

有限プリズム法による繊維強化複合材の
縦波動伝播速度の研究STUDY ON THE LONGITUDINAL WAVE VELOCITY OF FIBER REIN-
FORCED COMPOSITES BY MEANS OF FINITE PRISM METHOD

大 島 俊 之*・能 町 純 雄**

By Toshiyuki OHSHIMA and Sumio NOMACHI

1. ま え が き

本論文では矩形断面の棒状体が、その棒の長軸方向に連続する規則的に配列された補強繊維を有する力学モデルを用いて、一方向連続繊維強化複合材料 (One-Directional Continuous Fiber-Reinforced Composites) からなる棒状体中を伝播する縦波動の速度分散を取扱う。このような複合材料 (以下、FRC という) の応力解析には、補強繊維と母材マトリックスとの相互作用を、補強繊維が断面に点在している状態を考慮しつつ解析する方法と、補強繊維と母材を平均化し連続体力学による異方性弾性体とみなして解析する手法があるが^{1)~3)}、ここでは前者に従うこととする。

この場合取扱うべき問題は

- ① 波動媒体が一方向繊維強化複合材料であること
 - ② 自由表面を有する矩形棒状体であること
- という 2 つの面を有している。

まず複合材料を無限弾性体とする応力波動の位相速度については Sun, Achenbach, Herrmann^{4)~7)} などが等分布積層材や補強繊維が等距離に分布している場合、補強材方向の調和波動伝達に際して、どの補強材も同じ動的相互作用を母材と行うものと仮定して、FRC 媒体における応力波動の速度分散性を明らかにして以来、研究者の興味を集め、その後、積層複合材 (Laminated Composites)、繊維強化複合材 (Fiber Reinforced Composites) に関する研究が広く行われている^{8)~18)}。

また一方、均質、等方材料の矩形断面の棒状体の応力波動の問題は Mindlin と Fox¹⁹⁾ によって、特殊な表面条件に対して解析され、完全に自由な断面表面についての位相速度と断面の縦横比との関係が Nigro²⁰⁾, Meddick^{21), 22)}, Fraser²³⁾, Aalami²⁴⁾, 田中ら²⁵⁾, 秋田²⁶⁾ など

の研究者によって明らかにされている。

ここで取扱う応力波動の問題には、材料の複合性からくる位相速度の分散性と、断面形状からくる分散性がある。この 2 つを合せもつ棒状体中を伝播する応力波動のうち、縦波動の速度分散性を検討することを本論文は目的としている。

なお、補強繊維の抵抗は軸方向ひずみによるものと、軸に直角方向には Achenbach, Herrmann⁶⁾ にならって、Timoshenko ばり抵抗をとることとする。

部材内部で補強繊維が規則的に配列されるような、同じ形式の繰り返しの内部構成と仮定できる場合、離散型のフーリエ変換 (有限フーリエ定和分変換)²⁷⁾ の適用が可能となり、繊維をそのままの位置で考慮する解析が可能となる^{28), 29)}。

均質、等方材の正方形棒に関する田中ら²⁵⁾の縦波動と第 1 スクリュー波動に対する位相速度を参照し、本計算方法の結果を比較し、要素分割数に対する精度を評価しつつ計算を進めた。

これによって全繊維断面積が部材全体の断面積に比べ、かなり小さい範囲では十分な精度のあることが明らかになったので、この範囲において補強繊維と母材の弾性係数比、ならびに密度比が速度分散に及ぼす影響を検討した。

2. 解析理論概要および準備公式

(1) 解析理論概要

解析にはガラーキン法により誘導した矩形断面要素の有限プリズム法 (Finite Prism Method) を用いる。

プリズム要素の断面の 4 節点の変位は部材の長軸方向に連続関数、それと垂直の短軸 2 方向には断面頂点の節点の離散関数として表現でき、節点における力のつり合いは、節点変位に関する微分差分方程式として与えられ

* 正会員 工修 北見工業大学助教授 工学部開発工学科

** 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

る。

解析において用いた仮定を列記すれば次のようになる。

- a) プリズム要素内の各変位成分はプリズムの短軸 2 方向に直線変化をする。
- b) 媒質中を伝播する応力波動のうち、棒の長軸方向に調和進行する縦波動を考える。
- c) 棒の長軸方向に連続する補強繊維は、その断面積が母材の断面積に比較して十分小さく、補強繊維をプリズム要素の節点に集中する断面積とみなすことができる。
- d) 補強繊維はその軸と直角方向には Timoshenko ばりのように作用する。

このような仮定に基づいて導かれた基礎方程式は、棒の短軸 2 方向には有限フーリエ定和分変換を、長軸方向にはフーリエ変換を適用することができるので、これらの変換によって生じた境界値が、自由境界の条件を満足するように固有値を決定することができれば、これが固有の位相速度となる。

このように、有限フーリエ定和分変換が可能な場合は、プリズムの要素数がどれほど多くなっても、数値計算プログラムはプリズムの数の指定をするだけで計算できる利点がある。

(2) プリズム要素の動的基本式³⁰⁾

矩形断面プリズム要素の長軸方向の 4 つの各稜に作用する 3 方向の力と各稜の変位の 3 方向の成分との関係式が必要であるが、まず長軸方向の変位は仮定より次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= U \cos \frac{2\pi}{l}(x-ct) \\ v &= V \sin \frac{2\pi}{l}(x-ct) \\ w &= W \sin \frac{2\pi}{l}(x-ct) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 l は波長、 c は位相速度、 U, V, W はそれぞれ u, v, w の振幅とする。

次に 3 次元弾性論による動的つり合い式³¹⁾にこれを代

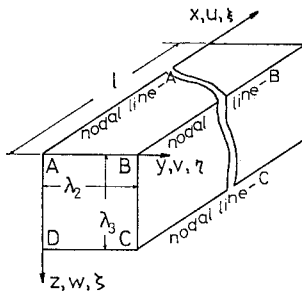


図-1 プリズム要素

入し、ガラーキソ法に従ってプリズム要素断面内に積分すれば、仮定より A, B, C, D の 4 つの各稜における力と変位の関係式が次のように求められる。図-1 参照。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{T}^* \\ Y^* \\ Z^* \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{11}^* & K_{12}^* & K_{13}^* \\ K_{21}^* & K_{22}^* & K_{23}^* \\ K_{31}^* & K_{32}^* & K_{33}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U} \\ V \\ W \end{Bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}'' \\ V'' \\ W'' \end{Bmatrix} &\dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ただし、

