

## 半無限弾性地盤上にある 4 辺自由板の振動解析\*

VIBRATION ANALYSIS OF A FREE RECTANGULAR PLATE RESTED ON  
A SEMI-INFINITE ELASTIC MEDIUM

北村 泰 寿\*\*・桜井 春 輔\*\*\*

By Yasutoshi KITAMURA and Shunsuke SAKURAI

## 1. ま え が き

弾性基礎上の板の解析は基礎地盤を Winkler 基礎とするよりも半無限弾性体、また無限板よりも有限板、さらに静的問題よりも動的問題として考えることによって数理的取り扱いが難しくなる。無限板の動的問題については、Winkler 基礎上の厚板に対する Yen ら<sup>1)</sup>の解析、半無限弾性体を対象とした横田<sup>2)</sup>の解析などがみられる。一方、4 辺自由な有限板（以下、4 辺自由板と略）の静的問題に対する研究としては、筆者ら<sup>3)</sup>の固有振動モードを利用した級数解による解析も含めて、多数の成果が得られている。しかし、半無限弾性体上にある 4 辺自由板の動的問題を対象とする場合には、数理的取り扱いが難しくなるため、いくつかの近似化が導入されている。Oien<sup>4)</sup>は 2 次元問題として、両端自由はりの固有振動モードを利用した級数解を用い、Galerkin 法の適用による解析を行った。また、井口<sup>5)</sup>は Oien の手法に準拠しているが、地盤を 3 次元的に取り扱うなど Oien の解法を拡張した。しかし、数理的な取り扱いを容易にするため、板にはり理論を適用し、3 次元の波動伝播問題には近似式を用いている。さらに、井口<sup>6)</sup>は前報と同様に細長い形状の板を対象として、はり要素を用いた FEM による数値解析法も示した。

一方、板剛度が大きくなり、矩形底面をもつ剛体と考えられる場合には、底面下の接触圧分布を求める問題として、筆者ら<sup>7)~9)</sup>の解析も含めていくつかの研究成果が得られている。これらの解析では、未知接触圧に関する積分方程式を解くため、次のような分割法が利用されている。すなわち、まず接触面を有限個の要素に分割し、各要素内での接触圧を一定として、影響係数の概念によ

って変位を重ね合わせる。そして、接触面における変位の境界条件から、各要素の未知接触圧に関する連立一次方程式を解く問題に帰着させる。

以上のように、筆者らの知る限りでは、半無限弾性体上の 4 辺自由板の動的問題を厳密に取り扱った研究は見当らない。このような状況を考えて、本論文は、筆者らが静的問題に対して示した、文献 3) の考え方を動的問題に拡張した級数解による解析手法を示す。さらに、本論文では、級数解による数値結果の検証も兼ねて、板に FEM を適用した解析手法も示す。4 辺自由板の固有振動解析についてはいくつかの方法が提案されているが、本論文においては固有振動モードは Ritz の方法<sup>10)</sup>によって求めた。また、FEM の適用にあたっては、一般によく知られている変位関数<sup>11)</sup>を用いた剛性マトリックスと質量マトリックスを利用した。なお、これらの解の精度については、本論文が解析手法に主眼を置いたものであるため、その検討を省略した。

## 2. 級数解による解析手法

図-1 に示す座標系において、半無限弾性体上の 4 辺自由板が正弦波外力をその表面に受ける場合を考える。一般に、級数に選ばれる座標関数が、① 4 辺自由板の境界条件、② 4 辺自由板の自由振動方程式、③ 直交

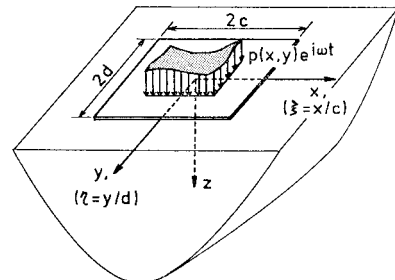


図-1 座 標 系

\* 第 34 回年次学術講演会において一部発表済。

\*\* 正会員 工修 神戸大学助手 工学部土木工学科

\*\*\* 正会員 Ph.D., 工博 神戸大学教授 工学部土木工学科

条件の3つの条件を満足するとき、座標関数の係数は Ritz の方法あるいは Galerkin の方法を適用することによって決定できる。本論文では、座標関数が境界条件を正確には満足していないことを考慮して、系のポテンシャルエネルギーと運動エネルギーから得られる次の汎関数  $U$  を極小にする変分法の原理に基づく Ritz の方法によって座標関数の係数を決定する。

$$U = \int_{-d}^d \int_{-c}^c \left[ \frac{D}{2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} - \frac{1}{2} \rho h \omega^2 w^2 + \int_0^w q(x, y; w') dw' - p(x, y)w \right] dx dy \quad (1)$$

