

補剛材を有する shear-elastic plate の座屈解析

BUCKLING ANALYSIS OF SHEAR-ELASTIC PLATE WITH STIFFENER

見澤 繁光*・重松 恒美**・大賀 水田生***・原 隆****

By Shigemitsu MISAWA, Tsunemi SHIGEMATSU, Mitao OHGA
and Takashi HARA

1. 緒 言

板が荷重を受けて変形するとき、曲げ変形とともにせん断変形が生じる。通常の薄板の解析において、せん断変形は曲げ変形に比べて無視できるほど小さいものとして扱われる¹⁾。しかしながら、サンドイッチ板、ラーメン中空板、トラス中空板などではせん断剛性の小さい断面特性により、無視できない大きさのせん断変形が生じる。また、厚板の解析においてもせん断変形の影響が無視できないことが知られている。したがって、これらの板を解析する場合には曲げ変形のみならずせん断変形をも考慮しなければならない。このような板を総じて shear-elastic plate (せん断弾性板) と称する。

shear-elastic plate の座屈問題はせん断変形を考慮することにより数多く解析されており、その座屈係数は通常の薄板理論により求められた座屈係数を下回ることが報告されている²⁾。補剛材を有する shear-elastic plate の座屈解析も同様な結果が得られるものと推察されるが、その解析についての報告は数少ない。著者らの知る限りでは、P. Seide³⁾ によりエネルギー法を用いて解析されているのみである。しかもこの解析は、四辺単純支持の境界条件で圧縮方向に無限の長さをもつサンドイッチ板に関するものに限られており、十分解析されているとはいいいにくい。

そこで本論文では有限の長さをもつ等方性の shear-elastic plate に圧縮方向に補剛材を配置し、既往の研究で取扱われた 4 辺単純支持のみならず、それ以外の境界条件についても座屈解析を行った。なお、載荷状態は一方等分布圧縮荷重とし、支持条件は荷重に垂直な 2 辺

は単純支持、他の 2 辺は任意とした (図-1 参照)。

本論文の解析には伝達マトリックス法を用いた。本法の概略は以下のものである。まず、等方性 shear-elastic plate の微分方程式の一般解から格間伝達マトリックスを求める。次に、補剛材の曲げ剛性、ねじり剛性、そり剛性を考慮して shear-elastic plate と補剛材の接合点での変位量、断面力のつり合いにより格点マトリックスを求める。最後に、求められた両マトリックスを解析モデルに適用し、境界条件を考慮して座屈条件式を誘導するものである。ここに格間伝達マトリックス、格点マトリックス、座屈条件式などは、shear-elastic plate の座屈解析に関する W. Wurmnest⁴⁾ の研究、補剛材の座屈解析に関する W. Schnell⁵⁾、K. Klöppel⁶⁾ の研究成果を採用した。

補剛材を有する shear-elastic plate の座屈問題では、通常の板の場合と同様に補剛材を“はり”として解析するのが一般的である。補剛材を曲げ剛性、ねじり剛性、そり剛性を有する“はり”として扱う場合、補剛材の曲げ剛性の増大 (補剛材の曲げ剛性に影響を与える断面諸量は種々存在するが、代表的な諸量である補剛材幅 b_s の増大について論ずれば) とともに座屈係数は大きくなる。しかし、ねじり剛性、そり剛性のため、補剛材幅がある値に達すると減少する。ところで、補剛材幅が大きくなると、補剛材が“板”としての性質を示すようになり shear-elastic plate が座屈する以前に補剛材が座屈する (図-4 の n 点で示す補剛材の取付け位置で、shear-elastic plate が荷重方向に直線性を保った状態で補剛材が座屈する形式) ことも考えられ、この場合は補剛材を“はり”と考える解析は過大な座屈係数を与えることになる。この矛盾を修正するため、補剛材を“はり”と考えた場合の座屈係数と前述の補剛材が座屈する場合の座屈係数を比較し、後者が小さいところでは後者を座屈係数として採用する方法を用いた。

本論文では、補剛材を曲げ剛性、ねじり剛性、そり剛

* 正会員 工博 愛媛大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 徳山工業高等専門学校助教授 土木建築工学科

*** 正会員 工修 愛媛大学助手 工学部土木工学科

**** 正会員 徳山工業高等専門学校助手 土木建築工学科

性を有する“はり”として解析する場合を“はり”モデルといい、また補剛材を一端は shear-elastic plate で支持され（支持点は荷重方向と直線性を保つ）他端は自由の境界条件を有する“板”として補剛材の座屈を取扱う場合を“板”モデルといい、区別する。

数値計算では、2, 3の支持状態の等方性 shear-elastic plate のせん断剛性比、形状比、shear-elastic plate と補剛材の板厚比、板幅比をパラメーターとして座屈係数を求めた。また、補剛材を shear-elastic plate の片側 ($\beta_{12}=0.0$) または両側対称 ($\beta_{12}=1.0$) に配置したもの(図-15 参照) について座屈曲線を示している。

2. 解析方法

解析には前述したように伝達マトリックス法を用いた。ここではまず、格間伝達マトリックス、および格点マトリックスの誘導について述べる。次に、一方向に等分布圧縮荷重を受け荷重に垂直な2辺が単純支持され、他の2辺のうち1辺が単純支持、他辺は自由の境界条件の shear-elastic plate の自由縁に補剛材を取付けたとき(図-1 参照) の座屈条件式を求める方法を“はり”モデルおよび“板”モデルの場合についてそれぞれ述べる。なお、他の境界条件、補剛材位置についても同様な手順で計算することができる。