$$M = \rho \frac{\lambda_2 \lambda_3}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ & 4 & 2 & 1 \\ & & 4 & 2 \\ \text{Sym.} & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \{\bar{T}\}^T &= \{\bar{T}_A, \bar{T}_B, \bar{T}_C, \bar{T}_D\} \\ \{Y\}^T &= \{Y_A, Y_B, Y_C, Y_D\} \\ \{Z\}^T &= \{Z_A, Z_B, Z_C, Z_D\} \\ \{\bar{U}\}^T &= \{\bar{U}_A, \bar{U}_B, \bar{U}_C, \bar{U}_D\} \\ \{V\}^T &= \{V_A, V_B, V_C, V_D\} \\ \{W\}^T &= \{W_A, W_B, W_C, W_D\} \\ [K_{11}^*] &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{11} \end{bmatrix}, [K_{12}^*] = \frac{\lambda_2}{12} \begin{bmatrix} -K_{13} & K_{14} \\ -K_{14} & K_{13} \end{bmatrix} \\ [K_{13}^*] &= \frac{\lambda_2}{12} \begin{bmatrix} -K_{15} & K_{16} \\ -K_{16} & K_{15} \end{bmatrix} \\ [K_{21}^*] &= \frac{\lambda_3}{12} \begin{bmatrix} K_{21} & K_{22} \\ -K_{22} & -K_{21} \end{bmatrix}, [K_{22}^*] = \begin{bmatrix} K_{23} & K_{24} \\ K_{24} & K_{23} \end{bmatrix} \\ [K_{23}^*] &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} K_{25} & -K_{25} \\ -K_{25} & K_{25} \end{bmatrix} \\ [K_{31}^*] &= \frac{\lambda_3}{12} \begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} \\ -K_{32} & -K_{31} \end{bmatrix} \\ [K_{32}^*] &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -K_{33} & K_{33} \\ K_{33} & -K_{33} \end{bmatrix}, [K_{33}^*] = \begin{bmatrix} K_{34} & K_{35} \\ K_{35} & K_{34} \end{bmatrix} \\ [K_{11}] &= \begin{bmatrix} c_1' & c_2' \\ c_2' & c_1' \end{bmatrix}, [K_{12}] = \begin{bmatrix} c_3' & c_4' \\ c_4' & c_3' \end{bmatrix} \\ [K_{13}] &= 2 \begin{bmatrix} d_5 & -d_4 \\ d_4 & -d_5 \end{bmatrix}, [K_{14}] = \begin{bmatrix} d_4 & -d_5 \\ d_5 & -d_4 \end{bmatrix} \\ [K_{15}] &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} d_5, [K_{16}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} d_4 \\ [K_{21}] &= 2 \begin{bmatrix} d_4 & d_4 \\ -d_5 & -d_4 \end{bmatrix}, [K_{22}] = \begin{bmatrix} d_4 & d_5 \\ -d_5 & -d_4 \end{bmatrix} \\ [K_{23}] &= \begin{bmatrix} d_1' & d_2' \\ d_2' & d_1' \end{bmatrix}, [K_{24}] = \begin{bmatrix} d_3' & d_4' \\ d_4' & d_3' \end{bmatrix} \\ [K_{25}] &= \begin{bmatrix} -d_4 & -d_5 \\ d_5 & d_4 \end{bmatrix}, [K_{31}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} d_5 \\ [K_{32}] &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} d_4, [K_{33}] = \begin{bmatrix} d_4 & -d_5 \\ d_5 & -d_4 \end{bmatrix} \\ [K_{34}] &= \begin{bmatrix} e_1' & e_2' \\ e_2' & e_1' \end{bmatrix}, [K_{35}] = \begin{bmatrix} e_3' & e_4' \\ e_4' & e_3' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_1' &= 4c_1 - 2c_2 - 2c_3, & c_2' &= 2c_1 + 2c_2 - c_3 \\
 c_3' &= c_1 + c_2 + c_3, & c_4' &= 2c_1 - 2c_2 + 2c_3 \\
 d_4 &= \lambda + \mu, & d_5 &= \lambda - \mu, & c_1 &= (2\mu + \lambda)\lambda_2\lambda_3/36 \\
 c_2 &= \mu\lambda_3/(6\lambda_2 D_x^2), & d_1' &= 4d_1 + 2d_2 - 2d_3 \\
 d_2' &= 2d_1 + 2d_2 - d_3, & c_3 &= \mu\lambda_1/(6\lambda_3 D_x^2) \\
 d_3' &= d_1 + d_2 + d_3, & d_4' &= 2d_1 - d_2 + 2d_3 \\
 d_1 &= \mu\lambda_2\lambda_3 D_x^2/36, & d_2 &= (2\mu + \lambda)\lambda_2/6\lambda_2 \\
 d_3 &= \mu\lambda_2/6\lambda_3, & e_1' &= 4d_1 - 2e_2 - 2e_3 \\
 e_2' &= 2d_1 - 2e_2 + 2e_3, & e_3' &= d_1 + e_2 + e_3 \\
 e_4' &= 2d_1 + 2e_2 - e_3, & e_2 &= (2\mu + \lambda)\lambda_2/6\lambda_3 \\
 e_3 &= \mu\lambda_3/6\lambda_2, & D_x &= d/dx, & f' &= df/dx \\
 \bar{f} &= \int f dx, & f' &= df/dt
 \end{aligned}$$

また T, Y, Z はそれぞれ x, y, z 方向の稜線を示し、 ρ は密度、 μ, λ は Lamé の定数を表わす。

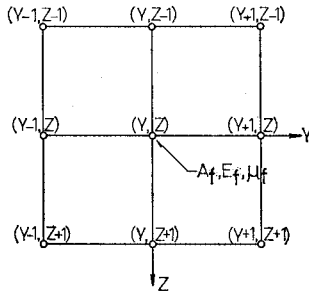


図-2 座標系

(3) 節点のつり合い

前述の仮定に基づいて、節点において補強繊維の効果を評価することにより、節点のつり合い方程式は次のようになる。図-2 参照。

$$\sum S_{y_z^x} + E_f \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho_f \eta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots\dots\dots (3)$$

$$\sum S_{y_z^y} + \mu_f \kappa_f \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta^y}{\partial x} \right) = \rho_f \eta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \dots\dots\dots (4)$$

$$\sum S_{y_z^z} + \mu_f \kappa_f \eta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta^z}{\partial x} \right) = \rho_f \eta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \dots\dots\dots (5)$$

$$E_f r_f^2 \frac{\partial^2 \theta^y}{\partial x^2} + \mu_f \kappa_f \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \theta^y \right) = \rho_f r_f^2 \frac{\partial^2 \theta^y}{\partial t^2} \dots\dots\dots (6)$$

$$E_f r_f^2 \frac{\partial^2 \theta^z}{\partial x^2} + \mu_f \kappa_f \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta^z \right) = \rho_f r_f^2 \frac{\partial^2 \theta^z}{\partial t^2} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 $S_{y_z^x}, S_{y_z^y}, S_{y_z^z}$ はプリズム要素の節点力 \bar{T} 、 Y, Z をプリズム要素断面積 $\lambda_2\lambda_3$ で割ったものであり、補強繊維に関する係数はそれぞれ、 κ_f は Timoshenko のせん断係数、 μ_f はせん断弾性係数、 E_f は弾性係数、 r_f は回転半径、 ρ_f は密度を示す。 $\eta = A_f/A_p$ 、ただし、 A_f は補強繊維の断面積、 $A_p = \lambda_2\lambda_3$ (プリズムの断面積)。

また、上式 (6)、(7) は補強繊維の回転に関するつり合いである。

3. 等間隔に配列された補強繊維を有する矩形断面部材の動的基礎方程式とその解法

(1) 基礎方程式

図-2 を参照して、矩形断面部材中に等間隔に配列された長軸方向の補強繊維は、節点に位置する集中質量、集中断面積で与えられるので、繊維の慣性力、軸方向抵抗力、および横方向 Timoshenko ばり抵抗力を考慮する動的基礎微分方程式は、 x, y, z 方向に関するつり合い式として、次のように表わされる。図-3 参照。

