

ZUR DRUCKMEMBRANWIRKUNG IN GERISSENEN STAHLBETONPLATTEN*

von Fumio FUJII**

ZUSAMMENFASSUNG

Seitlich unverschieblich gelagerte Stahlbetonplatten weisen im gerissenen Zustand größere Tragreserven auf als bei freien Seitenverschiebungen der Randquerschnitte. Diese Tragfähigkeit in gerissenen Stahlbetonplatten wird auf das Entstehen der Druckmembranwirkung zurückgeführt, die über die Kopplung zwischen dem Platten- und dem Membranzustand als Folge der Rißbildung geweckt wird. Der vorliegende Bericht beschreibt einen Lösungsweg zur wirklichkeitsnahen Berechnung gerissener Stahlbetonplatten mittels finiter Elemente. Die Aufklärung des Druckmembranzustandes steht dabei im Mittelpunkt. An numerischen Beispielen wird das Zustandekommen des starken Druckmembranzustandes nachgewiesen.

1. ALLGEMEINES

Der Beton hat gegenüber der Druckfestigkeit eine verhältnismäßig geringe Zugfestigkeit, und meistens befinden sich Stahlbetontragwerke schon unter der Gebrauchslast im gerissenen Zustand. Wegen der aufgerissenen Querschnittsflächen verändert sich die Steifigkeitsverteilung bereichsweise. Die Schnittkräfte lagern sich je nach dem tatsächlich vorhandenen Steifigkeitsverhältnis um. Nach dieser Schnittkräfteumlagerung weicht der wirkliche Beanspruchungszustand von der elastizitätstheoretischen Lösung für den ungerissenen Zustand mehr oder weniger ab.

Dabei erkennt man die günstige Tragwirkung statisch unbestimmter Stahlbetonkonstruktionen: Sie können die Schnittkräfte von stark beanspruchten Querschnitten in weniger beanspruchte verlagern und besitzen daher große Tragreserven. Um diese Tragreserven günstig

auszunutzen und damit zu einer Verringerung des Materialaufwandes zu kommen, sowie um die Gebrauchssicherheit richtig beurteilen zu können, besitzt die wirklichkeitsnahe Berechnung des Tragwerks im gerissenen Zustand für die Praxis entscheidende Bedeutung.

2. GERISSENE STAHLBETONPLATTEN

(1) Mechanischer Sachverhalt

Bei der Rißdarstellung der Stahlbetonflächen-tragwerke in Bild 1 verläßt man nach dem Auftreten des ersten Risses das kartesische Koordinatensystem (x, y) , in dem der ungerissene Zustand beschrieben wurde, und das rißbegleitende neue Koordinatensystem (I, II) wird definiert, dessen Koordinatenachsen mit den Hauptspannungsrichtungen übereinstimmen.

Bei der Betrachtung der Rißentwicklung in einem biegebeanspruchten Stahlbetonquerschnitt (Bild 2) erkennt man, daß die Schwerlinienlage

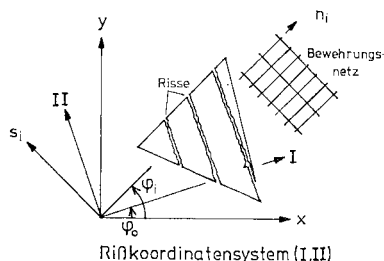


Bild 1 Rißrichtungen und (x, y) -System.

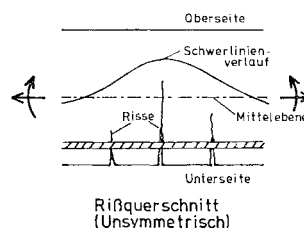


Bild 2 Betrachtung des gerissenen Querschnitts.

* Auszug aus einer Dissertation.

** Dr.-Ing. Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Statik der Universität Nagoya (Seit August 1979 an der Universität Gifu).

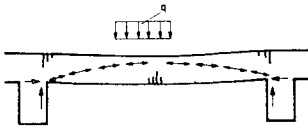


Bild 3 Gewölbewirkung in durchlaufenden Stahlbetonplatten nach der Rißbildung.

im Querschnitt nicht unverändert bleibt, sondern mit der Rißvertiefung sukzessive versetzt wird.

Folglich sind im gerissenen Stahlbetonquerschnitt wegen des unsymmetrischen Zustandes die Membran- und die Plattenwirkung miteinander gekoppelt.

In gerissenen Stahlbetonplatten bilden sich daher stets eine gewisse Membranwirkung aus. Sind bei der Stahlbetonplatte wie in Bild 3 die Randverschiebungen in horizontaler Richtung behindert, so wird ein besonders starker Druckmembranzustand (Gewölbewirkung oder Dome Action) neben dem Plattenzustand schon unterhalb der Gebrauchslast geweckt. Diese aktivierten Druckmembrankräfte bedeuten für die Bemessung eine erhebliche Verringerung der Bewehrungsmenge sowie gleichzeitig eine zunehmende Tragfähigkeit des Stahlbetontragwerks.

A. J. OCKLESTON¹⁰⁾ und K. P. CHRISTIANSEN¹¹⁾ schlagen Faustformeln zur Berechnung des Druckgewölbes vor. J. SCHLAICH¹²⁾ stellt sich die Aufgabe, das sich in Durchlaufplatten ausbildende Druckgewölbe theoretisch und experimentell zu untersuchen. Die Berechnung wird unter Zugrundelegung einer Modellvorstellung mit Hilfe der Energiemethode durchgeführt. Seine Theorie wird später bei der Beispielrechnung zum Vergleich herangezogen.

(2) Bisherige Untersuchungen

Im Gegensatz zur Berechnung gerissener Stahlbetonscheiben, für die sowohl im ungerissenen als auch im gerissenen Zustand stets eine Scheibenrechnung genügt, bereitet die wirklichkeitsnahe Darstellung des Rißzustandes bei Stahlbetonplatten Schwierigkeiten.

Wie man in Bild 4 sieht, handelt es sich hier um einen nicht nur über die Plattenfläche, sondern über die Plattendicke auch veränderlichen Systemzustand. Bisher bieten sich in der Literatur zur Berechnung dieser komplexen Plattenaufgabe die folgenden Lösungswege an:

Schichtenmodell (Layered Element) in Bild 5
W. S. PETERSON/C. N. KOSTEM/J. M. KULICKI¹⁵⁾, F. R. HAND/D. A. PECKNOLD/W. C. SCHNOBRICH¹⁶⁾, C. S. LIN¹⁸⁾, J. GRÜNBERG¹²⁾, DARMSTÄDTER ARBEITSGRUPPE¹⁴⁾ etc.

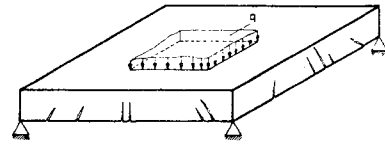


Bild 4 Gerissene Stahlbetonplatte (Zustand II).

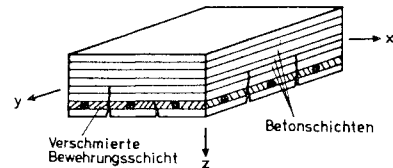


Bild 5 Geschichtetes Modell zur Rißdarstellung.

Ersatzsteifigkeitsmethode (Modified EI-Approach)

R. WEGNER⁸⁾, J. C. JOFRIET/G. M. MCNEICE⁹⁾ etc.

Beim Schichtenmodell in Bild 5 wird das finite Element zur Rißbeschreibung über die Plattendicke in mehrere übereinander liegende Schichten diskretisiert. Die in den Plattenquerschnitt hineinreichenden Risse können in dieser Weise gut erfaßt werden. Mit einem geschichteten Schalenmodell kann zwar der gekoppelte Scheiben-Platten-Zustand formuliert werden, dieses Berechnungsverfahren ist jedoch für praktische Anwendung viel zu aufwendig, denn die numerische Integration muß auch über die Plattendicke erfolgen.

