

## 曲げを受ける円筒腹板パネルの非線形挙動\*

NONLINEAR BEHAVIOR OF CYLINDRICAL WEB PANELS  
UNDER BENDING

三 上 市 蔵\*\*・古 西 和 夫\*\*\*・米 沢 博\*\*\*\*

By Ichizou MIKAMI, Kazuo FURUNISHI and Hiroshi YONEZAWA

## 1. ま え が き

最近の構造解析理論の発達に伴い多くの曲線橋が架設されるようになった。曲線橋の解析法としては、薄肉ばりの曲げねじり理論、直接剛性法、有限要素法、伝達マトリックス法、直交異方性板理論、折板構造理論、有限帯板理論などがある。しかし、これらは断面力および応力分布を決定するための線形理論が主で、腹板厚、補剛材剛度など腹板の設計に関しては十分な情報を与えていない。わが国の道路橋示方書<sup>1)</sup>には曲線桁腹板に関する特別の規定はなく、直線桁腹板に関する規定がそのまま曲線桁腹板に準用されているようである。曲線桁腹板に関する設計規定を検討するためにも腹板の挙動を十分に把握する必要がある。

曲線プレート・ガーダーおよび曲線箱桁の腹板はその面外に曲率を有しているので、解析には円筒シェル理論を適用する必要がある。シェル理論を用いて円筒腹板パネルの挙動を研究したものとしては、Culver らの研究<sup>2)~4)</sup>、Dabrowski らの研究<sup>5)</sup> および Abdel-Sayed の研究<sup>6)</sup> があげられる。文献 2)、3)、5) は曲げの場合を、文献 4) はせん断の場合を、文献 6) は曲げ、せん断、および曲げせん断の場合を研究の対象にしている。曲げを受ける円筒腹板パネルを扱った研究について概観すると次のようである。

Culver と Dym<sup>2)、3)</sup> は、曲線プレート・ガーダーに関する腹板幅厚比および水平補剛材剛度の設計式を、簡単な物理的モデルを用いて求めている。まず、文献 2) において、円筒腹板パネルを円周方向の帯要素に分割し、各円筒帯要素を鉛直補剛材位置で固定支持された曲がり

ばりとして、非線形項を考慮し、Rayleigh-Ritz 法を用いて解析している。この解析では腹板の広がりをもたせるため、弾性基礎上の曲がりばりとして取扱っている。このばね定数はフランジと中立軸で支持された鉛直帯要素により決定される。解析結果より、曲率に伴って生ずるパネル中央での負担曲げモーメントの減少と曲率パラメーターおよび幅厚比の関係が求められている。また、鉛直補剛材位置における腹板の円周方向板曲げ応力を降伏応力の 20% に制限することにより、腹板幅厚比の設計公式が導かれている。幅厚比がこの制限値内にあれば、降伏モーメントの減少が少なくなることが述べられている。

文献 3) においては、水平補剛材が取り付けられた場合の円筒腹板パネルの幅厚比の設計公式が文献 2) と同様な方法で求められている。ただし、圧縮領域の腹板を中立軸で単純支持され、他の 3 辺で固定支持され、水平補剛材によっては支持された平板とし、これに円周方向の線荷重を載荷させてばね定数を決定している。また、水平補剛材剛度については、AASHTO 道路橋標準示方書<sup>7)</sup> に規定されている直線桁の場合の必要剛度以上の剛度を有しておれば、曲げモーメントの減少がみられないことが示されている。幅厚比が制限値内にあるならば、直線桁に関する AASHTO 道路橋標準示方書<sup>7)</sup> の水平補剛材剛度の規定を曲線桁に対しても使用できることが示されている。

Dabrowski と Wachowiak<sup>5)</sup> は若干の 2 次項を考慮したシェル理論を用い、Galerkin 法を適用して、曲線プレート・ガーダーの円筒腹板パネルが曲げを受ける場合について応力解析を行っている。基礎方程式としては線形方程式を用いているが、力のつり合い式において曲率の項を考慮しているため非線形荷重-たわみ関係が得られる。したがって、準線形シェル理論とよぶことができる。また、この研究の特徴は膜応力を 1 次応力と 2 次応力とに分離して解析している点であり、これによって

\* 土木学会関西支部年次学術講演会 (1976 年 5 月) で発表した内容に新しい考察を加えたものである。

\*\* 正会員 工博 関西大学教授 工学部土木工学科

\*\*\* 正会員 工修 (株)春本鐵工所 設計部設計課

\*\*\*\* 正会員 工博 関西大学教授 工学部土木工学科

応力および変位に関する境界条件が容易に満たされることになる。

Abdel-Sayed<sup>9)</sup> は座屈限界を重要視し、線形シェル理論を用いて円筒腹板パネルを研究している。座屈荷重のもとでは、たわみおよび応力関数は微小変化できるものとして、Galerkin 法を適用して固有値方程式を導いている。

Culver らの研究成果<sup>2)~4)</sup> は、AASHTO 道路橋樑標準示方書<sup>7)</sup> の曲線 I 桁橋に関する試案<sup>8)</sup> に反映されている。しかし、文献 2), 3), 5), 6) の研究は線形理論あるいは簡略化された非線形理論を用いており、円筒腹板パネルの実際の挙動を完全に把握しているとはいえない。曲線桁腹板が円周方向面内荷重を受けることを考え合わせると、非線形シェル理論を用いた大たわみ挙動の解析が望まれる。

本研究では、上下フランジおよび2つの鉛直補剛材で囲まれた円筒腹板パネルが純曲げを受ける場合を対象とし、非線形シェル理論を用いて解析する。非線形シェル理論はシェルの大たわみ挙動あるいは後座屈挙動を解析するために多くの研究者によって展開されてきた。初期のものは微小変形に関する線形理論を有限変形を考慮して拡張した近似的な非線形理論であるが、より一般的な非線形シェル理論はテンソル解析を用いて展開された<sup>9)~15)</sup>。ここでは、Washizu<sup>16)</sup> によって展開された薄いシェルに対する非線形理論の1つを用いる。

解析にあたっては、変位に関する基礎方程式を用い、Dabrowski ら<sup>5)</sup> と同様に面内変位を1次量と2次量に分ける。差分法を用いて基礎の非線形連立偏微分方程式を非線形連立代数方程式に変換し、反復法により解を求める。その際、高精度の差分解を得るため特別な工夫をこらし、反復計算には Lagrange 補間法<sup>17)</sup> によって精度のよい初期値を推定し、加速 Jacobi 法を用いて発散を防ぎ、Aitken の外挿法<sup>18)</sup> を適用して収束を早めた。数値計算を行い、たわみ、膜応力、曲げ応力および等価応力に対する円筒腹板パネルの縦横比、幅厚比、曲率パラメーターおよびフランジのねじり拘束による影響を考察し、非線形挙動を明らかにする。

なお、Dabrowski と Wachowiak<sup>5)</sup> の準線形理論による解を非線形解と比較する。

## 2. 曲げを受ける円筒腹板パネル

Fig. 1 に示すような弧に沿った長さ  $a$ 、高さ  $b$ 、厚さ  $h$ 、曲率半径  $r$  の、上下フランジおよび2つの鉛直補剛材で囲まれた曲線プレート・ガーダーの等方性円筒腹板パネルが純曲げを受ける場合を考える。座標軸を Fig. 1 のようにとり、断面力および変位を Fig. 2 のように

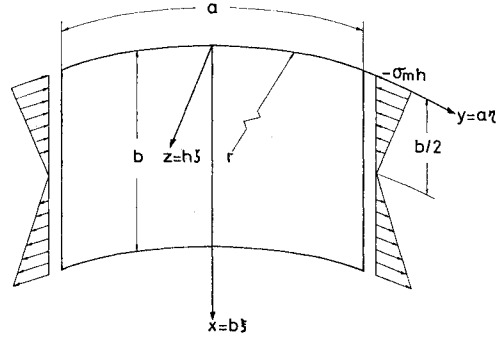


Fig. 1 A cylindrical web panel under bending.

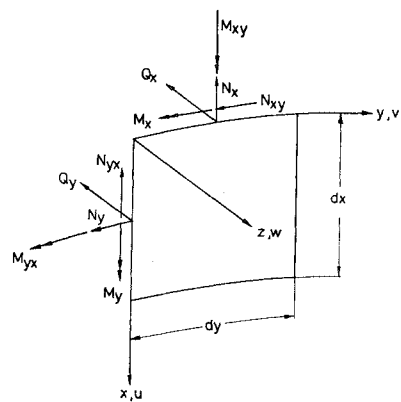


Fig. 2 Displacements and stress resultants.