(1) Shear-elastic plate の格間伝達マトリックス

本節では、W. Wurmnest⁶⁾ の研究に従って等方性 shear-elastic plate の格間伝達マトリックスを誘導する。格間伝達マトリックスは shear-elastic plate の微分方程式の一般解をもとに得られる。

一方向に等分布圧縮荷重を受ける shear-elastic plate を図-1 に示しており、その板要素と、板要素に作用する断面力を図-2 に示している。

断面力のつり合いは $M_{xy}=M_{yx}$ であることを考慮すれば次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_x' + M_{xy}' - Q_x &= 0 \\ M_y' + M_{xy}' - Q_y &= 0 \\ Q_x' + Q_y' - P_{xx}w'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 $\bullet' \equiv \partial/\partial x$, $\bullet'' \equiv \partial^2/\partial x^2$

また、断面力と変位の関係式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D(\varphi_x' + \nu\varphi_y') \\ M_y &= D(\varphi_y' + \nu\varphi_x') \\ M_{xy} &= M_{yx} = \frac{1}{2}(1-\nu)D(\varphi_x' + \varphi_y') \\ Q_x &= S\gamma_{xz} = S(w' - \varphi_x) \\ Q_y &= S\gamma_{yz} = S(w' - \varphi_y) \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

ここに、 D, S : shear-elastic plate の曲げ剛性、せん断

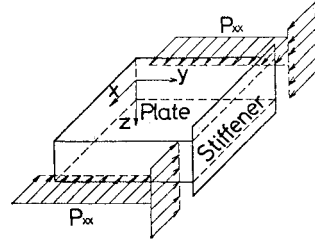


図-1 補剛された Shear-elastic plate

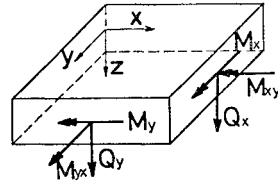


図-2 断面力

剛性、 ν : ポアソン比、 γ_{xz}, γ_{yz} : せん断ひずみ、 φ_x, φ_y : 薄板理論のたわみ角に相当する変位成分。

式(2)を用いて式(1)を変形すれば、

$$\left. \begin{aligned} Q_x - \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{D}{S}P_{xx}Q_x \\ \quad = -Df'w' + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{D}{S}P_{xx}w'' \\ Q_y - \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{D}{S}P_{yy}Q_y \\ \quad = -Df'w' + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{D}{S}P_{xx}w'' \\ Q_x' + Q_y' - P_{xx}w'' = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

ここに、 $f \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$

次に、せん断力 Q_x, Q_y を

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \varrho - Df'w' + \frac{D}{S}P_{xx}w'' \\ Q_y &= -\varrho - Df'w' + \frac{D}{S}P_{xx}w'' \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

で定義される応力関数 ϱ で、たわみ w を、

$$Dw = W - \frac{D}{S}P_{xx}W \dots\dots\dots(5)$$

で定義される変位関数 W で置き換え若干の計算をすることにより次の2つの微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Df'f'W &= -P_{xx}W'' + \frac{D}{S}P_{xx}f'W \\ \varrho - \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{D}{S}P_{xx}\varrho &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

また、図-1 に示されるように荷重に垂直な2辺が単純支持された場合の変位関数 W 、応力関数 ϱ は次式で表される。

$$\varrho = \bar{\varrho} \cos \frac{m\pi}{a}x, W = \bar{W} \sin \frac{m\pi}{a}x \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 $\bar{W}, \bar{\varrho}$: y のみの関数、 m : x 方向の半波数、変位量 w, φ_x, φ_y 、断面力 M_{xy}, M_y, Q_y も同様に y

のみの関数 \bar{w} , $\bar{\varphi}_x$, $\bar{\varphi}_y$, \bar{M}_{xy} , \bar{M}_y , \bar{Q}_y を用いて表される。

式 (7) を微分方程式 (6) に代入し, \bar{W} , \bar{Q} の一般解を求めると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{W} &= A_1 \cosh \rho_1 y + A_2 \sinh \rho_1 y \\ &\quad + A_3 \cosh \rho_2 y + A_4 \sinh \rho_2 y \\ \bar{Q} &= A_5 \cosh \mu y + A_6 \sinh \mu y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに, ρ_1, ρ_2, μ : 微分方程式の特性方程式の根, A_i ($i=1, 2, \dots, 6$) : 積分定数。

この一般解を用いて変位量, 断面力を表示し, さらに数値解析を容易にするために,

$$\left. \begin{aligned} * \bar{w} &= -D \bar{w}, \quad * \bar{\varphi}_y = (a/m\pi) D \bar{\varphi}_y \\ * \bar{\varphi}_x &= (a/m\pi) D \bar{\varphi}_x, \quad * \bar{M}_{xy} = -(a/m\pi)^2 \bar{M}_{xy} \\ * \bar{M}_y &= (a/m\pi)^2 \bar{M}_y, \quad * \bar{Q}_y = (a/m\pi)^2 \bar{Q}_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

