

アーチの影響線解法

AN INFLUENCE LINE ANALYSIS OF ARCHES

前田 幸雄*・林 正**

By Yukio MAEDA and Masa HAYASHI

1. 緒 言

道路橋示方書では、アーチ橋の設計計算において設計死荷重強度が規定された限界値以上のときには、活荷重によって生じる形状変化の影響を考慮しなければならないと定められているが¹⁾、このような場合に活荷重による最大応力の計算方法が問題になる。集中活荷重に対しては、計算機の使用時間を考えなければ有限変位解析により容易に最大応力を求めることができるが、等分布活荷重に対しては最大応力を生ぜしめる荷重位置を簡単に求めることができないので計算が大変になる。このとき、近似的に最大応力が生じる活荷重位置を線形の影響線から求めた位置と変わらないものとして最大応力を求めることにしても、着目断面ごとに非線形計算を行わなければならないので、かなりの計算量になる。正確な荷重位置および最大応力を求めるための計算法はすでに開発したが²⁾、この解法では着目断面力ごとに荷重位置と最大応力を求めるための収束計算を必要とするので、計算費用とプログラムの作成の点で実用的な解法とはいえない。

移動荷重による最大応力を求めるためには影響線解法が最も便利であるが、幾何学的非線形性が現れる構造物に対しては、重ね合せの原理に基づく通常の影響線解法を適用することができず、分布活荷重による最大応力を求めるためには線形挙動を示す構造物の場合とは異なる解法を開発しなければならない。吊橋の場合には、線形化撓度理論による Perry の影響線解法が考えられており³⁾、この解法は吊橋の構造特性を巧みに利用した解法である。

アーチに生じる幾何学的非線形性は吊橋と逆な性状であり、荷重が増加するにつれて剛性が低下する荷重減少

型⁴⁾である。したがって、線形化手法により求められた影響値には設計上危険側になる誤差が含まれるので、影響値の計算において精度の悪い近似解法を用いることは許されない。また、吊橋では死荷重載荷後の状態においては活荷重によりあまり大きな非線形性は現れないが、アーチでは活荷重が作用したときに初めて非線形性が生じるので、活荷重による最大応力を求めるのはアーチの方が困難である。

幾何学的非線形性が生じる構造物に対する影響線解法としては、死荷重載荷状態における線形化計算から求めた影響値を用いる解法が最も基本的な解法と考えられるが、この解法には 2 種類の誤差が含まれる。1 つは、すでに述べた線形化による誤差であり、この誤差は影響値に含まれている。他の 1 つは、影響値を重ね合せるときに生じる誤差であり、たとえ厳密な非線形影響値を用いても生じるものである。すなわち、活荷重による非線形性を考慮した影響値を求めることができても、影響値には 1 つの集中活荷重による非線形効果しか含めることができず、複数個の活荷重（分布活荷重）が同時に作用したときには、活荷重が個々に作用した場合よりもより大きな非線形性が生じることに起因するためである。これら 2 つの誤差は、アーチの場合にはともに危険側の値になり、通常の影響線解法から求めた応力は厳密な非線形値よりも小さくなる。

非線形挙動を示す構造物を解析するためには、構造解析において収束計算を避けることができない。収束計算を用いずに、非線形性を有するアーチの最大応力を効率よく求めることができる解法は過去において報告されていない。そこで、本文ではアーチの幾何学的非線形挙動⁵⁾を考慮することによって、収束計算を最小限（1 回）にした実用的な影響線解法について報告する。

影響値の計算には、有限変位解析に適したマトリックス構造解析法⁶⁾を用いる。影響値は線形化計算により求めるが、このとき活荷重による変形の影響を考慮した計

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 長岡技術科学大学助教授 工学部建設系

算法により線形化による誤差をほとんど含まない精度のよい影響値を求めることができる。マトリックス法によるアーチの影響線は堀井ら⁶⁾によって調べられたことがあるが、線形化による誤差が大きいため収束計算が必要であることが報告されている。次に、重ね合せによる誤差を除くために、活荷重強度を補正係数で割増しする方法を用いた。この補正係数は、パラメトリック解析により調べたアーチの幾何学的非線形性状に関する研究結果²⁾から算出したものであり、死・活荷重強度に応じて補正値を調整する。

本研究で開発した影響線解法は、死荷重に対して一度だけ収束計算を行うが、影響値を求めるときには収束計算を使用しないので線形の影響線解法と計算時間は大差なく、また、最大応力は影響値を単純に重ね合わせて求められるので計算手順は簡単である。本解法は線形近似の概念を用いた実用的な近似解法であるので、その適用にあたって解析精度が問題になる。そこで、先の研究²⁾で用いたアーチの幾何学的非線形性に関する無次元パラメータの種々の組合せについて数値計算を行い、本解法を使用した場合の誤差を一般的に調べる。

本報告では影響線解法とは別に、リブアーチに生じる曲げモーメントと最大縁応力度の非線形性による増加率を簡単に求めることができる計算式を示す。この計算式により、非線形解析を行わずにアーチの断面力に生じる非線形性の程度を知ることができる。計算式は等断面のリブアーチについて求めたものであるが、変断面アーチや桁に軸力の生じない上・中路式補剛アーチについてもこれらのアーチの幾何学的非線形性^{2), 13)}を考慮することにより、この計算式を準用することができる。

2. 影響値の計算法

アーチでは、死荷重強度とともに活荷重強度によっても幾何学的非線形性はかなり変化する²⁾。このために、影響値には活荷重による変形の影響を考慮しなければ精度のよい値は得られない。そこで、影響値の算出に用いる集中移動荷重の強度としては、単位集中荷重ではなく設計活荷重強度を用いることにする。道路橋示方書で定められている線荷重、すなわち集中活荷重については設計荷重強度をそのまま使い、等分布活荷重についてはのちほど説明する式(7)または式(10)で与えられる換算集中荷重強度を使用する。

影響値の計算には、文献5)に示されたマトリックス法による有限変位解析の式を用いる。計算手順は、まず設計死荷重に対する厳密な平衡状態を求め、このときの節点変位を D_w 、変形後の部材座標系で表された部材端変位と部材端力をそれぞれ d_w, f_w とする。温度変化に