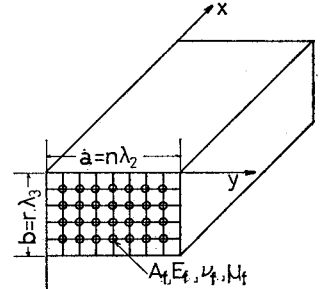


図-3 繊維強化複合部材

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 \\ & a_{33} & 0 & a_{35} & 0 \\ \text{Sym.} & & a_{44} & 0 & 0 \\ & & & a_{55} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{yz} \\ v_{yz} \\ w_{yz} \\ -\theta_{yz}^y \\ -\theta_{yz}^z \end{Bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & m_{33} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & m_{44} & 0 \\ & & & & m_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{yz}'' \\ v_{yz}'' \\ w_{yz}'' \\ -\theta_{yz}^{y''} \\ -\theta_{yz}^{z''} \end{Bmatrix} \dots\dots (8)
 \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{(2\mu + \lambda)}{36} (D_y^2 + 6) (D_z^2 + 6) D_x^2 \\
 &+ \frac{\mu}{6\lambda_2^2} D_y^2 (D_z^2 + 6) + \frac{\mu}{6\lambda_3^2} D_z^2 (D_y^2 + 6) \\
 &+ E_f \eta D_x^2 \\
 a_{12} &= \frac{(\mu + \lambda)}{12\lambda_2} \mu_y (D_z^2 + 6) D_x \\
 a_{13} &= \frac{(\mu + \lambda)}{12\lambda_3} \mu_z (D_y^2 + 6) D_x \\
 m_{11} &= m_{22} = m_{33} = \frac{\rho}{36} (D_y^2 + 6) (D_z^2 + 6) + \rho_f \eta \\
 a_{22} &= \frac{\mu}{36} (D_y^2 + 6) (D_z^2 + 6) D_x^2 \\
 &+ \frac{(2\mu + \lambda)}{6\lambda_2^2} D_y^2 (D_z^2 + 6) + \frac{\mu}{6\lambda_3^2} D_z^2 (D_y^2 + 6) \\
 &+ \mu_f \kappa_f \eta D_x^2 \\
 a_{23} &= \frac{\mu + \lambda}{4\lambda_2\lambda_3} \mu_y \mu_z, & a_{24} &= a_{35} = \mu_f \kappa_f \eta D_x \\
 a_{33} &= \frac{\mu}{36} (D_y^2 + 6) (D_z^2 + 6) D_x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2\mu + \lambda}{6\lambda_3^2} D_z^2 (D_y^2 + 6) + \frac{\mu}{6\lambda_2^2} D_y^2 (D_z^2 + 6) \\ & + \mu_f \kappa_f \eta D_x^2 \\ a_{44} = a_{55} = & -D_x^2 E_f r_f^2 + \mu_f \kappa_f \\ m_{44} = m_{55} = & -\rho_f r_f^2 \end{aligned}$$

上式において、 x 方向の平面波を仮定すれば、すべての D_y^2 , D_z^2 は0となるから、式(8)の第1式～第3式は次のように Achenbach らの式と類似の形に書くことができる。

$$[C_{11} + E_f \eta] D_x^2 u = \rho^* u'' \dots\dots\dots (9)$$

$$[C_{44} + \mu_f \kappa_f \eta] D_x^2 v - \mu_f \kappa_f \eta D_x \theta^y = \rho^* v'' \dots (10)$$

$$[C_{44} + \mu_f \kappa_f \eta] D_x^2 w - \mu_f \kappa_f \eta D_x \theta^z = \rho^* w'' \dots (11)$$

上式中、

$$C_{11} = 2\mu + \lambda, \quad C_{44} = \mu + \eta \mu_f, \quad \rho^* = \rho + \eta \rho_f$$

上式は縦波動は分散せず、軸方向に進む曲げ波動は分散することを示しており、Achenbach らの繊維強化複合材に対する近似式の結果と同等である。

(2) 境界条件

矩形断面部材は4つの自由境界面を有しているが、有限プリズム法に立脚して、矩形断面を有限個の等区画に分割されたプリズム要素によって表現する本論文では、自由境界面の条件が十分満足されなければならない。

Nigro²⁰⁾はこの種の問題に Ritz の変分法によって解析する際に未知変位関数の項数を各波動パターンごとに自由境界条件の満足の精度を検討しながら決定している。

また Fraser²³⁾は Collocation 法を用いて、変位の一般解を未知係数を含む Bessel 関数形で表現し、自由境界線上に自由境界の条件を満足させるための選点を断面形状の変化に応じて行い、長方形および正方形断面の解析を行っている。また田中ら²⁵⁾は応力関数を用いた級数解法により、自由境界条件を満足するように級数の項数を決定し、Fraser, Nigro の値と比較検討している。

本論文においては、これらの研究を参考にする一方で、等間隔で規則的に配列された繊維補強複合材料部材の解析を有限フーリエ定和分変換を応用する、マクロアプローチ²⁸⁾として行うため、自由境界面の条件を良い精度で満足する分割数および補強繊維の本数を想定して、適用することになる。

本論文の数値計算では、要素分割数を変えた計算結果を、すでに行われている他の数値計算結果と比較し、その影響の程度を確かめた。また、補強繊維が入らない構造に対する数値計算結果が他の計算結果と2～3%程度の誤差になるような分割数とこれに応ずる補強繊維の本数について計算を行った。

自由境界面の条件は式(2)を用いて、次のように表現される。図-3 参照。

$z=0, r$ に対して：(水平自由面)

$$\left. \begin{aligned} T_{y,y+1} + T_{y,y-1} &= 0 \\ Y_{y,y+1} + Y_{y,y-1} &= 0 \\ Z_{y,y+1} + Z_{y,y-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

$y=0, n$ に対して：(垂直自由面)

$$\left. \begin{aligned} T_{z,z+1} + T_{z,z-1} &= 0 \\ Y_{z,z+1} + Y_{z,z-1} &= 0 \\ Z_{z,z+1} + Z_{z,z-1} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$(y, z) = (0, 0), (0, r), (n, 0), (n, r)$ に対して：
(4隅角部)

$$T=0, Y=0, Z=0 \dots\dots\dots (14)$$

上式中、節点力の右下のサフィックスは第1サフィックスが節点の位置を示し、第2サフィックスはその節点力が隣接するプリズムのどちら側のプリズムに対応する力であるかを示すものとする。

(3) 有限フーリエ定和分変換による調和進行波の解法

基礎微分方程式(8)は矩形断面部材の長軸方向に連続関数、短軸2方向に離散型関数の変位で表わされる連立方程式であるので、長軸方向に式(1)のような調和進行波を考え、短軸2方向には付録の公式を用いて、有限フーリエ定和分変換を行う。

またその変換によって生ずる境界未知変位にそれぞれ対応する境界条件式(12), (13), (14)を適用すれば、その係数行列は応力波動の位相速度に関する固有値を含む固有値行列となる。

この固有値方程式を解き、これから得られる固有ベクトルを算定して、各節点の変位および節点力の振動モードを明らかにすることができる。

固有値は零判定基準を設定して、繰り返して反復法によって求める。

各変位成分および応力成分は固有ベクトルから求まる変位の像関数を断面2方向に有限フーリエ定和分逆変換して求める。

正方形断面の場合は、縦波動とねじり波動について、断面内の変位成分はその対角線に関する対称性があるので、それぞれ、第1スクリュウ波動、第2スクリュウ波動に分離して行う²⁵⁾。

本論文では以下、特に断らない限り、上記固有位相速度の値は第1分枝^{注)}に対する値を示すものとする。

注) このよび方は田中ら²⁵⁾のよび方に従ったもので、これまでの論文、著書において第1次モード (First Mode) あるいは第1分枝 (First Branch) と呼ばれているもので、本論文では変形モードと区別するため、以下このように用いることにする。