定義する。解析には、Kirchhoff-Love の仮定を用いた Washizu の薄いシェルに対する近似非線形理論<sup>16)</sup> を用いる。

### (1) 非線形基礎方程式

シェル中立面のひずみと変位の関係としては、次の Kármán 流の非線形関係式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} e_x &= \epsilon_x + \frac{1}{2} \phi_x^2; & e_y &= \epsilon_y + \frac{1}{2} \phi_y^2; \\ e_{xy} &= \epsilon_{xy} + \frac{1}{2} \phi_x \phi_y \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ここに、 $e_x, e_y, e_{xy}$  は中立面のひずみ成分であり、 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$  は中立面の線形ひずみ成分、 $\phi_x, \phi_y$  は中立面の回転成分で、中立面の変位  $u, v, w$  を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= u_{,x}; & \epsilon_y &= v_{,y} - \frac{w}{r}; & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} (u_{,y} + v_{,x}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\phi_x = w_{,x}; \quad \phi_y = w_{,y} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、添字中の“,” はそれに続く添字に関する偏微分を表す。

曲率の変化量と変位の関係として次の線形関係式を用

いる。

$$\kappa_x = \phi_{x,x}; \kappa_y = \phi_{y,y}; \kappa_{xy} = \frac{1}{2}(\phi_{x,y} + \phi_{y,x}) \dots\dots\dots (4)$$

断面力は中立面のひずみと曲率変化量とを用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= B(e_x + \nu e_y); N_y = B(e_y + \nu e_x) \\ N_{xy} &= N_{yx} = B(1-\nu)e_{xy} \\ M_x &= -D(\kappa_x + \nu\kappa_y); M_y = -D(\kappa_y + \nu\kappa_x) \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1-\nu)\kappa_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

$$\dots\dots\dots (6)$$

ただし、 $B = Eh/(1-\nu^2)$ ;  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ;  $E$  は弾性係数、 $\nu$  はポアソン比である。

関係式 (1)~(6) のもとで、力のつり合いは次のようになる<sup>16)</sup>。

$$N_{x,x} + N_{y,y} = 0 \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$N_{y,y} + N_{x,x} = 0 \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} + \frac{1}{r}N_y + (N_x\phi_x)_{,x} + (N_y\phi_y)_{,x} + (N_{xy}\phi_x)_{,y} + (N_y\phi_y)_{,y} = 0 \dots\dots\dots (7 \cdot c)$$

$$Q_x = M_{x,x} + M_{y,x,y} \dots\dots\dots (7 \cdot d)$$

$$Q_y = M_{y,y} + M_{x,y,x} \dots\dots\dots (7 \cdot e)$$

式 (7.d), (7.e) を用いて  $Q_x, Q_y$  を消去し、断面力と回転との積の項については断面力の変化量と回転との積を微小量として無視すると、次の式が得られる。

$$N_{x,x} + N_{y,y} = 0 \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

$$N_{y,y} + N_{x,x} = 0 \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x\phi_{x,x} + N_{xy}(\phi_{y,x} + \phi_{x,y}) + N_y\left(\frac{1}{r} + \phi_{y,y}\right) = 0 \dots\dots\dots (8 \cdot c)$$

ここで、膜力  $N_x, N_y, N_{xy}$  は 1 次量  $N_{x0}, N_{y0}, N_{xy0}$  と 2 次量  $\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{N}_{xy}$  を用いて次のように表わされるものとする<sup>17)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= N_{x0} + \bar{N}_x \\ N_y &= N_{y0} + \bar{N}_y \\ N_{xy} &= N_{xy0} + \bar{N}_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、膜力の 1 次量を次のようにとる。

$$N_{x0} = 0; N_{y0} = -\sigma_m h \left(1 - \frac{2}{b}x\right); N_{xy0} = 0 \dots\dots\dots (10 \cdot a, b, c)$$

ただし、 $-\sigma_m$  は圧縮縁の円周方向作用面内直応力である。応力  $\sigma_m$  を無次元荷重パラメーター  $k_m$  で次のように表す。

$$\sigma_m = k_m \frac{\pi^2 D}{b^2 h} \dots\dots\dots (11)$$

面内変位  $u, v$  は、膜力の 1 次量に対応する変位成分 (1 次量)  $u_0, v_0$  と、面外変位  $w$  とともに生じ、膜力の 2 次量および曲げモーメントに対応する変位成分 (2 次量)  $\bar{u}, \bar{v}$  の 2 つの成分に分けることができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 + \bar{u} \\ v &= v_0 + \bar{v} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

となる。面内変位の 1 次量と膜力の 1 次量との関係は次のようになる。

$$N_{x0} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (u_{0,x} + \nu v_{0,y}) \dots\dots\dots (13 \cdot a)$$

$$N_{y0} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\nu u_{0,x} + v_{0,y}) \dots\dots\dots (13 \cdot b)$$

$$N_{xy0} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} (u_{0,y} + v_{0,x}) \dots\dots\dots (13 \cdot c)$$

また、膜力の 2 次量は変位  $\bar{u}, \bar{v}, w$  を用いて次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \bar{u}_{,x} + \nu \bar{v}_{,y} - \frac{w}{r} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + \frac{\nu}{2}w_{,y}^2 \right) \\ \bar{N}_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \nu \bar{u}_{,x} + \bar{v}_{,y} - \frac{w}{r} + \frac{\nu}{2}w_{,x}^2 + \frac{1}{2}w_{,y}^2 \right) \\ \bar{N}_{xy} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} (\bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x} + w_{,x}w_{,y}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

式 (9), (10) をつり合い式 (8) に代入し、式 (3) を用いると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_{x,x} + \bar{N}_{xy,y} &= 0 \\ \bar{N}_{y,y} + \bar{N}_{xy,x} &= 0 \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + \bar{N}_x w_{,xx} + (N_{y0} + \bar{N}_y) \left( \frac{1}{r} + w_{,yy} \right) + 2\bar{N}_{xy} w_{,xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15 \cdot a, b, c)$$

式 (15) に式 (3), (4), (6), (10 \cdot b), (11), (14) を代入すると、変位  $\bar{u}, \bar{v}, w$  で表された非線形基礎方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \alpha^2 \bar{U}_{,\xi\xi} + \frac{1-\nu}{2} \bar{U}_{,\eta\eta} + \frac{1+\nu}{2} \alpha \bar{V}_{,\xi\eta} &= \nu \alpha^2 W_{,\xi} \\ &- \frac{\alpha^2}{\beta} W_{,\xi} W_{,\xi\xi} - \frac{1+\nu}{2\beta} W_{,\xi\eta} W_{,\eta\eta} \\ &- \frac{1-\nu}{2\beta} W_{,\xi} W_{,\eta\eta} \dots\dots\dots (16 \cdot a) \\ \frac{1+\nu}{2} \alpha \bar{U}_{,\xi\eta} + \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 \bar{V}_{,\xi\xi} + \bar{V}_{,\eta\eta} &= \alpha W_{,\eta} \\ &- \frac{(1+\nu)\alpha}{2\beta} W_{,\xi} W_{,\xi\eta} - \frac{1}{\alpha\beta} W_{,\eta} W_{,\eta\eta} \end{aligned}$$

\* Budiansky<sup>12)</sup> は初期応力を受けるシェルの小さな振動 (small perturbations), 振動および座屈を解析するための近似理論を同様の考え方のもとに誘導している。

$$\begin{aligned}
& -\frac{(1-\nu)\alpha}{2\beta} W_{,\xi\xi} W_{,\eta} \dots\dots\dots (16 \cdot b) \\
\alpha^2 W_{,\xi\xi\xi\xi} + 2 W_{,\xi\xi\eta\eta} + \frac{1}{\alpha^2} W_{,\eta\eta\eta\eta} + 12 \alpha^2 \beta^2 W \\
& = 12 \alpha \beta W_{,\xi\xi} (\alpha \bar{U}_{,\xi} + \nu \bar{V}_{,\eta} - \nu \alpha W \\
& + \frac{\alpha}{2\beta} W_{,\xi}{}^2 + \frac{\nu}{2\alpha\beta} W_{,\eta}{}^2) \\
& + 12 \beta \left( \alpha \beta + \frac{1}{\alpha} W_{,\eta\eta} \right) \left\{ -\frac{k_m \pi^2 \alpha}{12 \beta} (1-2\xi) \right. \\
& + \nu \alpha \bar{U}_{,\xi} + \bar{V}_{,\eta} + \frac{\nu \alpha}{2\beta} W_{,\xi}{}^2 + \frac{1}{2\alpha\beta} W_{,\eta}{}^2 \left. \right\} \\
& - 12 \beta W W_{,\eta\eta} + 12 \beta (1-\nu) W_{,\xi\eta} \\
& \times \left( \bar{U}_{,\eta} + \alpha \bar{V}_{,\xi} + \frac{1}{\beta} W_{,\xi} W_{,\eta} \right) \dots (16 \cdot c)
\end{aligned}$$