よる非線形性も考慮する場合には、温度変化を死荷重と同時に与えて D_w, d_w, f_w には温度変化による値を含むものとする。次に、この平衡状態における構造全体の接線剛性行列 ΔK を用いて、前述の集中活荷重 P による節点変位 D_P を次式から求める。

$$\Delta K(D_w) \cdot D_P = P \dots \dots \dots (1)$$

そして、 D_w と D_P とによる変形を考慮した座標変換により D_w と D_P をそれぞれ部材端変位 d_w', d_P に変換し、活荷重による部材端力 f_P を次式から求める。

$$f_P = k(d_w' + d_P) \cdot \{d_w' + d_P\} - f_w \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 k は死・活荷重による変形を考慮した部材の非線形剛性行列であり、式(2)は活荷重載荷後の変形状態で記述された平衡方程式である。

ここで注意すべきことは、部材端力 f_P を求めるときに、線形化の手法に従って式(2)の代わりに接線剛性行列 Δk を用いて、次式、

$$f_P = \Delta k(d_w) \cdot d_P \dots \dots \dots (3)$$

で計算したのでは線形化による誤差は除かれない。なお式(1)の ΔK と式(2)の k は部材端変位に関する2次の非線形項²⁾を含むものであり、また、温度変化があるときには、さらに温度変化による非線形項⁷⁾も含む。

式(2)で求めた部材端力には、 d_P が厳密な値でないために誤差が含まれているが、のちほどの計算例で示すようにその量はごくわずかである。なお、軸力の計算には式(2)による値を用いず、線形の影響値を用いるものとする。この理由は、アーチの場合には軸力に非線形性がまったく現れなかった²⁾、線形値の方がわずかではあるが線形化による誤差を含む式(2)の値よりも精度がよいからである。

ここで、影響線を求めるための効率のよい数値計算法について説明する。本解法で収束計算を必要とするのは死荷重に対する平衡状態を求めるときだけであり、このときには非線形性はほとんど現れないので修正 New-Raphson 法を用いることができる⁴⁾。したがって、収束計算では毎回構造全体の剛性行列を作成する必要がなく、線形の剛性行列 K_0 を一度 choleski 分解⁸⁾ したものを収束計算に用いれば計算時間を短縮することができる。また、式(1)の計算は線形計算と同じであるので、 ΔK を choleski 分解し、活荷重を移動して荷重ベクトル P を作り換えて D_P の影響線を求めるか、または Gauss の消去法により一度に D_P の影響線を求めてもよい。影響線を求めるときに逆行列を用いる手法がよく使われているようであるが、これは計算時間と記憶容量の点できわめて非能率的な解法である。

式(1)と(2)の計算では収束計算を用いないので、影響線を求めるときには構造全体の剛性行列の作成と分解を K_0 と ΔK についてそれぞれ1回行えばよいこと

になる。また、もし D_P と d_P に含まれる誤差を除いて厳密な非線形影響値を求める場合には、式 (1) の ΔK を choleski 分解して修正 Newton-Raphson 法を用いれば短い時間で収束解が得られる。

上述のような計算法を用いれば、式 (1), (2) による影響線を、線形影響線を求める場合の 1.6~1.7 倍程度の計算時間で求めることができる。

3. 影響線解法

(1) 適用例

本文で提案する影響線解法を、等断面の固定および2ヒンジリブアーチに適用してその精度を調べることにする。

数値計算では、アーチ軸線を放物線とし、これに図-1に示すように等分布死荷重 w を全載し、続いて等分布活荷重 p または集中活荷重 P が作用するものとする。また、温度変化 t による非線形効果を考慮する場合には、死荷重と同時に作用させる。なお、温度変化はアーチリブの断面内に一様に生じるものとする。

影響線解法の精度を一般的に調べるために、数値計算では式 (4) に示すアーチリブに関する無次元量と、式 (5) に示す荷重に関する無次元量を用いる²⁾。本解法を実橋のアーチに適用する場合には、このような無次元量を用いる必要はない。

$$n = f/L, \lambda = L \sqrt{A/I}, \eta = y/L \dots \dots \dots (4 \cdot a \sim c)$$

$$\gamma = w/w_0, \beta = p/w, \rho = P/wL, \theta = \mu t \dots \dots \dots (5 \cdot a \sim d)$$

ただし、

$$w_0 = \alpha n EI / L^3 \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 L はアーチの支間長、 f はライズ、 A, I, y はそれぞれアーチリブの断面積、断面2次モーメントおよびフランジの縁端距離である。また、 w_0 は座屈荷重から求めた基準荷重強度²⁾、 α は座屈係数^{1), 9)}、 E と μ はアーチリブに使用した材料のヤング係数と線膨張係数であって、計算では $\mu = 1.2 \times 10^{-5}$ とした。

等分布活荷重に対して影響線解法を適用するために、影響線の計算に用いる移動集中荷重 P として次の値を用いる。

$$P = pL/m \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 m はアーチリブの分割数である。

式 (7) を死荷重強度を用いて無次元化すると、換算集中荷重 P の無次元量 ρ は次式で与えられる。

$$\rho = \beta/m \dots \dots \dots (8)$$

数値計算では幾何学的非線形性の生じやすい鋼アーチ橋を対象として、表-1 に示す無次元量の値を用いた。

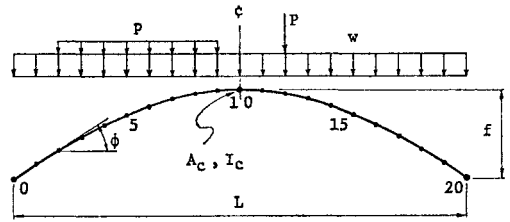


図-1 リブアーチ

表-1 無次元量の値

n	0.1	0.15	0.2
λ	150	200	
r	1.0	2.0	
β	0.2	0.4	
t	0	30°	-30°
η	1/80~1/200		

また、影響値に現れる非線形性をより一般的に調べるために、影響値の計算では表-1 以外の値を使用した。式 (6) の座屈係数 α には、道路橋示方書¹⁾ に示されている値を用いた。

影響線解析では、図-1 に示したようにアーチリブを水平射影長について 20 等分割 ($m=20$) した。したがって、表-1 の $\beta=0.2, 0.4$ に対して式 (8) の ρ は 0.01, 0.02 になる。

(2) 影響値の非線形性

影響値の現れる非線形性および式 (2) による影響値の精度を調べるために、次の3つの影響値を求める。

- ① 通常の線形影響値
- ② 式 (2) による影響値
- ③ 式 (2) について収束計算を行った厳密な非線形値

影響線の一例として、固定アーチの上・下縁応力度の影響線を図-2, 3 に示す。縁応力度 σ_i の添字は図-1 に示した節点番号であり、図の非線形値は解法 ③ による値である。なお、本研究ではコア・モーメント影響線の代わりに縁応力度影響線を使用する。これらの図より、縁応力度の影響値に現れる非線形性は、各断面においてそれほど差がないことがわかる。

