) Scott, R.F. : Principle of Soil Mechanics, Addison-Wesley Pub. Company Inc., pp. 163~166, 1963.
- 23) Lambe, T.W. and R.V. Whitman : Soil Mechanics, John Wiley & Sons., pp. 241~250, 1969.
- 24) 山口柏樹 : 土の力学, エンジニアリングサイエンス講座, 共立出版, pp. 7~9, 1976.
- 25) 最上武雄編 : 土質力学, 技報堂, pp. 480~483, 1969.