表一 位相速度の分散特性の比較, 縦波動 ($\nu=0.3$)

rb	Fraser	Nigro	Tanaka	author		
			second	48 div.	24 div.	8 div.
0.1	1.6120	1.6120	—	1.6112	1.6120	1.6150
0.3	1.6080	1.6080	—	1.6086	1.6092	1.6125
0.5	1.5996	1.5996	1.5997	1.6003	1.6010	1.6044
1.0	1.5512	1.5511	1.5511	1.5519	1.5526	1.5564
1.2	1.5150	—	1.5149	1.5155	1.5163	1.5208
1.4	1.4657	—	1.4656	1.4661	1.4668	1.4724
1.6	1.4048	—	—	1.4049	1.4055	—
1.8	1.3385	—	1.3384	1.3382	1.3387	1.3464
2.0	1.2743	1.274	1.2743	1.2738	1.2740	1.2823
2.2	1.2172	—	1.2172	1.2164	1.2165	1.2250
2.4	1.1687	—	1.1687	1.1677	1.1677	1.1763
2.6	1.1285	—	1.1285	1.1275	1.1274	1.1360
2.8	1.0956	—	1.0956	1.0945	1.0944	1.1032
3.0	1.0688	1.069	1.0688	1.0676	1.0675	1.0766
3.2	—	—	1.0469	1.0457	1.0457	1.0551
3.4	1.029	—	1.0296	1.0278	1.0279	1.0378
3.6	—	—	1.0143	1.0132	1.0133	1.0238
3.8	—	—	1.0022	1.0011	1.0014	1.0124
4.0	0.992	0.992	0.9922	0.9912	0.9915	1.0032
5.0	0.962	0.962	0.9619	0.9613	0.9623	0.9776
6.0	0.948	0.949	0.9487	0.9482	0.9502	0.9691
7.0	0.942	0.942	0.9418	0.9419	0.9448	—
8.0	0.938	0.939	0.9381	0.9387	0.9426	—
9.0	0.936	0.937	0.9359	0.9371	0.9420	—
10.0	0.934	0.936	0.9345	0.9362	0.9423	—
12.0	0.932	0.937	0.9327	0.9354	0.9441	—
14.0	0.931	0.939	0.9316	0.9366	0.9467	—
16.0	0.931	0.942	—	0.9366	0.9497	—

表二 位相速度の分散特性の比較, 第1スクリュウ波動 ($\nu=0.3$)

rb	Fraser	Nigro	Tanaka	author		
			third	48 div.	24 div.	8 div.
0.1	—	—	22.2909	22.225	22.271	—
0.3	—	—	7.3985	7.379	7.3977	7.5735
0.5	—	—	4.4057	4.457	4.4043	4.5988
1.0	2.1646	2.165	2.1656	2.1653	2.1683	2.2181
1.2	1.8074	—	—	1.8119	1.8104	1.8425
1.4	1.5640	—	1.5640	1.5646	1.5664	1.5881
1.6	1.3926	—	1.3929	1.3931	1.3944	1.4088
1.8	1.2694	—	1.2694	1.2697	1.2707	1.2795
2.0	1.1793	1.1793	1.1794	1.1795	1.1802	1.1846
2.2	1.1127	—	1.1129	1.1129	1.1133	1.1141
2.4	1.0631	—	1.0635	1.0632	1.0633	1.0613
2.6	1.0258	—	1.0262	1.0258	1.0257	1.0215
2.8	—	—	0.9980	0.9975	0.9971	0.9912
3.0	0.9757	0.9761	0.9766	0.9759	0.9753	0.9682
3.2	0.9594	—	0.9602	0.9593	0.9586	0.9505
3.4	0.9467	—	0.9476	0.9467	0.9456	0.9370
3.6	0.9368	—	0.9378	0.9367	0.9356	0.9267
3.8	0.9292	—	0.9303	0.9290	0.9278	0.9187
4.0	0.9232	0.9236	0.9244	0.9230	0.9216	0.9127
5.0	0.908	0.9090	0.9097	0.9076	0.9056	0.8996
6.0	0.904	0.9056	0.9059	0.9032	0.9002	0.8997
7.0	0.903	0.9058	0.9055	0.9019	0.8981	0.9045
8.0	0.903	0.9074	0.9061	0.9016	0.8968	0.9110
9.0	0.903	0.9096	0.9071	0.9014	0.8958	0.9178
10.0	0.903	0.9121	0.9080	0.9010	0.8949	0.9246
12.0	—	0.9176	0.9096	0.9002	0.8939	—
14.0	—	0.9234	0.9110	0.9000	0.8943	—
16.0	—	0.9294	0.9121	0.8976	0.8961	—

4. 正方形断面の場合の他の数値計算結果との比較

ポアソン比 $\nu=0.3$ の正方形断面部材について, 田中ら²⁵⁾がすでに Fraser, Nigro らの計算結果と比較検討している. これらの結果を用いるため, 正方形断面で縦横同数の 48×48 分割, 24×24 分割, 8×8 分割の3種類をとり, 縦波動と第1スクリュウ波動の2つの波動パターンにをいて比較を行った(表一1, 2). 表の数値は, 位相速度とせん断波速度の比 c/c_s を表わし, r は波数 $2\pi/l$, b は断面幅である. また $\nu=0.3$ のときの Rayleigh 波速度は $0.9274 c_s$ である. 詳述すれば次のようである.

(1) 縦波動(表一1)

計算結果はいずれも波長が大きい場合には他の解析による結果と大体一致する. しかし, 波長が小さい場合, 分割数による違いが現われる. 傾向として分割数が少ないほど大きな値となる. 著者らの結果の傾向は波長の減少につれて, 最小値を過ぎた後, 徐々に大きくなる. これは Nigro の傾向に近い.

8分割の結果は $rb=3$ で他の結果より 0.7% 程度の増加となり, これは良い近似で, この波長に対しては十分な分割数と考えられる.

(2) 第1スクリュウ波動(表一2)

この波動は矩形断面部材の縦波動の第2分枝に分類され, 断面2方向に圧縮と引張が交互に生じる波動モードであり, 波長が大きい場合, 48分割, 24分割の値は他の解析法の結果とほぼ一致するが, 8分割の値は多少大きめで, $rb=0.5$ の値は田中ら(3次)の値より 4.4% の増加となる. rb が 3.0 くらいの範囲での結果は多少の差はあるが, ほぼ他の結果と一致する.

波長がさらに小さくなる場合, 48分割の結果は $rb=16$ 以内では単調に減少するが, 全体的には Nigro, 田中らの結果と同じように最小値を経過し徐々に増加していく.

また最小値を示す波長は分割数が多くなるほど小さな値となった.

このほか, ねじり波動, 第2スクリュウ波動, 曲げ波動についての比較もほぼ上述と同じように, 最小値を経過してやや増加するパターンで, 最小値をとるときの波長の値は分割数が多くなるほど小さくなる傾向となった.

また曲げ波動数値解が一番精度の低いことがわかった.

5. 繊維補強材を有する矩形断面部材の縦波動伝播速度に及ぼす補強繊維の影響

繊維補強材を有する矩形断面部材中を伝播する縦波動を対象として、その位相速度に及ぼす補強繊維の影響と断面形状の影響について検討する際、母材のポアソン比を0.25とし、断面形状は縦横比 b/a を1.0, 1.2, 2.0として数値計算を行った。また $b/a=1.0$ の場合、補強繊維の数は $7 \times 7=49$ 本、 $b/a=1.2$ については $9 \times 11=99$ 本、 $b/a=2.0$ については $7 \times 15=105$ 本が等間隔に配列されていると仮定した。

補強繊維の断面積はすべて等しいので、(補強繊維の全断面積) : (母材の全断面積) = K 、 K の値はすべての縦横比に対して $4.9/64=0.07656$ とした。

また以下の計算では補強繊維は円形断面と仮定し、Timoshenkoのせん断係数はCowper⁽⁴⁾の値を用いて $\kappa_f=0.886$ ($\nu_f=0.3$) とおいて計算した。

上の仮定から断面のプリズム要素は正方形に対して 8×8 分割、 $b/a=1.2$ に対して 10×12 分割、 $b/a=2.0$ に対して 8×16 分割である。

4. で検討した縦波動の精度では、均質、等方性材料で、 γb が6.0より小さい場合、他の計算方法の結果に対して、3%以下の差に収まっている。これを目安として、分割数を決めたもので、このほか得られた位相速度に対応する境界条件の満足の程度を調べた結果、 10^{-6} 程度(単精度)の精度で条件を満足している。

(1) 補強繊維と母材との密度比 ρ_f/ρ の影響

母材のポアソン比 ν が0.25で、補強繊維と母材に弾性係数比 E_f/E が10.0のとき、矩形断面の縦横比 b/a が1.0, 1.2, 2.0の3つの場合に対して、 c/c_s と γb の関係について調べた結果が図-4 ($b/a=1.0$)、図-5 ($b/a=1.2$)、図-6 ($b/a=2.0$) である。図中 c_s は母材のせん断波速度を表わし、破線は補強繊維がない場合の結果を示す。