解法 ②, ③ による曲げモーメント M_i と上・下縁応力度 σ_{ui}, σ_{li} の影響値の最大値に現れる非線形性を、①の線形値に対する増加率(%)で表して表-2 に示す。増加率は次式で定義する値である。

$$\text{増加率} = \frac{(\text{非線形値}) - (\text{線形値})}{(\text{線形値})} \times 100 \dots \dots (9)$$

解法 ② による影響値の誤差は、厳密な ③ の値と比べて死・活荷重強度の大きいときでも 1% 以下であり、式

表-2 影響値の増加率 (%)

($\lambda=200, \eta=0.01$)

n	γ	ρ	Sol.	Fixed Arch						2Hinged Arch		
				M_0	M_6	σ_{u0}	σ_{l0}	σ_{u6}	σ_{l6}	M_4	σ_{u4}	σ_{l4}
0.15	1.0	0.01	②/①	6.8	9.0	7.0	6.5	8.6	9.4	8.9	8.7	9.1
			③/①	6.8	9.1	7.0	6.5	8.7	9.4	9.0	8.8	9.2
		0.02	②/①	6.8	9.0	7.1	6.5	8.6	9.4	8.9	8.7	9.1
			③/①	6.8	9.2	7.1	6.6	8.9	9.6	9.1	8.9	9.3
	2.0	0.01	②/①	15.2	20.7	15.8	14.6	19.9	21.7	20.4	20.0	20.8
			③/①	15.2	20.9	15.7	14.7	20.1	21.8	20.7	20.3	21.1
0.2	2.0	0.02	②/①	15.2	20.7	15.9	14.6	19.8	21.8	20.4	20.0	20.8
			③/①	15.3	21.3	15.9	14.8	20.5	22.2	21.0	20.6	21.4

(2) による影響値の精度のよいことがわかる。このわずかな誤差は、集中荷重による節点変位 D_P の線形化による誤差によって生じたものであり、影響値②の誤差はすべて設計上危険側の値になっている。

実橋のアーチにおいて、 $\gamma=2.0$ かつ $\beta=0.4$ ($\rho=0.02$) になるような大きな等分布死・活荷重が作用することはまず起こり得ないので、式 (2) による影響値の精度は実用上問題はないといえる。

式 (2) による影響値は、リブアーチ以外の形式のアーチにも適用することができる。この影響値を実橋 (大三島橋, 支間長 297 m) の非線形解析に用いたことがあるが^{10), 11)}, このときの式 (4), (5) の無次元量の値は,

$$\begin{aligned} \lambda &= 224, n = 0.165 \\ \eta &= 1/167, \gamma = 1.87 \\ \beta &= 0.132, \rho = 0.016 \end{aligned}$$

であった。 ρ の値は式 (8) による等分布活荷重に対する換算値ではなくて、トレーラー荷重 (TT-43) を等価 L 荷重¹²⁾ に換算した値 (78 t) から求めた値

である。縁応力度影響値の精度は、応力度の小さい断面では 2% ほどの誤差が生じたが、20% の非線形性が現れた最大縁応力度は 0.5% の誤差で求められた。なお、このアーチ橋は両側径間部のタイで補剛された新しい構造形式の中路式アーチである。

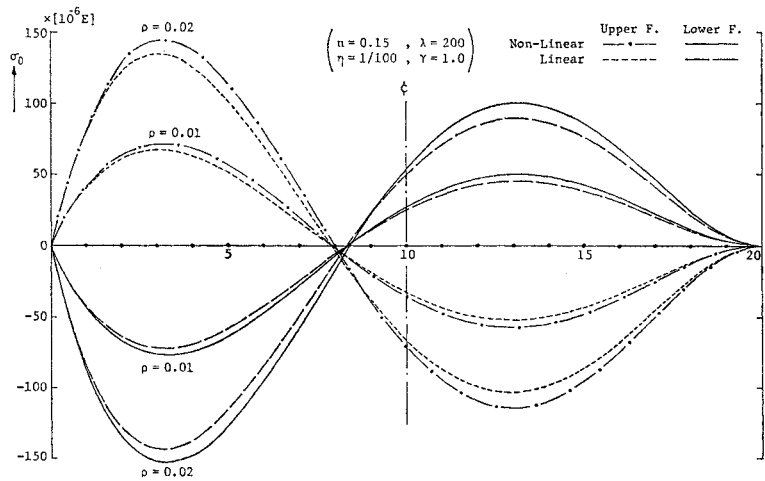


図-2 固定アーチの縁応力度影響線

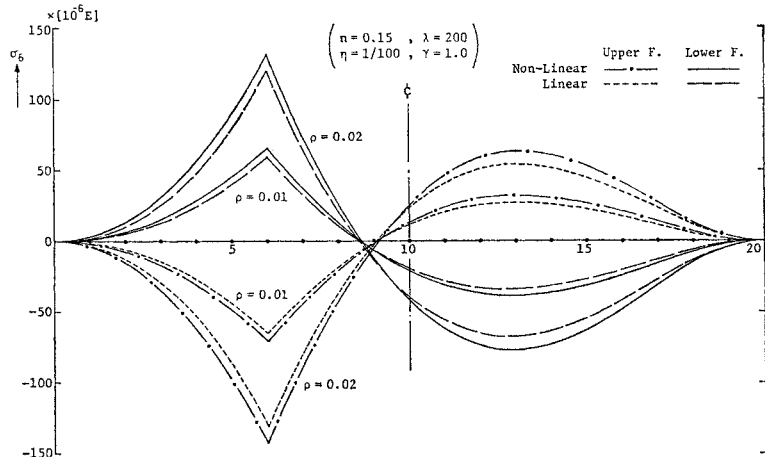


図-3 固定アーチの縁応力度影響線

次に、曲げモーメント影響値の非線形性に及ぼす各無次元量の影響を調べてみる。図-4, 5 に示した曲線は、すべて解法 ③ による値の非線形性を表しており、これを式 (9) の増加率で示した。なお、曲げモーメント M_i^0 の右肩の添字 0 は線形値を表し、着目点 i には値