ここに、 $\bar{U}=r\bar{u}/bh$ ,  $\bar{V}=r\bar{v}/bh$ ,  $W=w/h$ ,  $\xi=x/b$ ,  $\eta=y/a$ ,  $\alpha=a/b$ ,  $\beta=b^2/rh$  である。

(2) 境界条件式

上下フランジおよび2つの鉛直補剛材で囲まれた円筒腹板パネルはx軸に関して対称\*に変形するので、パネルの半分のみを解析の対象とする。

a) 面外変位に関する境界条件式

鉛直補剛材の位置で腹板パネルは単純支持されているものとする。また、上下フランジはねじり\*\*に抵抗するが、水平にはたわまないものとする。この場合、面外変位に関する境界条件式は次のようになる。

- ①  $\eta=0.5$  において  
 $W=0; W_{,\eta\eta}=0 \dots\dots\dots (17 \cdot a, b)$
- ②  $\xi=0$  において  
 $W=0; \alpha^2 W_{,\xi\xi} + \varphi_T W_{,\xi\eta\eta}=0 \dots\dots\dots (18 \cdot a, b)$
- ③  $\xi=1$  において  
 $W=0; \alpha^2 W_{,\xi\xi} - \varphi_B W_{,\xi\eta\eta}=0 \dots\dots\dots (19 \cdot a, b)$

ここに、 $\varphi_T=C_{bT}/Db$ ,  $\varphi_B=C_{bB}/Db$  であり、 $C_{bT}$ ,  $C_{bB}$  はそれぞれ上フランジおよび下フランジのねじり剛さである。なお、このほかに  $\eta=0$  における対称条件  $W(\eta)=W(-\eta)$  がある。

b) 面内変位に関する境界条件式

鉛直補剛材の位置で作用面内荷重により面内変位の1次量は生じるが、2次量は生じないものとする。上下フランジは、鉛直方向に自由にたわむことができるものとする、母線方向の膜力  $N_x$  が上下フランジの位置で零となる。また、この位置で円周方向変位  $\bar{v}$  は生じないものとする。以上の面内変位に関する境界条件式は次のようになる。

- ①  $\eta=0.5$  において

\* 著者らは別\*\*に円周方向圧縮を受ける円筒パネルの場合、常に変形が対称であることを確認している。この場合も逆対称変形の可能性はないものと考えられる。  
 \*\* そりねじりおよび軸方向応力の影響は無視する。

$$\bar{U}=0; \bar{V}=0 \dots\dots\dots (20)$$

- ②  $\xi=0, 1$  において

$$\bar{U}_{,\xi} + W_{,\xi}{}^2/2\beta=0; \bar{V}=0 \dots\dots\dots (21)$$

なお、 $\eta=0$  において対称条件  $\bar{V}=0$  および  $\bar{U}(\eta)=\bar{U}(-\eta)$  が成り立つ。

(3) 応力

非線形連立偏微分方程式(16)を境界条件式(17)~(21)とともに後述の数値計算法を用いて解くと変位が求まり、それを用いて応力が計算される。

膜応力は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{x(m)}}{\sigma_m} &= \frac{12}{k_m \pi^2} \left( \beta U_{,\xi} + \nu \frac{\beta}{\alpha} V_{,\eta} - \nu \beta W \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} W_{,\xi}{}^2 + \frac{\nu}{2\alpha^2} W_{,\eta}{}^2 \right) \dots\dots (22 \cdot a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{y(m)}}{\sigma_m} &= \frac{12}{k_m \pi^2} \left( \nu \beta U_{,\xi} + \frac{\beta}{\alpha} V_{,\eta} - \beta W \right. \\
& \left. + \frac{\nu}{2} W_{,\xi}{}^2 + \frac{1}{2\alpha^2} W_{,\eta}{}^2 \right) \dots\dots (22 \cdot b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{xy(m)}}{\sigma_m} &= \frac{6(1-\nu)}{k_m \pi^2} \left( \frac{\beta}{\alpha} U_{,\eta} + \beta V_{,\xi} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\alpha} W_{,\xi} W_{,\eta} \right) \dots\dots\dots (22 \cdot c)
\end{aligned}$$

ここに、 $U=ru/bh$ ,  $V=r\nu/bh$  であり、 $\sigma_{x(m)}$ ,  $\sigma_{y(m)}$ ,  $\tau_{xy(m)}$  はそれぞれ母線方向膜応力、円周方向膜応力、せん断膜応力である。

また、曲げ応力は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{x(b)}}{\sigma_m} &= -\frac{12\zeta}{k_m \pi^2} \left( W_{,\xi\xi} + \frac{\nu}{\alpha^2} W_{,\eta\eta} \right) \\
& \dots\dots\dots (23 \cdot a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{y(b)}}{\sigma_m} &= -\frac{12\zeta}{k_m \pi^2} \left( \nu W_{,\xi\xi} + \frac{1}{\alpha^2} W_{,\eta\eta} \right) \\
& \dots\dots\dots (23 \cdot b)
\end{aligned}$$

$$\frac{\tau_{xy(b)}}{\sigma_m} = -\frac{12(1-\nu)\zeta}{k_m \pi^2 \alpha} W_{,\xi\eta} \dots\dots\dots (23 \cdot c)$$

ここに、 $\zeta=z/h$  であり、 $\sigma_{x(b)}$ ,  $\sigma_{y(b)}$ ,  $\tau_{xy(b)}$  はそれぞれ母線方向曲げ応力、円周方向曲げ応力、ねじり応力である。

(4) 準線形理論

基礎方程式(16)の誘導にあたって基礎となっているのは、ひずみ-変位関係(1)~(3)、応力-ひずみ関係(5)、(6)およびつり合い式(15)である。

Kármán と Tsien<sup>19)</sup> は軸圧縮( $N_x$ )を受ける円筒の座屈を非線形解析している。この理論は snap-through theory とよばれるものであるが、そこでは本論文と同じひずみ-変位関係および応力-ひずみ関係が用いられ、つり合い式は式(15・c)に対応するものが、

$$M_{x,xx} + 2M_{x,y,xy} + M_{y,yy} + N_{x0}w_{,xx}$$

$$+\frac{1}{r}\bar{N}_y=0 \dots\dots\dots(24)$$

となっている。

Chu と Turula<sup>20)</sup> は円筒シェルパネルが軸圧縮 ( $N_x$ ) を受ける場合の後座屈挙動を解析しているが、ひずみ-変位関係および応力-ひずみ関係として本論文と同じものを用い、式 (15.c) に対応するつり合い式を、

$$M_{x,xx}+2M_{xy,xy}+M_{y,yy}+(N_{x0}+\bar{N}_x)w_{,xx} +\bar{N}_y\left(\frac{1}{r}+w_{,yy}\right)+2\bar{N}_{xy}w_{,xy}=0 \dots\dots\dots(25)$$

としている。式 (25) で母線方向内力  $N_{x0}$  が作用している点を除けば、式 (15.c) は式 (25) に一致する。これに対して Kármán と Tsien による式 (24) は式 (25) を線形化したものである。

一方、Dabrowski と Wachowiak<sup>5)</sup> は曲げを受ける曲線プレート・ガーダーの薄い円筒腹板を応力解析する際、線形化された Donnell 型の方程式を用いている。すなわち、ひずみ-変位関係として線形関係式が用いられ、つり合い式 (15.c) は次のように線形化される。

$$M_{x,xx}+2M_{xy,xy}+M_{y,yy} +N_{y0}\left(\frac{1}{r}+w_{,yy}\right)+\frac{1}{r}\bar{N}_y=0 \dots\dots(26)$$

この式は作用面内力の違いを除けば、式 (24) と同じである。すなわち、式 (26) は線形であるが、荷重と変位の両方に関係する項  $N_{y0}w_{,yy}$  が存在するので、解析して得られる荷重-変位曲線は非線形になる。その意味で、準線形理論とよぶことができる。

