

## 群荷重と特異曲面とによる単純支持板の解析

ANALYSIS OF SIMPLY SUPPORTED PLATES BY GROUP  
LOADS AND SINGULARITIES

中 川 建 治\*・長 瀬 裕 信\*\*・松 浦 良 和\*\*\*

By Kenji NAKAGAWA, Hironobu NAGASE and Yoshikazu MATSUURA

## 1. ま え が き

面外力を受ける薄板の問題は数多く研究されているが、著者らは A. Pucher が提唱した特異曲面法<sup>(1)~(5)</sup>に着目して次のような特異曲面を導いた。すなわち、円形領域に等分布する荷重(円形荷重と略記する)を受ける無限等方性板、集中外力を受ける直交異方性板、1辺を自由辺とする等方性板で自由辺上あるいは近傍に集中力や円形荷重を受ける場合である。この自由辺を有する特異曲面を使用すると周辺が自由で点支持される板の近似解の精度が向上することがわかる。

他方、著者らが新しく群荷重法と仮に名付ける載荷法を提案して単純支持辺を有する板の近似解析法を試みているが<sup>(6)~(8)</sup>、特異曲面法と組合せることによって自由辺と単純支持辺を有する板の解析精度が向上する。以上の研究をまとめて本文で発表したい。

さて、特異曲面法においては宙に浮いた無限ばりや無限板のたわみ曲面(支点がないので厳密性を欠くが)を影響面として扱い得て、フーリエ級数解による場合とは反対にたわみよりは曲げモーメントやせん断力のように高階微分による断面力の方が精度よく求められる。フーリエ級数解は板の問題でも広く活用されるが、集中力の作用点近傍の断面力に対しては収束が遅い。有限要素法は形状にとらわれないが断面力の急変化には追従し得ない欠点がある。Pucher の特異曲面法は選点法で境界条件を満足させているので、荷重近傍の状況を精度よく表現し得るが、荷重が自由辺へ接近すると誤差が大きくなる。これが自由辺を有する特異曲面が望まれる点である。

本文で述べる群荷重法は、1つの特異曲面を正負交互

\* 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 (株)熊谷組

\*\*\* 正会員 工修 玉野測量(株)

に反転させつつ平行移動させながら重ね合せると単純支持板のたわみ曲面が近似的に出現することに着目して導いたものである。 $n$  個( $n=6\sim 8$ )の集中力(あるいは円形、長方形分布荷重) $P_i$ を所定の間隔で1直線上に配列して鉛直つり合いと、回転つり合いとが成立するようにしたものをも本文では群荷重と仮称する。群荷重の要素  $P_i$  の大きさの比率は、宙に浮いた無限ばり(あるいは板)に作用させた場合に無限遠点のたわみが0に収束するように決定する。単純支持条件は群荷重を平行移動させつつ作用させることによって十分な精度で成立するようにする。

## 2. 群 荷 重

## (1) 荷重の有限列と無限列との相違

群荷重ははりでも平板でも同様に活用し得るのではりを対象にして述べる。スパン  $l$  の単純ばりの問題で載荷する荷重を  $p(x) = \sum p_n \sin n\pi x/l$ 、たわみを  $w(x) = \sum w_n \sin n\pi x/l$  と表すことは、スパン  $l$  の有限ばりの代りに宙に浮いた無限長さのばりに無限区間にわたって荷重  $\sum p_n \sin n\pi x/l$  を作用させたものとも考えられる。数値計算では無限和を有限和で打切るので、周期的な荷重  $\sum p_n \sin n\pi x/l$  の載荷区間も有限長さ  $L$  ( $-L/2 < x < L/2$ ) とみなして、 $L \gg l$  としたらどのようなになるであろうか。図-1のようにスパン  $l$  で点 C に  $P=1$  を

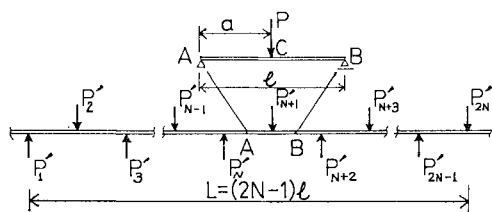


図-1 周期的外力を受ける無限ばりと単純ばり

受ける単純ばりを周期的荷重  $P_i' = \pm 1$  を受ける無限ばりに置換して検討しよう。はりには宙に浮いているので  $P_i'$  は全体として鉛直方向にも回転方向にもつり合わなければならない。このためには  $2N$  個の荷重の場合は  $P_1' = -(N-1)/(2N-1)$ ,  $P'_{2i} = 1$ ,  $P'_{2i+1} = -1$ ,  $P'_{2N} = -P_1'$  であり,  $2N+1$  個の場合は  $P_1' = -0.5$ ,  $P'_{2i} = 1$ ,  $P'_{2i+1} = -1$ ,  $P'_{2N+1} = -0.5$  であればよい。無限ばりの中央部 AB のたわみには, 現実的には遠方の荷重ほど影響量が小さいと思われるが, 全体の回転つり合いをとると遠方の荷重ほどつり合いに対して大きく影響することがわかる。荷重の数が奇数か偶数かによって  $P_1'$  が大きく変化して, 右端の荷重より右側の無載荷部分のはりのたわみが正負に大きく変わる。 $P_i'$  のこのような組合せをとる限り遠方の荷重の存在は区間 AB の近似的な単純ばり部分には無視し得ない影響を与える。これは  $L \rightarrow \infty$  としても変わることはないが, この点こそはフーリエ級数のような周期関数を用いる方法 ( $L = \infty$ ) と異なるところである。

(2) 群荷重 その1 (8個の要素よりなる場合)

スパン  $l$ , 曲げ剛さ  $EI$  の単純ばりが左端より  $a$  の点 C で  $P=1$  を受ける場合のたわみ曲線 AB を 図-1 に示すように無限ばりに  $P_j' = \pm 1$  を有限個作用させた場合のたわみ曲線で近似することを考える。 $P_j'$  の両端部分は必ずしも  $\pm 1$  でなくてもよいものとする。ここで 図-2(a) に示すような  $n (=6)$  個 1組の群荷重  $P_i$  を  $2l$  ずつ左右に平行移動させつつ加え合せて 図-1 の荷重  $P_i'$  を再現させることにする。このためにはこの群荷重  $P_i (i=1 \sim 6)$  を次のような条件を満足するように決定すればよい。

①  $P_1 \sim P_6$  が1群となって鉛直つり合いと回転つり合いが成立すること。図-2(a) に示すように逆対称配列として,

$$P_4 = -P_3, P_5 = -P_2, P_6 = -P_1 \dots\dots\dots (1)$$

とすれば鉛直つり合いが成立して, 中心点 O のまわりの回転つり合いは逆対称配列の特性より O 点の片側の荷重に対する回転つり合いと同じく次ようになる。

$$aP_2 - (2l-a)P_3 + (2l+a)P_1 = 0 \dots\dots\dots (2)$$

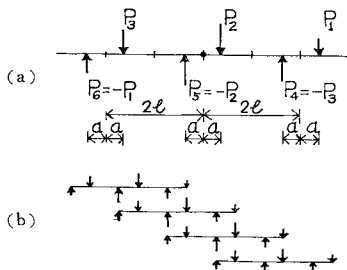


図-2 群荷重 その1

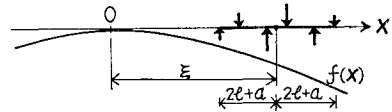


図-3 群荷重と影響関数

② 群荷重を  $2l$  ずつ平行移動させて重ね合せると  $\pm P$  の荷重列を再現すること (図-2 (b) 参照)。これは,

$$P_1 + P_2 + P_3 = P \dots\dots\dots (3)$$

によって満足される。

③ 宙に浮いた無限ばり (あるいは無限板) にこの荷重群 1組を載荷させると, 載荷点から離れるほどたわみは  $O$  へ収束する。この条件が満足されると, 図-1 の AB 区間のたわみは遠方の群荷重には影響されないことになって, AB 近傍の群荷重のみによって求められる。