が大きくて、かつ非線形性が強く現れる断面を選んだ。

曲げモーメント影響値、すなわち集中荷重による曲げモーメントの非線形性には死荷重強度 r の値が最も影響するが、 $r \leq 2.0$ の場合には他の無次元量 n, λ, ρ はさほど影響しない。特に活荷重 ρ の影響は、 $\rho = 0.005 \sim 0.04$ の範囲 (0.005 の場合は図には示さなかった) ではそれほど非線形性に敏感に影響しないので、影響線解法を用いる場合に都合がよい。

(3) 影響線解法

表-2の結果から解法②による影響値を用いても実用上十分な精度が得られることがわかったので、次に等分布活荷重に対して影響線解法を用いる。

等分布活荷重による最大縁応力度を、前述の影響値①, ②, ③を用いて求める。影響線面積の計算には台形公式を用いた。これらの解法による値とは別に、重ね合せによる誤差を含まない分布荷重を用いた解法²⁾により最大縁応力度を求め、この値に対する相対誤差で各影響線を用いた場合の精度を調べる。表-3に示した値は、式(9)に準じて相対誤差を百分率で表したものであり、解法を示した欄の記号Uは分布荷重を用いた解法を表す。なお、負の誤差は設計では危険側の値になる。

表-3より、 $r=1$ の場合には、解法①では12~13%の誤差が生じるが、解法②を用いれば2%程度の誤差で最大縁応力度を求めることができる。 $r=2.0$ の場合でも $\beta=0.2$ 以下であれば、解法②による誤差は3%以下である。

解法③において生じる誤差は、すべて重ね合せによる誤差であり、①, ②ではさらに線形または線形化による誤差を含んでいる。そこで、解法②における危険側の誤差を除くために、次に説明するような補正係数を用いた解法を考える。

補正係数は、等分布活荷重の設計荷重強度を割増しすることによって重ね合せによる誤差と影響値に含まれているわずかな誤差を除くために用いるものであるが、アーチリブの各断面に現れる非線形性状には多少の違いがあるので、全断面について最適な補正係数を簡単な形で求めることはできない。このために、補正係数は、全断面において危険側の誤差が生じないことと、最大の縁応力度が生じる断面(固定アーチでは節点0と6, 2ヒンジアーチでは節点5)での誤差が大きくなりないように決める。

影響線解法で生じる誤差はアーチの幾何学的非線形性

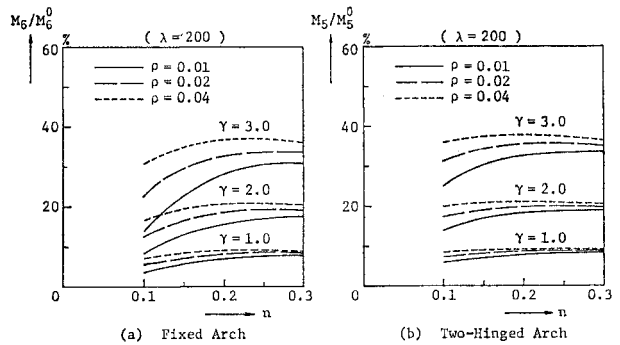


図-4 曲げモーメント影響値の増加率

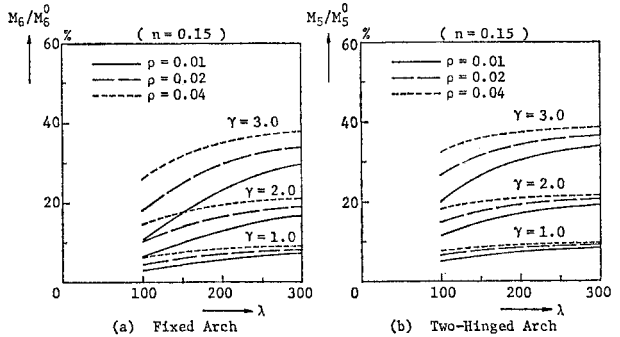


図-5 曲げモーメント影響値の増加率

表-3 重ね合せによる誤差(%)

($n=0.15, \lambda=200, r=0.01$)

r	β	Sol.	Fixed Arch				2Hinged Arch	
			σ_{M0}	σ_{I0}	σ_{M5}	σ_{I5}	σ_{M5}	σ_{I5}
1.0	0.2	①/U	-8.9	-7.3	-12.1	-11.2	-11.8	-11.0
		②/U	-1.0	0.3	-0.7	-0.1	-0.9	-0.2
		③/U	-0.9	0.4	-0.6	0.0	-0.7	-0.1
	0.4	①/U	-9.9	-7.9	-13.1	-12.5	-12.9	-12.2
		②/U	-2.0	-0.4	-2.0	-1.6	-2.2	-1.5
		③/U	-1.9	-0.2	-1.5	-1.4	-1.8	-1.3
2.0	0.2	①/U	-18.9	-16.6	-24.8	-24.3	-24.4	-23.9
		②/U	-2.2	-0.9	-2.1	-2.4	-2.7	-2.3
		③/U	-2.1	-0.7	-1.7	-2.2	-2.4	-2.1
	0.4	①/U	-21.1	-18.4	-26.8	-27.0	-26.6	-26.4
		②/U	-4.9	-3.2	-5.0	-6.0	-5.6	-5.6
		③/U	-4.6	-2.7	-4.1	-5.3	-4.9	-5.1

表-4 換算集中荷重の補正値

r	β	ρ	$1+\rho r^2$	ρ^*
1.0	0.4	0.02	1.02	0.0204
2.0	0.4	0.02	1.08	0.0216

によるものであるから、補正係数には死・活荷重強度を含める必要がある。そこで、これらの荷重に関する無次元量 r, β による非線形性²⁾を考慮し、かつ後述する式(16)などを参考にして、式(7)または式(8)の換算集中荷重に対する割増係数として $(1+\rho r^2)$ を用いる。したがって、式(2)による影響値の計算には、次式の

表-5 影響線解法の誤差(%)

($\beta=0.4, \eta=0.01$)

n	λ	r	Flange	Fixed Arch (Node No.)						2Hinged Arch (Node No.)					
				0	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	10
0.1	150	1.0	Upper	-0.3	1.2	0.3	0.0	-0.2	-0.1	0.1	0.3	0.1	0.2	0.6	0.5
			Lower	0.2	-0.2	0.1	0.0	0.1	1.4	-0.1	-0.3	-0.1	0.7	1.4	1.8
0.15	200	1.0	Upper	-0.1	2.1	1.2	0.1	0.0	0.5	0.4	0.1	-0.1	-0.4	0.7	2.1
			Lower	1.1	0.2	-0.5	0.2	0.9	3.4	0.2	0.0	0.4	0.5	2.2	1.4
		2.0	Upper	2.3	4.0	3.8	2.0	0.6	2.6	2.3	2.7	1.7	1.0	2.7	5.4
			Lower	3.4	1.0	0.7	1.2	3.1	6.3	1.0	0.8	1.6	2.6	5.1	4.4
0.2	200	2.0	Upper	2.3	4.8	3.8	2.0	1.0	2.7	2.3	2.8	1.8	1.3	3.4	5.8
			Lower	3.6	1.4	0.9	1.1	3.5	6.4	0.7	0.6	1.6	2.6	5.3	4.5