F. R. HAND / D. A. PECKNOLD / W. C. SCHNOBRICH¹⁶⁾ legen dar, daß die Kopplung des Biege- und des Membranzustandes in gerissenen Stahlbetonplatten nicht vernachlässigt werden darf. J. GRÜNBERG stellt in 12) fest, daß sich im gerissenen Zustand die mitwirkende Plattenbreite der Gurtplatten von Plattenbalken schon unter der Gebrauchslast verringert.

In der Ersatzsteifigkeitsmethode wird der nichtlineare Momenten-Krümmungs-Zusammenhang des gesamten Querschnitts aus Stahlbeton mit Näherungsansätzen beschrieben. Der Vorteil dieses Lösungsweges besteht darin, daß der Rechenvorgang leicht programmierbar und nicht aufwendig ist. Die zur Plattenmittelfläche unsymmetrische Steifigkeitsverteilung, damit die Kopplungswirkung der Membran- und der Plattentragfähigkeit, kann jedoch durch einen solchen Ansatz allein nicht repräsentiert werden.

R. WEGNER⁶⁾ befaßt sich vor allem mit dem Momentenverlauf in gerissenen Stahlbetonplatten und zeigt, daß in durch Einzellasten belasteten

bzw. punktgestützten Stahlbetonplatten die Momentenspitzen bei Berücksichtigung der Ribbildung erheblich abgebaut werden.

3. AUFGABENSTELLUNG UND VORAUSSETZUNGEN

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, mit der Methode der finiten Elemente eine Variante der Lösungsmöglichkeit zur Berechnung von Stahlbetonplatten im gerissenen Zustand zu beschreiben. Es wird zur Berechnung des nichtlinearen Materialverhaltens ein vereinfachtes numerisches Gedankenmodell entwickelt. Der Darstellung der Theorie liegt eine Dissertationschrift²⁾ zugrunde, die am Institut für Baustatik (Direktor; Prof. F. W. Bornscheuer) der Universität Stuttgart entstand. Im Mittelpunkt der Rechnung steht hier der Druckmembranzustand unterhalb der Gebrauchslast, dessen Ausnutzung für die Praxis sinnvoll ist.

Dem vorliegenden Beitrag liegt die folgende Grundüberlegung zugrunde: Für die wirklichkeitsnahe Berechnung von Stahlbetontragwerken sind die derzeitigen Kenntnisse über das Materialverhalten des Stahlbetons bei mehrachsiger Beanspruchung noch nicht ausreichend. Nicht zu vergessen ist ferner die im Stahlbetonbau übliche Streuung der Materialeigenschaften. Auch wenn man höhere Ansätze für das Materialverhalten des Stahlbetons der nichtlinearen Rechnung zugrunde legt, steht dem erheblichen Rechenaufwand nur eine verhältnismäßig geringe Genauigkeitssteigerung gegenüber. Der Versuch, komplexere und mikroskopische Hypothesen in der Berechnung einzuführen, wird daher durch diese streuenden Materialeigenschaften und durch die allgemein übliche Makro-Idealisierung für die Risse (Verschmierung der Risse) manchmal vereitelt.

Da es sich im vorhandenen Beitrag darum handelt, ein nicht aufwendiges und praktisch genügend anwendbares Berechnungsverfahren zu entwickeln, werden hinsichtlich des Materialverhaltens die folgenden Annahmen getroffen:

a) Ribbildung des Betons

Der Beton verhält sich im Druck- sowie im Zugbereich linear elastisch. Die Ribbildung wird definiert, wenn die Zugspannung die Betonzugfestigkeit β_z erreicht. Nach der Ribbildung reißt der Betonquerschnitt auf und wird das Ribufer spannungsfrei, so daß die Betonzugspannungen aufgelöst werden.

b) Bewehrung

Für die Bewehrungseinlagen wird das linear elastische und ideal plastische Materialgesetz angenommen. In den plastizierten

Bewehrungsstäben ist damit stets die Fließspannung σ_f vorhanden. Die Berücksichtigung der plastischen Bewehrung ist notwendig, zumal die schwache Bewehrung z.B. im eingespannten Randquerschnitt wegen der großen negativen Biegemomente eventuell schon im Gebrauchszustand *numerisch* fließen kann.

- c) Verbundverhalten und Schubübertragung
Es wird idealer Verbund zwischen Beton und Stahl vorausgesetzt. Für die Schubaufnahme-fähigkeit ist nur das Bewehrungsnetz verantwortlich (Verdübelung), während der gerissene Beton keine Schubspannung überträgt.

4. THEORIE

(1) Materialgesetz

Für die Darstellung des Ribzustandes stehen bisher die in Abschnitt 2-2 geschilderten numerischen Materialmodelle zur Verfügung. Es wird auch hier ein Ribmodell entwickelt, das der wirklichkeitsnahen Berechnung gerissener Stahlbetonplatten zugrunde gelegt werden soll.

Bild 6 zeigt gerissene Plattenquerschnitte und veranschaulicht eine statische Analogie zur konstruktiv orthotropen Platte mit exzentrischen Rippen. Die Analogie besteht darin, daß die Schwerlinien der Querschnitte nicht mehr miteinander zusammenfallen, so daß sich für die beiden Richtungen der Plattensysteme keine neutrale Ebene mehr findet. Das veränderte Steifigkeitsverhältnis (orthotrop) *und* die Verlagerung der Nulllinien (exzentrisch versteift) bewirken so ein statisch ähnliches Tragverhalten der beiden dargestellten Plattensysteme.

Der Unterschied zwischen den beiden Plattensystemen in Bild 6 besteht aber darin, daß der Querschnittszustand und die Hauptachsen der Orthotropie bei Stahlbetonplatten mit der Laststeigerung und über die Plattenfläche veränderlich sind, während beim gerippten Plattensystem im Stahlbau der Querschnitt und die Richtung von Rippen im ganzen Plattenbereich unverändert bleiben.

Die dargestellte Plattenanalogie in Bild 6 ist also die Modellvorstellung für die gerissenen Stahlbetonplatten. Es wird damit ein Ersatzplattensystem mit dem veränderlichen Gliederungen wiederholt berechnet, indem man den Plattenquerschnitt bei der Ribentwicklung sukzessiv durch das Materialmodell in Bild 6 ersetzt.

Die gerissene Stahlbetonplatte weist bereichsweise sehr unterschiedliche Ribquerschnitte. Zugelassen sind in der FEM-Rechnung die in

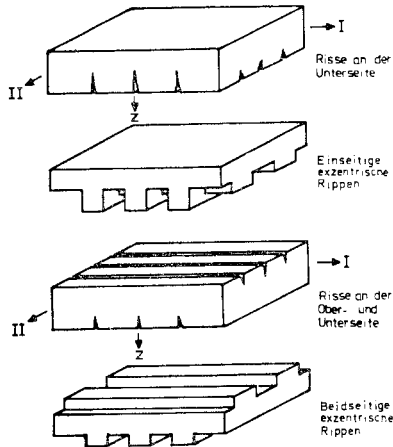


Bild 6 Plattenanalogie (Modellvorstellung in der vorliegenden Arbeit).

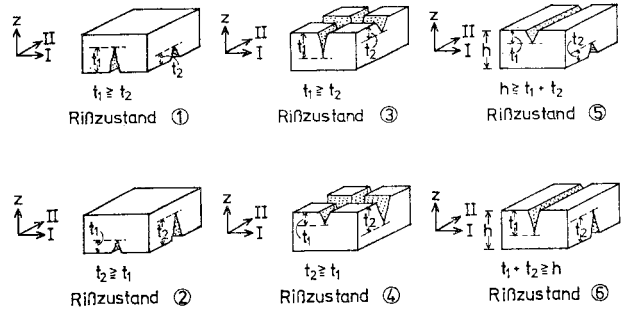


Bild 7 Sechs Mögliche Rißzustände ① bis ⑥.