このためには次のようにすればよい。はり (板) の着目点 (原点とする) の断面力やたわみの影響関数を  $f(x)$  とする (支点のないはりや板の影響関数は厳密には存在しないが仮に存在するものとする) と, 図-3 のように  $x = \xi$  点を中心として載荷する群荷重による原点への影響  $y(\xi)$  は,

$$y(\xi) = P_1 \{ f(\xi + 2l + a) - f(\xi - 2l - a) \} - P_3 \{ f(\xi + 2l - a) - f(\xi - 2l + a) \} + P_2 \{ f(\xi + a) - f(\xi - a) \}$$

となる。ここで  $|\xi| > 2l + a$  とする。この右辺の  $f(x)$  を  $x = \xi$  点まわりでテイラー展開すると,

$$y(\xi) = 2 \{ aP_2 - (2l-a)P_3 + (2l+a)P_1 \} f'(\xi) + \frac{1}{3} \{ a^3P_2 - (2l-a)^3P_3 + (2l+a)^3P_1 \} f'''(\xi) + \frac{2}{5!} \{ a^5P_2 - (2l-a)^5P_3 + (2l+a)^5P_1 \} f^{(5)}(\xi) + \dots \dots\dots (4)$$

となるが, この右辺第 1項の  $f'(\xi)$  の係数は条件式 (2) が成立すれば 0 となるので,  $f^{(5)}(\xi)$  の係数も 0 にするために,

$$a^3P_2 - (2l-a)^3P_3 + (2l+a)^3P_1 = 0 \dots\dots\dots (5)$$

とする。ここに得られた  $P_1, P_2, P_3$  に関する条件式 (2), (3), (5) を解くと,

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{P}{12l^2} (l-a)(2l-a) \\ P_2 &= \frac{P}{12l^2} 2(2l-a)(2l+a) \\ P_3 &= \frac{1}{12l^2} (2l+a)(l+a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

$$y(\xi) = \frac{2P}{45} a(l^2 - a^2)(4l^2 - a^2) f^{(5)}(\xi) + \frac{P}{945} a(4l^2 - a^2)(l^2 - a^2)(8l^2 + 3a^2)$$

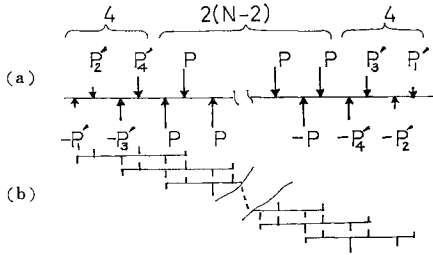


図-4 N組の群荷重その1の和

$$f^{(7)}(\xi) + \dots \quad \dots \quad (7)$$

となる。もし  $|\xi| < 2l+a$  であれば、 $P_1$  と  $P_6 = -P_1$  との載荷点に関する  $f^{(m)}(\xi+2l+a)$  と  $f^{(m)}(\xi-2l-a)$  は異なった関数となって、式(7)のように整理されないので注意しなければならない。

さて、式(7)の意味することは次のようなことである。 $\xi$  点 ( $|\xi| > 2l+a$ ) を中心にして作用する群荷重は、着目点(原点)へ影響関数  $f(\xi)$  の奇数階で5階以上の高階微分という形でしか影響しない。等断面ばりのたわみや曲げモーメントの影響関数は3次式以下であるから宙に浮いた無限ばりでは群荷重が作用しても遠方のたわみや曲げモーメントは0になることが推察されよう。

この群荷重を  $2l$  ずつ平行移動させつつ  $N$  組重ね合わせると 図-4 に示すように、両端の4個ずつの8個の成分  $P_i'$  は、

$$\left. \begin{aligned} P_1' &= P_1, P_2' = P_3 \\ P_3' &= P_1 + P_2 = \frac{P}{12l^2} (2l-a)(5l+a) \\ P_4' &= (P_2 + P_3) = \frac{P}{12l^2} (2l+a)(5l-a) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

となり、その他の内部の  $2(N-2)$  個の荷重は  $\pm P$  となる。なおここで扱った集中荷重は、集中荷重載荷点を中心として大きさが  $P_i$  と等しい分布荷重で交換してもよい。したがって例題では円形分布荷重とするものも扱う。

(3) 群荷重 その2 (8個の要素よりなる場合)

群荷重が8個の要素  $P_i (i=1\sim 8)$  から構成されるものとしても、同様な方式から各要素の荷重  $P_i$  を決定し得る。これを  $n=6$  の場合と区別するために、群荷重その2として  $Q_i (i=1\sim 8)$  と定義する。 $Q_i$  を次のような条件によって決定する(図-5 参照)。

① 8個の要素は、中心点Oのまわりに逆対称に配列して鉛直つり合いと回転つり合いが成立するようにする。このためには次の条件が必要となる。

$$\left. \begin{aligned} Q_5 &= -Q_4, Q_6 = -Q_3, \\ Q_7 &= -Q_2, Q_8 = -Q_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

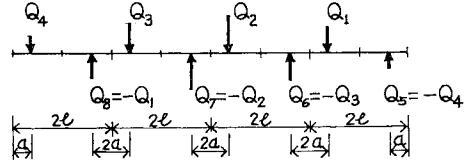


図-5 群荷重 その2

$$\begin{aligned} Q_1(2l+a) + Q_2a - Q_3(2l-a) \\ - Q_4(4l-a) = 0 \quad \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

② 群荷重を  $2l$  ずつ平行移動して重ね合わせると  $\pm P$  を再現させる。

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = P \quad \dots \dots \dots (11)$$

③ 宙に浮いた無限ばりの  $x=\xi$  点を中心に1組の群荷重を載荷させると、 $|\xi| > 4l-a$  であれば原点におけるたわみは0に収束すること。影響関数を  $f(x)$  とすると原点への影響  $y(\xi)$  は、

$$\begin{aligned} y(\xi) &= Q_1\{f(\xi+2l+a) - f(\xi-2l-a)\} \\ &+ Q_2\{f(\xi+a) - f(\xi-a)\} \\ &+ Q_3\{f(\xi-2l+a) - f(\xi+2l-a)\} \\ &+ Q_4\{f(\xi-4l+a) - f(\xi+4l-a)\} \end{aligned}$$

となるが、 $\xi$  点を中心にしてテイラー展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} y(\xi) &= 2\{Q_1(2l+a) + Q_2a - Q_3(2l-a) \\ &- Q_4(4l-a)\} f^{(1)}(\xi) \\ &+ 2\{Q_1(2l+a)^3 + Q_2a^3 - Q_3(2l-a)^3 \\ &- Q_4(4l-a)^3\} f^{(3)}(\xi)/3! \\ &+ 2\{Q_1(2l+a)^5 + Q_2a^5 - Q_3(2l-a)^5 \\ &- Q_4(4l-a)^5\} f^{(5)}(\xi)/5! \\ &+ 2\{Q_1(2l+a)^7 + Q_2a^7 - Q_3(2l-a)^7 \\ &- Q_4(4l-a)^7\} f^{(7)}(\xi)/7! + \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

$f^{(1)}(\xi)$  の係数は式(10)より0となるので、 $f^{(3)}(\xi)$  と  $f^{(5)}(\xi)$  の係数も0になるようにすると、 $y(\xi)$  は  $f^{(7)}(\xi)$  以下の微小項となる。

$$\left. \begin{aligned} Q_1(2l+a)^3 + Q_2a^3 - Q_3(2l-a)^3 \\ - Q_4(4l-a)^3 = 0 \\ Q_1(2l+a)^5 + Q_2a^5 - Q_3(2l-a)^5 \\ - Q_4(4l-a)^5 = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

これらの条件式(10),(11),(13)を4元連立方程式として解いて  $Q_i$  と  $y(\xi)$  を求めると、

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{P}{120l^3} (2l-a)(3l-a)(4l-a) \\ Q_2 &= \frac{P}{120l^3} 3(2l+a)(3l-a)(4l-a) \\ Q_3 &= \frac{P}{120l^3} 3(2l+a)(l+a)(4l-a) \\ Q_4 &= \frac{P}{120l^3} a(l+a)(2l+a) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

$$y(\xi) = \frac{-2P}{1575} a(3l-a)(4l-a)(l^2-a^2)$$

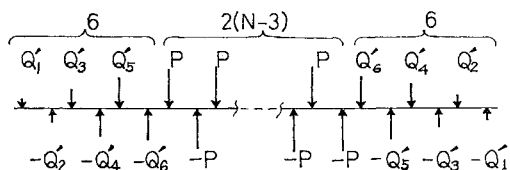


図-6 N組の群荷重その2の和

$$\cdot (4l^2 - a^2) f^{(7)}(\xi) + \epsilon \dots\dots\dots (15)$$

が得られる。この群荷重は、影響量  $y(\xi)$  を7階以上の奇数階微分  $f^{(7)}(\xi), f^{(9)}(\xi) \dots$  で表すので、群荷重その1より好ましい結果を与えるが、多少煩雑になるのは欠点である。