ここで、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ 、 $D$  は板剛度、 $E$  はヤング係数、 $\nu$  はポアソン比、 $h$  は板厚、 $\rho$  は密度、 $\omega$  は加振円振動数、 $w$  はたわみ、 $2c, 2d$  は板の辺長である。また、 $p(x, y)$  は分布外力の振幅、 $q(x, y)$  はたわみが  $w$  のときの接触圧である。

一方、式 (1) の接触圧  $q(x, y)$  は、半無限弾性体に対する混合境界値問題として、次式の第1種 Fredholm 型積分方程式の解となる。

$$\int_{-d}^d \int_{-c}^c G(x-\bar{x}, y-\bar{y}, \omega) q(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = w(x, y) \quad (2)$$

ここで、 $G(x-\bar{x}, y-\bar{y}, \omega)$  は Green 関数、すなわち半無限弾性体表面の  $(\bar{x}, \bar{y})$  点に作用する単位の正弦波点加振力によって表面の  $(x, y)$  点に生じる変位である。しかるに、この  $G(x-\bar{x}, y-\bar{y}, \omega)$  は座標と加振円振動数に關係し、式 (2) において  $w$  の大小による  $q(\bar{x}, \bar{y})$  の変化に対しては無關係である。したがって、 $q(\bar{x}, \bar{y})$  と  $w$  は線形關係で結ばれる。この線形關係を式 (1) に用い、式 (1) と (2) を無次元化すると次のようになる。

$$U = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \lambda^4 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right)^2 + 2\nu \lambda^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} + 2(1-\nu) \lambda^2 \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 - \mu W^2 + r \bar{q}(\xi, \eta) W - 2 \bar{p}(\xi, \eta) W \right] d\xi d\eta \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{G}(\xi-\bar{\xi}, \eta-\bar{\eta}, \omega) \bar{q}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta} = W(\xi, \eta) \quad (4)$$

ただし、上式の  $r, \mu$  は次式で与えられる無次元パラメーターである。

$$r = 12 \pi \frac{(1-\nu^2) E_s}{(1-\nu_s^2) E} \left( \frac{d}{h} \right)^3 \quad (5)$$

$$\mu = \frac{(1-\nu_s)}{2\pi} \left( \frac{\rho}{\rho_s} \right) \left( \frac{h}{d} \right) a_0^2 \tau \quad (6)$$

ここで、

$$\bar{G} = \frac{\pi E_s d}{(1-\nu_s^2) \lambda} G, \quad \bar{q} = \frac{1-\nu_s^2}{\pi E_s} q, \quad \bar{p} = \frac{p d^3}{D}$$

$$\lambda = \frac{d}{c}, \quad W = \frac{w}{d}, \quad a_0 = \frac{\omega d}{V_s}$$

また、 $V_s$  は横波の伝播速度である。なお、添字  $s$  は半無限弾性体の物理定数を意味する。次に、4 辺自由板の固有振動モードを座標関数として、無次元たわみ  $W$  を次式のように表わす。

$$W(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \varphi_i(\xi, \eta) \quad (7)$$

ここで、 $\varphi_i(\xi, \eta)$  は  $i$  次の板の固有振動モードである。しかるに、式 (3)、(4) は無次元接触圧  $\bar{q}(\xi, \eta)$  に関して連成しているため、このままの形では変形できない。このため、 $\bar{q}(\xi, \eta)$  についても、無次元たわみと同様に級数展開する。

$$\bar{q}(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i f_i(\xi, \eta) \quad (8)$$