Bild 7 dargestellten sechs Rißzustände ① bis ⑥ für die einzelnen Elementbereiche.

Eingeführt werden hierbei die einfachen Querschnittsparameter t_1 und t_2 , die als Rißtiefe (Crack Depth) bezeichnet werden. Im ungerissenen Zustand sind z. B. diese zwei Parameter Null, und mit der in die Druckzone hineinreichenden Rißvertiefung wachsen sie an. Zusätzlich wird noch angenommen, daß das Rißufer eben und senkrecht zur Plattenmittelfläche ist.

Bild 8 zeigt die Diskretisierung der Rißquerschnitte ③ und ⑤ über die Plattendicke als Beispiele.

Die konstitutiven Gleichungen für den so idealisierten Rißquerschnitt ergeben sich dann, wenn man das Materialverhalten der einzelnen Querschnittselemente B_{iso} , B_I , B_{II} und B_o in Bild 8 über die Plattendicke integriert, und

lautet im Rißkoordinatensystem (I, II) in gemischter Darstellung

$$\begin{pmatrix} \bar{N} \\ \bar{\Phi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{mm} & D_{mb} \\ D_{mb} & -D_{bb} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\epsilon} \\ \bar{M} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (1)$$

wobei

- \bar{N} : Scheibenkräfte
- \bar{M} : Auf die Mittelfläche bezogene Momente
- $\bar{\epsilon}$: Verzerrungen der Mittelfläche
- $\bar{\Phi}$: Krümmungen
- D_{mm} : Dehnsteifigkeiten
- D_{bb} : Biegeflexibilitäten
- D_{mb} : Kopplungsmatrix
- D_{bm} : Kopplungsmatrix

Die Herleitung dieses Querschnittsstoffgesetzes ist ausführlich in²⁾ erläutert. Die Untermatrizen D_{mm} , D_{mb} , D_{bm} und D_{bb} in (1) enthalten die über den Elementbereich oder über die ganze Platte verschmierte Bewehrungsanordnung und sind von dem Rißzustand abhängig, so daß das Querschnittsstoffgesetz (1) bei den aufeinander auftretenden Rissen veränderlich (nichtlinear) ist. Weitere Erörterungen hierzu in 2).

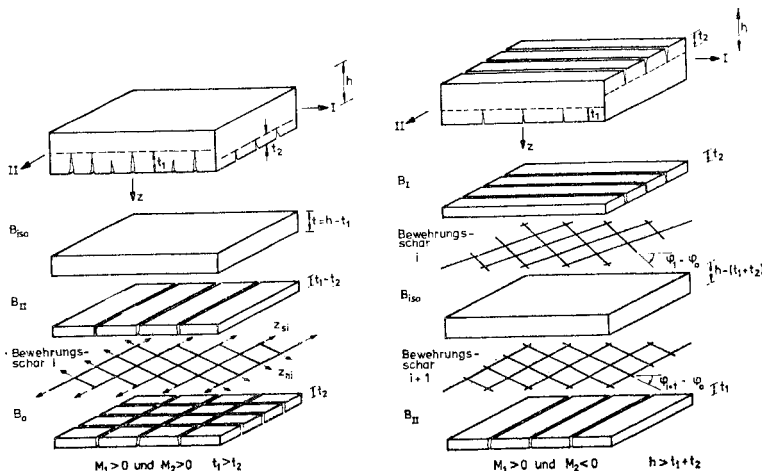


Bild 8 Diskretisierung der Rißzustände ③ und ⑤ über die Plattendicke.

(2) Gemischtes Schalenmodell

Zur praktischen Berechnung wird im Rahmen dieser Arbeit das gemischte Schalenmodell nach HERRMANN⁵⁾ gewählt, das sich zur nichtlinearen Berechnung als besonders geeignet erweist, siehe hierzu z.B.^{1),2),6)}.

Das gewählte nicht gekrümmte Schalenelement setzt sich aus dem sogenannten CST-Scheibenelement (Constant Strain Triangular) mit den Ansatzfunktionen

$$u = c_1 + c_2\xi + c_3\eta \dots\dots\dots(2)$$

$$v = c_4 + c_5\xi + c_6\eta \dots\dots\dots(3)$$

für die Scheibenverschiebungen u und v und dem gemischten Plattenelement mit den Ansätzen

$$M_{\xi,\eta} = \begin{Bmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ M_{\xi\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_7 \\ c_8 \\ c_9 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(4)$$

für die Momente ($M_\xi, M_\eta, M_{\xi\eta}$) sowie

$$w = c_{10} + c_{11}\xi + c_{12}\eta \dots\dots\dots(5)$$

für die Biegefläche w zusammen. In (2) bis (5) sind c_1 bis c_{12} die Ansatzparameter und (ξ, η) die Koordinaten im Reißkoordinatensystem (I, II).

Die konstanten Momente (4) werden mit der Momententransformation

$$M_n = S M_{\xi,\eta} \dots\dots\dots(6)$$

auf die Kantenmomente (Knotenfreiheitsgrade)

$$M_n = \begin{Bmatrix} M_{n4} \\ M_{n5} \\ M_{n6} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(7)$$

transformiert (siehe Bild 9). Insgesamt besitzt das finite Schalenelement 12 Knotenparameter, wie das Bild 9 zeigt.

Setzt man das integrierte Materialgesetz (1) in den dem gemischten Modell zugrunde liegenden Funktionalausdruck³⁾ ein, so ergibt die erste Variation des Funktionals nach den freien Knotenparametern die gemischte Elementmatrix im (I, II)-Reißkoordinatensystem, diese Elementmatrix schreibt sich nach der Transformation vom elementweise veränderlichen

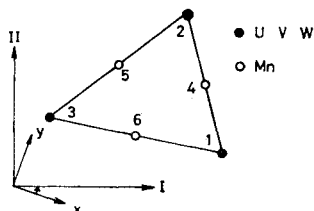


Bild 9 HERRMANNsches gemischtes Schalenmodell in 5).

(I, II)-Koordinatensystem aufs gemeinsame (x, y) -System zu;

$$\begin{bmatrix} uv & M_n & w \\ T^T K_{mm} T & \Delta T^T B^T D_{mb} S^{-1} & 0 \\ \Delta(S^{-1})^T D_{bm} B T & -G & -H^T \\ 0 & -H & 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(8)$$

wobei

u, v, w : Knotenverschiebungen an den Eckknoten (1, 2, 3)

M_n : Kantenmomente an den Kantenknoten (4, 5, 6)

T : Transformationsmatrix

K_{mm} : Scheibensteifigkeitsmatrix (siehe Gl. (9))

B : Verknüpfungsmatrix zwischen den Knotenverschiebungen und den Verzerrungen im (I, II)-System

G : Plattennachgiebigkeitsmatrix (siehe Gl. (10))

H : Nur von der Elementgeometrie abhängige Matrix (siehe Gl. (11))

S : Matrix für die Momententransformation (siehe Gl. (6))

Δ : Elementfläche

q : Querlasten an den Eckknoten

$$K_{mm} = \Delta B^T D_{mm} B \dots\dots\dots(9)$$

$$G = \Delta(S^{-1})^T D_{bb} S^{-1} \dots\dots\dots(10)$$

$$H = FCS^{-1} \dots\dots\dots(11)$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(12)$$

C ; Siehe Gl. (14)

Der Plattenanteil in (8) bleibt von der Koordinatentransformation in der Plattenebene unberührt. Für die einzelnen Matrixdarstellungen sei auf²⁾ verwiesen.