表-6 死・活荷重による最大縁応力度

($\lambda=200, r=2.0, \beta=0.4, \eta=0.01$)

n	Flange	Fixed Arch (Node No.)						2Hinged Arch (Node No.)					
		0	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	10
0.15	Upper	2 155	874	1 302	1 691	1 515	1 237	600	1 025	1 137	974	651	590
	Lower	2 512	1 173	1 467	1 609	1 216	920	624	1 038	1 112	908	578	536
0.2	Upper	2 550	957	1 485	1 876	1 599	1 264	647	1 132	1 244	1 042	672	608
	Lower	2 782	1 181	1 622	1 832	1 383	1 045	670	1 155	1 236	996	623	575

$\times[-10^{-6}E]$

P^* または ρ^* を移動荷重強度として使用する。

$$P^* = P(1 + \rho r^2) \dots\dots\dots(10)$$

$$\rho^* = \rho(1 + \rho r^2) \dots\dots\dots(11)$$

式(10)または(11)の集中荷重は、等分布活荷重に対する影響線解法に用いる荷重であって、本来の集中荷重に対する影響線の計算に用いてはならない。すなわち、アーチに生じる非線形性のために、集中活荷重と分布活荷重の計算に対して同じ影響値を用いることはできない。

表-4に補正係数と ρ^* の値の一例を示す。この例では、死・活荷重強度により割増率は2%と8%になっているが、実橋での設計荷重強度を考えれば4%以下になると思われる。なお、本研究ではアーチリブの分割数を20にしているため、これと異なる分割数を用いる場合には式(11)に対して次式の換算荷重強度を用いればよい。

$$\rho^* = \rho(1 + 0.05 \beta r^2) \dots\dots\dots(11)'$$

ただし、上式の ρ には式(8)の値を使用するものとする。

アーチリブの縁応力度には、非線形性が現れない軸力による応力度がかなりの部分を占める。また、この応力度の占める比率は、ライズ比や断面位置等によって異なるので²⁾、影響線解法の誤差を死荷重による応力も加えて調べることにする。

式(11)の ρ^* を用いて影響値②から求めた等分布死・活荷重による各断面の最大縁応力度の誤差を、表-5に示す。誤差は、表-3と同じく、分布荷重を用いて求めた正確な最大縁応力度に対する相対誤差で表した。表-5の2行目の数字は節点番号である。

表-5の値を表-3の値と比較すると、死荷重による応力度を含めた影響もあるが、危険側の誤差は0.5%以下になっており、大部分の断面での誤差は安全側の値である。スパンの中央点では、いずれの場合も最も誤差が大きいが、この点では縁応力度の値が小さいこと(表-6参照)、誤差は安全側であり、かつ表-5の $r=2.0, \beta=0.4$ の場合には実際には起こり得ないことを考えると、本解法の精度は実用上問題はないと思われる。

非線形性の生じやすい長大アーチ橋では、死荷重強度が増大するので r の値は大きくなるが、 β の値は逆に小さくなる。したがって $r=2.0, \beta=0.4$ の場合には、実橋の設計荷重としては過大であると考えられる。参考までに表-5の荷重強度の大きい場合について、正確な最大縁応力度の値 U を表-6に示す。値は無次元で表示されているので、実応力度に換算するには $[-10^{-6}E]$ 倍すればよい。表より、実橋としては過大な応力が生じていることがわかる。

式(10)または(11)の補正係数には式(4)、(5)に示した無次元量 n, λ, η および温度変化の影響が含まれていないので、これらについて考察する。文献2)または図-4で調べたように、幾何学的非線形性はライズ比が $n=0.2\sim 0.3$ のときに最も大きくなるが、影響線解法の誤差は表-5の $n=0.15$ と 0.2 の場合と比較してほとんど変わっていない。またライズ比および細長比が小さくなるほど非線形性は減少するが、 $n=0.1, \lambda=150$ について調べた結果では、式(11)の補正値は過大な割増しにはなっていないことがわかる。 η については、1/80から1/200まで値を変えて計算した結果によれば、影響線解法による誤差は $\eta=1/100$ のときの誤差と1%

表-7 影響線解法の誤差 (%)

($\beta=0.4, \gamma=0.01$)

n	λ	r	t	Flange	[Fixed Arch (Node No.)						2 Hinged Arch (Node No.)					
					0	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	10
0.1	150	1.0	30°	Upper	-0.2	1.0	0.4	0.1	-0.2	0.1	0.1	0.3	0.1	0.2	0.7	0.7
				Lower	0.2	-0.1	0.1	0.1	0.1	1.1	0.0	-0.2	-0.1	0.7	1.2	1.6
			-30°	Upper	-0.6	1.4	0.3	0.0	-0.2	-0.2	0.1	0.3	0.1	0.1	0.4	0.4
				Lower	0.1	-0.3	-0.1	-0.1	0.0	1.9	-0.2	-0.3	-0.2	0.8	1.7	2.2
0.15	200	1.0	30°	Upper	-0.1	1.7	1.1	0.0	0.0	0.5	0.3	0.1	-0.2	-0.5	0.7	2.5
				Lower	1.2	0.2	-0.5	0.2	0.8	2.8	0.0	-0.2	0.2	0.4	1.8	1.2
			-30°	Upper	0.0	2.6	1.2	0.1	0.0	0.4	0.4	0.2	0.0	-0.3	0.6	1.9
				Lower	1.0	0.2	-0.5	0.3	1.1	4.3	0.1	-0.1	0.3	0.6	2.6	1.7
		2.0	30°	Upper	2.1	3.6	3.7	2.0	0.6	2.7	2.3	2.7	1.7	1.0	2.9	5.8
				Lower	3.5	1.1	0.8	1.1	2.8	5.7	1.0	0.7	1.5	2.4	4.7	4.1
			-30°	Upper	2.5	4.4	3.9	2.0	0.5	2.4	2.3	2.7	1.7	1.0	2.5	5.0
				Lower	3.3	0.9	0.7	1.2	3.4	7.0	1.0	0.8	1.7	2.7	5.5	4.8