$b/a=1.0$ の場合は、 $A_f=0.0$ を基準にとって $\rho_f/\rho=1.0, 3.0, 5.0, 10.0$ と増加させると $\gamma b=0.1$ においてそれぞれ31%, 28.6%, 26.7%, 23%の増加となり、 ρ_f/ρ が大きくなるほど位相速度は小さくなり、その変化幅はこの場合8%程度となる。同じように $\gamma b=1.4$ について行くとそれぞれ26.8%, 22%, 18.6%, 11.4%の増加で、変化幅は約15%程度となる。

また $b/a=1.2$ の場合は $\gamma b=0.1$ において同じ比較を行えば、それぞれ31%, 29%, 27%, 23%の増加となり、変化幅は約8%、 $b/a=2.0$ の場合はそれぞれ31%, 29%, 26.6%, 23.4%の増加となり、変化幅は約

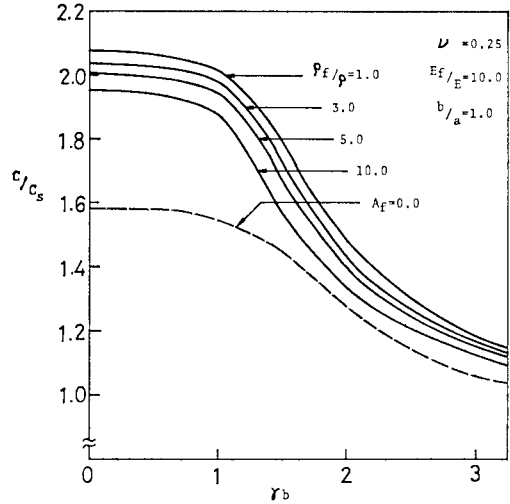


図-4 位相速度 c に及ぼす密度比 ρ_f/ρ の変化の影響 ($b/a=1.0$)

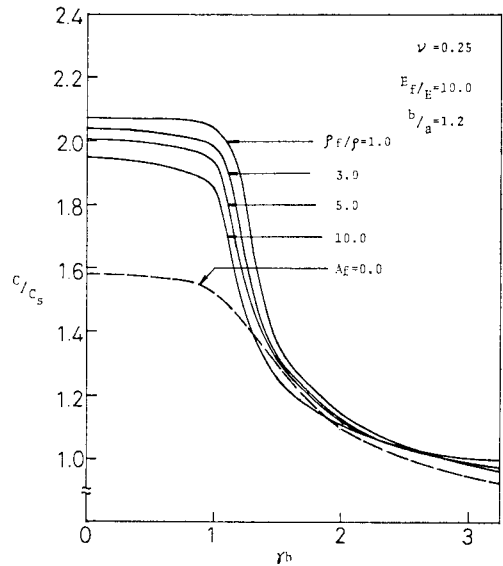


図-5 位相速度 c に及ぼす密度比 ρ_f/ρ の変化の影響 ($b/a=1.2$)

7.6%となる。

全体として、密度比の変化による位相速度の変化幅は10%程度である。

分散曲線の減少程度は b/a が増加するほど急激となり、 $b/a=1.0$ と 1.2 の場合はほぼ $\gamma b=1.0$ 付近から減少をはじめるが、 $b/a=2.0$ の場合は $\gamma b=0.5$ 付近からすでに減少しはじめている。

また $b/a=1.2$ の場合、一部、補強繊維がない場合がある場合より大きな位相速度になっている。

(2) 補強繊維と母材との弾性係数比 E_f/E の影響

次に補強繊維と母材との密度比 $\rho_f/\rho=3.0$ とし、弾性

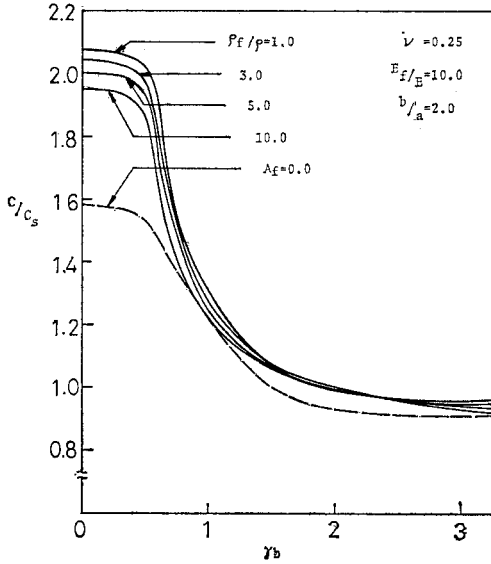


図-6 位相速度 c に及ぼす密度比 ρ_f/ρ の変化の影響 ($b/a=2.0$)

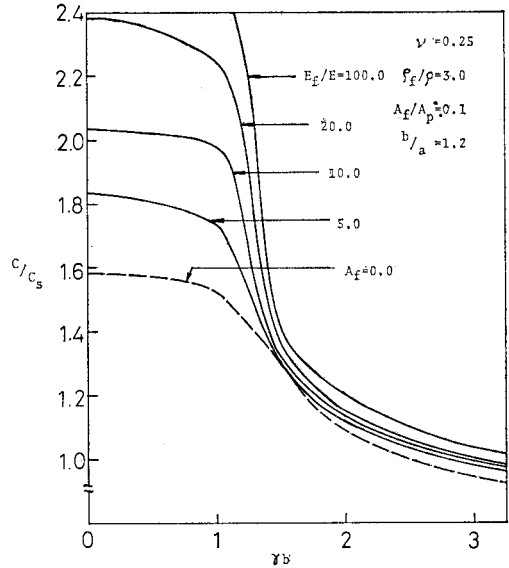


図-8 位相速度 c に及ぼす弾性係数比 E_f/E の変化の影響 ($b/a=1.2$)

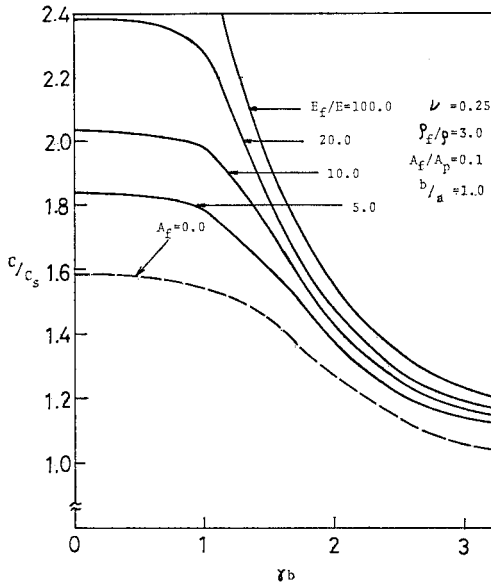


図-7 位相速度 c に及ぼす弾性係数比 E_f/E の変化の影響 ($b/a=1.0$)

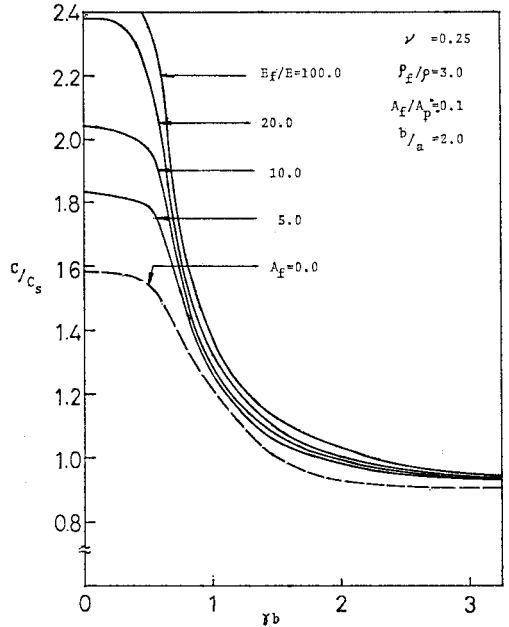


図-9 位相速度 c に及ぼす弾性係数比 E_f/E の変化の影響 ($b/a=2.0$)