群荷重その2を  $2l$  ずつ平行移動しつつ  $N$  組重ね合わせると、図-6のように両端6個ずつの荷重  $Q'_i (i=1 \sim 6)$  は、

$$\left. \begin{aligned} Q'_1 &= Q_4 & Q'_2 &= Q_1 \\ Q'_3 &= Q_4 + Q_3 & Q'_4 &= Q_1 + Q_2 \\ Q'_5 &= Q_4 + Q_3 + Q_2 & Q'_6 &= Q_1 + Q_2 + Q_3 \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

となり、内側の  $2(N-3)$  個の荷重は  $\pm P$  となる。

(4) 計算例1・単純ばり

スパン  $l$ , 曲げ剛さ  $EI$  の単純ばりが中央点  $a=l/2$  に集中荷重  $P$  を受ける場合の中央部のたわみ  $w_c$  と、曲

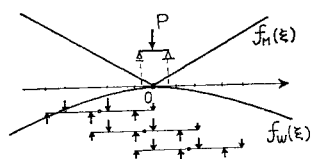


図-7 無限ばりより単純ばりの例 (たわみと曲げモーメント)

げモーメント  $M_c$  を求める問題を、宙に浮いた無限ばりと群荷重その1 ( $P_i$ ) によって求める方法を示す(図-7参照)。

はりのたわみの影響線は、着目点に集中荷重を載荷した場合のたわみ曲線であるから、宙に浮いた無限ばりの原点のたわみ影響線  $f_w(x)$  として原点に  $P$  を載荷するはりの微分方程式の非同次解、

$$\left. \begin{aligned} EIy^{(4)} &= P\delta(x) \\ f_w(x) = y &= \frac{1}{12EI} |x|^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

を用いる。ここで  $\delta(x)$  はディラックの  $\delta$  関数である。 $f_w(x)$  は載荷点の荷重条件を満足するが、支点をもたないはりであるから積分定数の定めようがなく、同次解の3次式は不定になる。したがって、最も簡単な形の非同次解を  $f_w(x)$  とする。曲げモーメントの影響線  $f_m(x)$  は式(17)より次のようになる。

$$f_m(x) = -EI \frac{d^2 f_w}{dx^2} = -\frac{1}{2} |x|$$

まず、ここで留意すべき点は、 $f_w(x), f_m(x)$  は  $|x|$  の関数であって着目点(原点)の左右 ( $x < 0, x > 0$ ) の領域で一応異なった関数である点である。着目点

の左右の影響線を同時に任意の点  $\xi$  でテイラー展開するとそれぞれ異なったものになり、式(4)から式(7)あるいは式(12)から式(15)への変換は不可能になる。すなわち、1組の群荷重がその荷重領域(その1では  $4l + 2a$ , その2では  $8l - 2a$ )に着目点を含む場合は式(7)と式(15)とは成立しない。群荷重の中心が着目点からそれぞれ  $|\xi| > 2l + a, |\xi| > 4l - a$  だけ離れると上記の式は有効になる。

さて単純ばりの着目点と載荷点とは等しいので、着目点を原点として図-7のように  $f_w(x), f_m(x)$  を描き、群荷重その1を正の荷重が原点に作用するようにして  $2l$  ずつ平行移動させて配置する。群荷重のうちで中心点の距離が  $2l + a$  以上になるものは式(7)のように5階以上の微係数のみが影響するが  $f_w(x), f_m(x)$  ともに3次式以下であるから0となって影響しないので図-7のように3群のみを作用させるだけでよい。

$a=l/2$  であるから式(6)より、

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= -P_6 = P/16 \\ P_2 &= -P_5 = 10P/16 \\ P_3 &= -P_4 = 5P/16 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

となり、 $P_i$  と  $f_w(x), f_m(x)$  によって  $w_c, M_c$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} w_c &= \frac{Pl^3}{12EI} \times \frac{1}{16} (-3^3 + 5 \times 2^3 - 11 - 15 \\ &\quad + 11 \times 2^2 - 5 \times 3^2 + 4^3) = \frac{Pl^3}{48EI} \\ M_c &= \frac{-Pl}{2} \times \frac{1}{16} (3 - 5 \times 2 + 11 - 15 + 11 \\ &\quad \times 2 - 5 \times 3 + 4) = \frac{Pl}{4} \end{aligned}$$

これらの単純ばりのものと完全に一致する。この例で推察し得るように群荷重は有限個の荷重で単純支持条件を表そうとするものであり、 $f_w(x)$  は、載荷点の特異性も含めて表現された微分方程式の解の最も簡単なものである。

3. 等方性無限板の特異曲面と適用例

1個の荷重を受ける等方性無限板の微分方程式の非同次解(特異曲面)を誘導して群荷重の適用例を示そう。

Pucher は面外力を受ける板の断面力の影響面を求めるために、集中荷重  $P=1$  を受ける無限板の微分方程式の非同次解  $w$ ,

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x, y; a, b) = \frac{1}{D} \delta(x-a) \delta(y-b) \dots\dots\dots (19)$$

$$w(x, y; a, b) = \frac{1}{16\pi D} r^2 \log r^2 \dots\dots\dots (20)$$

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

を用いる近似解法を Singularitäten Methode<sup>1)</sup> と名付けて発表した。ここで  $(a, b)$  は着目点,  $(x, y)$  は  $P=1$  の作用点,  $D$  は板剛度である。この解曲面は宙に浮いた無限板が点  $(a, b)$  で,  $P=1$  を受けた場合のたわみ曲面を点  $(a, b)$  のたわみが 0 になるように平行移動したものであって, 無限ばりの場合の式 (17) に相当したものである。本文ではこのような非同次解を Pucher にならって特異曲面とよぶことにする。断面力に関する特異曲面は, たわみに関するものを微分することによって得られる。以下に示す特異曲面は荷重  $P=1$  の中心が原点となるようにしたものである。

(1) 集中荷重による特異曲面

$P=1$  が原点に作用する場合のたわみと断面力の曲面で Pucher に依るものである。

たわみに関する特異曲面  $w_1(x, y)$  :

$$w_1(x, y) = \frac{1}{16\pi D} r^2 \log r^2 \left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots(21) \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{array} \right\}$$

曲げモーメント  $M_{x1}, M_{y1}$ , せん断力  $S_{x1}, S_{y1}$ , 反力  $R_{x1}, R_{y1}$ , の特異曲面:

$$\left. \begin{array}{l} M_{x1}(x, y) = \frac{-1}{8\pi} \left\{ (1+\nu) \log r^2 + 2(1-\nu) \frac{x^2}{r^2} \right\} \\ M_{y1}(x, y) = \frac{-1}{8\pi} \left\{ (1+\nu) \log r^2 + 2(1-\nu) \frac{y^2}{r^2} \right\} \\ S_{x1}(x, y) = \frac{-x}{2\pi r^2}, \quad S_{y1}(x, y) = \frac{-y}{2\pi r^2} \\ R_{x1}(x, y) = \frac{-1}{4\pi} \left\{ (1+\nu) \frac{x}{r^2} + 2(1-\nu) \frac{x^3}{r^4} \right\} \\ R_{y1}(x, y) = \frac{-1}{4\pi} \left\{ (1+\nu) \frac{y}{r^2} + 2(1-\nu) \frac{y^3}{r^4} \right\} \\ \dots\dots\dots(22) \end{array} \right\}$$

たわみ  $w_1$  より得られる曲げモーメント  $M_{x1}, M_{y1}$  は, 定数項  $-(1+3\nu)/8\pi$  を含むが, 特異曲面として群荷重を載荷させる限り, 式 (7) に示すように 4 次以下の代数式は省略してもよい。したがって, 式 (22) より省いた。