を導入して, 規準化の操作を行うと最終的に次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} * \bar{w} &= -\alpha_1 (A_1 \cosh \rho_1 \bar{y} + A_2 \sinh \rho_1 \bar{y}) \\ &\quad - \alpha_2 (A_3 \cosh \rho_2 \bar{y} + A_4 \sinh \rho_2 \bar{y}) \\ * \bar{\varphi}_y &= -\rho_1 (A_1 \sinh \rho_1 \bar{y} + A_2 \cosh \rho_1 \bar{y}) \\ &\quad - \rho_2 (A_3 \sinh \rho_2 \bar{y} + A_4 \cosh \rho_2 \bar{y}) \\ &\quad + \varepsilon (A_5 \cosh \mu \bar{y} + A_6 \sinh \mu \bar{y}) \\ * \bar{\varphi}_x &= -(A_1 \cosh \rho_1 \bar{y} + A_2 \sinh \rho_1 \bar{y}) \\ &\quad - (A_3 \cosh \rho_2 \bar{y} + A_4 \sinh \rho_2 \bar{y}) \\ &\quad + \varepsilon \mu (A_5 \sinh \mu \bar{y} + A_6 \cosh \mu \bar{y}) \\ * \bar{M}_{yx} &= (1-\nu) \{ \rho_1 (A_1 \sinh \rho_1 \bar{y} + A_2 \cosh \rho_1 \bar{y}) \\ &\quad + \rho_2 (A_3 \sinh \rho_2 \bar{y} + A_4 \cosh \rho_2 \bar{y}) \} \\ &\quad - \varepsilon \frac{1-\nu}{2} (1+\mu^2) (A_5 \cosh \mu \bar{y} \\ &\quad + A_6 \sinh \mu \bar{y}) \\ * \bar{M}_y &= (\nu - \rho_1^2) (A_1 \cosh \rho_1 \bar{y} + A_2 \sinh \rho_1 \bar{y}) \\ &\quad + (\nu - \rho_2^2) (A_3 \cosh \rho_2 \bar{y} + A_4 \sinh \rho_2 \bar{y}) \\ &\quad + \varepsilon \mu (1-\nu) (A_5 \sinh \mu \bar{y} + A_6 \cosh \mu \bar{y}) \\ * \bar{Q}_y &= -\rho_1 (1+\rho_1^2) (A_1 \sinh \rho_1 \bar{y} + A_2 \cosh \rho_1 \bar{y}) \\ &\quad - \rho_2 (1+\rho_2^2) (A_3 \sinh \rho_2 \bar{y} + A_4 \cosh \rho_2 \bar{y}) \\ &\quad + (a/bm)^2 (A_5 \cosh \mu \bar{y} + A_6 \sinh \mu \bar{y}) \\ &\quad \alpha_1 = 1 + \varepsilon (bm/a)^2 (1-\rho_1^2) \\ &\quad \alpha_2 = 1 + \varepsilon (bm/a)^2 (1-\rho_2^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここに, $\varepsilon = \pi^2 D / b^2 S$: せん断剛性比, $\bar{y} = (m\pi/a) y$ 。

式 (10) をマトリックス表示すれば,

$$\{Z\} = [B] \{A\} \dots\dots\dots (11)$$

ここに, $\{Z\} = \{*\bar{w}, *\bar{\varphi}_y, *\bar{\varphi}_x, *\bar{M}_{xy}, *\bar{M}_y, *\bar{Q}_y\}^T$: 状態量ベクトル, $[B]$: 係数マトリックス, $\{A\} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}^T$ 。

式 (11) において $\bar{y}=0$ とし, $[B]_{\bar{y}=0}$ を前掛けすれば, 積分定数 $\{A\}$ は,

$$\{A\} = [B]_{\bar{y}=0}^{-1} \{Z\}_{\bar{y}=0} \dots\dots\dots (12)$$

式 (12) を式 (11) に代入すれば,

$$\{Z\} = [B] \cdot [B]_{\bar{y}=0}^{-1} \{Z\}_{\bar{y}=0} = [F] \{Z\}_{\bar{y}=0} \dots\dots (13)$$

となる。ここに, $[F]$ が, 求める格間伝達マトリックスであり, 表-1 に示すように副対角に対して対称な $[6 \times 6]$ の正方マトリックスである。詳細については文献 6) を参照されたい。

表-1 格間伝達マトリックス

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & & \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & & & \\ F_{51} & F_{52} & & & & \\ F_{61} & & & & & \end{bmatrix} \text{Symmetric}$$

(2) 補剛材の格点マトリックス

本節では, 補剛材を“はり”としてモデル化したときの補剛材の格点マトリックスを誘導する。図-3 に補剛材を“はり”としてモデル化したものを示す。点 0 から点 i までは shear-elastic plate であり, 点 i に補剛材が取付けられている。補剛材の左側 (点 i) と右側 (点 $i+1$) の状態量をそれぞれ $\{\tilde{Z}_i\}$, $\{\tilde{Z}_{i+1}\}$ とする。補剛材の曲げ剛性, ねじり剛性, そり剛性を考慮すれば, 状態量 $\{\tilde{Z}_i\}$ と $\{\tilde{Z}_{i+1}\}$ の関係は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} w_{y \cdot i+1} &= w_i, \quad \varphi_{y \cdot i+1} = \varphi_{yi}, \quad \varphi_{x \cdot i+1} = \varphi_{xi} \\ M_{xy \cdot i+1} &= M_{xyi} - GJ_T w_i'''' \\ &\quad + EC_M w_i'''' + \sigma J_P w_i'''' \\ M_{y \cdot i+1} &= M_{yi} + G \cdot J_T w_i'''' \\ &\quad - EC_M w_i'''' - \sigma J_P w_i'''' \\ Q_{y \cdot i+1} &= Q_{yi} - Q_x' + \sigma F_R w_i'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここに, σ : 補剛材の単位面積当りの圧縮荷重, F_R : 補剛材の断面積, GJ_T , EC_M : 補剛材のねじり剛性, そり剛性, J_P : 補剛材の極慣性モーメントである。