この場合、基礎微分方程式 (16) は次のようになる。

$$\alpha^2\bar{U}_{,\xi\xi}+\frac{1-\nu}{2}\bar{U}_{,\eta\eta}+\frac{1+\nu}{2}\alpha\bar{V}_{,\xi\eta}=\nu\alpha^2W_{,\xi} \dots\dots\dots(27\cdot a)$$

$$\frac{1+\nu}{2}\alpha\bar{U}_{,\xi\eta}+\frac{1-\nu}{2}\alpha^2\bar{V}_{,\xi\xi}+\bar{V}_{,\eta\eta}=\alpha W_{,\eta} \dots\dots\dots(27\cdot b)$$

$$\alpha^2W_{,\xi\xi\xi\xi}+2W_{,\xi\xi\eta\eta}+\frac{1}{\alpha^2}W_{,\eta\eta\eta\eta}+12\alpha^2\beta^2W =-k_m\pi^2(1-2\xi)(\alpha^2\beta+W_{,\eta\eta}) +12\alpha\beta^2(\nu\alpha\bar{U}_{,\xi}+\bar{V}_{,\eta}) \dots\dots\dots(27\cdot c)$$

### 3. 数値計算法

基礎方程式 (16) を境界条件式 (17)~(21) のもとで解くわけであるが、厳密に解くことは不可能なので、差分法を用いて非線形代数方程式に変換し、反復法により数値的に解く。腹板パネルは  $x$  方向 (母線方向) に  $n_x$  等分、 $y$  方向 (円周方向) に  $n_y$  等分する。そして、少ない分割で高精度の解を得るため、および少ない反復回

数で安定して解を得るため、以下に述べる手法を用いた。

#### (1) 1方向全分点差分法

高精度の差分法を得る1つの方法は打ち切り誤差の小さい高精度差分表示<sup>21), 22)</sup>を用いることで、さらに次の2つに分けられる。第1はより多くの分点における関数値を用いる多分点法で、第2は関数値のほかに微分係数を用いる Hermitian 法である\*。ここでは、簡潔で、電子計算機プログラム作製上有利な多分点法を用いる。ただし、単なる多分点法でなく、高精度解を得るための工夫を行う。

岸野・佐武<sup>25)</sup>は独特な手法を提案している。通常、間接境界条件<sup>26)</sup>の表現のために仮想分点が設けられるが、この仮想分点の代りに境界上の微分係数を用い、Hermitian 法の考え方で差分表示を作成する。その際、領域内に設けられたすべての分点における関数値を用いる。この方法によれば差分表示作成のために大きな中実の係数マトリックスに対する連立一次方程式を解かなければならない。そこで、あくまでも多分点法によることにし、差分表示の作成には常に全分点の関数値を用いる方法を考える。すなわち、多分点法として最高次の差分表示を作ることになるが、この方法を全分点法とよぶことにする。

本論文では  $y$  方向にのみ全分点法を採用する。仮想分点を設けることもできるが、プログラミングの便宜を考えて、実分点のみを用いて差分表示を作成する<sup>26)</sup>ことにする。すなわち、 $y$  方向には常に  $n_y+1$  個の分点を用いて差分表示を行うことになる。一方、 $x$  方向には、面外変位  $W$ 、面内変位  $\bar{U}$  および  $\bar{V}$  のいずれに関しても5分点を用いて差分表示を作成する。 $\bar{U}$  および  $\bar{V}$  に関しては2階の微分係数しか現れないので、普通差分表示であれば、3分点が用いられるところであるから、 $\bar{U}$  および  $\bar{V}$  に関しては高精度差分式を用いることになる。また、境界改良法<sup>26)</sup>の考え方で、境界条件式は基礎微分方程式と同精度で差分表示される。

円周方向に全分点差分表示を行うため、基礎方程式を適用する分点が変わると差分表示が異なる。そのため、多項式近似法<sup>27)</sup>によって、任意の差分表示を自由に作成

\* 多分点法は高次近似法 (finite-difference method of higher approximation; Verfahren höherer Annäherung) とよばれるが、Lagrange 内挿公式との相似性から Lagrangian Method とよばれる。Hermitian 法は初め L. Collatz によって Mehrstellenverfahren と名付けられた<sup>28)</sup>が、これは多分点法 (more-point method) という意味になり、誤解を招くので、P.G. Williams は Hermite 内挿公式に類似している Hermitian Method と名付けた<sup>29)</sup>。しかし、Ch. Hermite の提唱と誤解を与えるので、Multilocal Method (méthodé plurilocale) とよばれることもある<sup>30)</sup>。

することのできる FORTRAN プログラム<sup>29)</sup>を用いた。

(2) 差分方程式

分点に対して  $x$  方向には  $x=0 \sim b$  に対して  $i=0, 1, \dots, n_x$ ,  $y$  方向には  $y=0 \sim a/2$  に対して  $j=0, 1, \dots, n_y/2$  と番号付けをする。基礎微分方程式 (16) および境界条件式 (17)~(21) を差分表示し、次の分点に適用する。

まず,  $W$  に関する基礎微分方程式 (16.c) を  $i=2 \sim (n_x-2)$ ,  $j=0 \sim (n_y/2-2)$  の範囲の分点に適用する。境界条件式 (17.b) を分点  $i=1 \sim (n_x-1)$ ,  $j=n_y/2$  に適用し、分点  $i=1 \sim (n_x-1)$ ,  $j=n_y/2-1$  に対応\*させる。式 (18.b) を分点  $i=0$ ,  $j=0 \sim (n_y/2-1)$  に適用し、分点  $i=1$ ,  $j=0 \sim (n_y/2-1)$  に対応させる。式 (19.b) を分点  $i=n_x$ ,  $j=0 \sim (n_y/2-1)$  に適用し、分点  $i=n_x-1$ ,  $j=0 \sim (n_y/2-1)$  に対応させる。式 (18.a) は分点  $i=0$ ,  $j=0 \sim (n_y/2-1)$  に、式 (19.a) は分点  $i=n_x$ ,  $j=0 \sim (n_y/2-1)$  にそれぞれ適用する。分点  $i=1$ ,  $j=n_y/2-1$  には2つの境界条件式 (17.b) と (18.b) が対応するので、平均的に満足させることを考え、両条件式の和をこの分点に対応する条件式とする。同様に分点  $i=n_x-1$ ,  $j=n_y/2-1$  に対しては式 (17.b) と (19.b) が対応させられる。また、式 (17.a) は分点  $i=0 \sim n_x$ ,  $j=n_y/2$  における  $W$  を未知量から除くことによって満足される。この結果、次の連立方程式が得られる。

$$[A_1]\{D_1\} = \{R_1\} \dots \dots \dots (28.a)$$

ただし,  $[A_1]$  は  $(n_x+1)n_y/2$  次の係数マトリックス,  $\{D_1\}$  は  $(n_x+1)n_y/2$  行のたわみ  $W$  の列ベクトル,  $\{R_1\}$  は非線形項を含んだ  $(n_x+1)n_y/2$  行の式 (16.c) の右辺列ベクトルである。

次に、面内変位  $\bar{U}$  および  $\bar{V}$  に関する方程式をまとめる。 $\bar{U}$  に関する基礎微分方程式 (16.a) を分点  $i=1 \sim (n_x-1)$ ,  $j=0 \sim (n_y/2-1)$  に、 $\bar{V}$  に関する基礎微分方程式 (16.b) を分点  $i=1 \sim (n_x-1)$ ,  $j=1 \sim (n_y/2-1)$  に適用する。 $\bar{U}$  に関する境界条件式 (21.a) および  $\bar{V}$  に関する境界条件式 (21.b) を分点  $i=0$ ,  $j=0 \sim (n_y/2-1)$  および分点  $i=n_x$ ,  $j=0 \sim (n_y/2-1)$  に適用する。また、対称条件  $\bar{V}=0$  を分点  $i=1 \sim (n_x-1)$ ,  $j=0$  に適用する。式 (20) は分点  $i=0 \sim n_x$ ,  $j=n_y/2$  の  $\bar{U}$  および  $\bar{V}$  を未知量から除くことで満足される。この結果、次の連立方程式が得られる。

$$[A_2]\{D_2\} = \{R_2\} \dots \dots \dots (28.b)$$

ただし,  $[A_2]$  は,  $(n_x+1)n_y$  次の係数マトリックス,  $\{D_2\}$  は  $(n_x+1)n_y$  行の  $\bar{U}$  および  $\bar{V}$  の