(2) 円形分布荷重に関する特異曲面

原点を中心として半径  $a$  の円内に等分布する総和が 1 の荷重  $qa^2=1$  に対する特異曲面は次のようになる。断面力に関する曲面は, このたわみの特異曲面より求められるので省略する。この曲面は, 集中力を円形に分布させる場合の荷重近傍の解析に活用されるので, 板の集中支点反力の解析にも威力を発揮させ得る。

$$\left. \begin{array}{l} \text{円内 } (x^2 + y^2 = r^2 \leq a^2); \\ w_{21}(x, y) = \frac{r^4}{64\pi a^2 D} \\ \text{円外 } (x^2 + y^2 = r^2 > a^2); \\ \dots\dots(23) \end{array} \right\}$$

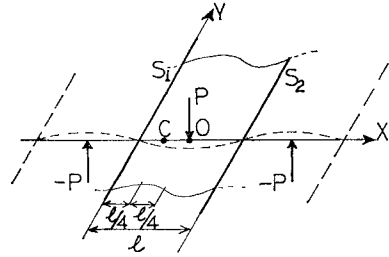


図-8(a) 無限板より単純支持の帯板の例

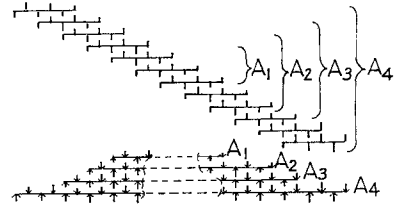


図-8(b) 群荷重その 1 の載荷方式

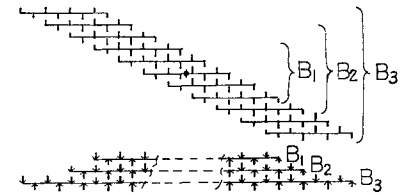


図-8(c) 群荷重その 2 の載荷方式

$$w_{20}(x, y) = \frac{a^2}{64\pi D} \left[ 5 + 2 \log \left( \frac{r}{a} \right)^2 - 4 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left\{ 1 - \log \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right\} \right]$$

(3) 計算例 2 相対 2 辺が単純支持された無限板

宙に浮いた無限板の  $x$  軸上に  $\pm P$  の集中外力を等間隔に無限個載荷させると, 図-8(a) に示すように, 相対 2 辺が単純支持させた無限帯状板の中央 0 に  $P$  を作用させた状態が現れる。帯板の幅 (支持辺  $S_1$  と  $S_2$  の間隔) を  $l$  として  $P=1$  を中央に載荷したものとして次のような検討を行って群荷重を板に適用することの妥当性を示す。

① 集中荷重の場合の特異曲面は式 (21) の  $w_1(x, y)$  であって無限回微分可能であるから, 群荷重の影響量の 5 階以上の高次微分項は 0 とはならない。したがって着目点を含まない離れた位置の群荷重も微小の効果を与える。群荷重その 1 を 図-8(b) に示すように, それぞれ 3 組, 6 組, 8 組, 12 組を  $2l$  ずつ平行移動させて重ねさせたものを  $A_1, A_2, A_3, A_4$  と名付ける。比較のために群荷重その 2 は 図-8(c) に示すように 5 組, 7 組, 11 組それぞれを重ね合わせて  $B_1, B_2, B_3$  とする。スパン中央載荷であるから  $a=l/2$  であって, その 1 の  $P_i$  ( $i=1\sim 6$ ) は式 (18) に示した値である。その 2 の  $Q_i$

表一  $P=1$  による無限帯板のたわみ（群荷重の個数による変化）

群荷重和	中央点たわみ ( $Pl^3/D$ )	C点曲げ モーメント $P(1+\nu)$	支持辺上のた わみ中央点・ $B_3$ に対する 比	支持辺上の曲 げモーメント C点の正解に 対する比
$A_1$	0.016750	0.070296	0.01092	0.019115
$A_2$	0.016985	0.070125	0.00292	0.000264
$A_3$	0.016971	0.070135	0.00119	0.000058
$A_4$	0.016964	0.070137	0.00034	0.000007
$B_1$	0.016967	0.070133	0.00085	0.000766
$B_2$	0.016962	0.070137	0.00013	0.000022
$B_3$	0.016961	0.070137	0.00001	0.000001
正解	—	0.070137	0	0

( $i=1\sim 8$ ) については式 (14) より、

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= -Q_8 = \frac{7}{64} P, & Q_2 &= -Q_7 = \frac{35}{64} P \\ Q_3 &= -Q_6 = \frac{21}{64} P, & Q_4 &= -Q_5 = \frac{1}{64} P \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

となる。 $\nu=0.3$  とする。

② 中央点（載荷点）のたわみを求めるために、式 (21) の特異曲面の中心をO点に一致させて群荷重和  $A_1 \sim A_4, B_1 \sim B_3$  をそれぞれ載荷させると表一に掲げられるようなたわみが得られる。荷重  $A_1 \sim B_3$  はいずれも対称ではないので、最も中央部に近い正荷重がO点に一致するようにする。

③ 載荷点の曲げモーメントは無限大になるので 1/4 点 C の曲げモーメント  $M_x$  を求めるために式 (22) の  $M_{x1}(x, y)$  を特異曲面として、この曲面の原点を着目点Cに合せる。荷重  $A_1 \sim B_3$  は、中央点たわみの場合と同じ位置に配置して特異曲面との積和をとると、表一のような値となる。なおこの帯板の  $x$  軸上の曲げモーメントは、

$$M_x(x, 0) = \frac{P(1+\nu)}{8\pi} \log\left(\frac{1+\sin \pi x/l}{1-\sin \pi x/l}\right)$$

としてすでに与えられている<sup>9)</sup>ので正解も併記した。

④ 荷重  $A_1 \sim B_3$  それぞれの逆対称中心位置では単純支持条件は正しく成立するが、図-8(a) の支持辺  $S_2$  は逆対称中心から  $l$  だけ外れるので、厳密に単純支持条件  $w(l)=0, M_x(l)=0$  は成立しない。この近似度を検討するために、たわみと曲げモーメント  $M_x$  との特異曲面を支持辺  $S_2$  上の点  $(l, 0)$  へ移行して収束誤差を求めて、比較しやすいようにたわみ誤差は中央点たわみの荷重  $B_3$  に対する値で割り、曲げモーメント誤差はC点の  $M_x$  の正解値で割って表一に掲げた。

⑤ 着目点近傍から離れた位置に作用する1組の群荷重によるたわみ影響量  $\delta$  を計算しよう。たわみの特異曲面を微分すると、

$$w_1^{(5)} = \frac{P}{2\pi D x^3}, \quad w_1^{(7)} = \frac{6P}{\pi D x^5}$$

となる。群荷重1組の中心位置を  $x=10l$  として、その

表二  $x=10l$  における群荷重の影響

$1(P_i)$  は式 (18), その  $2(Q_i)$  は式 (24) を用いる。

式 (21) の特異

曲面と群荷重その

1, その2とを組

合せる直接法と、テイラー展開式 (7) と式 (15) を用いる近似法による結果を表二に掲げる。それぞれを表一の中央点のたわみと同じ単位  $Pl^3/D$  であるから、群荷重の近傍から離れた点のたわみは0に収束することが推察される。

⑥ 荷重を内部に含む任意領域を板面に描いて周辺に沿ってせん断力  $Q_n$  の積分をとると、正確に  $P$  となるのが特異曲面法の特長であるが、実計算は離散的に行われるので次のような検定を試みる。図-8(a) で  $x=0.1l, x=0.9l, y=\pm 0.4l$  の線で囲まれる1辺  $0.8l$  の正方形領域をとり、各辺を16等分する点で  $Q_{ni}(Q_x$  か  $Q_y)$  を求める。この  $Q_{ni}$  をそれぞれの辺上でシンプソン公式によって数値積分して  $\oint Q_n ds$  とみなす。計算値は、群荷重和  $A_i$  に対するものを有効数字7桁で行ったところ  $0.9999996P$  となってせん断力の精度は演算誤差内であることがわかった。

⑦ 円形荷重の場合：帯板の形状はそのままとして荷重  $P$  を半径  $0.1l$  の円形領域に分布させる。したがって特異曲面は、式 (21) の代りに式 (23) およびその導関数を用いる。群荷重和を  $A_i$  より1組少なく11組とすると、群荷重全体の中心は逆対称中心となり、図-9の原点に一致するので、 $x=0$  の支持辺は計算上完全に単純支持となる。