状態量を格間伝達マトリックスの誘導に用いた状態量に一致させるために前節と同様な規準化を行えば, 式 (14) は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} * \bar{w}_{i+1} &= * \bar{w}_i, \quad * \bar{\varphi}_{y \cdot i+1} = * \bar{\varphi}_{yi}, \quad * \bar{\varphi}_{x \cdot i+1} = * \bar{\varphi}_{xi} \\ * \bar{M}_{xy \cdot i+1} &= * \bar{M}_{xy \cdot i} + C \left(\frac{P_{xx}}{S} - 1 \right) * \bar{w}_i \\ &\quad + C(1-\nu) * \bar{\varphi}_{xi} - C * \bar{M}_{yi} \\ * \bar{M}_{y \cdot i+1} &= * \bar{M}_{yi} + C * \bar{\varphi}_{yi} - C(m\pi/a)^2 \frac{D}{S} * \bar{Q}_{yi} \\ * \bar{Q}_{y \cdot i+1} &= * \bar{Q}_{yi} - \left\{ C \left(\frac{P_{xx}}{S} - 1 \right) + \frac{EJ_R}{D} (m\pi/a) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma F_R}{D} (a/m\pi) \right\} * \bar{w}_i \\ &\quad - C(1-\nu) * \bar{\varphi}_{xi} + C * \bar{M}_{yi} \\ C &= \left\{ \frac{J_T}{D} + \frac{EC_M}{D} (m\pi/a)^2 - \frac{\sigma J_P}{D} \right\} (m\pi/a) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここに, EJ_R : 補剛材の曲げ剛性。

表-2 格点マトリックス

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ R_{410} & R_{431} & R_{450} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{520} & 0 & 0 & 1 & R_{56} \\ R_{610} & R_{630} & 0 & R_{651} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

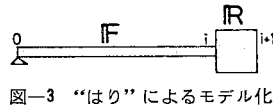


図-3 “はり”によるモデル化

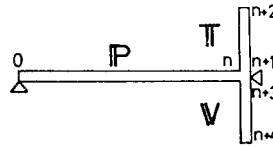


図-4 “板”によるモデル化

式 (15) を前述の状態量ベクトル $\{Z\}$ を用いてマトリックス表示を行えば次式となる。

$$\{Z_{i+1}\} = [R]\{Z_i\} \dots\dots\dots (16)$$

ここに、 $[R]$ が表-2 に表した成分をもつ補剛材の格点マトリックスである。

(3) “はり”モデルによる計算方法

この場合には、補剛材に(2)で求めた格点マトリックスを適用する。荷重に垂直な方向の断面を 図-3 に示す。shear-elastic plate は点0で単純支持され、点*i*で補剛材と接合され、さらに補剛材の右端の点*i+1*で自由縁となっている。点0と点*i*区間に格間伝達マトリックス $[F]$ 、点*i*と*i+1*の間に格点マトリックス $[R]$ を適用すれば左端の状態量 $\{Z_0\}$ は次式により右端の状態量 $\{Z_{i+1}\}$ に伝達される。

$$\{Z_{i+1}\} = [R] \cdot [F]\{Z_0\} = [U]\{Z_0\} \dots\dots\dots (17)$$

$\{Z_0\}$ 、 $\{Z_{i+1}\}$ の境界条件を考慮することにより座屈条件式が得られる。図-3 の場合、点0で単純支持、点*i+1*で自由縁であるから境界条件式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} *w_0 &= *q_{x0} = *M_{y0} = 0 \\ *q_{x \cdot i+1} &= *M_{y \cdot i+1} = *Q_{y \cdot i+1} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

したがって式 (17) の伝達式は次式となる。

$$\begin{aligned} \{ *w_{i+1}, *q_{y \cdot i+1}, 0, *M_{xy \cdot i+1}, 0, 0 \}^T \\ = [U]\{0, *q_{y0}, 0, *M_{xy0}, 0, *Q_{y0}\}^T \end{aligned} \dots\dots\dots (19)$$

これより座屈条件式は次式となる。

$$\begin{pmatrix} U_{32} & U_{34} & U_{36} \\ U_{52} & U_{54} & U_{56} \\ U_{62} & U_{64} & U_{66} \end{pmatrix} = 0 \dots\dots\dots (20)$$

(4) “板”モデルによる計算方法

補剛材を“板”モデルとして解析する場合には、補剛材にも shear-elastic plate と同様に格間伝達マトリックスを適用する。“板”モデルの断面を 図-4 に示す。shear-elastic plate は、点0で単純支持され、点*n*で補剛材と結合される。上下に突出した補剛材は、それぞれ点*n+1*、*n+3*で shear-elastic plate と結合され、*n+2*、*n+4*で自

由縁である。点0と*n*、点*n+1*と*n+2*、点*n+3*と*n+4*の格間伝達マトリックスをそれぞれ $[P]$ 、 $[T]$ 、 $[V]$ とすれば状態量 $\{Z_0\}$ 、 $\{Z_n\}$ 、 $\{Z_{n+1}\}$ 、 \dots 、 $\{Z_{n+4}\}$ の伝達式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \{Z_n\} &= [P]\{Z_0\} \\ \{Z_{n+2}\} &= [T]\{Z_{n+1}\} \\ \{Z_{n+4}\} &= [V]\{Z_{n+3}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

ここで、点0で単純支持、点*n+2*、*n+4*で自由縁の境界条件および shear-elastic plate が補剛材の取付け位置で直線性を保つことを考慮すると、

$$\left. \begin{aligned} *w_0 &= *q_{x0} = *M_{y0} = 0 \\ *M_{xy \cdot n+2} &= *M_{y \cdot n+2} = *Q_{y \cdot n+2} = 0 \\ *M_{xy \cdot n+4} &= *M_{y \cdot n+4} = *Q_{y \cdot n+4} = 0 \\ *w_n &= *w_{n+1} = *w_{n+3} = 0 \\ *q_{yn} &= *q_{y \cdot n+1} = *q_{y \cdot n+3} \\ *q_{xn} &= *q_{x \cdot n+1} = *q_{x \cdot n+3} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} *M_{xy \cdot n} - *M_{xy \cdot n+1} - *M_{xy \cdot n+3} &= 0 \\ *M_{yn} - *M_{y \cdot n+1} - *M_{y \cdot n+3} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