程度の差があるだけであった。

次に、温度変化のある場合について検討する。死・活荷重と温度変化による最大縁応力度の誤差を表-7に示す。 $r=1.0$ のとき危険側の誤差は0.6%以下であり、安全側の誤差は表-5の値より0.5~1%ほど増大する。 $r=2.0$ のときには危険側の誤差は現れず、安全側の誤差は表-5の値より最大1%ほど大きくなるが、いずれの場合にもスパン中央点で大きくなるだけであって、最も大きな応力度が生じる断面での誤差は2~3.5%である。

以上の考察から、活荷重による変形の影響を無視することができない場合でも、本文で提案した影響線解法を用いれば、集中活荷重および等分布活荷重による最大縁応力度をかなり正確に求めることができる。ただし、本解法を表-1に示した値以外の場合や、著しい非対称断面を有するアーチに適用する場合には、改めて計算精度を確かめる必要がある。

本解法をリブアーチ以外の形式のアーチに適用した例として、前述の(2)で説明した大三島橋の場合について述べると、最大の上・下縁応力度に生じる重ね合せによる誤差は、それぞれ-1.8%と-2.2%であった。また、補正係数を用いずに等分布死・活荷重と集中活荷重(TT-43)による総応力度を求めたときの誤差は上・下縁とも-0.9%であった。式(11)'から補正値を求めると2.3%になるので、上記の総縁応力度の50%は軸力による応力度で占められていることをあわせて考えれば、0.9%の危険側の誤差は完全に除去される。

4. 増加率の計算式

アーチに生じる幾何学的非線形性を推定するための簡易計算法として、曲げモーメントや縁応力度について式(9)の増加率を簡単に求めることができる計算式を説明

する。

(1) 曲げモーメントの増加率

文献2)において、全載等分布死荷重と半載等分布活荷重が作用するリブアーチについて有限変位解析を行い、非線形性による曲げモーメントの増加率を式(4)、(5)で示した無次元量の種々の値について求めたが、本節では非線形解析を行わずにこの増加率を求めることができる近似計算式を示す。

上記の荷重状態において曲げモーメントの値が大きく、かつ最大の増加率が生じる断面での値について計算式を求めることにする。したがってこの計算式から得られる増加率は、固定アーチでは第6節点、2ヒンジアーチでは第5節点の曲げモーメントについての値である。

文献2)による研究結果から得られた曲げモーメント増加率の計算値と特性曲線から、試行錯誤的に求めたのが次の計算式である。

$$\begin{aligned} \varepsilon_F = & (12 \beta r^2 + 11 \gamma) \\ & - \left(\frac{0.5 r^2 + 0.2}{\beta + 0.3} \right) \left(\frac{n \lambda}{15} - 2 \right) \left(\frac{n \lambda}{25} - 3 \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_H = & (10 \beta r^2 + 13 \gamma) \\ & - \left(\frac{\sqrt{r} - 0.4}{\beta + 0.05} \right) \left\{ \left(\frac{n \lambda}{30} - 1.5 \right)^3 + 0.125 \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (12 \cdot b)$$

ここに、 $\varepsilon_F, \varepsilon_H$ はそれぞれ固定アーチおよび2ヒンジアーチの曲げモーメント増加率(%)であり、式(9)で定義された値である。

式(12)の右辺第1項は $n \times \lambda = 30$ の場合について求めた式であり、第2項は $n \times \lambda$ が30以外の場合に対する補正項である。なお、式(12)の適用範囲は、

$$\left. \begin{aligned} 0.1 \leq n \leq 0.2, 150 \leq \lambda \leq 300 \\ 0.5 \leq r \leq 2.0, 0.1 \leq \beta \leq 0.4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

表-8 曲げモーメントの増加率 (%)

r	β	Fixed Arch (M ₀)									Two-Hinged Arch (M ₀)								
		n=0.1			n=0.15			n=0.2			n=0.1			n=0.15			n=0.2		
		λ=150	λ=200	λ=300	λ=150	λ=200	λ=300	λ=150	λ=200	λ=300	λ=150	λ=200	λ=300	λ=150	λ=200	λ=300	λ=150	λ=200	λ=300
0.5	0.1	2.9	3.9	5.3	4.3	5.3	6.2	5.3	6.0	6.6	4.6	5.4	6.2	5.6	6.1	6.5	6.0	6.4	6.6
	0.2	4.3	5.3	6.5	5.7	6.4	7.1	6.4	6.9	7.3	5.8	6.4	7.0	6.5	6.8	7.1	6.7	6.9	7.1
	0.4	6.0	6.9	7.8	7.1	7.6	8.1	7.6	8.0	8.2	7.2	7.6	8.0	7.5	7.8	7.9	7.7	7.8	7.9
	0.6	7.2	8.0	8.8	8.1	8.6	9.0	8.6	8.9	9.1	8.2	8.5	8.8	8.4	8.6	8.7	8.5	8.6	8.7
1.0	0.1	6.1	8.3	11.4	9.3	11.3	13.4	11.4	12.9	14.3	9.9	11.6	13.4	12.0	13.1	14.0	13.0	13.6	14.2
	0.2	9.4	11.5	14.0	12.2	13.8	15.3	13.8	14.9	15.8	12.6	13.9	15.1	14.0	14.7	15.2	14.5	14.9	15.3
	0.4	13.1	15.0	17.0	15.5	16.7	17.7	16.6	17.4	17.9	15.6	16.6	17.3	16.4	16.9	17.2	16.7	16.9	17.1
	0.6	15.8	17.6	19.3	17.9	18.9	19.8	18.9	19.5	20.0	17.9	18.8	19.4	18.5	18.9	19.1	18.6	18.8	19.0
1.5	0.1	9.9	13.4	18.5	15.0	18.3	21.7	18.5	20.9	23.2	16.1	18.9	21.7	19.4	21.2	22.7	21.0	22.1	22.9
	0.2	15.3	18.8	22.9	20.0	22.5	24.9	22.6	24.3	25.7	20.6	22.7	24.6	22.7	23.9	24.8	23.6	24.3	24.8
	0.4	21.6	24.8	28.0	25.5	27.5	29.1	27.4	28.6	29.5	25.8	27.3	28.5	27.0	27.7	28.3	27.4	27.8	28.1
	0.6	26.4	29.4	32.2	29.8	31.5	32.9	31.4	32.4	33.2	29.9	31.3	32.3	30.7	31.3	31.8	30.9	31.3	31.5
2.0	0.1	14.4	19.6	26.9	21.8	26.6	31.6	26.8	30.4	33.6	23.4	27.5	31.5	28.1	30.7	32.8	30.4	32.0	33.2
	0.2	22.4	27.6	33.6	29.2	32.9	36.3	32.9	35.4	37.5	30.1	33.2	35.9	33.2	34.8	36.1	34.4	35.4	36.1
	0.4	32.1	36.9	41.5	37.8	40.6	43.0	40.5	42.2	43.6	38.2	40.4	42.2	39.8	40.9	41.7	40.4	41.0	41.5
	0.6	39.7	44.2	48.4	44.7	47.2	49.3	47.0	48.5	49.7	45.0	46.9	48.4	45.9	46.8	47.5	46.2	46.7	47.0