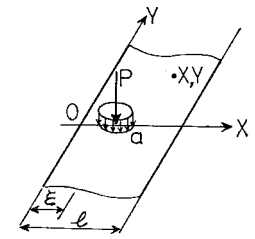


図-9 集中心力（円形分布力）を受ける帯板

したがって、11組の和として  $x=l$  の支持辺の単純支持実現精度をみよう（図-9 で  $\xi=0.5l, a=0.1l$  としたものである）。

表-3 にまとめたが、たわみは荷重中心点のたわみ  $w_c$  で剰している。 $w_x$  は  $y$  座標を同じくする  $x=0$  辺上の  $w_{x0}$  で剰し、曲げモーメントは載荷点の  $M_x$  で剰している。たわみより曲げモーメントの精度がよいこ

表-3 中央円形荷重による  $x=l$  辺上の状況

$y$	$w/w_c (\times 10^{-4})$	$-w_x/w_{x0}$	$M_x/M_{xc} (\times 10^{-6})$
0	-4.67	0.99966	3.75
0.2l	-4.68	0.99963	3.75
0.5l	-4.73	0.99941	3.75
0.1l	-4.89	0.99821	3.76
5.0l	-5.27	0.95645	3.23

$a=0.1l, \xi=l/2$

とがわかる。せん断力つり合いは⑥とまったく同じ方式で検討したところ結果も⑥と同じく  $0.9999996P$  となった。

#### 4. 群荷重解より一般のフーリエ級数解への移行

本文で述べた群荷重解は、単純支持境界のものにしか適用できないが、特異曲面の特性より群荷重の組数を可能な限り少なくとも荷重作用点近傍の断面力の急変化をきわめて正確に把握することが可能である。この点が、フーリエ級数解では、Gibbs の現象のために荷重急変点の収束が不良になることと異なる点である。しかし群荷重を無限に重ね合わせるとフーリエ級数解へ収束することが次のようにして証明されるので、両者は和のとり方が異なるという典型的な例とも解釈される。

まず証明のために必要な事項を演算子法的にきわめて形式的に導く。フーリエ変換の理論より、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+b^2} e^{-isx} dx = -i \operatorname{sign}(s) \pi e^{-bs|s|}$$

である。反転公式より、

$$\frac{x}{x^2+b^2} = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign}(s) e^{-bs|s|} e^{isx} ds$$

となる。両辺を形式的に  $x$  で積分すると、

$$\log(x^2+b^2) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-bs|s|}}{|s|} e^{isx} ds \quad \dots\dots\dots(25)$$

となる。さらに  $x$  で2回積分して整理すると、

$$\begin{aligned} & (x^2+b^2) \log(x^2+b^2) \\ &= 3x^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{2}{|s^3|} + \frac{2|b|}{s^2} \right\} e^{-bs|s|} e^{isx} ds \\ & \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

が得られる。

$\delta$  関数無限列についてのフーリエ変換より次の公式が与えられている。

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-is\beta k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k\beta) e^{-ist} dt \\ &= \frac{2\pi}{\beta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(s - \frac{2\pi}{\beta} k\right) \quad \dots\dots(27) \end{aligned}$$

##### (1) 集中荷重を受ける相対2辺単純支持の無限帯板

スパン  $l$  の相対2辺が、単純支持された無限帯状板の  $x$  軸上  $\xi$  点へ集中荷重  $P$  を作用させたものを対象にする (図-9 参照)。群荷重その1を用いるので各要素は式 (6) より、

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P(l-\xi)(2l-\xi)/12l^2 \\ P_2 &= 2P(2l-\xi)(2l+\xi)/12l^2 \\ P_3 &= (2l+\xi)(l+\xi)/12l^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

となる。この群荷重を  $x$  軸上で  $P_3$  が  $x=\xi$  点に一致

するように配置して、 $\pm 2l$  ずつ平行移動して無限組載荷する。板の  $(x, y)$  点のたわみを求めるのであるから式 (21) の  $w_1(x, y)$  を影響関数  $f_1(x, y; \xi')$  として、

$$\begin{aligned} f_1(x, y; \xi') &= \frac{1}{16\pi D} \{ (x-\xi')^2 + y^2 \} \\ & \quad \cdot \log \{ (x-\xi')^2 + y^2 \} \end{aligned}$$

とすればよい。ここで、 $\xi'$  とは  $x$  軸上の荷重位置である。これをフーリエ変換で表わすと式 (26) に示すように  $3(x-\xi')^2$  の項が加わるが、群荷重の特性 (式 (5)) から影響関数の4階微分までは0になるので、この項は外しても結果は変わらない。したがって、式 (26) より、

$$f_1(x, y; \xi') = \frac{1}{8\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|s^3|} + \frac{|y|}{s^2} \right\} \cdot e^{-s|y|+is(x-\xi')} ds$$

と定義してよいことになる。 $P_i$  と  $f_1(x, y, \xi')$  との積和をとってたわみ  $W_1(x, y)$  を求めると、

$$\begin{aligned} W_1(x, y) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [ \{ f_1(x, y; \xi+2l+2lk) \\ & \quad - f_1(x, y; -\xi-2l+2lk) \} P_1 \\ & \quad - \{ f_1(x, y; 2l-\xi+2lk) \\ & \quad - f_1(x, y; \xi-2l+2lk) \} P_3 \\ & \quad + \{ f_1(x, y; \xi+2lk) \\ & \quad - f_1(x, y; -\xi+2lk) \} P_2 ] \dots\dots(29) \\ &= \frac{-iP}{48\pi D l^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s|y|} \left( \frac{1}{|s^3|} + \frac{|y|}{s^2} \right) \\ & \quad \cdot z(s, \xi) e^{isx} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i2slk} ds \dots\dots\dots(30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(s, \xi) &= (l-\xi)(2l-\xi) \sin(2l+\xi)s \\ & \quad - (2l+\xi)(l+\xi) \sin(2l-\xi)s \\ & \quad + 2(2l-\xi)(2l+\xi) \sin \xi s \quad \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

となる。ここで、式 (27) より、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i2slk} = \frac{2\pi}{2l} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(s - \frac{\pi}{l} k\right) \dots\dots\dots(32)$$

となるので  $\delta$  関数の積分の特性より、

$$\begin{aligned} W_1(x, y) &= \frac{-iP}{48 D l^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s|y|} \left( \frac{1}{|s^3|} + \frac{|y|}{s^2} \right) \\ & \quad \cdot z(s, \xi) e^{isx} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(s - \frac{\pi}{l} k\right) ds \\ &= \frac{-iP}{48 D l^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi/l|ky|} \left( \frac{l^3}{\pi^3 |k^3|} + \frac{l^2 |y|}{\pi^2 k^2} \right) \\ & \quad \cdot z\left(\frac{\pi}{l} k, \xi\right) e^{i\pi/l kx} \end{aligned}$$

となる。 $z(s, \xi)$  については、

$$z\left(\frac{\pi}{l} k, \xi\right) = 12l^2 \sin \frac{\pi}{l} k\xi \quad k \neq 0 \quad \dots\dots\dots(33)$$

となるが、 $k=0$  では  $s=\varepsilon \ll 1$ ,  $\sin(2l \pm \xi)\varepsilon = (2l \pm \xi)\varepsilon$  となるので、

$$\begin{aligned} z(\varepsilon, \xi)|_{\varepsilon=0} &= (l-\xi)(2l-\xi)(2l+\xi)\varepsilon \\ & \quad - (2l+\xi)(l+\xi)(2l-\xi)\varepsilon \\ & \quad + 2(2l-\xi)(2l+\xi)\xi\varepsilon|_{\varepsilon=0} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dz(s, \xi)}{ds} \Big|_{s=0} = (l-\xi)(2l-\xi)(2l+\xi) - (2l+\xi)(l+\xi)(2l-\xi) + 2(2l-\xi)(2l+\xi)\xi = 0$$

となる。

$z''(s, \xi)|_{s=0}$  については  $\sin(2l \pm \xi)s, \sin \xi s$  より 0 となることは明白である。このことから、 $z(0, \xi)$  は 2 位の 0 であり、 $k=0$  の特異性は解消されて 0 となり、

$$W_1(x, y) = \frac{Pl^2}{2\pi^3 D} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k^3} + \frac{\pi|y|}{k^2 l} \right\} \cdot e^{-\pi|y|/l \cdot k} \sin \frac{\pi \xi k}{l} \sin \frac{\pi x k}{l} k \dots \dots \dots (34)$$