式 (22) を式 (21) に適用すれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \{0, *q_{yn}, 0, *M_{xy \cdot n}, *M_{yn}, *Q_{yn}\}^T \\ = [P]\{0, *q_{y0}, 0, *M_{xy0}, 0, *Q_{y0}\}^T \\ \{ *w_{n+2}, *q_{y \cdot n+2}, *q_{x \cdot n+2}, 0, 0, 0 \}^T \\ = [T]\{0, *q_{yn}, 0, *M_{xy \cdot n+1}, *M_{y \cdot n+1}, *Q_{y \cdot n+1}\}^T \\ \{ *w_{n+4}, *q_{y \cdot n+4}, *q_{x \cdot n+4}, 0, 0, 0 \}^T \\ = [V]\{0, *q_{yn}, 0, *M_{xy \cdot n+3}, *M_{y \cdot n+3}, *Q_{y \cdot n+3}\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

さらに、式 (23) を考慮すれば齊次の連立方程式が得られる。その連立方程式の係数行列式が表-3 に示す座屈条件式となる。なお、片側補剛の場合(図-4において点*n+3*と点*n+4*区間がない場合)は $[V]=[0]$ となり、表-3 の破線で囲まれた部分を除いた行列式が座屈条件式となる。

表-3 “板”モデルの座屈条件式

$*q_{y0}$	$*M_{ky0}$	$*Q_{y0}$	$*q_{yn}$	$*M_{kyn}$	$*M_{yn}$	$*M_{kyn+1}$	$*M_{yn+1}$	$*Q_{yn+1}$	$*M_{kyn+2}$	$*M_{yn+2}$	$*Q_{yn+2}$
P ₁₂	P ₁₄	P ₁₆	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P ₂₂	P ₂₄	P ₂₆	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
P ₄₂	P ₄₄	P ₄₆	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
P ₅₂	P ₅₄	P ₅₆	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	T _{42}}	0	0	T _{44}}	T _{45}}	T _{46}}	0	0	0
0	0	0	T _{52}}	0	0	T _{54}}	T _{55}}	T _{56}}	0	0	0
0	0	0	T _{62}}	0	0	T _{64}}	T _{65}}	T _{66}}	0	0	0
0	0	0	V _{42}}	0	0	0	0	0	V _{44}}	V _{45}}	V _{46}}
0	0	0	V _{52}}	0	0	0	0	0	V _{54}}	V _{55}}	V _{56}}
0	0	0	V _{62}}	0	0	0	0	0	V _{64}}	V _{65}}	V _{66}}
0	0	0	0	1	0	-1	0	0	-1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	-1	0

3. 数値計算

前章で求められた座屈条件式を用いて数値計算を行った。本章では、まず本解析法の妥当性の検証について述べ、次に3辺単純支持の shear-elastic plate の自由縁に補剛材を取付けた場合と4辺単純支持の shear-elastic plate の中央に補剛材を取付けた場合の数値計算結果について述べる。数値計算に用いたパラメーターは shear-elastic plate のせん断剛性比 $\epsilon = \pi^2 D/b^2 S$ 、形状比 a/b 、板厚比 $\lambda = t/b$ 、補剛材の上下突出幅比 $\beta_{12} = b_{s1}/b_{s2}$ 、板厚補剛材幅比 $\delta = t_s/t$ 、板厚補剛材幅比 $\beta = b_s/b$ である。

まず、本解析法の妥当性を検証するために行った数値計算結果について述べる。“はり”モデルによる解については、3辺単純支持のサンドイッチ板の自由縁にいわゆる“最小剛比”の補剛材（補剛材の曲げ剛性のみを考慮する場合）を取付けた場合の解と、W. Wurmnest⁶⁾ が4辺単純支持に対して求めた解とは有効数字5桁まで一致した。また4辺単純支持のサンドイッチ板に等間隔に2本の補剛材を配置したときの解析結果は P. Seide⁴⁾

により得られた解とよく一致している。

“はり”モデルおよび“板”モデルを用いた解析例は、K. Klöppel³⁾ が薄板に対して行ったものがあるが、せん断剛性を無限大とした場合（せん断剛性比 $\epsilon = 0$ 、せん断変形を無視した場合）の本解析法による解は K. Klöppel の解とまったく一致している。

図-5、6 は3辺単純支持、一端自由の shear-elastic plate の自由縁に補剛材を取付けたときの補剛材幅比と座屈係数の関係を示す。図-5 は板中立面に対称に補剛材を取付けた場合 ($\beta_{12} = 1.0$) であり、図-6 は板中立面より片側に補剛材を取付けた場合 ($\beta_{12} = 0.0$) である。パラメーターである形状比 a/b の値は図-11 (図-11については後述) のせん断剛性比 $\epsilon = 0.05$ の座屈曲線が極小値をとるときの値である。

図-5 において、 $a/b = 0.85$ では β が $0.0 \sim 0.35$ までは“はり”モデルの値（モード $m=1$ ）をとり、 β が 0.35 より大きいところでは“板”モデルの値 ($m=1$) をとる。 $a/b = 1.70$ のときは β が $0.0 \sim 0.44$ までは“はり”モデルの値 ($m=1$)、 β が 0.44 より大きいときは“板”モデルによる値 ($m=2$) をとる。