\* 別の分点に適用した式の順番を、考えている分点の番号を用いて定める。

列ベクトル,  $\{R_2\}$  は  $(n_x+1)n_y$  行の非線形項を含む式 (16.a), (16.b) の右辺列ベクトルである。

(3) 係数マトリックスと連立一次方程式の解法

$y$  方向に全分点差分法を、 $x$  方向に境界改良法を採用しているので、差分方程式の係数マトリックス  $[A_1]$ ,  $[A_2]$  はともに Fig. 3(a) に示される特殊なブロック・バンド・マトリックスになる。これを Fig. 3(b) のように記憶し、計算時間の短縮と記憶容量の縮小を図る。この変形ブロック・バンド・マトリックスの斜線ブロックが対角ブロックで、このブロックの対角部分に主対角要素が位置しているので、ブロック単位で演算を行う必要がある。各ブロックは  $M \times M$  の正方マトリックスで、 $M$  は全分点差分表示を行う  $y$  方向の全分点で、係数マトリックス  $[A_1]$  において  $M=n_y/2$ , 係数マトリックス  $[A_2]$  において  $M=n_y$  である。 $2L-1$  は  $x$  方向の差分表示に用いる分点数で、 $2L-1=5$  である。また、 $N$  は  $x$  方向の全分点数で、 $N=n_x+1$  である。

非線形連立代数方程式 (28) を解くため、ある右辺ベクトルのもとで連立一次方程式 (28.a) および (28.b) を反復して解く必要があるが、計算時間短縮のため三角分解法を適用する。変形ブロック・バンド・マトリックスの三角分解を Gauss の消去法のアルゴリズムを用いて行う<sup>29)</sup>サブルーチン副プログラムを開発した<sup>30)</sup>。ただし、pivoting および scaling はなされない。

(4) 反復手順

非線形方程式 (28.a) および (28.b) を交互に反復的に解く際、解の収束を早めるため Lagrange 補間法<sup>17)</sup>、加速 Jacobi 法、Aitken の外挿法<sup>18)</sup> を用いた。以下に計算手順を述べる。

ある形状の腹板パネルを解析する場合、面内荷重を漸

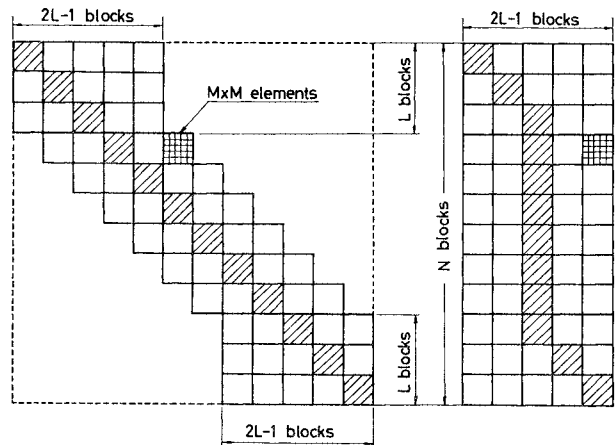


Fig. 3 Blocked band matrix.

次増大させて各荷重段階に対する解を求めることになる。任意の荷重段階において、適切な初期値を仮定することが収束を早めるために必要である。ここでは、変位  $W$  に関してすでに得られている3つの荷重段階における解を用いて Lagrange 補間法<sup>17)</sup>を適用し、当該荷重段階に対する初期値を仮定する。また、変位  $\bar{U}$  および  $\bar{V}$  の初期値は零とする。

まず、式 (28.a) から演算する。この式の右辺には定数項が存在しており、変位の初期値が零であっても解くことができる。変位の初期値、または最新の反復解  $\bar{U}^{(r-1)}$ ,  $\bar{V}^{(r-1)}$ ,  $W^{(r-1)}$  を用いて、右辺ベクトル  $\{R_1\}$  を組立て、解  $W^{(r)}$  を求める。この解をそのまま用いると発散することがあり得るので、次の加速 Jacobi 法を用いて緩和する。

$$W_*^{(r)} = W^{(r-1)} + \omega(W^{(r)} - W^{(r-1)}) \dots \dots \dots (29)$$

ここに、 $W_*^{(r)}$  は緩和された値、 $\omega$  は加速係数で、本論文では  $\omega=0.7\sim 1.0$  とした。

また、収束を早めるため、2回の反復に1度、Aitkenの外挿法<sup>18)</sup>を適用して、解を修正した。加速 Jacobi 法を併用しているため、反復解はたえず緩和されているが、Aitkenの外挿式を次のようにそのまま適用できる。

$$W_{**}^{(r)} = W_*^{(r)} - \frac{\{W_*^{(r)} - W_*^{(r-1)}\}^2}{W_*^{(r)} - 2W_*^{(r-1)} + W_*^{(r-2)}} \dots \dots \dots (30)$$

この外挿式は解がある程度収束するまでの間だけ適用する。最新の反復解  $\bar{U}^{(r-1)}$ ,  $\bar{V}^{(r-1)}$  および  $W_*^{(r)}$  を用いて、式 (28.b) の右辺ベクトル  $\{R_2\}$  を組立て、解  $\bar{U}^{(r)}$  および  $\bar{V}^{(r)}$  を求める。

この手順を解が収束するまで繰り返す。収束判定は  $W$  に対してのみ調べられ、最大相対誤差が  $10^{-3}$  以下に納まった場合を収束とみなす。

(5) 差分解の精度

解析にあたって高精度解を得るため差分法における種々の技法を用いたが、その結果得られる解の精度を検討しておこう。

まず、等分布荷重満載の周辺固定正方形板を例に調べてみよう。本論文で採用する手法、すなわち、 $y$  方向に全分点法を適用し、 $x$  方向には基礎微分方程式および間接境界条件式とも5分点による差分表示する場合と、通常の境界改良法<sup>26)</sup>、すなわち、 $x, y$  両方向に基礎微分方程式および間接境界条件式とも5分点差分表示する場合とについて、板中央のたわみに関する差分解とその誤差を比較すると Table 1 のようになる。ただし、両場合とも実分点のみを用いて解かれたものである。表からわかるように、一方向に全分点差分表示を採用することに

Table 1 Finite difference solutions of maximum deflection in a uniformly loaded rectangular plate with built-in edges.

$n_x$	Ordinary HOBA			All-point method on $y$ -axis with HOBA		
	$n_y$	$w$ ( $qa^4/D$ )	Error (%)	$n_y$	$w$ ( $qa^4/D$ )	Error (%)
8	8	0.001 122	-11.0	8	0.001 211	-3.9
10	10	0.001 190	-5.6	8	0.001 234	-2.1
12	12	0.001 220	-3.2	8	0.001 245	-1.2
14	14	0.001 235	-2.0	8	0.001 254	-0.5
16	16	0.001 244	-1.3	8	0.001 257	-0.2
Exact	0.001 26 <sup>30)</sup>					

\* HOBA=Higher order boundary approximation

より、解の精度が著しく向上する。また、誤差を2%におさえるためには通常の境界改良法の場合、 $(n_x+1)(n_y+1)=15 \times 15=225$  の未知量数を必要とするが、一方向全分点法を併用すると、未知量数は  $11 \times 9=99$  (44%) であり。

次に、準線形シェル理論を用いて円筒腹板パネルを解析してみる。縦横比  $a/b=1$ 、曲率パラメーター  $b^2/rh=10$ 、フランジのねじり拘束  $C_b/Db=0$ 、荷重パラメーター  $k_m=20$  の場合につ

Table 2 Finite difference solutions of deflection at  $\xi=0.25, \eta=0$  in a cylindrical web panel: quasi-linear theory,  $a/b=1, b^2/rh=10, C_b=0, k_m=20$ .

$n_x$	$n_y$	$w$ $h$	Error (%)
12	10	-0.5329	7.9
16	10	-0.5543	4.2
20	10	-0.5624	2.8
24	10	-0.5661	2.1
32	10	-0.5691	1.6
Extrapolated		-0.5784	—

いて、パネル中央断面の圧縮領域 ( $\xi=0.25, \eta=0$ ) のたわみを調べた。検討された分割は  $n_x=6\sim 32, n_y=6\sim 16$  の範囲であるが、得られた結果の一部を Table 2 に示す。表には外挿公式<sup>32)</sup>によって得られた解に対する誤差を示してある。解の精度、記憶容量および計算時間を勘案して以後の計算には  $n_x=24, n_y=10$  の分割を用いることにする。

4. 数値計算結果とその考察

数値計算を行って種々のパラメーターが円筒腹板パネルの非線形挙動に及ぼす影響を検討する。基礎方程式 (16) および境界条件式 (17)~(21) からわかるように、腹板の縦横比  $a/b$ 、曲率パラメーター  $b^2/rh^*$  およびフランジのねじり剛さ  $C_b/Db$  が与えられれば、変位  $\bar{U}$ ,  $\bar{V}$ ,  $W$  が求められ、式 (22), (23) から無次元応力が計