表-9 曲げモーメント増加率の近似値 (%)

r	β	Fixed Arch (M ₀)									Two-Hinged Arch (M ₀)								
		n=0.1			n=0.15			n=0.2			n=0.1			n=0.15			n=0.2		
		λ=150	λ=200	λ=300	λ=150	λ=200	λ=300	λ=150	λ=200	λ=300	λ=150	λ=200	λ=300	λ=150	λ=200	λ=300	λ=150	λ=200	λ=300
0.5	0.1	2.3	4.6	5.8	5.0	5.8	6.8	5.8	6.6	6.8	5.0	5.8	6.8	6.1	6.8	7.0	6.8	7.0	7.3
	0.2	4.5	5.2	6.1	5.4	6.1	6.9	6.1	6.7	6.9	5.9	6.4	7.0	6.6	7.0	7.2	7.0	7.2	7.3
	0.4	5.6	6.0	6.7	6.2	6.7	7.3	6.7	7.1	7.3	6.9	7.2	7.5	7.3	7.5	7.6	7.5	7.6	7.7
	0.6	6.4	6.8	7.3	6.9	7.3	7.7	7.3	7.6	7.7	7.6	7.8	8.0	7.9	8.0	8.1	8.0	8.1	8.1
1.0	0.1	8.0	9.6	12.2	10.4	12.2	14.3	12.2	13.8	14.3	10.5	12.2	14.0	12.8	14.0	14.5	14.0	14.5	15.0
	0.2	10.0	11.4	13.4	11.9	13.4	15.1	13.4	14.7	15.1	12.9	13.9	15.0	14.3	15.0	15.3	15.0	15.3	15.6
	0.4	13.4	14.3	15.8	14.8	15.8	17.0	15.8	16.7	17.0	15.8	16.4	17.0	16.6	17.0	17.2	17.0	17.2	17.3
	0.6	16.3	17.1	18.2	17.4	18.2	19.1	18.2	18.9	19.1	18.2	18.6	19.0	18.7	19.0	19.1	19.0	19.1	19.2
1.5	0.1	11.3	14.3	19.2	15.7	19.2	23.2	19.2	22.3	23.2	16.9	19.3	21.8	20.1	21.8	22.4	21.8	22.4	23.1
	0.2	15.5	18.0	21.9	19.1	21.9	25.1	21.9	24.4	25.1	21.1	22.5	24.0	23.0	24.0	24.4	24.0	24.4	24.8
	0.4	22.8	24.5	27.3	25.3	27.3	29.6	27.3	29.1	29.6	26.9	27.7	28.5	28.0	28.5	28.7	28.5	28.7	29.0
	0.6	29.2	30.5	32.7	31.2	32.7	34.5	32.7	34.1	34.5	31.9	32.4	33.0	32.6	33.0	33.2	33.0	33.2	33.3
2.0	0.1	13.6	18.7	26.8	21.0	26.8	33.4	26.8	31.9	33.4	24.1	26.9	30.0	28.0	30.0	30.8	30.0	30.8	31.7
	0.2	21.0	25.2	31.6	27.0	31.6	36.9	31.6	35.7	36.9	30.5	32.2	34.0	32.8	34.0	34.5	34.0	34.5	35.0
	0.4	33.7	36.6	41.2	37.9	41.2	45.0	41.2	44.1	45.0	40.0	41.0	42.0	41.3	42.0	42.3	42.0	42.3	42.6
	0.6	44.9	47.2	50.8	48.2	50.8	53.7	50.8	53.1	53.7	49.4	49.7	50.0	49.8	50.0	50.1	50.0	50.1	50.2

とする。なお、表-9 に示すように、 $r \leq 1.5$ ならば $\beta = 0.6$ まで適用できる。

文献 2) で求めた厳密な値を表-8 に、式 (12) による近似値を表-9 に示す。これらの表から、近似値の誤差は式 (13) の範囲内では $\pm 2\%$ 以内であることがわかる。

表-8 は等断面リブアーチについて求めた値であるが、式 (12) は他の形式のアーチについても適用できる。いま、アーチリブの任意点の断面積 A と断面 2 次モーメント I が、アーチクラウンの値 A_c 、 I_c とアーチ軸線の傾斜角 ϕ を用いて、

$$A = A_c / \cos \phi, \quad I = I_c / \cos \phi \dots\dots\dots (14 \cdot a, b)$$

で与えられる変断面リブアーチを考えると、このアーチの曲げモーメントに生じる非線形性は等断面の場合とほとんど変わらない⁹⁾。両者における増加率の差は、式 (13) の範囲内で 1% 以内である。

また、式 (12) を桁に軸力の生じない上・中路式補剛アーチにも用いることができる。ただし、増加率は補剛桁の取付位置により多少の差があり、 $r=1.0$ のときには 1.5%、 $r=2.0$ のときには 5% ほど表-8 の値より大きくなることもある¹³⁾。なお、式 (4)、(6) の値を求めるときに、断面 2 次モーメント I の値として桁とアーチリブの値の和を用いずに換算断面 2 次モーメント¹³⁾を用いれば、式 (12) による増加率の精度をよくすること

ができる。

(2) 最大縁応力度の増加率

等分布死・活荷重による等断面リブアーチの最大縁応力度の増加率曲線を近似式で表すことにより、種々の荷重強度による最大縁応力度の増加率を求めることができる。この増加率を求めるための計算式は、応力度増加の最も大きい断面について導くものとする。