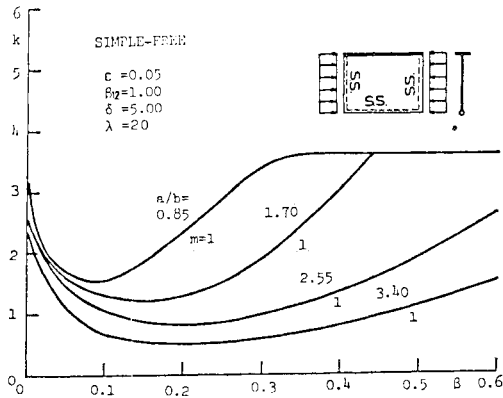


図-5 座屈係数曲線

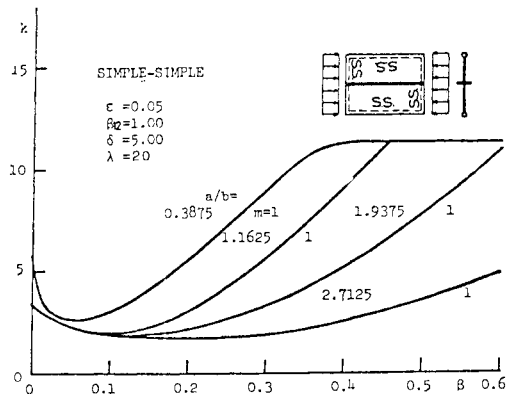


図-7 座屈係数曲線

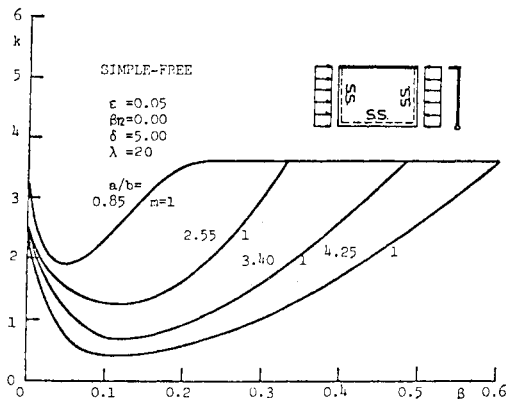


図-6 座屈係数曲線

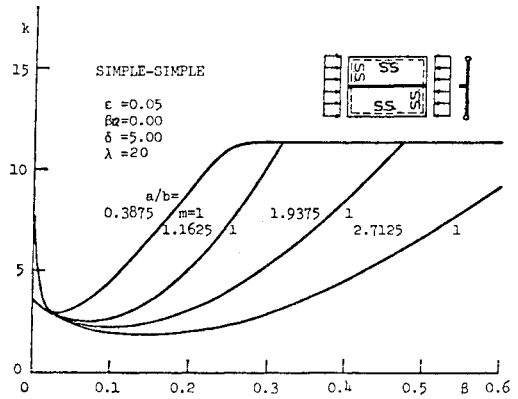


図-8 座屈係数曲線

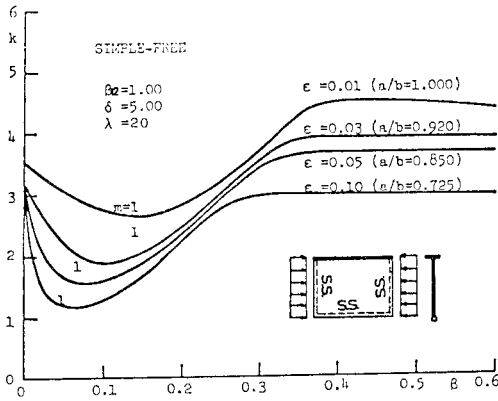


図-9 座屈係数曲線

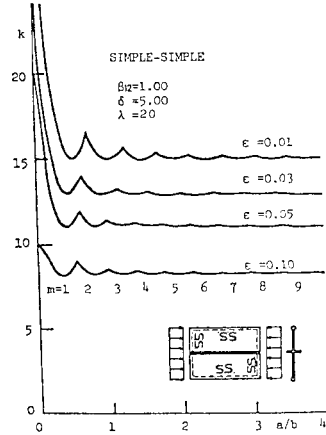


図-12 座屈係数曲線

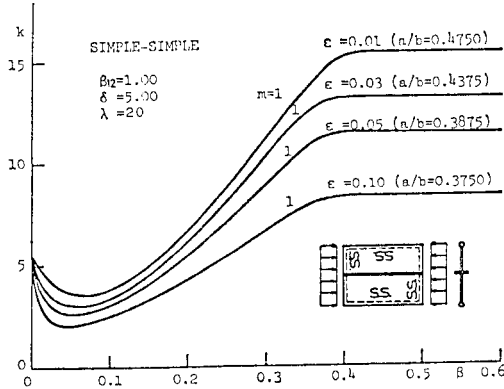


図-10 座屈係数曲線

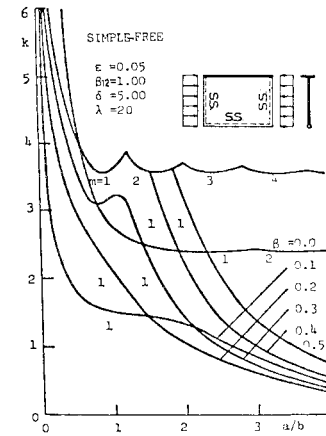


図-13 座屈係数曲線

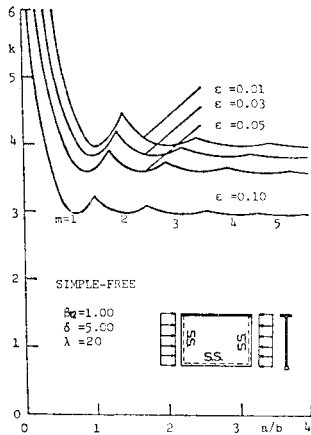


図-11 座屈係数曲線

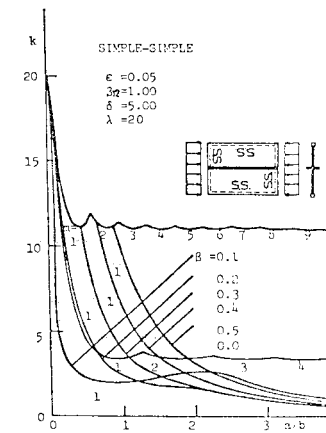


図-14 座屈係数曲線

図-6 についても同様の傾向であるが、図-5 に比べ β の増加に対する座屈係数の増加の割合は大きく、また、より小さい β の値で“はり”モデルの座屈係数から“板”モデルのそれに変化する。これは片側補剛 ($\beta_{12} = 0.0$) のため生じる補剛材の偏心の影響である。また、補剛材を設けることによる座屈係数の上限値は対称補剛

($\beta = 1.0$) の方がやや大きい、その差は小さく、いずれの形状比でも 1% 以下である。

図-7, 8 は 4 辺単純の shear-elastic plate の中央に補剛材を取付けたときの補剛材幅 b_s の変化による座屈

係数の変化を示す。図-7は対称補剛 ($\beta_{12}=1.0$) の場合であり、図-8は片側補剛 ($\beta_{12}=0.0$) の場合である。なお、形状比は図-12の $\varepsilon=0.05$ の座屈係数曲線が極小値をとるときの値である。“はり”モデルから“板”モデルへの移行は、たとえば $a/b=1.1625$ では対称補剛の場合 $\beta=0.45$ であり、片側補剛の場合 $\beta=0.31$ である。なお、対称補剛(図-7)と片側補剛(図-8)の比較については図-5と図-6の比較で述べたこととまったく同じことがいえる。

図-5~8において、補剛材幅の変化に伴う座屈係数の変化は“はり”モデル区間ではかなり大きい、“板”モデルに遷移した後はわずかに増加するのみであり、このことより“はり”モデルから“板”モデルへの遷移点の近傍が最も有効な補剛材幅といえる。