\* Mariani ら<sup>31)</sup>および Abdel-Sayed<sup>32)</sup> は  $(b^2/rh) \cdot \sqrt{1-\nu^2}$  を曲率パラメーターとしている。これより以前に Donnell<sup>33)</sup> は、円筒シェルのねじり座屈に対して、 $a^2/rh$  を用いている。

算される。すなわち、パラメーターとして  $a/b$ ,  $b^2/rh$ ,  $C_b/Db$  を考え、その値として次のようにとる。

実橋では縦横比は  $a/b \leq 1$  が普通なので、 $a/b=0.5$ , 1 の場合について数値計算を行うが、考察は  $a/b=1$  の場合に重点を置く。直線プレート・ガーダー腹板の幅厚比規定<sup>1)</sup>もあるが、腹板の非線形挙動を明らかにするため薄い腹板を想定し、 $b/h=150\sim 300$  を考える。また、実橋は  $b/r=0.03$  前後の曲率のものが多く、今後、曲率の大きい曲線橋の架設も予想されるので、 $b/r=0.01\sim 0.1$  とする。したがって、曲率パラメーターとしては  $b^2/rh=1.5\sim 30$  を計算の対象とする。主として上下フランジの位置で腹板パネルが単純支持されている場合 ( $C_b/Db=0$ ) について考察を行うが、フランジのねじり拘束が腹板の挙動に与える影響を検討するため、上下フランジのねじり剛さは等しいものとし、 $C_b/Db=10$  と固定の場合に相当する  $C_b/Db=50$  の場合を扱う。荷重を表すパラメーターには、作用面内直応力  $\sigma_m$  の代りに式 (11) で示される無次元荷重パラメーター  $k_m$  を用い  $k_m=0\sim 50$  に対して解析を行う。なお、ポアソン比は  $\nu=0.3$  とする。

(1) 非線形理論と準線形理論

非線形理論に基づく数値計算結果に対する考察に入る前に、2.(4) に述べた準線形理論の妥当性を検討してみる。

$a/b=1$ ,  $b^2/rh=10$ ,  $C_b/Db=0$  の場合を例に、中央断面 ( $\eta=0$ ) の圧縮領域 ( $\xi=0.25$ ) と引張領域 ( $\xi=0.75$ ) におけるたわみについて、準線形理論と非線形理論とを比較すると Fig. 4 のようになる。図からわかるように両理論によるたわみはまったく異なっており、その差は荷重の増加とともに増す。準線形理論によれば圧縮領域では大きめの、引張領域では小さめの値が得られる。パラメーターの他の値の場合も含め、たわみおよび応力について両理論を比較したが、両理論による値は異なっ

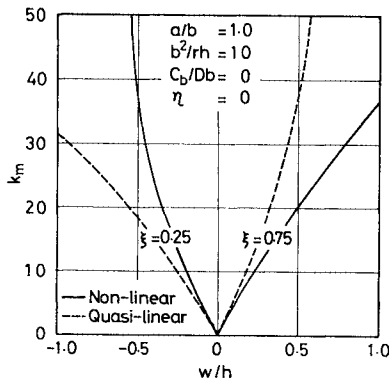


Fig. 4 Load-deflection curves by non-linear and quasi-linear theories.

おり、本論文では非線形理論による解析を行う。

(2) たわみ

曲率パラメーター  $b^2/rh$  の値を変えた場合のたわみ-荷重曲線を Fig. 5 に示す。腹板の挙動は  $b^2/rh$  の値によってかなり異なるが、引張領域では一般に腹板は曲率内側へたわみ、荷重が大きいかほど変形は大きくなる。それに対して圧縮領域では、 $b^2/rh$  がある程度小さい場合には荷重が増してもたわみはほとんど生じず、 $b^2/rh$  が大きい場合には荷重の増大に伴って外側へたわみが増加する。

このように引張領域と圧縮領域とではたわみに対する  $b^2/rh$  の影響に違いがあるが、曲率パラメーター  $b^2/rh$

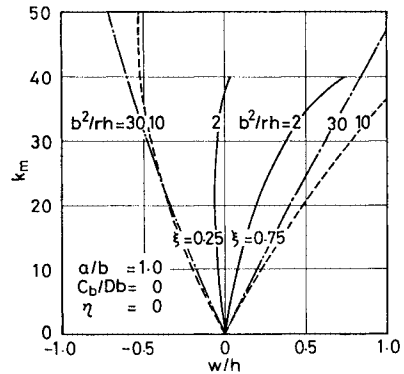


Fig 5 Load-deflection curves.

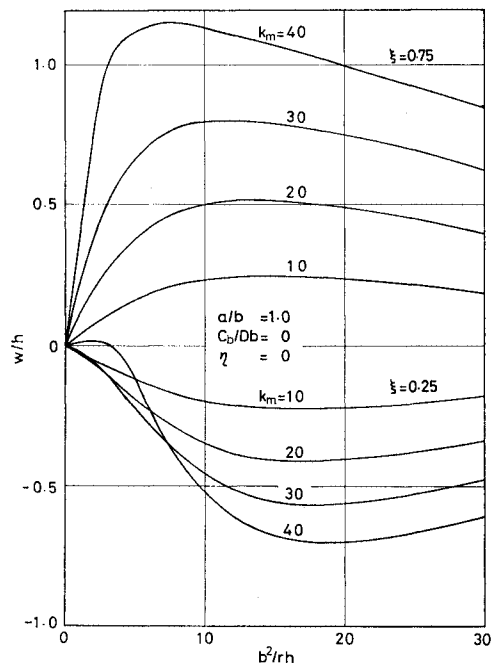


Fig. 6 Relationship between deflection and curvature parameter.



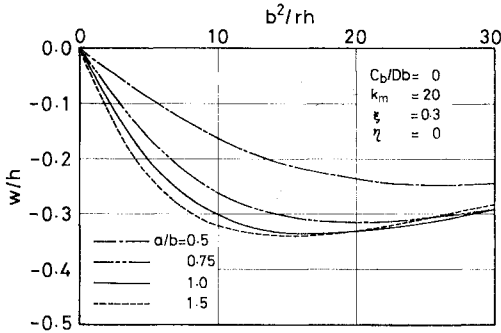


Fig. 7 Relationship between deflection and curvature parameter for various aspect ratios.

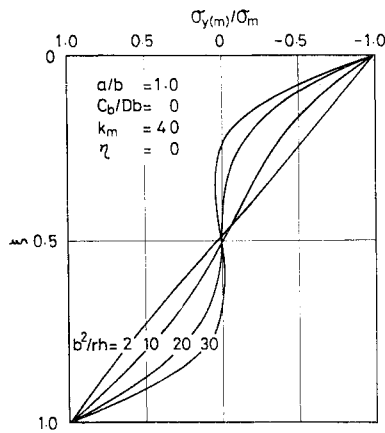


Fig. 8 Distributions of circumferential membrane stress.

とたわみとの関係を調べると Fig. 6 のようになる。図からわかるように引張領域では  $b^2/rh=0\sim 5$ 、圧縮領域では  $b^2/rh=0\sim 15$  の範囲では、 $b^2/rh$  の値が増すと腹板のたわみは急激に増す。しかし、それ以上に  $b^2/rh$  の値が増してもたわみはほとんど変化しない。これは  $b^2/rh$  が小さい場合には面外変形が卓越するが、 $b^2/rh$  が大きい場合には面内変形が卓越するためである。

圧縮領域におけるたわみと  $b^2/rh$  の関係を種々の縦横比  $a/b$  に対して調べると Fig. 7\* のようになる。この図より、 $a/b$  の値がある程度以上に大になると、たわみに対する  $a/b$  の影響はなくなる。これはパネルが長くなると面外変形の影響よりも面内変形の影響が大きくなるためと思われる。

### (3) 円周方向膜応力

パネル中央断面における円周方向膜応力分布を種々の曲率パラメータ  $b^2/rh$  に対して調べると Fig. 8 のようになる。 $b^2/rh$  の値が大きくなるほど、圧縮領域および引張領域において膜応力が減少する。これは腹板が

\* 分割は  $n_x=10, n_y=6$  である。

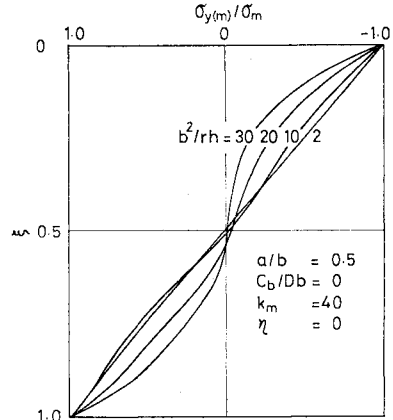


Fig. 9 Distributions of circumferential membrane stress.