In der gemischten Elementmatrix (8) stellen die letzten drei Zeilen

$$-H M_n = q \dots\dots\dots(13)$$

die Gleichgewichtsbedingungen dar; da der konstante Momentenzustand keine Querkräfte ergeben kann, werden die Querlasten an den Eckknoten nur durch die von den Randdrillmomenten

$$M_{ns} = C M_{\xi,\eta} \dots\dots\dots(14)$$

$$= CS^{-1} M_n \text{ (aus (6))} \dots\dots\dots(15)$$

erzeugten Kräftepaare

$$FM_{ns} = FCS^{-1}M_n \dots\dots\dots(16)$$

$$= HM_n \dots\dots\dots(17)$$

getragen.

Wie die Ansätze (4) und (5) zeigen, verlaufen die Kantenmomente M_n und die Durchbiegung w an den Elementrändern zwischen den Nachelementen kontinuierlich, während nur noch die Verträglichkeitsbedingungen für die Neigungswinkel w_n längs der Elementkanten zu erfüllen sind. w_n errechnet man mit der Integration der konstanten Krümmungen (d.h. konstante Momente)

$$\Delta(S^{-1})^T \bar{\varphi} = \Delta(S^{-1})^T \left[D_{bm} B T \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} - D_{bb} S^{-1} M_n \right] \dots(18)$$

und aus der Differentiation des Ansatzes (5) für w

$$-(S^{-1})^T C^T F^T w \dots\dots\dots(19)$$

Hiernach versteht man unter

$$\Delta(S^{-1})^T D_{bm} B T \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} - G M_n - H^T w = 0 \dots\dots(20)$$

die Verträglichkeitsbedingungen für die Neigungswinkel w_n . Die weiteren Erläuterungen in 2). Die Systemmatrix wird aus den Elementmatrizen aufgebaut, indem man alle Knoten numeriert und nach dem Inzidentafel die Elementmatrizen einfach überlagert.

(3) Berechnungsablauf

Der Berechnungsablauf wird anhand des Flußdiagramms in Bild 10 erläutert.

Der Ausgangszustand der nichtlinearen Berechnung ist der ungerissene Zustand, für den $t_1 = t_2 = 0$ gilt a). Die Querlast wird um ein Inkrement gesteigert b). Da die Querschnittsparameter für den augenblicklichen Systemzustand schon bekannt sind c), können das Querschnittsstoffgesetz (1), die Elementmatrix (8) und das Gleichungssystem ohne weiteres ermittelt werden d)–e)–f). Die Randbedingungen werden eingearbeitet und das Gleichungssystem f) aufgelöst. Die Nachlaufrechnung g) zur Berechnung der Zustandsgrößen erfolgt mit den Lösungen u, v, M_n und w .

Dann kommt eine in der Rißuntersuchung sehr wichtige Abfrage h): Der Spannungszustand in Beton sowie in der Bewehrungsschar i muß für jeden Elementbereich überprüft werden, um abzufragen, ob die Spannungsbedingungen

$$\sigma_b \text{ (Betonspannung)} < \beta_z \text{ (Betonzugfestigkeit)} \dots\dots\dots(21)$$

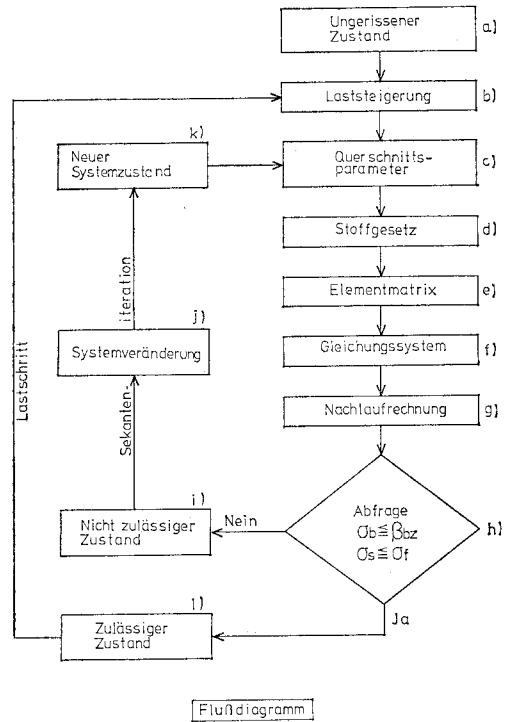


Bild 10 Berechnungsablauf.

$$\sigma_s \text{ (Stahlspannung)} < \sigma_f \text{ (Fließspannung)} \dots\dots\dots(22)$$

erfüllt sind, wobei sich σ_b und σ_s wie folgt berechnen lassen.

Für die Rißkontrolle (21) genügt es, nur die Betonspannungen σ_I im I-Querschnitt und σ_{II} im II-Querschnitt zu betrachten ($\sigma_b = \sigma_I$ oder σ_{II}).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \tau_{I II} \end{Bmatrix} = E_b / (1 - \nu^2) \begin{bmatrix} 0 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu) / 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_I \\ \epsilon_{II} \\ \gamma_{I II} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(23)$$

für

$$\sigma_I \text{ ①, } \sigma_{II} \text{ ②, } \sigma_I \text{ ③, } \sigma_{II} \text{ ④} \\ \sigma_I \text{ ⑤ und } \sigma_{II} \text{ ⑤}$$

oder

$$\begin{Bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \tau_{I II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_b / 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_I \\ \epsilon_{II} \\ \gamma_{I II} \end{Bmatrix} \dots\dots(24)$$

für σ_I ②, σ_I ④ und σ_I ⑥

oder

$$\begin{pmatrix} \sigma_{I1} \\ \sigma_{II1} \\ \tau_{I1II1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_b & 0 \\ 0 & 0 & E_b/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{I1} \\ \epsilon_{II1} \\ \gamma_{I1II1} \end{pmatrix} \dots\dots(25)$$

für σ_{II1} ①, σ_{II1} ③ und σ_{II1} ⑥.

mit

E_b : E-Modul des Betons, ν : Querdehnungszahl des Betons

und

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{I1} \\ \epsilon_{II1} \\ \gamma_{I1II1} \end{pmatrix} = \bar{\epsilon} + e\bar{\Phi} \dots\dots\dots(26)$$

In diesem Ausdruck ist e die z -Koordinate der betrachteten Höhe.

Für die Fließkontrolle (22) betrachtet man die Bewehrungsschar i , deren Richtungen mit (n_i, s_i) bezeichnet sind (Bild 1), und kontrolliert man die Stahlspannungen σ_{ni} und σ_{si} ($\sigma_s = \sigma_{ni}$ oder σ_{si}).

$$\begin{pmatrix} \sigma_{ni} \\ \sigma_{si} \\ \tau_{nsi} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{ni} \\ \epsilon_{si} \\ \gamma_{nsi} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(27)$$

mit

E_s ; E-modul des Bewehrungsmaterials

$(\epsilon_{ni}, \epsilon_{si}, \gamma_{nsi})$ werden mit den aufs (n_i, s_i) -System transformierten Verzerrungen $\bar{\epsilon}_i$ und Krümmungen $\bar{\Phi}_i$ der Bezugsfläche sowie mit dem Abstand der Bewehrung von der Bezugsfläche e_i nach (26) berechnet.

Wenn die Spannungskontrolle zeigt, daß die Materialfestigkeiten β_z und σ_f nicht überschritten sind, so ist der Systemzustand unter der vorhandenen Lasthöhe ein zulässiger Zustand l). Die Last kann deshalb weiter gesteigert werden (Rücksprung zu b)).