係数比 E_f/E を 5.0, 10.0, 20.0, 100.0 と変化させた場合の c/c_s の変化を断面の縦横比 b/a が 1.0, 1.2, 2.0 の 3 種類について、前節と同じように母材のポアソン比を $\nu=0.25$ として求めたのが図-7 ($b/a=1.0$), 図-8 ($b/a=1.2$), 図-9 ($b/a=2.0$) である。

$b/a=1.0$ の場合、 $A_f=0.0$ を基準にとって $E_f/E=5.0, 10.0, 20.0, 100.0$ と変化させるとき、 c/c_s の値は $b/a=0.1$ のとき、それぞれ 16%, 28.6%, 50%, 168% の増加、 $b/a=1.0$ のとき 16.2%, 28.4%, 48.4%, 79.2

% の増加、 $b/a=2.0$ のとき 7.5%, 10%, 12.7%, 16.5% の増加となり、波長が小さくなるにつれて、 E_f/E の影響は小さくなる。

また $b/a=1.2$ の場合、同じ比較をすると、 $b/a=0.1$ のときそれぞれ 16%, 29%, 51%, 169% の増加、 $b/a=1.0$ のとき 14%, 31%, 47.7%, 71% の増加となるが、 $b/a=1.5$ 付近から差が縮まり、 E_f/E の変化による影響が少なくなり、 $b/a=2.0$ のとき、それぞれ 2.7%, 4.0

%, 5.5%, 10% の増加となる。

$b/a=2.0$ の場合, 同じ比較に対して, $rb=0.1$ のときはそれぞれ15.8%, 29%, 50.6%, 168% の増加, $rb=0.5$ のときは 16.2%, 28%, 42.6%, 53% の増加となるが, やはりそれ以後増加の割合が少なくなり, $rb=2.0$ のときそれぞれ 4.8%, 6.4%, 7.0%, 10.0% の増加となる。

以上の結果から, $b/a=1.0\sim 2.0$ の範囲では, E_f/E の変化に対して波長が大きい場合には b/a の変化に対して c/c_s はほぼ一定値となるが, 波長が小さくなると b/a が大きくなるほど, E_f/E の変化の影響は小さくなっていく。

(3) 断面の縦横比 b/a の変化による影響

縦波動位相速度分散曲線の第1分枝について, 補強繊維と母材の密度比 ρ_f/ρ を 3.0, 弾性係数比 E_f/E を 10.0 としたとき, 断面の縦横比 b/a を 1.0, 1.2, 2.0 と変化させた場合, c/c_s はどのように変化するかを図に示したものが 図-10 ($\nu=0.25$) である。

図中実線は補強繊維が入った場合, 破線は入らない場合を示している。

$A_f=0.0$ のときの c/c_s の値は $b/a=1.0, 1.2, 2.0$ と大きくなるにつれて分散が激しく, $b/a=1.0$ の値を基準にとると, $b/a=1.2$ と 2.0 の結果はそれぞれ $rb=1.0$ のとき 9.7%, 30.5% の減少, $rb=2.0$ のとき 14.5%, 26.7% の減少となる。また補強繊維が入った場合は入らない場合より c/c_s の減少の割合が大きく, 同じ比較に対して, $rb=1.0$ のときそれぞれ 1.9%, 35.3% の減

少, $rb=2.0$ では 20.1%, 30.4% の減少となり, 減少率が大きい。また全体的には $b/a=1.0\sim 2.0$ の範囲における補強繊維の効果は rb が 1.5 付近より大きくなると b/a の大きいものほど減少し, さらに波長が大きくなるとこれが顕著に現われる。

(4) 平均換算弾性定数による結果との比較

文献 2) によって求めた換算弾性定数による結果を図-10 において一点鎖線で示している。この場合, 繊維と母材の体積比が約 8% と小さいため, 換算ポアソン比は母材のポアソン比とはほとんど差がなかった。弾性係数は繊維と母材の質量比によって換算した値を用いることになる。

これによると, b/a のいずれの場合も波長が大きくなるとほぼ bar velocity に近づき, 本理論値と換算弾性定数による結果とは一致してくるが, 波長が小さくなるにつれて両者の差は大きくなる。

$b/a=1.0$ の場合は, rb が 1.0 あたりまではほぼ一致しているが, $rb=2.0, 3.0$ に対して換算弾性定数による計算結果は 20%, 28% それぞれ本計算値より大きくなっている。

また $b/a=1.2$ の場合も rb が 1.0 あたりまで一致しているが, $rb=2.0, 3.0$ に対して同様に行った比較では, 36%, 40% 大きくなっている。

また $b/a=2.0$ の場合は, rb が 0.5 あたりまで一致しているが, $rb=1.0, 2.0, 3.0$ と増加するにつれて, それぞれ 29%, 38%, 44% 大きな値となっている。

全体としては b/a が 1 に近いほど, 両者の計算値の一致する範囲が大きく, b/a が大きくなるとこの範囲は縮小し, また波長が小さくなると両者の差は増大してくる。

計算に用いた諸元の範囲では 40% 程度の増加に漸近する傾向を認めた。

(5) 群速度分散曲線

エネルギーの伝播速度を表わす群速度の分散曲線は次の関係式によって与えられる。

$$V_g = V + rb \frac{dV}{d(rb)} \dots\dots\dots (15)$$

ただし, $V_g=c_g/c_s$, $V=c/c_s$, c_g =群速度。

ここでは数値微分法を用い, 勾配の急変するところでは 4 次の階差式により微係数を求めた。

その結果を図-11 にポアソン比 0.25 の場合について示している。この図から群速度は, いずれの場合も最小値をとった後, 一定値に漸近する傾向をとり, 補強繊維がない場合の最小値は b/a が大きくなるほど, 小さい波長で生ずる。すなわち, $b/a=1.0, 1.2, 2.0$ に対してそ

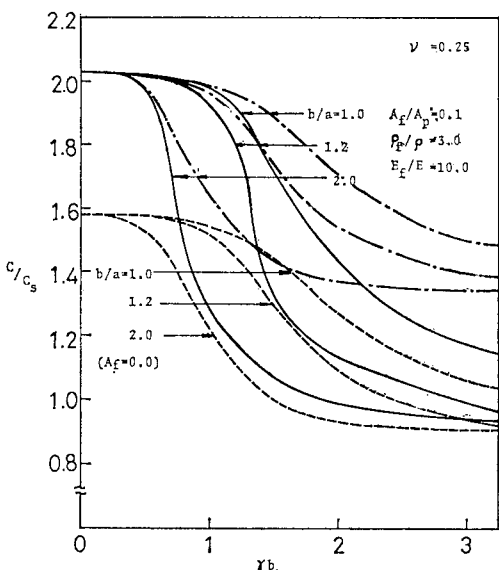
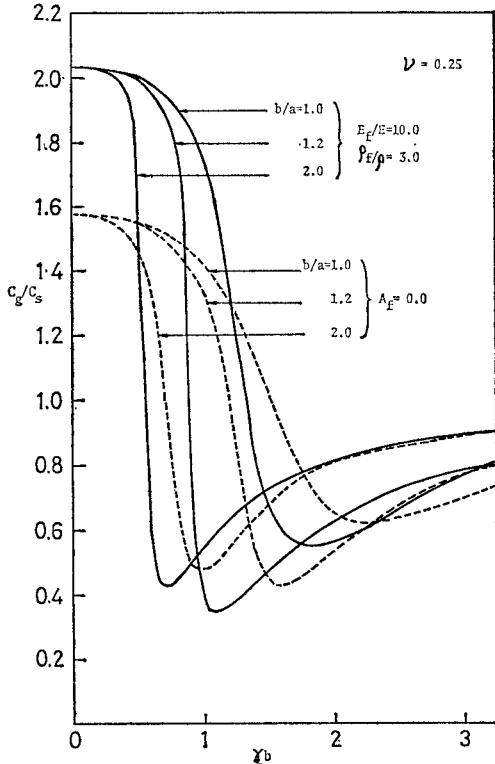