圧縮領域では曲率外側に、引張領域では曲率内側に變形し、面内力に抵抗しにくくなるためと考えられる。これに伴って円筒腹板パネルが負担する曲げモーメントは減少することになる。

Fig. 8 は  $a/b=1$  の場合に対する円周方向膜応力分布であるが、 $a/b=0.5$  の場合について同様な分布を調べると Fig. 9 のようになる。分布形状は  $a/b=0.5$  の場合も  $a/b=1$  の場合も同じようであるが、応力減少は  $a/b$  の値が小さい方が少ない。

### (4) 円周方向曲げ応力

円筒腹板パネル中央断面における腹板の外側面、中央面および内側面の円周方向応力分布を比較すると Fig. 10 のようになる。この図において、中央面の応力と外側面または内側面の応力との差が円周方向の板曲げ応力である。圧縮領域では腹板を外側に、引張領域では腹板を内側に變形させるような曲げが生じていることがわかる。中央断面における円周方向曲げ応力  $\sigma_{y(b)}$  を計算

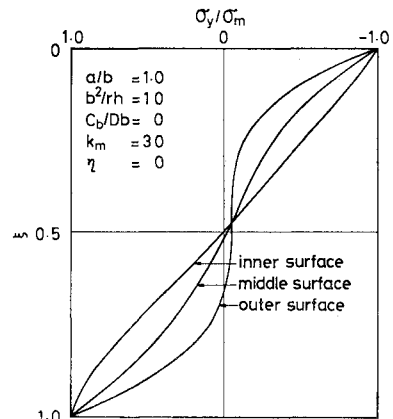


Fig. 10 Distributions of circumferential stress at inner, middle, and outer surfaces.

し、その分布を曲率パラメーターを変えて比較すると Fig. 11 のようになる。図から圧縮領域および引張領域ともそれぞれの中央部分において曲げ応力が大きいこと

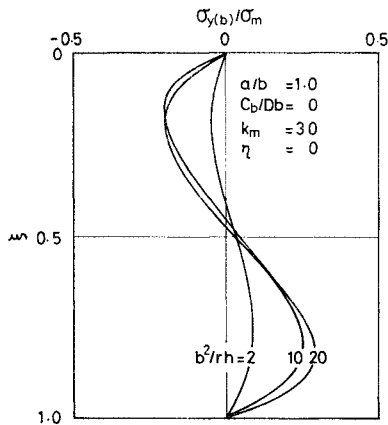


Fig. 11 Distributions of circumferential bending stress.

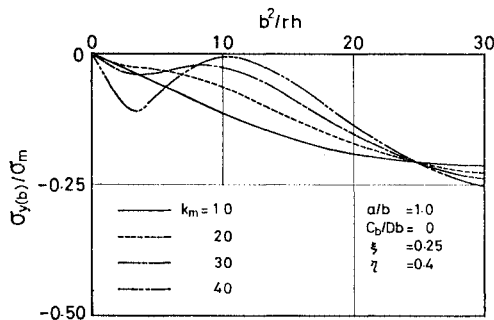


Fig. 12 Relationship between circumferential bending stress and curvature parameter (compression region).

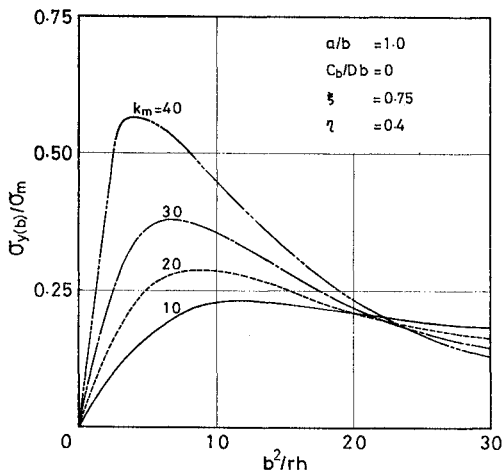


Fig. 13 Relationship between circumferential bending stress and curvature parameter (tension region).

がわかる。また、 $b^2/rh$  の値が増すと曲げ応力が増加することもある。

曲率パラメーターが曲げ応力に及ぼす影響を鉛直補剛材に近い断面で調べると、Fig. 12 および Fig. 13 のようになる。圧縮領域 (Fig. 12) においては  $b^2/rh$  が増すと曲げ応力は増大する。一方、引張領域 (Fig. 13) においては  $b^2/rh$  が小さい範囲では  $b^2/rh$  の増大に伴って曲げ応力は増加するが、 $b^2/rh$  がある程度以上に大きくなると、 $b^2/rh$  が増すとかえって曲げ応力は減少する。

(5) フランジのねじり拘束の影響

以上は円筒腹板パネルが上下縁で単純支持された場合に対する結果で、フランジのねじり拘束が腹板パネルの挙動に与える影響を調べてみる。

フランジのねじり拘束の程度 ( $C_b/Db$ ) を変えた場

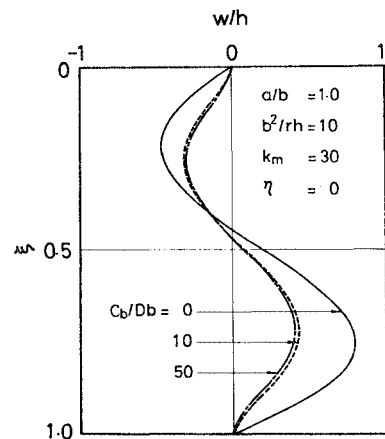


Fig. 14 Distributions of deflection in case of webs resisted by flanges.

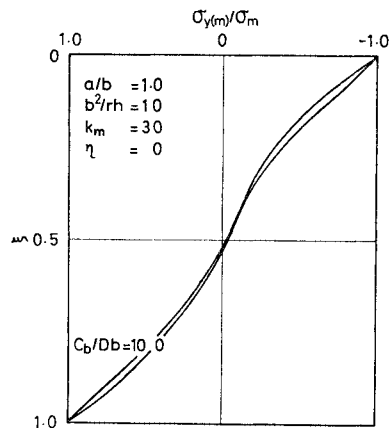


Fig. 15 Distributions of circumferential membrane stress in case of webs resisted by flanges.

合、パネル中央断面のたわみ分布は Fig. 14 のようになる。この図から、ねじり拘束が大になると腹板のたわみが減少することがわかる。また、 $C_b/Db=10$  の場合と  $C_b/Db=50$  の場合とでたわみはあまり変わらない。すなわち、 $C_b/Db$  の値がある程度以上に大きければ、上下フランジの位置で固定された場合と同様な効果を与えるものと考えられる。

Fig. 15 はパネル中央断面における円周方向膜応力分布に対するフランジのねじり拘束の影響を調べたものである。フランジのねじり拘束によって膜応力の減少の程度が小さくなっていることがわかる。これはたわみが減少するためである。

(6) 曲線桁腹板の設計について

腹板の引張領域においては、(3) で述べたように圧縮領域と同程度に円周方向膜応力が減少し、その結果として曲げモーメントが減少する。また、(4) で述べたように、圧縮領域におけるよりも大きい円周方向曲げ応力が発生する。したがって、円周方向膜応力の減少を防ぎ、円周方向曲げ応力を減少させるためには、圧縮領域ばかりでなく、引張領域にも水平補剛材を配置することが望ましい場合がある。

Culver ら<sup>2)</sup>は、鉛直補剛材位置における円周方向曲げ応力を降伏応力の 20% におさえることにより、曲線プレート・ガーダー腹板に対する次の幅厚比公式を提示している。

$$\frac{b}{h} = \frac{36500}{\sqrt{\sigma_Y}} \left[ 1 - 8.6 \left( \frac{a}{r} \right) + 34 \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] \dots (31)$$

ただし、 $\sigma_Y$  は降伏応力 (psi) である。

式 (31) を検討してみよう。ここで、腹板パネルの任意点で最初に降伏が生じる場合 (first yielding) を鋼材

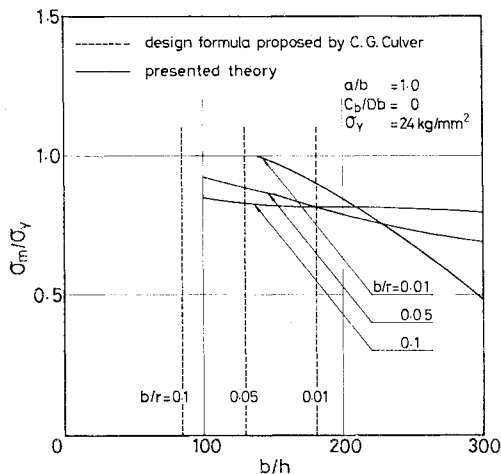


Fig. 16 Relationship between depth-to-thickness ratio of web and load at which some point in web yields first.