Bei den verletzten Spannungsbedingungen (21) und (22) treten aber Risse auf und fließt die Bewehrung, d. h. der solche Systemzustand ist nicht mehr zulässig i), so daß eine Systemmodifikation j) eingeführt werden muß. In der numerischen Rechnung wird die Annahme gemacht, daß sich die Risse nach dem Erreichen der Betonzugfestigkeit bis zur Nulllinie im Querschnitt ausbilden, was einer Zunahme der Rißtiefe t_1 und t_2 entspricht. Damit wird ein neuer Systemzustand definiert k). Mit den veränderten Querschnittsparametern c) muß der neue Zustand nochmal berechnet werden. Die Last bleibt aber dabei unverändert. Diese beschriebene Sekanteniteration, die in 16) als "Incremental Variable Elasticity" bezeichnet wurde, wird nun so weit wiederholt, bis die Spannungskriterien (21) und (22) erfüllt werden. Wird ein zulässiger Zustand erreicht, dann kann die Last wieder

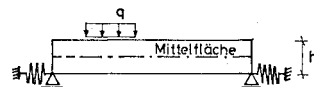
erhöht werden.

Der Iterationsweg c)-d)-e)-f)-g)-h)-i)-j)-k)-c) innerhalb eines Lastschritts stellt die für jedes Lastinkrement mögliche sukzessive Rißentwicklung dar. Das Konvergenzverhalten dieser iterativen Rechnung hängt deshalb damit zusammen, ob ein rißstabiler Zustand schnell erreichbar ist oder nicht. Bei der schlagartigen Rißbildung im schwach bewehrten Stahlbeton treten z. B. zumeist Konvergenzschwierigkeiten auf. Das Vorhandensein der Druckmembranwirkung bewirkt umgekehrt eine mechanische Dämpfung für die Rißentwicklung und hat daher ein gutes Konvergenzverhalten zur Folge 1), 2). Einige numerische Probleme bei der nichtlinearen Berechnung am Stahlbeton sind beispielsweise in 1) und 9) mitgeteilt.

5. RECHENERGEBNISSE

Für die geschilderte Berechnungstheorie wurde ein FORTRAN-IV-Programm erstellt. Die Rechenbeispiele wurden mit den Rechnern CYBER 174 und CD 6600 des Rechenzentrums der Universität Stuttgart berechnet. Im folgenden wird aus Platzgründen nur ein Teilergebnis der berechneten Beispiele mitgeteilt. In 17) ist das andere Beispiel enthalten.

An Rechteckplatten wird eine Parameteruntersuchung über den Druckmembranzustand in gerissenen Stahlbetonplatten durchgeführt. Als Vergleichslösung steht hierfür die Theorie von J. SCHLAICH⁴⁾ zur Verfügung, der das Tragmodell in Bild 11 zugrunde liegt. Bei dem Ersatzmodell von J. SCHLAICH kommt eine Membranwirkung wegen der Rotation der Randquerschnitte und der exzentrischen Dehnfedern zustande. Die Rißbildung im randnahen Bereich ist auf dieser Weise durch die Auflagerbedingungen darstellbar, die Risse im Platteninnenfeld sind jedoch ausgeschlossen, weil das rechnerische Modell nur einen linearen, elastischen und homogenen Zustand voraussetzt.

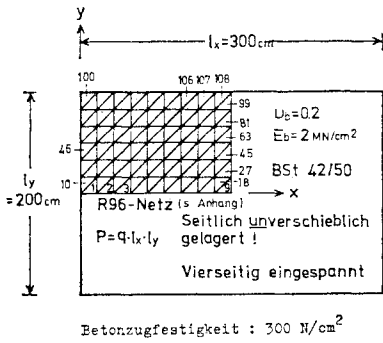


Linear-elastisches und homogenes Ersatzmodell [4]

Bild 11 Ersatzmodell in 4).

(1) Grundsystem

In Anlehnung an das Beispiel in 4) (Abschnitt II. 7) wird das in Bild 12 skizzierte Plattensystem als Grundsystem zur Parameteruntersuchung gewählt. Die Bewehrungsstäbe werden über die



Betonzugfestigkeit : 300 N/cm²

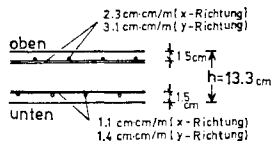


Bild 12 Grundsystem zur Parameteruntersuchung.

ganze Platte konstant verschmiert betrachtet. Die Betonzugfestigkeit β_z wird beim Grundsystem zu $\beta_z = 300 \text{ N/cm}^2$ gesetzt, und die Platte nicht federnd, sondern seitlich unverschieblich gelagert.

Die Bilder 13 bis 19 beschreiben das Tragverhalten des Grundsystems.

Die ersten Risse werden, wie bereits die reine Plattendtheorie vermuten läßt, bei $P=184 \text{ kN}$ (elastische Lösung 175 kN mit der Querdehnungszahl $\nu=0.0$) in der Mitte der längeren eingespannten Plattenränder beobachtet (Bild 13). Bis etwa 300 kN entwickeln sich die Risse an der Oberseite langsam randparallel. Das Reißbild der Oberseite für $P=500 \text{ kN}$ ist dem Reißzustand vergleichbar, der in 4) von vornherein vorausgesetzt wird. Es treten allerdings schon die Risse an der Unterseite auf, lange bevor alle eingespannten Ränder rundum gerissen sind. SCHLAICH nimmt an, daß die Druckmembranwirkung unmittelbar nach dem Auftreten der oberen Risse entlang der Ränder einsetzt. Die vollständige obere Reißbildung an den Plattenrändern ist aber ohne untere Risse nicht möglich. Nachdem auch an der Unterseite Risse auftreten, trägt fast im ganzen Plattenbereich die lediglich von den unendlich steifen Dehnfedern gestützte Druckmembran.

In der Rechnung sind zwei Phasen der Membranwirkung erkennbar. Die erste Membranwirkung entsteht mit der Reißbildung an der Oberseite und klingt zur Innenseite hin ab (s. Bild 15 und Bild 16). Die andere tritt gleichzeitig mit dem

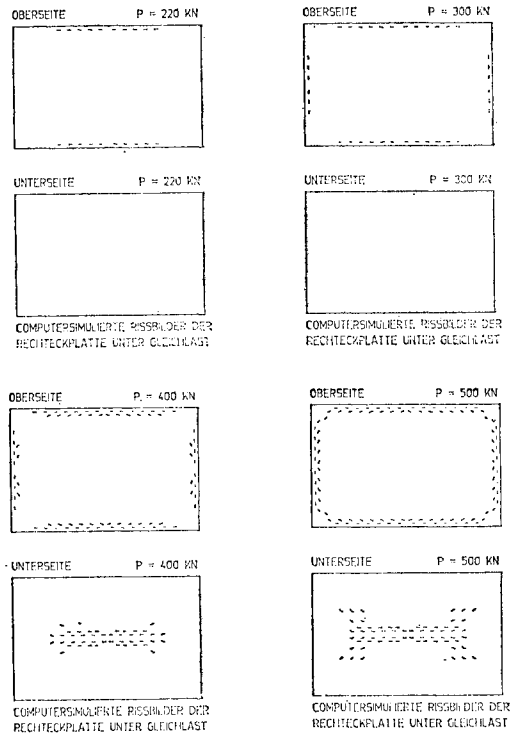


Bild 13 Computersimulierte Reißbilder (Plotterprogramm verwendet).