図-10 位相速度 c に及ぼす断面の縦横比 b/a の変化の影響



図一11 群速度分散曲線

れぞれ $rb=2.2, 1.3, 1.0$ 付近の波数である。

また補強繊維がある場合、最小値はそれぞれ、 rb が $1.8, 1.1, 0.7$ 付近となる。

全体として、繊維がある場合もない場合も $rb=1.0$ 付近で急激に減少し、それ以後、全体に群速度の差が少なくなる。また $rb=1.0$ より小さい範囲で群速度に与える繊維の影響が顕著に現われる。

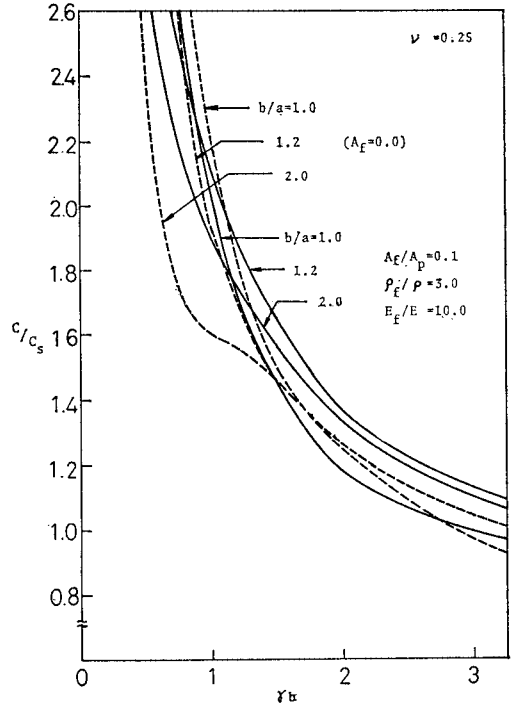
(6) 縦波動の第2分枝に対する補強繊維の影響

縦横比 b/a が 1.2 と 2.0 の場合の矩形断面の縦波動の第2分枝 L^2 とこれと同じ分類に入る正方形断面 ($b/a=1.0$) の第1スクリー波動 S_1^1 について、断面の縦横比 b/a の $1.0, 1.2, 2.0$ について、補強繊維が入った場合と入らない場合で c/c_s がどのように変化するかを調べたものが 図一12 ($\nu=0.25$) である。

$A_f=0.0$ の場合、いずれの縦横比も Fraser の $\nu=0.3$ の結果のように、 rb が 2.0 付近より小さく、波長が大きい範囲では S_1^1, L^2 も急激に増加しており、また b/a の値が大きくなるほど c/c_s の値は小さくなる。

また補強繊維がある場合、 $S_1^1 (b/a=1.0)$ の値は b/a が 1.2 と 2.0 の値に対し $rb < 1.0$ の範囲で位相速度の値は急激に増加している。

rb が 1.15 以後 S_1^1 の値が L^2 の $b/a=1.2, 2.0$ の値より小さくなり、 $rb=1.5\sim 2.7$ 付近では $A_f=0.0$ の



図一12 縦波動第2分枝の位相速度分散曲線

場合より小さくなっている。

全体的には第1スクリー波動 $S_1^1 (b/a=1.0)$ および縦波動の第2分枝 $L^2 (b/a=1.2, 2.0)$ に対して、補強繊維の影響は計算の範囲ではそれほど顕著なものではない。

6. 結 論

従来補強繊維を多数有する繊維強化複合材の波動伝播速度の計算は、繊維と母材との平均化の手法による換算弾性定数を用いて、異方性弾性理論で解析されてきたが、本論文では補強繊維をディスクリートなモデルで評価し、検討した。

ここに明らかにされた事項を要約すれば、おおよそ次のようになる。

(1) 4. における他の計算結果との比較では、著者らの結果は数値的に多少の違いはあるが、Nigro、田中らの結果と同じ傾向となり、縦波動、第1スクリー波動に対して、最小値をとった後、徐々に増加する結果となった。

(2) 縦波動の位相速度に及ぼす補強繊維と母材との密度比 ρ_f/ρ の影響を調べた結果、弾性係数比 E_f/E が 10.0 のとき、波長が大きいほどその影響は大きく、補強繊維がない場合より位相速度は $20\sim 30\%$ 程度大きくなる。

(3) 同じく $\rho_f/\rho=3.0$ として、弾性係数比 E_f/E の影響を調べた結果、波長が大きい場合ほど、その影響は大きく、 E_f/E が 5.0, 10.0, 20.0, 100.0 と増加するにつれて、位相速度はほぼ 16%, 29%, 50%, 168% 補強繊維がない場合より増加する（繊維と母材の断面積比約 8%）。また波長が小さくなってくると、全体的にその影響は小さく、 b/a が大きくなるほど、 E_f/E の変化の影響は小さくなる。

(4) 断面の縦横比 b/a の変化の影響を調べた結果、 b/a が 1.0~2.0 の範囲では rb が 1.5 付近より小さい波長の範囲で、補強繊維の効果が顕著である。

縦波動の第 2 分枝、および第 1 スクリュー波動に対する補強繊維の影響としては、それほど大きな位相速度の増加はみられない。

(5) 従来用いられている平均換算弾性定数を用いた矩形断面部材に対する計算結果と本理論値を比較した結果、波長が大きい領域で両者はほぼ一致し、波長が小さくなり、また断面の縦横比 b/a が大きくなるほど、両者の差は大きくなり、平均換算弾性定数を用いた結果が、波長が小さい範囲では約 40% 程度、本理論値より大きな値を示す結果となった。

現在、土木の分野においては、建設材料の軽量化、高強度化が必要な場合も多く、このための複合材料に関する研究も多く行われており、これらの複合材料中の波動伝播挙動の解明も必要な事項と思われる。

本論文がこれらの研究の一助になれば幸いである。

本論文の数値計算、整理などにあたって三上修一氏の援助を受けましたので深く感謝致します。

本研究における数値計算は北大大型計算機センターの FACOM 230-75 を用いて行った。

【付 録】 有限フーリエ定和分変換²⁷⁾

関数 $f(r)$ を $r(0 < r < n)$ に関する離散型関数とし、次の表現を定義する。

$$S_i[f(r)] = \sum_{r=1}^{n-1} f(r) \sin \frac{i\pi r}{n} \dots\dots\dots(1)$$

$$C_i[f(r)] = \sum_{r=1}^{n-1} f(r) \cos \frac{i\pi r}{n} \dots\dots\dots(2)$$

この逆変換として、

$$f(r) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} S_i[f(r)] \sin \frac{i\pi r}{n} \dots\dots\dots(3)$$

$$f(r) = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^n R_i[f(r)] \cos \frac{i\pi r}{n} \dots\dots\dots(4)$$

ただし、

$$R_i[f(r)] = \omega_i \left\{ C_i[f(r)] + \frac{1}{2}(-1)^i f(0) + \frac{1}{2} f(n) \right\} \dots\dots(5)$$

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{1}{2} & i=0, n \\ 1 & i=1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