対称補剛 ($\beta_{12}=0.0$) の場合について、せん断剛性比 ε をパラメータにして補剛材幅と座屈係数の関係を図-9, 10に示している。それぞれの ε における形状比の値は図-5~8と同様に図-11, 12の座屈係数曲線が極小値をとるときの値である。両図とも座屈モードは $m=1$ であるが、“はり”モデルから“板”モデルへの遷移点は、 $\varepsilon=0.01, 0.03, 0.05, 0.1$ の順に、図-9では $\beta=0.39, 0.35, 0.33, 0.29$ 、図-10では $\beta=0.41, 0.395, 0.395, 0.395$ である。図-9, 10により明らかに、せん断剛性比 ε が大きいほど、つまりせん断変形が大きい shear-elastic plate ほど補剛材を取付けることによる座屈係数の増加は小さく、せん断剛性比 ε の大きい shear-elastic plate に補剛材を取付けてもそれほど座屈係数の増大は期待できない。

図-11, 12は補剛材を取付けたときの座屈係数の上限値(図-5, 8において補剛材幅比を変化させたときの座屈係数曲線の最大値)を、いろいろなせん断剛性比の shear-elastic plate について示している。この場合の座屈係数はすべて“板”モデルにより得られたものであり、座屈係数の上限値は“はり”モデルから“板”モデルへ遷移した後に生じている。座屈モードはそれぞれの曲線の不連続点で変化する。なお、図-11, 12は対称補剛 ($\beta_{12}=1.0$) の場合であるが、片側補剛 ($\beta_{12}=0.0$) の場合も図-11, 12とほとんどかわらず、座屈係数は対称補剛に比べてわずかに小さいが、その差は1%に満たず、座屈モードは一致しているのでここでは省略する。

図-13, 14は形状比 a/b に対する座屈係数の変化を補剛材幅比 β をパラメータに示している。座屈モードが $m=1$ については、“はり”モデルによる解であり、 $m=2, 3, 4$ については、“板”モデルによる解となっている。

4. 結 言

本論文は一方向に等分布圧縮荷重を受け、荷重に垂直な2辺が単純支持され、他の2辺は任意の境界条件をもつ、補剛材を有する shear-elastic plate の座屈解析を行ったものである。座屈条件式は“はり”モデルについてと“板”モデルについて組み立てられる。得られた2つの座屈条件式を用いてそれぞれ解析を行い、最小値を座屈係数として採用した。数値例として、(1) 3辺単純支持、1辺自由の shear-elastic plate の自由縁に補剛材を配置した場合と、(2) 4辺単純支持の境界条件で、中央に補剛材を配置した場合について座屈係数を求めた。得られた結果を以下に要約する。

(1) 補剛材を有する shear-elastic plate の座屈係数は、補剛材幅が小さいところでは“はり”モデルより規定されるが、補剛材幅がある値に達すると“はり”モデルより“板”モデルに遷移し、以後“板”モデルにより規定される。