となる。これはフーリエ級数による解<sup>9)</sup>そのものである。

(2) 円形分布荷重を受ける場合

前節の無限帯状板の集中荷重を半径  $a$  の円内に等分布して総和が  $P$  となる場合に変更する。円形領域の荷重を  $xy$  系のフーリエ展開で表現するのは困難であるから、この問題をフーリエ級数解で扱うのは不都合に思われる。荷重の作用中心は変化しないので群荷重は式 (28) そのままであって円形に分布しているものとみなせばよい。たわみの影響関数  $f_2(x, y, \xi)$  は、円外の領域については式 (23) の定数項と  $r^2$  の項を外したものを、

$$f_2(x, y; \xi) = \frac{P}{32\pi D} [2\{(x-\xi)^2 + y^2\} \log\{(x-\xi)^2 + y^2\} + a^2 \log\{(x-\xi)^2 + y^2\}]$$

を用いてよい。これをフーリエ変換で表わし  $(x-\xi)^2$  項を省くと式 (25), (26) より、

$$f_2(x, y; \xi) = \frac{P}{32\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} \cdot e^{-|y|s} \left( \frac{4}{|s^3|} + \frac{4|y|}{s^2} - \frac{a^2}{|s|} \right) e^{is(x-\xi)} ds$$

となる。群荷重による積和は式 (29) そのままであり、式 (30) の代りに、

$$W_2(x, y) = \frac{-iP}{192\pi D l^2} \int_{-\infty}^{\infty} \cdot e^{-|y|s} \left( \frac{4}{|s^3|} + \frac{4|y|}{s^2} - \frac{a^2}{|s|} \right) z(s, \xi) \cdot e^{isx} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i2s l k} ds$$

となる。 $z(s, \xi)$  は式 (31), (33) で示してあり、式 (32) に基づいて誘導された式 (30) から式 (34) までの関係はそのままここでも適用される。したがって、円外の点に対するたわみは、 $y \geq 0, -(x-\xi)^2 + y^2 \geq a^2$  に対して、

$$W_2(x, y) = \frac{P}{8 l D} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\pi y k / l} \left( \frac{4 l^3}{\pi^3 k^3} + \frac{4 y l^2}{\pi^2 k^2} - \frac{a^2 l}{\pi k} \right) \cdot \sin \frac{\pi \xi k}{l} \sin \frac{\pi x k}{l}$$

$$= \frac{Pl^2}{2\pi^3 D} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k^3} + \frac{\pi y}{l k^2} \right) e^{-\pi y k / l} \sin \frac{\pi \xi k}{l} \sin \frac{\pi x k}{l} - \frac{Pa^2}{32\pi D} \log \left\{ \frac{\cosh\left(\frac{\pi y}{l}\right) - \cos \frac{\pi}{l}(x+\xi)}{\cosh\left(\frac{\pi y}{l}\right) - \cos \frac{\pi}{l}(x-\xi)} \right\}$$

となる。

円内の点  $(x, y)$  については、この部分の荷重に対して、のみ  $f_2(x, y; \xi)$  の代りに式 (23) の第 1 式をもとにした  $P\{(x-\xi)^2 + y^2\}/64\pi a^2 D$  を用いるべきである。この差 (式 (23)) の第 1 と第 2 式の差に相当) を修正して次のようにすればよい。

円内、 $y \geq 0, (x-\xi)^2 + y^2 \leq a^2$

$$W_{2i}(x, y) = W_2(x, y) + \frac{P}{64\pi a^2 D} \{(x-\xi)^2 + y^2\}^2 - \frac{Pa^2}{64\pi D} \left[ 5 + 4 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{(x-\xi)^2 + y^2}{a^2} \right\} \times \log \left\{ \frac{(x-\xi)^2 + y^2}{a^2} \right\} - 4 \left\{ \frac{(x-\xi)^2 + y^2}{a^2} \right\} \right]$$

これらの関係は、スパン外へ円周が外れない限り一様に有効なものである。

5. 直交異方性板の集中荷重に対する特異曲面

ここで仮定する直交異方性板は  $xy$  方向に  $B_x, B_y$  の曲げ剛さをもちねじり係数  $k$  で、次の微分方程式で表わされるものとする。

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2k \sqrt{B_x B_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P \delta(x) \delta(y)$$

$P=1$  が原点に載荷している場合のたわみ曲面  $w_3(x, y)$  は、座標変換によって  $\xi\eta$  系で表わす方が簡単になる。

誘導の過程は、省略してたわみの特異曲面のみを次に示す。

$$B_x = \beta_x^4 B_0, \quad x = \beta_x \xi \\ B_y = \beta_y^4 B_0, \quad y = \beta_y \eta \\ w_3(\xi, \eta) = \frac{\sqrt{2}}{8\pi\beta_x\beta_y\sqrt{1+k}} \left[ \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{4} \cdot \log(\xi^4 + 2k\xi^2\eta^2 + \eta^4) - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{\xi\eta}{\sqrt{2(1-k)}} \log \left\{ \frac{\xi^2 + \sqrt{2(1-k)}\xi\eta + \eta^2}{\xi^2 - \sqrt{2(1-k)}\xi\eta + \eta^2} \right\} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} (\xi^2 - \eta^2) \tan^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \left( \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 + \eta^2} \right) \right\} \right]$$

断面力に関する特異曲面はこの曲面の微分によって得られる。 $k \rightarrow 1.0$  とすることにより式 (21) の等方性板の解へ収束することは容易に検証される。



### 6. 自由辺をもつ半無限等方性板の特異曲面

Pucher は特異曲面法で境界条件を選点法で満足させたが、自由辺近傍の荷重による載荷点近傍の断面力の分布状態を精度よく求めるには、荷重から最も近い1つの自由辺の境界条件だけは満足する特異曲面を導くことが

望ましい。このためには図-10に示すように、 $y$ 軸を自由辺とする  $x \geq 0$  領域の等方性板が  $x$  軸上の  $x=u$  を中心にして集中荷重、あるいは半径  $a$  の円形荷重  $P=q\pi a^2$  を受ける場合の特異曲面を導けばよい。まず集中荷重(円形荷重)

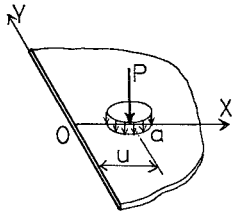


図-10 半無限板の自由辺の実現

が無限板に作用する場合の特異曲面を点  $(u, 0)$  を中心として配置し、 $w_i$  として、 $y$  軸上の曲げモーメントと反力  $M_x^0, R_x^0$  とを求める。次に  $y$  軸方向にフーリエ変換すれば、それぞれ  $M(t), V(t)$  となるような曲げモーメントと反力とを  $y$  軸(自由辺)上で与えるような重調和曲面  $w_h(x, y)$  を決定する積分表示式を導く。最後に、

$$\left. \begin{aligned} M(t) &= F[-M_x^0(x)] \\ V(t) &= F[-R_x^0(y)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

の条件のもとに積分式を解いて両曲面を重ねると、 $w(x, y) = w_i(x, y) + w_h(x, y)$ , ( $i=1, 2$ ) という形で  $y$  軸を自由辺とする特異曲面が得られる。

#### (1) 半無限板のたわみ曲面(重調和関数)の積分表示式

曲面は  $x$  軸に関して対称であるから、 $y$  方向にはフーリエの  $\cos$  変換としてよい。  $x \geq 0$  の領域のみに着目するので、 $x \rightarrow \infty$  でたわみ  $w_h(x, y)$  は  $0 \rightarrow$  収束するという条件を形式的に採用すると、 $t$  を積分変数、 $c_1(t), c_2(t)$  を  $t$  の任意関数とすることによって、 $w_h(x, y)$  は、

$$w_h(x, y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \left\{ c_1(t) e^{-tx} - \frac{c_2(t)}{2t} x e^{-tx} \right\} \cos ytdt \dots\dots\dots (36)$$