SS 41 ( $\sigma_Y=2400 \text{ kg/cm}^2$ ) に対して計算すると Fig. 16 の実線のようにになる。一方、式 (31) の値は破線のようにになり、ほぼ  $\sigma_m=0.8\sigma_Y$  の曲げモーメントで最初の降伏が生じることになる。

Fig. 16 によると、 $b/r=0.01$  の曲線プレート・ガーダー腹板パネルの場合、 $\sigma_m=\sigma_Y$  となる曲げモーメントが作用してパネルの任意点で最初に降伏が生じるようにするには、 $b/h \leq 140$  でなければならないことになる。ちなみに、道路橋示方書<sup>3)</sup>によると直線プレート・ガーダー腹板の許容幅厚比は、水平補剛材がない場合 SS 41 材に対して  $b/h=152$  である。

5. む す び

純曲げを受ける曲線プレート・ガーダーの、上下フランジおよび 2 つの鉛直補剛材で囲まれた円筒腹板パネルについて、非線形シェル理論を適用しその挙動を差分法を用いて解析した。さらに、数値計算を行い、その結果に対する考察を行ったが、それらをまとめると次のようになる。

- (1) 純曲げを受ける円筒腹板パネルに薄いシェルの非線形理論を適用した。
- (2) 非線形理論を簡略化した準線形理論による解析も行ったが、準線形理論では非線形理論と異なる解が得られる場合が多い。
- (3) 差分法として、少ない分割で高精度な解を得るように種々の工夫をし、また、電子計算機プログラミングの便をも考慮した。
- (4) 非線形基礎偏微分方程式の差分表示の結果として得られる非線形代数方程式を反復的に解く際、Lagrange 補間法、加速 Jacobi 法 および Aitken の外挿法を用いて解の収束を早めるようにした。
- (5) 曲率パラメーターは円筒腹板パネルの挙動に非常に影響を与える。腹板水平たわみは曲率パラメーターの増大に伴って増加するが、曲率パラメーターがある程度以上に大きくなるとたわみは一定となるか、または減少する。
- (6) 曲率パラメーターが増すと円周方向膜応力が減少し、それに伴って腹板パネルが負担する曲げモーメントが減少する。
- (7) 円周方向曲げ応力は圧縮領域ばかりでなく引張領域においてもかなり大きく、曲げ応力の増大を防ぐためにも水平補剛材を引張領域にも配置するのが望ましい場合がある。
- (8) 円筒腹板パネルの任意の場所に最初に降伏が生じる場合をもって設計上の 1 つの限界とみなす考え方で、曲線プレート・ガーダー腹板の許容幅厚比について

若干の考察を行った。

なお、数値計算には大阪大学大型計算機センターの NEAC 2200-700 および関西大学電子計算機室の FACOM 230-47 を用いた。

#### 参 考 文 献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，丸善，1973.
- 2) Culver, C.G., C.L. Dym and D.K. Brogan : Bending behavior of cylindrical web panels, Proc. ASCE, Vol. 98, No. ST10, pp. 2291~2308, Oct., 1972.
- 3) Culver, C.G., C.L. Dym and T. Uddin : Web slenderness requirements for curved girders, Proc. ASCE, Vol. 99, No. ST 3, pp. 417~430, Mar., 1973.
- 4) Mariani, N., J.D. Mozer, C.L. Dym and C.G. Culver : Transverse stiffener requirements for curved webs, Proc. ASCE, Vol. 99, No. ST 4, pp. 757~771 Apr., 1973.
- 5) Dabrowski, R. and J. Wachowiak : Stress in thin cylindrical webs of curved plate girders, Proc. of Colloquium on Design of Plate and Box Girders for Ultimate Strength, London, 1971, IABSE, Vol. 11, pp. 337~352, 1972.
- 6) Abdel-Sayed, G. : Curved webs under combined shear and normal stresses, Proc. ASCE, Vol. 99, No. ST 3, pp. 511~525, Mar., 1973.
- 7) Standard Specifications for Highway Bridge, 11th ed., American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, D.C., 1973.
- 8) The Task Committee on Curved Girders of the ASCE-AASHTO Committee on Flexural Members of the Committee on Metals of the Structural Division : Curved I-girder bridge design recommendations, Proc. ASCE, Vol. 103, No. ST 5, pp. 1137~1168, May, 1977.
- 9) 吉村慶丸：弾性殻の有限変位理論，東京大学航空研究所集報，Vol. 2, No. 2, pp. 31~50, 1960.6.
- 10) Naghdi, P.M. and R.P. Nordgren : On the nonlinear theory of elastic shells under the Kirchhoff hypothesis, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 21, No. 1, pp. 49~53, 1963.
- 11) Sanders, J.L., Jr. : Nonlinear theories for thin shells, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 21, No. 1, pp. 21~36, 1963.
- 12) Budiansky, B. : Notes on nonlinear shell theory, Jour. of Applied Mechanics, Vol. 35, No. 2, pp. 393~401, June, 1968.
- 13) Yokoo, Y. and H. Matsunaga : A general nonlinear theory of elastic shells, International Jour. of Solids Structures, Vol. 10, pp. 261~274, 1974.
- 14) 登坂宣好・坪井善勝：曲面板の非線形理論（その1：基本方程式の誘導およびその近似化），日本建築学会論文報告集，No. 235, pp. 27~37, 1975.9.
- 15) 登坂宣好・坪井善勝：曲面板の非線形理論（その2：各種殻への応用），日本建築学会論文報告集，No. 239, pp. 43~54, 1976.1.
- 16) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd ed., Pergamon Press, 1975.
- 17) 山内二郎・森口繁一・一松 信：電子計算機のための数値計算法I，培風館，1965.
- 18) Berezin, I.S. and N.P. Zhidkov : Computing Methods, Vol. 1, translated by O.M. Blunn, Pergamon Press, 1956.
- 19) Kármán, T.V. and H.S. Tsien : The buckling of thin cylindrical shells under axial compression, Jour. of Aeronautical Sciences, Vol. 8, No. 8, pp. 303~312, June, 1941.
- 20) Chu, K.H. and P. Turula : Postbuckling behavior of open cylindrical shells, Proc. ASCE, Vol. 96, No. EM 6, pp. 877~894, Dec., 1970.
- 21) Salvadori, M.G. and M.L. Baron : Numerical Methods in Engineering, 2nd ed., Prentice-Hall, 1961.
- 22) Collatz, L. : The Numerical Treatment of Differential Equations, 3rd ed., translated by P.G. Williams, Springer-Verlag, 1966.
- 23) Collatz, L. : Das Mehrstellenverfahren bei Plattenaufgaben, Z. angew. Math. Mech., Bd. 30, S. 385~388, Nov./Dec., 1950
- 24) Szilard, R. : Theory and Analysis of Plates, Classical and Numerical Methods, Prentice-Hall, 1974.
- 25) 岸野佑次・佐武正雄：差分による構造解析の高精度化について，土木学会論文報告集，No. 177, pp. 63~70, 1970.5.
- 26) 三上市蔵：“差分法を用いた板の非線形解析”への討議，土木学会論文報告集，No. 265, pp. 147~150, 1977.9.
- 27) Shaw, F.S. : An Introduction to Relaxation Methods, Dover Publications, 1953.
- 28) 三上市蔵：差分法のための FORTRAN プログラム，土木学会第3回電算機利用に関するシンポジウム講演概要，pp. 77~80, 1978.11.
- 29) Forsythe, G.E. and C.B. Moler : Computer Solution of Linear Algebraic Systems, Prentice-Hall, 1967. (渋谷政治・田辺国土訳：計算機のための線形計算の基礎—連立1次方程式のプログラミング—，培風館，1969.)
- 30) 関西大学電子計算機室：効率利用，電子計算機利用研修会テキスト，No. 4, 1975.12.
- 31) Timoshenko, S.P. and S. Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, 1959.
- 32) Mikami, I. and H. Yonezawa : Extrapolation technique for finite difference and finite element solutions, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 25, Univ. of Tokyo Press, pp. 567~575, 1977.
- 33) Donnell, L.H. : Stability of thin-walled tubes under torsion, N.A.C.A. TR 479, 1933.
- 34) Mikami, I. and H. Yonezawa : Nonlinear cylindrical flanges of vertically curved beams, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 27, Univ. of Tokyo Press, pp. 143~153, 1979.

(1979.6.13・受付)