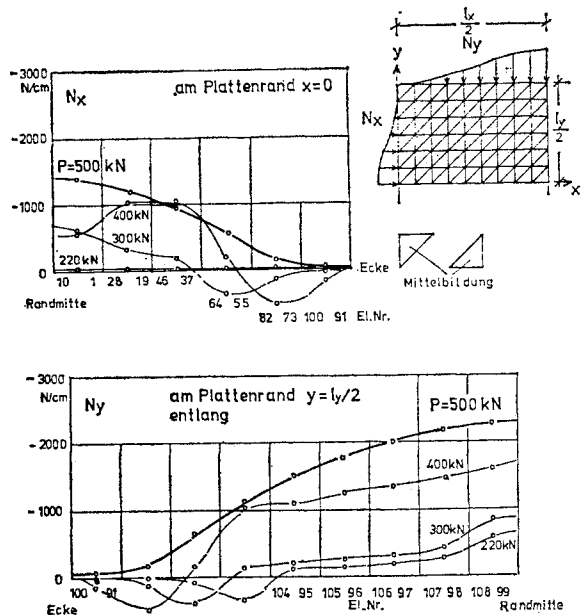


Bild 14 Normalkräfte am Plattenrand (Grundsystem).

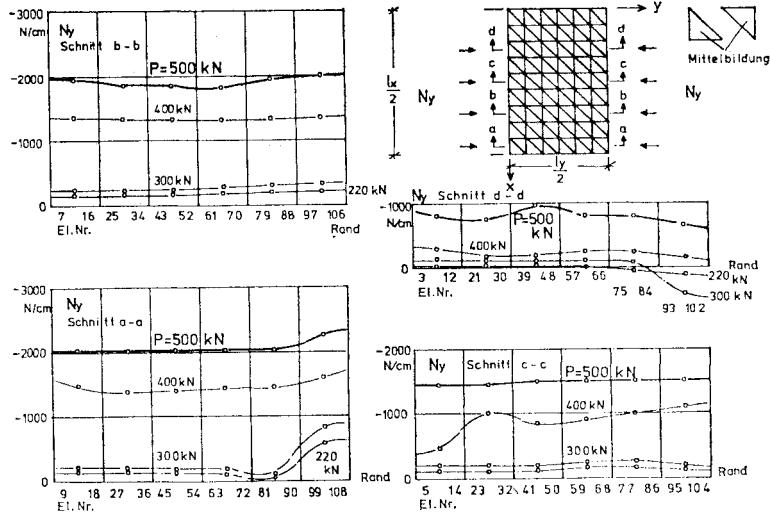


Bild 15 N_y -Verlauf (Grundsystem).

Verlagern der Schwerlinien im Innenbereich ein, so daß sich in dem stabilisierten Rizustand die Effekte der oberen und unteren Risse überdecken.

Zum Zustandekommen der Druckmembran sind die Randfedern nicht durchaus erforderlich; bei einer gelenkig gelagerten Stahlbetonplatte treten die Risse an der unteren Plattenseite auf und folglich bildet sich die gewisse Druckmembranwirkung ohnehin aus. Selbst wenn die seitlichen Randverschiebungen der Platte nicht behindert sind, werden diese Druckmembrankrfte z.B. bei einer Quadratplatte durch einen Zugang in der Nähe der membranfreien Ränder so gestützt, daß die Membrankräfte in der gerissenen Stahlbetonplatte für sich in Gleichgewicht sind.

Aus der Rechnung mit $P=500$ kN ergeben sich die folgenden Mittelwerte für N_x und N_y in den Hauptachsen ($y=0$, $x=l_x/2$).

	FEM	4)	FEM/4)
N_x	-962	-1750	55%
N_y	-2070.0	-3100	67%

Die Differenz in den Werten wird darauf zurückgeführt, daß in 4) die für das Entstehen des Druckgewlbes günstigen Annahmen (die Randquerschnitte sind unbewehrt und durchgerissen $t_2=h$) getroffen werden, während das Rechenmodell der FEM-Rechnung biegesteif gelagert wird (größere Biegetragfähigkeit).

In Bild 14 ist der gesamte Verlauf der normal zum Plattenrand wirkenden Membrankräfte dargestellt. Die Verteilung dieser Federkräfte weicht von der SCHLAICHschen Lösung besonders im ecknahen Bereich ab; der Ansatz mit Sinus-

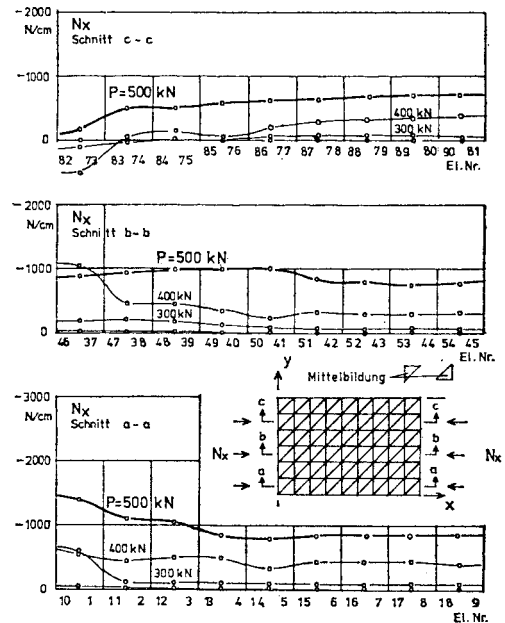


Bild 16 N_x -Verlauf (Grundsystem).

Reihen in 4) führt zu zu großen Werten. Das Ersatzmodell in Bild 11 nimmt ferner ideale Risse bis zu den Ecken an. Die FEM-Rechnung ergibt aber, daß sich die oberen Risse an den benachbarten Plattenseiten bogenförmig zusammenschließen.

Die Bilder 15 und 16 zeigen, daß die Normalkräfte in Quer- und Längsrichtung nach dem Auftreten der unteren Risse fast gleichmäßig verlaufen.

Im Innenbereich der Platte sind die Steifigkeitswerte im y -Querschnitt kleiner als im x -Quer-

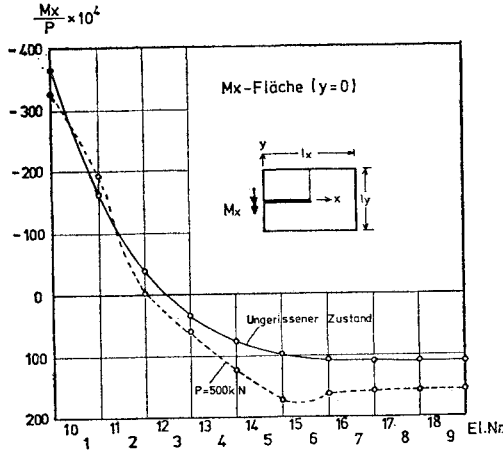


Bild 17 Momentenbild für $M_x(y=0)$ des Grundsystems.

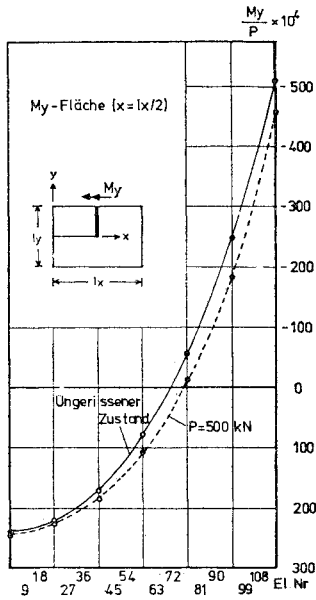


Bild 18 Momentenbild für $M_y(x=lx/2)$ des Grundsystems.

schnitt. Die Momentenbilder in Bild 17 und Bild 18 zeigen, daß die Plattenmomente von den steiferen Plattenquerschnitten in der längeren Spannrichtung angezogen werden. Dasselbe bestätigt auch R. WEGNER⁶⁾ an einer gelenkig gelagerten Rechteckplatte mit dem gleichen Seitenverhältnis. Ein beachtlicher Momentenabbau in der kürzeren Spannweite, in deren Richtung das Druckgewölbe stärker abgestützt wird, wird aber hier nicht festgestellt, wie Bild 18 zeigt. Dieser unveränderte Momentenverlauf läßt sich dadurch erklären, daß der auf die Mittelfläche bezogene Momentenzustand den Mem-