と表される。これは、重調和解  $(c_1' e^{-tx} - c_2' x e^{-tx} + c_3' e^{tx} - c_4' x e^{tx}) \cos ty$  の前2項を採用したものである。フーリエ変換と逆変換は次のような方式をとる。

$$\left. \begin{aligned} M(t) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty -M_x^0(y) \cos tydy \\ V(t) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty -R_x^0(y) \cos tydy \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -M_x^0(y) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty M(t) \cos ytdt \\ -R_x^0(y) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty V(t) \cos ytdt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

式(37)は境界条件そのものである。条件式、

$$\begin{aligned} M_x(0, y) &= -D \left( \frac{\partial^2 w_h}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_h}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty M(t) \cos ytdt \\ R_x(0, y) &= -D \left\{ \frac{\partial^3 w_h}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_h}{\partial x \partial y^2} \right\} \Big|_{x=0} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty V(t) \cos ytdt \end{aligned}$$

へ式(36)を積分記号のまま微分して代入し、両辺の積分記号内を等しいと置くと、 $c_1, c_2$  の方程式が得られて、

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} 1-\nu & 1 \\ (1-\nu)t & -(1+\nu)t/2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} t^2 c_1 \\ c_2 \end{array} \right\} &= -\frac{1}{D} \left\{ \begin{array}{c} M \\ V \end{array} \right\} \\ Dc_1 &= \frac{-(1+\nu)}{(1-\nu)(3+\nu)t^2} M - \frac{2}{(1-\nu)(3+\nu)t^3} V \\ Dc_2 &= \frac{-2}{(3+\nu)} M + \frac{2}{(3+\nu)t} V \end{aligned}$$

となる。これより式(36)の解曲面  $w_h(x, y)$  は次の積分式で表されることになる。

$$\begin{aligned} w_h(x, y) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}(3+\nu)(1-\nu)D} \\ &\cdot \left[ \int_0^\infty \left\{ \frac{-(1+\nu)}{t^2} + \frac{(1-\nu)x}{t} \right\} e^{-tx} M(t) \cos ytdt \right. \\ &\left. - \int_0^\infty \left\{ \frac{2}{t^3} + \frac{(1-\nu)x}{t^2} \right\} e^{-tx} V(t) \cos ytdt \right] \dots (38) \end{aligned}$$

#### (2) 自由辺上の集中荷重に対する特異曲面

自由辺上の原点に  $P_0=1$  が作用している特異曲面は、図-11において  $M_0=0$  とする場合である。自由辺上の曲げモーメント  $M_x$  は0であるから、 $M(t) \equiv 0$  であり、反力は原点で  $-\delta(y)$  であるから、 $V(t) = -1/\sqrt{2\pi}$  となる。この条件を式(38)へ代入すると特異曲面  $w_4(x, y)$  は、

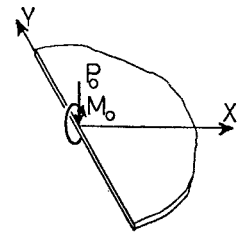


図-11 自由辺上に  $P_0, M_0$  を受ける半無限板

$$w_4(x, y) = \frac{1}{\pi D(1-\nu)(3+\nu)} \int_0^\infty \left\{ \frac{2}{t^3} + \frac{(1-\nu)x}{t^2} \right\} \times e^{-tx} \cos ytdt$$

と表される。被積分関数は  $t=0$  で特異点となるが、演算子法的に形式的な積分によって解が得られる。たわみの特異曲面として結果のみを示すと次のようになる。

$$\begin{aligned} w_4(x, y) &= \frac{-1}{(3+\nu)(1-\nu)\pi D} \left\{ \frac{(\nu x^2 - y^2)}{2} \right. \\ &\left. \times \log(x^2 + y^2) - (1+\nu)xy \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$-\frac{(1-\nu)}{2}x^2\} \dots\dots\dots(39)$$

(3) 自由辺上の集中モーメントに対する特異曲面

自由辺 (y 軸) 上の原点で 図-11 に示すような集中モーメント  $M_0=1$  を受ける場合は、自由辺上の曲げモーメントと反力のフーリエ変換は  $M(t)=1/\sqrt{2\pi}$ ,  $V(t)=0$  となり、式 (38) へ代入することによって特異曲面  $w_5(x, y)$  は次のようになる。

$$w_5(x, y) = \frac{-1}{(3+\nu)(1-\nu)\pi D} \times \int_0^\infty \left\{ \frac{(1+\nu)}{t^2} - \frac{(1-\nu)x}{t} \right\} e^{-tx} \cos ytdt$$

$$= \frac{-1}{(3+\nu)(1-\nu)\pi D} \left\{ x \log(x^2+y^2) - (1+\nu)y \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \right\}$$

(4) x 軸上に集中荷重をもつ半無限板の特異曲面

y 軸を自由辺として点 (u, 0) に  $P=1$  を載荷する  $x \geq 0$  領域の半無限板のたわみの特異曲面  $w_6(x, y)$  は、次のようにして求められる。無限板が  $P=1$  を受ける曲面  $w_1(x, y)$  を点 (u, 0) へ平行移動して、 $P=-1$  を受ける曲面  $-w_1(x, y)$  を点 (-u, 0) へ平行移動して両者を重ね合わせると、y 軸上の曲げモーメントは 0 となり、反力は式 (22) より  $2R_{x1}(-u, y)$  となる。この反力を消す曲面を式 (38) をもとにして導き重ね合わせると y 軸は自由辺となり目的とする曲面が得られたことになる。誘導の過程は冗長になるので省略して結果だけを示すと次のようになる (図-10 参照)。

$$r_1^2 = (x-u)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x+u)^2 + y^2$$

$$w_6(x, y) = \frac{1}{16\pi D} \{ r_1^2 \log r_1^2 - r_2^2 \log r_2^2 \}$$

$$+ \frac{1}{2(3+\nu)(1-\nu)\pi D} \left\{ -\nu r_2^2 \log r_2^2 - \frac{(1-\nu)^2}{2} u(x+u) \log r_2^2 + \frac{(1-\nu)^2 u^2}{2} \log r_2^2 + (1-\nu)(x+u)^2 + (1+\nu)y^2 \log r_2^2 + 2(1+\nu)y(x+u) \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+u}\right) \right\}$$

(5) x 軸上に円形荷重をもつ半無限板

y 軸を自由辺として点 (u, 0) を中心とする半径 a の円形等分布荷重  $q=1/\pi a^2$  を載荷する半無限板の特異曲面は、集中荷重に対するものと同様に導かれる。すなわち、全無限板に円形分布荷重を載荷する場合の特異曲面 (式 (23) の  $w_{2i}, w_{20}$ ) を x 方向に u だけ平行移動させて、y 軸上に現われる反力と曲げモーメントを打消す

曲面を式 (38) より求めて重ね合わせる。結果は次のようになる。

円内 ( $x^2+y^2 \leq a^2$ ) :

$$w_{7i}(x, y) = \frac{1}{64\pi D} \left\{ a^2(2 \log a^2 - 5) + \frac{r_1^4}{a^2} + 4r_1^2(1 + \log a^2) \right\}$$

$$- \frac{1}{32(3+\nu)(1-\nu)\pi D} \left[ \{(1-\nu)^2(a^2 - 8ux) + 16(1+\nu)y^2 - 2(3+6\nu-\nu^2)r_2^2\} \log r_2^2 + 16(1-\nu)(x+u)^2 + 32(1+\nu)(x+u) \right]$$

$$\times y \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+u}\right) - \frac{4(1-\nu)^2 a^2(x+u)x}{r_2^2}$$

円外 ( $x^2+y^2 \geq a^2$ ) :

$$w_{70}(x, y) = \frac{1}{32\pi D} (2r_1^2 + a^2) \log r_1^2$$

$$+ \frac{1}{32(3+\nu)(1-\nu)\pi D} \left[ \{(1-\nu)^2(a^2 - 8ux) + 16(1+\nu)y^2 - 2(3+6\nu-\nu^2)r_2^2\} \log r_2^2 + 16(1-\nu)(x+u)^2 - \frac{4(1-\nu)^2(x+u)xa^2}{r_2^2} + 32(1+\nu)y(x+u) \tan\left(\frac{y}{x+u}\right) \right]$$