文献 2) の研究結果により、式 (4) の無次元量の値が、

$$n=0.15, \lambda=200, \eta=0.01 \dots \dots \dots (15)$$

の等断面リブアーチにおいて最大縁応力度の増加率が最大になる断面は、固定アーチの場合では $\beta \leq 0.25$ のときに固定端の上フランジ、 $\beta > 0.25$ のときに第 6 節点の下フランジであり、2 ヒンジアーチでは第 5 節点の下フランジであった (図-6 参照)。これらの断面での最大縁応力度の増加率 (%) を固定アーチと 2 ヒンジアーチについてそれぞれ ζ_F, ζ_H とすると、次の関係式が得られた。

$$0.08 \zeta_F = (\beta + 0.14)\gamma^2 + 0.35 \dots \dots \dots (16 \cdot a)$$

$$0.003 \zeta_H = (\beta - 0.05)\gamma^3 + 0.08 \dots \dots \dots (16 \cdot b)$$

式 (16) から求めた増加率を、分布荷重を用いて求めた正確な値とともに 図-6 に一点鎖線で示す。また、式 (16) の精度を詳しく調べたのが 表-10 の値である。近似値の誤差は、表-10 に示した範囲では 2% 以内である。なお、式 (16) の適用範囲は 表-10 の無次元量の値の範囲内とする。

式 (16) を式 (14) の変断面リブアーチに適用した場合には、誤差はさらに 1~2% 増加する。桁に軸力の生じない補剛アーチに対しては、最大縁応力度に生じる非線形性を詳細に調べていないので精度を断言することはできないが、曲げモーメントの非線形性¹³⁾から判断して、精度は悪くなるが概略的な値を求めることができる。ただし、補剛桁の応力度については非線形性がかなり大きくなるので式 (16) を用いることはできない。

5. 結 語

本報告では、幾何学的非線形性が生じるために線形解析を用いて設計することができないアーチについて、実用的な簡易計算法を説明した。研究結果を次のように要約することができる。

(1) 集中活荷重による断面力を求めるときには、設

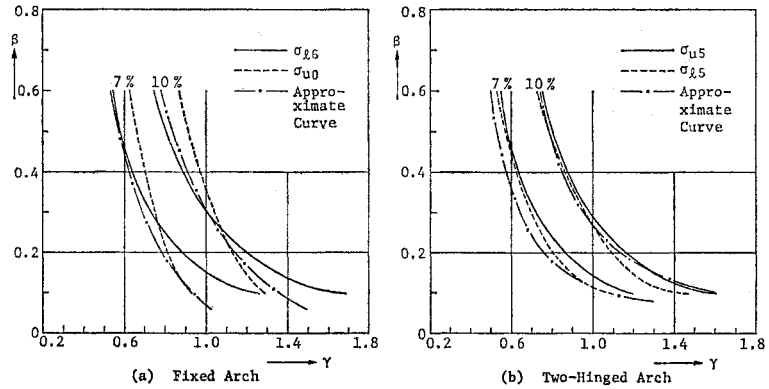


図-6 最大縁応力度の増加率曲線

表-10 最大縁応力度の増加率 (%)

($n=0.15, \lambda=200, \eta=0.01$)

γ	β	Fixed Arch		2 Hinged Arch	
		Exact	Approx.	Exact	Approx.
0.6	0.1	4.4	5.5	3.6	5.5
	0.2	5.0	5.9	5.1	6.1
	0.4	6.5	6.8	6.7	7.2
	0.6	7.8	7.7	8.0	8.1
0.8	0.1	6.0	6.3	5.0	5.9
	0.2	6.9	7.1	7.0	7.2
	0.4	8.9	8.7	9.2	9.3
	0.6	10.8	10.3	11.2	11.0
1.0	0.1	7.5	7.4	6.4	6.6
	0.2	8.7	8.6	9.0	8.8
	0.4	11.4	11.1	11.8	12.0
	0.6	13.9	13.6	14.4	14.5
1.5	0.1	11.9	11.1	10.2	9.1
	0.2	13.9	13.9	14.6	14.0
	0.4	18.8	19.6	20.1	20.5
	0.6	23.2	25.2	24.0	25.4

計荷重強度を用いて活荷重による変形の影響を考慮した計算法から算出した線形化影響値を用いれば、実用上十分な精度の値が得られる。

(2) 等分布活荷重に対しては、設計荷重強度を割増して求めた線形化影響値を用いることにより、最大縁応力度の計算に重ね合わせの原理を適用することができる。

(3) 断面力に生じる非線形性を推定することができる計算式を示した。この計算式を、線形計算により設計されたアーチ橋の非線形性の照査等に利用することができる。

終りに、特別研究の課題として本研究に助力していただいた三菱重工に勤務の池辺公智君 (当時・大阪大学学生) に対して謝意を表す。

参 考 文 献

1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，丸善，pp. 278~

- 280, 1973.
- 2) 前田幸雄・林 正：リブアーチにおける変形の影響，土木学会論文報告集，No. 299, 1980.
 - 3) 平井 敦：鋼橋Ⅲ，技報堂，pp. 400~405, 1967.
 - 4) 前田幸雄・林 正：構造解析における多元連立非線形方程式の数値計算法，日本鋼構造協会第11回マトリックス解析法研究発表論文集，1977.
 - 5) 前田幸雄・林 正・中村 守：増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法，土木学会論文報告集，No. 223, 1974.
 - 6) 堀井健一郎・齊藤 進・川原陸人・森 繁：骨組構造の大変形解析，土木学会論文報告集，No. 191, 1971.
 - 7) 前田幸雄・林 正・池辺公智：温度変化によるアーチの非線形性，昭和52年度関西支部年次学術講演会講演概要集，I-48, 1977.
 - 8) たとえば，新谷尚義：数値計算Ⅰ—線形計算，朝倉書店，1967.
 - 9) 戸川隼人：マトリックスの数値計算，オーム社，1971.
 - 9) Column Research Committee of Japan: Hand Book of Structural Stability, Corona Pub. Co., pp. 2-72~2-79, 1971.
 - 10) 前田幸雄・林 正：側タイ付2ヒンジソリッドリブアーチ橋の非線形挙動，構造の非線形問題，第24回構造工学シンポジウム，1978.
 - 11) Maeda, Y. and M. Hayashi: In-Plane and Out-of-Plane Instability of a 297 m Span Steel Arch Bridge, Proc. of Bridge Engineering Conference of TRB, Vol. 1, 1978.
 - 12) 本州四国連絡橋公団：本州四国連絡橋上部構造設計基準・同解説（案），1976.
 - 13) 前田幸雄・林 正・神谷伸彦：補剛桁を有するアーチ橋の非線形性状について，第29回年次学術講演会講演概要集，I-107, 1974.

(1979.8.10・受付)