(2) 最も有効な補剛材幅は、“はり”モデルから“板”モデルへの遷移点の近傍である。

(3) せん断剛性比 ε の大きい shear-elastic plate に補剛材を取付けてもそれほど座屈係数の増大は期待できない。

本研究の解析は、2, 3の限られた数値例について行ったが、他の境界条件、補剛材の配置についても同様に解析を行うことができる。

なお、本研究の数値計算は徳山工業高等専門学校電算室 ACOS-4 を用いて行った。

【記 号】

- a : Shear-elastic plate の長さ
- b : Shear-elastic plate の板幅
- b_s : 補剛材幅
- b_{s1} : 補剛材上突出幅
- b_{s2} : 補剛材下突出幅
- C_M : 補剛材のそり抵抗
- D : Shear-elastic plate の曲げ剛性
- E : 補剛材の弾性係数
- $[F]$: 格間伝達マトリックス
- F_R : 補剛材断面積
- G : 補剛材のせん断弾性係数
- J_P : 補剛材の極慣性モーメント
- J_R : 補剛材の慣性モーメント
- J_T : St. Venant のねじり抵抗
- M_x, M_y, M_{xy} : 曲げモーメントおよびねじりモー

メント

\bar{M}_y, \bar{M}_{xy} : 式 (7) に基づく M_y, M_{xy} の y のみの関数

* $\bar{M}_y, * \bar{M}_{xy}$: 規準化された \bar{M}_y, \bar{M}_{xy}

m : 座屈モード

[P]: 格間伝達マトリックス

P_{xx} : 単位幅当りの圧縮力

Q, Q_{xy} : せん断力

\bar{Q}_y : 式 (7) に基づく Q_y の y のみの部分

* \bar{Q}_y : 規準化された \bar{Q}_y

[R]: 格点マトリックス

S : Shear-elastic plate のせん断剛性

t : Shear-elastic plate の板厚

t_s : 補剛材の板厚

[U]: 伝達マトリックス (式 (17))

W : 変位関数

\bar{W} : 式 (7) に基づく W の y のみの関数

w : Shear-elastic plate のたわみ

\bar{w} : 式 (7) に基づく w の y のみの関数

* \bar{w} : 規準化された \bar{w}

x, y, z : 直交座標系

{ Z }: 状態量ベクトル

β : 板幅補剛材幅比 ($\beta = b_s/b$)

β_{12} : 補剛板上下突出比 ($\beta_{12} = b_{s1}/b_{s2}$)

τ_{xz}, τ_{yz} : xz, yz 平面内のせん断ひずみ

δ : 板厚補剛材厚比 ($\delta = t_s/t$)

ϵ : Shear-elastic plate のせん断剛性比

$$\left(\epsilon = \frac{\pi^2}{b^2} \cdot \frac{D}{S} \right)$$

λ : 板厚幅比 ($\lambda = t/b$)

ν : ポアソン比

σ : 単位面積当りの圧縮力

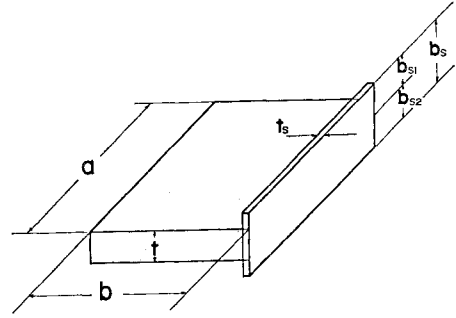
φ_x, φ_y : 曲げによるたわみ角成分

$\bar{\varphi}_x, \bar{\varphi}_y$: 式 (7) に基づく φ_x, φ_y の y のみの関数

* $\bar{\varphi}_x, * \bar{\varphi}_y$: 規準化された $\bar{\varphi}_x, \bar{\varphi}_y$

Ω : 応力関数

$\bar{\Omega}$: 式 (7) に基づく Ω の y のみの関数



図—15 断面諸量

参考文献

- 1) Timoshenko, G.: Theory of Elastic Stability, Mc-Graw Hill, 1961.
- 2) Schnell, W.: Zur Berechnung der Beulwerte von längsoder querversteiften Rechteckigenplatten unter Drücklast, ZAMM 2612, pp. 36~51, Jan, Febr, 1956.
- 3) Klöppel, K. und E. Schiedet: Beulwert der dreiseitig gelenkig gelagerten am freien Rand versteiften Rechteckplatten mit beliebig verteilter Randspannung, Der Stahlbau, pp. 372~379, 1968.12.
- 4) Seide, P.: Compressive Buckling of Sandwich Plates on Longitudinal Elastic Line Supports, AIAA paper, No. 74~408, pp. 1~5, April, 1974.
- 5) Wah, T.: Buckling of Longitudinally Stiffened Plates, The Aeronautical Quarterly, pp. 85~99, 1967. 2.
- 6) Wurmnest, W.: Zur Theory schubweicher Platten; Stabilität von Rechteckplatten, Dissertation Darmstadt, 1970.
- 7) Plantema, F.F.: Sandwichconstruction, John Willey & Sons, 1966.
- 8) Pestel, E.C. and F.A. Leckie: Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw Hill, 1963.
- 9) Köllbrunner, C.F. und M. Meister: Ausbeulen, Springer Verlag, 1958.
- 10) 見沢・大賀・原: 補剛材を有するせん断弾性板の座屈解析について, 愛媛大学紀要第 III 部 (工学) 第 9 巻第 1 号, 1978 年 2 月.
- 11) 原・重松・大賀: 弾性線支持上のサンドイッチ板の座屈解析について, 第 32 回土木学会年次学術講演会講演概要集, 昭和 52 年.
- 12) 見沢・重松・原: 補剛材のねじりを考慮した shear-elastic plate の座屈解析について, 第 33 回土木学会年次学術講演会講演概要集, 昭和 53 年.

(1979.3.9・受付)