(6) 計算例 3 自由辺上で点支持された正方形板

選点法で境界条件を満足させる場合は、境界線上の断面力は滑らかでない精度が低下する。集中荷重や支点反力が自由辺へ接近すると、その自由辺上で消去されるべき断面力が急変化を示して選点位置の中間の閉合誤差は増大する。Rajaiah と Rao<sup>11)</sup> は周辺が自由辺上で点支持された正方形板の研究を報告しているが、自由辺上の集中力による急変化を特別な配慮なしに選点消去する方法を採用している。本研究では自由辺上の集中反力による急変化を特異曲面で満足させているので、自由辺上で閉じ合されるべき変位と断面力は、近傍の集中力による影響をまったく消去した滑らかな部分のみである。

図-12(a) に示すような 1 辺が 1.0 の正方形板が、自由辺上の 6 個の点 (2 重丸印) で点支持されて等分布荷重  $q=1$  を受けているものを、式 (39) の自由辺上で  $P_0=1$  を受ける特異曲面  $w_4(x, y)$  をもとにして選点法を用いて解いてみる。

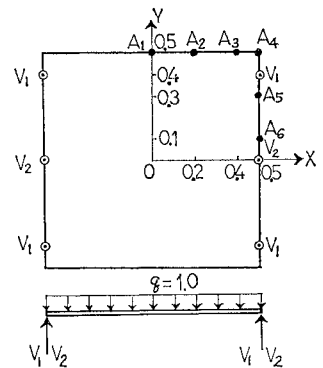


図-12(a) 周辺 6 点支持で等分布荷重を受ける正方形板

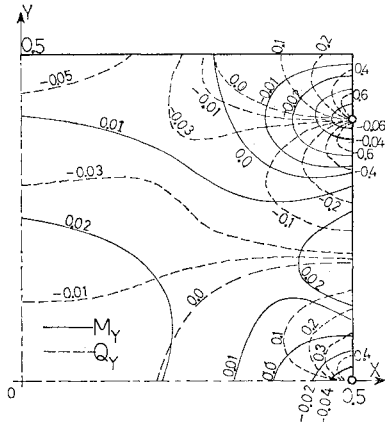


図-12(b)  $M_y, Q_y$  の等高線図

対称性より支点反力は  $V_1, V_2$  の2種類である。支点反力の特異性を  $w_i(x, y)$  で吸収して、他の滑らかな分を重調和代数式  $w_{oi}(x, y)$  で表すことにする。すなわち、たわみ曲面  $w(x, y)$  は、左側 ( $x=-0.5$ ) 支点反力の特異性を  $-V_1w_i(x+0.5, y-0.4) - V_2w_i(x+0.5, y) - V_1w_i(x+0.5, y+0.4)$  として、右側 ( $x=0.5$ ) 支点反力の特異性を  $V_1w_i(-x-0.5, y-0.4) + V_2w_i(-x-0.5, y) + V_1w_i(-x-0.5, y+0.4)$  とすればよいので、

$$w(x, y) = -V_1\{w_i(x+0.5, y-0.4) + w_i(x+0.5, y+0.4) - w_i(-x-0.5, y-0.4) - w_i(-x-0.5, y+0.4)\} - V_2\{w_i(x+0.5, y) - w_i(-x-0.5, y)\} + \sum_{i=1}^{15} a_i w_{oi}(x, y) + \frac{x^4}{24D}$$

となる。対称性より、 $x, y > 0$  の1/4領域のみを考えればよいので条件式は次のようになる。

- 支点位置の鉛直変位=0 ..... 2個
- 選点位置  $A_1 \sim A_4$  の  $M_y=0$  ..... 4個
- 選点位置  $A_1 \sim A_4$  の  $R_y=0$  ..... 4個
- 選点位置  $A_4 \sim A_8$  の  $M_x=0$  ..... 3個
- 選点位置  $A_4 \sim A_8$  の  $R_x=0$  ..... 3個
- 全体の鉛直つり合い式  $4V_1 + 2V_2 = 1.0$  ..... 1個

以上のように条件式は、17個となるので未知量も17個であって、 $V_1, V_2$  以外に  $a_1 \sim a_{15}$  を重調和項の未定係数とすればよい。詳しいこと<sup>7)</sup>は省略するが、この方式によると、集中力近傍の自由辺と離れた自由辺との閉じ合せ誤差は同程度の値となって精度が向上する。支点近傍では  $|M_y|$  はきわめて大きくなるにもかかわらず、 $y=0.5$  自由辺上の  $M_y$  の閉じ合せ誤差は、板中央の  $M_y$  に比べて0.8%となる。特徴的な断面力  $M_y, Q_y$  の等高線を 図-12(b) に示す。なお、反力は  $V_1 =$

0.16791,  $V_2 = 0.16418$  となる。

## 7. 結 び

冗長さを避けるために割愛した部分が多い。それらの事項も含めて結論をまとめると次のようになる。

(1) 群荷重はその1, その2を發展させて  $2n$  個の荷重要素によって  $f(\xi)$  の  $2(n-1)$  階微分項までを0にすることは理論的には可能であるが煩雑になる。実用的には、その1を用いて荷重和は12組とする  $A_4$  で十分である。

(2) フーリエ級数解方式とは、反対に群荷重法ではたわみの高次導関数より導かれる断面力の方が精度よく求められる。

(3) 荷重近傍の断面力の急変化は、フーリエ級数では高次項で表現される。特異曲面はこれを直接表現するので、群荷重の組数をいかに少なくしても見逃がすことはない。たとえば、その1で、 $A_1$  から  $A_4$  へ組数を増しても緩やかな誤差を修正するだけになる。

本文では省略したが既に他に発表した計算例や本解法をさらに拡張して適用し得る問題で目下まとめているものをあげると次のようになる。

(1) 線荷重や長方形領域の分布荷重に対しても自由辺をもつ特異曲面を導き得るが、円形荷重のものより複雑になる。

(2) 自由辺をもつ直交異方性板に対しても式(38)に対応する一般式を導き得る。

(3) 相対2辺が単純支持され、一辺を自由とする半無限等方性板の自由辺近傍の荷重による応力集中が精度よく求め得る。

(4) 群荷重を  $x, y$  両方向に載荷することによって、周辺が単純支持されて円形荷重を受ける長方形板の解析が可能である<sup>9)</sup>。

(5) 平面応力問題で、点在するジベルによって力を受ける自由辺をもつ平板(合成桁の床板)の応力解析にも有効な解法になる<sup>10)</sup>。

(6) 曲げ、あるいは平面応力問題で、変形の不連続性が部分的に存在する(ひびわれの場合)にも適用可能である。これは、ひびわれ部分を群荷重と振り換えて相応の特異曲面と組合せるのであるが、これらの問題については別の機会に報告したい。

## 参 考 文 献

- 1) Pucher, A.: Über die Singularitätenmethode an elastischen Platten, Ing.-Archiv, XII Band, pp. 76~100 1941.
- 2) Pucher, A.: Einflußfelder elastischer Platten. 2. Auf. Wien, Springer, 1958.
- 3) Stein, P.: Die Anwendung der Singularitätenmethode

- zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten einschließlich Trägerrosten. Köln, Springer-Verlag, 1961.
- 4) Molkenhain, A. : Modifizierte Singularitäten isotroper Plattenstreifen, Acta Mechanica, Vol. 1, pp. 354-370, 1965.
  - 5) Molkenhain, A. : Feld-und Stützenmomenten-Einflussfelder Zweifeldiger Platten mit freien Längsrändern, Ing.-Archiv 36, Bd. H. 2. pp. 100~113 (1967).
  - 6) 松浦良和・中川建治：単純支持された矩形板の特異点法と群荷重法による解析，土木学会中部支部講演概要集，pp. 17~18，昭和52年1月。
  - 7) 長瀬裕信・中川建治：点支持された矩形板の支点近傍の断面力の解析，土木学会中部支部講演概要集，pp. 15~16，昭和52年1月。
  - 8) 松浦良和・長瀬裕信・中川建治：球面支承で支えられた矩形スラブの応力解析の研究，土木学会中部支部講演概要集，pp. 11~12，昭和53年2月。
  - 9) Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, pp. 149~159, 1959.
  - 10) 吉川開二・日榮民雄・中川建治：点状するジベルによる合成桁の解析；土木学会第34回年次学術講演会概要集 I-65, pp. 129~130, 1979.
  - 11) Rajaiah, K. and A.K. Rao : Collocation Solution for Point Supported Square Plates, Trans. of ASME, Vol. 45, pp. 424~425, June 1978.

(1979.4.9・受付)