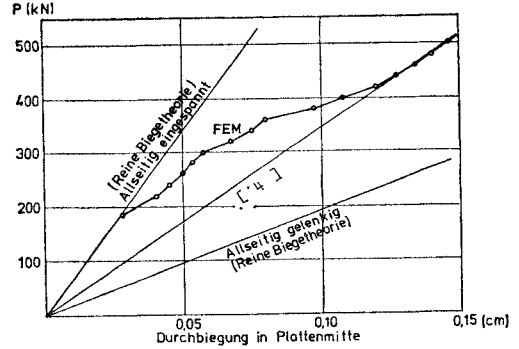


Bild 19 Last-Durchbiegungs-Diagramm des Grundsystems.

brananteil (Normalkräfte multipliziert mit dem Hebelarm) enthält. Zwar verringert sich der schwer darstellbare reine Biegezustand (bezogen auf die eigene Schwerlinie im jeweiligen Querschnitt), aber der Momentenzustand der Mittelfläche bleibt wegen der großen außermittig wirkenden Normalkräfte unverändert.

In Bild 19 ist der nichtlineare Verlauf des Last-Mittendurchbiegungs-Diagramms aufgetragen. Nach der Rißstabilisierung schmiegt sich die berechnete Kurve an die gerade Linie an, die sich genau mit der Lösung in 4) deckt. Diese gute überraschende Übereinstimmung rührt davon her, daß die zunehmenden Nachgiebigkeiten im Innenbereich und das Tragsystem versteifender Effekte (starre Einspannung) bei dem FEM-Modell mit dem steiferen Innenbereich (keine Risse im Innenbereich) und dem weicheren Randbereich beim SCHLAICHschen Modell zufällig ausgeglichen werden.

Es läßt sich allgemein sagen, daß sich die Stahlbetonplatte bei der Rißbildung durch den Schwerlinienversatz zu einem Schalentragwerk hin verändert und die Querlasten zusätzlich noch über die Schalenwirkung abträgt.

(2) Variation der Parameter

Im folgenden wird vom oben untersuchten Ausgangssystem ausgehend jeweils nur eine Variable verändert, während die übrigen Parameter die Werte des Ausgangssystems beibehalten. Die Aufgabe der Parameteruntersuchung besteht darin, die Abhängigkeit des Membranzustandes von den verschiedenen Faktoren zu finden. In 4) wird mitgeteilt, daß der E-Modul und die Querdehnungszahl des Betons für den Membranzustand von untergeordneter Bedeutung sind. Diese Parameter werden deswegen in den folgenden Rechnungen nicht verändert. Verändert werden in diesem Bericht nur die Platten-schlankheit ly/h und die Aussteifung gegen

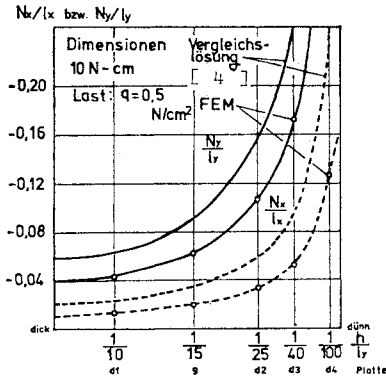


Bild 20 Variation der Plattenschlankheit.

horizontale Randverschiebungen.

a) Plattenschlankheit

Die Plattenschlankheit wird so variiert, daß das Seitenverhältnis $ly/lx = 2/3$ unverändert bleibt. In Bild 20 sind die Ergebnisse für die folgenden fünf Platten dargestellt.

Platte	lx	ly	ly/h
d1	200	133	10
g	300	200	15
d2	500	333	25
d3	800	633	40
d4	2 000	1 333	100

(Dimension cm)

Aufgetragen sind in Bild 20 die bezogenen Normalkräfte

$$N_x/lx \text{ entlang } y=0$$

$$N_y/ly \text{ entlang } x=lx/2$$

in Abhängigkeit vom Verhältnis (Plattendicke/kürzere Stützweite).

Die Querlasten werden zunächst monoton gesteigert, bis sich die Rißdurchsetzung stabilisiert. Der errechnete Systemzustand wird dann durch die Gleichlast $q=0.5 \text{ N/cm}^2$ belastet. Diese Lasthöhe wird aus der anderen Parameterstudie in 4) entnommen, um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten.

Die auf die Seitenlänge bezogenen Gewölbekräfte sind stark von der Plattenschlankheit abhängig. Nimmt die Schlankheit zu, so ist die Platte bestrebt, die Querlasten weitmöglichst als dünne plattenähnliche Druckmembranschale abzutragen. Die berechneten Kurven stimmen in der Tendenz recht gut mit 4) überein.

b) Dehnfedern am Plattenrand

Soll ein Druckmembranzustand in gerissenen Stahlbetonplatten bei der Bemessung in Rechnung gestellt werden, so muß bei der betrachteten Platte eine genügende Aussteifung gegen horizontale Verschiebungen vorhanden sein. Die Größe der Membrankräfte ist vor allem von der

Steifigkeit der Dehnfedern abhängig, die durch die Bettungsziffern gekennzeichnet wird.

Es werden zwei Platten (Sx und Sy) berechnet, bei denen die seitlichen Behinderungen jeweils nur in einer Richtung stufenweise gelöst werden und jeweils die anderen zwei gegenüberliegenden Ränder unverschieblich gehalten bleiben. Alle Ränder sind voll eingespannt.

Die Systemskizzen und die gemittelten Normalkräfte in den Hauptachsen sind aus Tabelle 1 zu entnehmen. Die Normalkräfte sind bezogen auf das Grundsystem (Platte g) in Prozent angegeben. Die einzelnen Berechnungsbeispiele werden mit Sx-m1, Sx-m3, Sx-m6 und Sx-m7 und mit Sy-m1, Sy-m3, Sy-m6 und Sy-m7 bezeichnet. Verglichen werden die Normalkräfte bei einer Last $P=500 \text{ kN}$.

Aus der Veränderung der Normalkräfte in Tabelle 1 läßt sich das folgende Tragverhalten erklären. Werden die Dehnfedern in einer Richtung weich, so nehmen die Druckkräfte in dieser Richtung ab. In der anderen steiferen Richtung aber wachsen die Membrankräfte an. Die Schnittkräfte verlagern sich also in Richtung der steiferen Widerlager. Das Druckgewölbe stützt sich bei den gleichen Randnachgiebigkeiten in beiden Richtungen mehr in Richtung der kürzeren Spannweite ab. Nehmen die Nachgiebigkeiten in dieser eigentlichen Haupttragrichtung zu (Sy-Platten), treten mehr Kraftumlagerungen auf, als bei Sx-Platten. Die prozentuale Zunahme der Gewölbekräfte in der zweiten Richtung tritt also, wie Tabelle 1 zeigt, bei Sy viel stärker hervor, als bei Sx.

Der Vergleich mit den SCHLAICHschen Lösungen läßt sich am besten anhand der unterschiedlichen Annahmen erläutern. Wenn die Kämpfer beim Gewölbe in der kürzeren Spannrichtung nachgeben (Sy), macht sich der Einfluß der in 4) vernachlässigten Rißbildung im Feldbereich auf die Gewölbekräfte umso mehr bemerkbar, je kleiner die Bettungsziffern in y-Richtung werden.

Dieser Unterschied erklärt sich dadurch, daß die Membranwirkung mit der stufenweisen Lösung der seitlichen Behinderungen zuerst im Randbereich verlorengeht. Der schon erwähnte Membrananteil, der der unteren Rißbildung entspricht und sich auch im membranfreien Lagerungsfall ausbildet, entsteht weiterhin, allerdings wesentlich geringer (s. N_y bei Platte Sy-m7). Die FEM-Rechnung erfaßt diesen anhaltenden Membrananteil.