ここで、

$$\Delta^2 f(r) = f(r+1) - 2f(r) + f(r-1) \dots\dots(6)$$

$$\Delta f(r) = f(r+1) - f(r-1) \dots\dots\dots(7)$$

を定義すると、次の Sine 変換と Cosine 変換に関する式が得られる。

$$S_i[\Delta^2 f(r)] = -\sin \frac{i\pi}{n} \{(-1)^i f(n) - f(0)\} - D_i S_i[f(r)] \dots\dots\dots(8)$$

$$S_i[\Delta f(r)] = -2 \sin \frac{i\pi}{n} R_i[f(r)] \dots\dots\dots(9)$$

$$C_i[\Delta^2 f(r)] = (-1)^i \Delta f(n-1) - \Delta f(0) - D_i R_i[f(r)] \dots\dots(10)$$

$$C_i[\Delta f(r)] = -(-1)^i \Delta f(n-1) - \Delta f(0) + \left(1 + \cos \frac{i\pi}{n}\right) \{(-1)^i f(n) + f(0)\} + 2 \sin \frac{i\pi}{n} S_i[f(r)] \dots\dots\dots(11)$$

ただし、

$$D_i = 2 \left(1 - \cos \frac{i\pi}{n}\right)$$

参 考 文 献

- 1) 林 毅編：複合材料工学，日科技連，1977.
- 2) Hashin, Z. and B.W. Rosen: The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials, Journal of Applied Mechanics, June, 1964.
- 3) 石川隆司・小林繁夫：一方向繊維強化複合材料の応力解析，日本複合材料学会誌，第2巻，第3号，1976，第3巻，第4号，1977.
- 4) Sun, C.T., J.D. Achenbach and G. Herrmann: Time-Harmonic Waves in a Stratified Medium Propagating in the Direction of the Layering, Journal of Applied Mechanics, June, 1968.
- 5) Sun, C.T., J.D. Achenbach and G. Herrmann: Continuum Theory for a Laminated Medium, Journal of Applied Mechanics, Sep., 1968.
- 6) Achenbach, J.D. and G. Herrmann: Dispersion of Free Harmonic Waves in Fiber-Reinforced Composites, AIAA Journal, Vol. 6, No. 10, Oct., 1968.
- 7) Achenbach, J.D., C.T. Sun and G. Herrmann: On the Vibrations of a Laminated Body, Journal of Applied Mechanics, Dec., 1968.
- 8) Bedford, A. and M. Stern: Toward A Diffusing Continuum Theory of Composite Materials, Journal of Applied Mechanics, March, 1971.
- 9) Kohn, W., J.A. Krumhansl and E.H. Lee: Variational Methods for Dispersion Relations and Elastic Properties of Composite Materials, Journal of Applied Mechanics, June, 1972.
- 10) Drumbheller, D.S. and A. Bedford: On a Continuum Theory for a Laminated Medium, Journal of Applied Mechanics, June, 1973.
- 11) Ben-Amoz, M.: Continuum Theory of Wave Propaga-

- tion in Laminated Composites, Int. J. Engng. Sci., Vol. 11, 1973.
- 12) Hegemier, G.A. and T.C. Bache : A General Continuum Theory with Microstructure for Wave Propagation in Elastic Laminated Composites, Journal of Applied Mechanics, March, 1974.
 - 13) Gurtmann, G.A. and G.A. Hegemier : A Mixture Theory for Wave Guide-Type Propagation and Debonding in Laminated Composites, Int. J. Solids Structures, Vol. 11, 1975.
 - 14) Bartholomew, R.A. and P.T. Torvik : Elastic Wave Propagation in Filamentary Composite Materials, Int. J. Solids Structures, Vol. 8, 1972.
 - 15) Jones, E.R. and R.L. Sierakowski : Study on the Wave Propagation in Filamentary Composite Materials, Developments in Mechanics, Vol. 7, Proceedings of the 13th Midwestern Mechanics Conference, 1973.
 - 16) Wheeler, P. and T. Mura : Dynamic Equivalence of Composite Materials and Eigenstrain Problems, Journal of Applied Mechanics, June, 1973.
 - 17) Hegemier, G.A., G.A. Gurtman and A.H. Nayfeh : A Continuum Mixture Theory of Wave Propagation in Laminated and Fiber Reinforced Composites, Int. J. Solids Structures, Vol. 9, 1973.
 - 18) Tauchert, T.R. and A.N. Guzelsu : An Experimental Study of Dispersion of Stress Waves in a Fiber-Reinforced Composite, Journal of Applied Mechanics, March, 1972.
 - 19) Mindlin, R.D. and E.A. Fox : Vibrations and Waves in Elastic Bars of Rectangular Cross Section, Journal of Applied Mechanics, March, 1966.
 - 20) Nigro, N.J. : Steady-State Wave Propagation in Infinite Bars of Noncircular Cross Section, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 40, Nr. 6, 1966.
 - 21) Medick, M.A. : One-Dimensional Theories of Wave Propagation and Vibrations in Elastic Bars of Rectangular Cross Section, Journal of Applied Mechanics, Sept., 1966.
 - 22) Medick, M.A. : One Dispersion of Longitudinal Waves in Rectangular Bars, Journal of Applied Mechanics, Sept., 1967.
 - 23) Fraser, W.B. : Stress Wave Propagation in Rectangular Bars, Int. J. Solids Structures, Vol. 5, 1969.
 - 24) Aalami, B. : Waves in Prismatic Guides of Arbitrary Cross Section, Journal of Applied Mechanics, Dec., 1973.
 - 25) 田中古之助・岩橋嘉生 : 長方形断面棒を伝わる弾性波の分散関係, 機械学会論文集, 42 巻, 364 号, 1976.
 - 26) 秋田 宏 : 有限要素により任意の断面形状をした棒中の弾性波を解析する手法, 土木学会論文報告集, 第 260 号, 1977.
 - 27) Nomachi, S.G. and K.G. Matsuoka : Applications of Finite Fourier Integration Transform for Structural Mechanics, Proc. of the 20th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1970.
 - 28) Dean, D.L. and H.V.S. Ganga Rao : Macro Approach to Discrete Field Analysis, ASCE, EM 4, Aug., 1970.
 - 29) 大島俊之・能町純雄 : 折板構造解析による閉リブ鋼床版の弾性挙動の研究, 土木学会論文報告集, 第 278 号, 1978.
 - 30) Nomachi, S.G. and T. Ohshima : On the Stress Analysis of the Beams with Rectangular Cross Section by Means of Finite Prism Method, Proc. of the 24th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1974.
 - 31) Timoshenko, S.P. and J.N. Goodier : Theory of Elasticity, Third Edition, McGraw-Hill, 1970.
 - 32) 能町純雄・角田与史雄・岸 徳光 : 薄肉 H 形断面ばりの弾性波の位相速度について, 土木学会論文報告集, 第 244 号, 1975.
 - 33) 佐藤泰夫 : 弾性波動論, 岩波書店, 1978.
 - 34) 北原道弘・平島健一・丹羽義次 : 高異方性弾性体の近似解析理論に関する二, 三の基礎的考察, 土木学会論文報告集, 第 266 号, 1977.
 - 35) 能町純雄・大島俊之・吉田紘一 : 矩形断面梁の棒状要素による応力解析について, 土木学会年次学術講演会, I-5, 1974.
 - 36) 能町純雄・大島俊之 : 補強材を有する弾性体の棒状要素による応力解析について, 土木学会北海道支部研究発表会論文集, 第 31 号, 1975.
 - 37) 能町純雄・大島俊之 : 内部に軸方向の補強材を有する梁の波動分散曲線について, 第 26 回応用力学連合講演会, C129, 1976.
 - 38) Ohshima, T. and S.G. Nomachi : Dispersion of Harmonic Flexural Waves in Fiber Reinforced Rectangular Beam, 北見工業大学研究報告, 第 9 巻, 第 1 号, 1977.
 - 39) 能町純雄・杉田修一・大島俊之 : 内部に軸方向の鉄筋を有する長方形断面コンクリート梁の波動分散特性について, 土木学会北海道支部研究発表会論文集, 第 33 号, 1977.
 - 40) Cowper, G.R. : The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, June, 1966.