In der Sx-Serie wird der Einfluß dieses Membrananteils auf N_x erst bei Sx-m6 groß, weil die x-Querschnitte von den in y-Richtung laufenden unteren Rissen nicht so beeinflußt werden wie die y-Querschnitte.

Tabelle Einfluß der Bettungsziffern auf den Druckmembranzustand.

System		-S _x		S _y	
P=500 kN C: Bettungsziffer N/cm ²					
Theorie		FEM		[4]	
g	N _x	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
	N _y	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
m1 C=∞ N/cm ²	N _x	0,5102	0,5682	1,1427	1,1934
	N _y	1,0526	1,0389	0,7435	0,6042
m3 C=2·10 ⁵	N _x	0,1116	0,1163	1,7387	1,4229
	N _y	1,0844	1,0790	0,2818	0,1323
m6 C=2·10 ³	N _x	0,0247	0,0130	2,0641	1,4798
	N _y	1,0879	1,0890	0,1336	0,0151
m7 C=10 ⁻² =0	N _x	0,0138	0,0032	2,0816	1,4872
	N _y	1,0882	1,0900	0,1100	0,0001

-N_x=962,3 N/cm für g nach FEM (s. S. 67/68 in [4])
-N_y=2070,0 N/cm

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die FEM-Rechnung gezeigt hat, daß das in 4) angesetzte mechanische Modell in Bild 11 bei großer Aussteifung durch anschließende Nachbarplatten eine befriedigend brauchbare Lösung ergibt. Allerdings wird bei freiwerdenden Seitenverschiebungen der Einfluß der unterseitigen Rißbildung im Feldbereich größer und damit die vereinfachte Modellierung unbrauchbar.

Das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Berechnungsverfahren hingegen, dem eine wirklichkeitsnahe Rißdarstellung zugrunde liegt, versagt auch im membran- und momentenfreien Lagerungsfall nicht, in dem der Membranzustand im Innenbereich ein Maximum erreicht.

Bei der Betrachtung elastischer Lagerung in horizontaler Richtung darf aber nicht vergessen werden, daß der Druckmembranzustand in einem Innenfeld bei Flachdecken andere umliegende Nachbarfelder nachteilig beeinflusst, d. h. die Randfelder werden auf Biegung und Zug in ihrer Ebene beansprucht.

6. SCHLUSSFOLGERUNGEN

In dieser Arbeit wurde zur Berechnung gerissener Stahlbetonplatten ein numerisches Verfahren, beruhend auf der Methode der finiten Elemente, beschrieben. Der Rißquerschnitt wurde mit den vereinfachenden Annahmen so idealisiert, daß das nichtlineare Tragverhalten von Stahlbetonplatten lediglich auf die Rißbildung in Beton und die Plastizität der Bewehrung zurück-

geführt wird.

Das Stoffgesetz für den idealisierten Rißquerschnitt zeigt, daß die Membrantragfähigkeit der Platte im gerissenen Zustand über die Kopplungsmatrizen zur Lastabtragung herangezogen wird. Im Rißbereich müssen unabhängig von den Randbedingungen die Scheiben- und die Plattenbeanspruchung überlagert werden, um den Kraftzustand in gerissenen Stahlbetonplatten richtig zu erfassen.

Aus den durchgeführten Rechnungen folgt, daß die Rißbildung zu einer Strukturoptimierung führen kann, soweit bei haarfeinen Rissen keine Korrosionsgefahr für die Bewehrungseinlagen besteht. Im aktivierten Druckmembranzustand wird nämlich die höhere Druckfestigkeit des Betons beim zweiachsigen Spannungszustand besser ausgenutzt als im ungerissenen Zustand.

In der Plattenbemessung war die Druckmembranwirkung lange nicht berücksichtigt. In dieser Untersuchung wurde nachgewiesen, daß in gerissenen Stahlbetonplatten stets mehr oder weniger eine gewisse Membranwirkung vorhanden ist. Diese Membrantragfähigkeit gerissener Stahlbetonplatten kann besonders bei der Bemessung durchlaufender Platten günstig ausgenutzt werden, in denen eine große Aussteifung in horizontaler Richtung durch Nachbarplatten zu erwarten ist.

Literaturverzeichnis

- 1) Fujii, F.: On the Finite Element Crack Analysis of RC-Slabs Under Bending, Preliminary Report Volume 1, S. 115–126, IASS-Symposium, Non-linear Behavior of Reinforced Concrete Spatial Structures, Darmstadt, Juli 1978.
- 2) Fujii, F.: Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten, Diss., Univ. Stuttgart, 1978.
- 3) Jofriet, J. C. und G. M. McNeice: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs, Proc. of ASCE, Vol. 97, ST. 3, S. 785–806, 1971.
- 4) Schlaich, J.: Die Gewölbewirkung in durchlaufenden Stahlbetonplatten, Diss., TH Stuttgart, 1963.
- 5) Herrmann, L. R. und D. M. Campbell: A Finite Element Analysis for Thin Shells, J. of AIAA., Vol. 6, No. 10, S. 1842–1847, 1968.
- 6) Wegner, R.: Traverhalten von Stahlbetonplatten mit nichtlinearen Materialgesetzen im gerissenen Zustand Finite-Element-Methode, Diss., TU Braunschweig, 1974.
- 7) Wegner, R.: Finite Element Models for Reinforced Concrete, Proc. of US-Germany Symposium on Formulations and Computational Methods in Finite Element Analysis, MIT., Cambridge, August 1976.

- 8) Kabir, A. F.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Panels, Slabs and Shells for Time-Dependent Effects, UC-SESM Report No. 76-6, Univ. of California, Berkeley, 1976.
- 9) Müller, G.: Numerical Problems in Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete, UC-SESM Report No. 77-5, Univ. of California, Berkeley, 1977.
- 10) Ockleston, A. J.: Arching Action in Reinforced Concrete Slabs, *The Structural Engineer*, Vol. 36, No. 6, S. 197-201, 1958.
- 11) Christiansen, K. P.: The Effect of Membrane Stresses on the Ultimate Strength of the Interior Panel in a Reinforced Concrete Slab, *The Structural Engineer*, Vol. 41, No. 8, S. 261-265, 1963.
- 12) Grünberg, J.: Spannungszustände und Mitwirkende Plattenbreite eines Stahlbeton-Plattenbalken-Tragwerks im gerissenen Zustand, *Beton- und Stahlbetonbau*, Band 73, Heft 7, S. 177-181, 1978.
- 13) Lin, C. S.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs and Shells, UC-SESM Report No. 73-7, Univ. of California, Berkeley, 1973.
- 14) Schäfer, H. und Link, J.: Zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Stahlbetonplatten mit der Finite-Element-Methode, *Beton- und Stahlbetonbau*, Band 70, Heft 11, S. 265-273, 1975.
- 15) Peterson, W.S., Kostem, C. N. und Kulicki, J.M.: The Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Slabs, Report No. 378 B 3, PB-244 634, Fritz Eng. Labo., Lehigh Univ., 1974.
- 16) Hand, F. R., Pecknold, D. A. und Schnobrich, W. C.: A Layered Finite Element Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells, Technical Report 72-2011, No. 389, Univ. of Illinois, Urbana, 1972.
- 17) Fujii, F.: Berechnung gerissener Stahlbetonplatten, *Beton- und Stahlbetonbau*, Band 74, Heft 8, S. 189-193, 1979.
- 18) Müller, G.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Hyperbolic Paraboloid Shells, Report No. UCSESM 77-6, Berkeley, California, October 1977.

(Received April 5, 1979)