ただし、係数  $A_i$  は式 (7) で用いられているものと同じである。このとき、式 (7)、(8) の係数  $A_i$  を決定するため、式 (3) の  $U$  を極小にする条件、すなわち  $\partial U / \partial A_i = 0$  および式 (4) が係数  $A_i$  の値いかんにかかわらず恒等的に成立する条件からそれぞれ次式が得られる。

$$\sum_j A_j \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ \lambda^4 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2} + \nu \lambda^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi^2} \right) + 2(1-\nu) \lambda^2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \xi \partial \eta} - \mu \varphi_i \varphi_j + \frac{1}{2} r (f_i \varphi_j + f_j \varphi_i) \right] d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{p} \varphi_i d\xi d\eta \quad (i=0, 1, \dots) \quad (9)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{G}(\xi-\bar{\xi}, \eta-\bar{\eta}, \omega) f_i(\bar{\xi}, \bar{\eta}) d\bar{\xi} d\bar{\eta} = \varphi_i(\xi, \eta) \quad (i=0, 1, \dots) \quad (10)$$

式 (10) から、式 (8) の展開項  $f_i(\xi, \eta)$  は 4 辺自由板

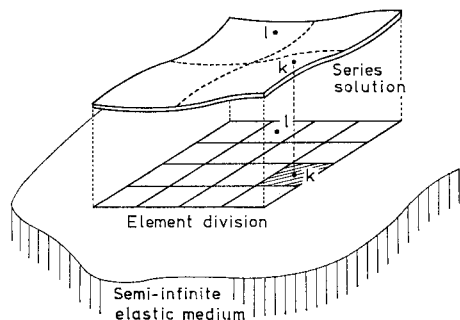


図-2 弾性地盤上の 4 辺自由板の模式図 (級数解の場合)

の  $i$  次固有振動モード  $\varphi_i(\xi, \eta)$  に対する接触圧となる  
ことが明らかである。しかし、式 (10) で表わされる積  
分方程式は解析的には解けないため、本論文では次のよ  
うに分割法<sup>7)~9)</sup>によって求める。まず、図-2 に示すよ  
うに、矩形的接触面に対する分割モデルを考え、次の仮  
定を設ける。

- ① 各要素内での接触圧は等分布とする。
- ② 各要素の変位は中央点の変位とする。

この場合、式 (10) は次式のように書き直される。

$$\sum_{k=1}^N F(\xi_l - \xi_k, \eta_l - \eta_k, \omega) \sigma_k^{(i)} = \varphi_i(\xi_l, \eta_l) \dots (11)$$

ここで、 $N$  は接触面の分割数、 $\sigma_k^{(i)}$  は要素  $k$  の等分布  
接触圧の大きさ、 $\varphi_i(\xi_l, \eta_l)$  は要素  $l$  の中央点の変位を  
表わす。また、 $F(\xi_l - \xi_k, \eta_l - \eta_k, \omega)$  は Green 関数を  
要素  $k$  について面積積分して、次式のように得られる  
影響係数である。

$$F(\xi_l - \xi_k, \eta_l - \eta_k, \omega) = \iint_{S_k} \bar{G}(\xi_l - \bar{\xi}, \eta_l - \bar{\eta}, \omega) d\bar{\xi} d\bar{\eta} \dots (12)$$

ここで、積分範囲は要素  $k$  の領域を表わす。なお、式  
(12) の具体的な詳細については後章で述べる。

ところで、式 (7) の固有振動モード  $\varphi_i(\xi, \eta)$  を求め  
るための Ritz の方法では次式のような級数が用いられ  
ている<sup>10)</sup>。

$$\varphi_i(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn}^{(i)} z_m(\xi) z_n(\eta) \dots (13)$$

ここで、 $B_{mn}^{(i)}$  は  $i$  次固有振動モードを与える係数  
である。また、 $z_m(\xi)$ 、 $z_n(\eta)$  は両端自由はりの固有振  
動モードで、 $z_m(\xi)$  について示すと次のように与えられ  
る。

$$z_0(\xi) = 1/\sqrt{2}, \quad z_1(\xi) = \sqrt{3/2} \xi$$

$$z_m(\xi) = \begin{cases} \frac{\cosh \beta_m \cos \beta_m \xi + \cos \beta_m \cosh \beta_m \xi}{\sqrt{\cosh^2 \beta_m + \cos^2 \beta_m}}; & m=2, 4, 6, \dots \\ \frac{\sinh \beta_m \sin \beta_m \xi + \sin \beta_m \sinh \beta_m \xi}{\sqrt{\sinh^2 \beta_m - \sin^2 \beta_m}}; & m=3, 5, 7, \dots \end{cases} \dots (14)$$

ただし、 $\beta_m$  は次式の根である。

$$(-1)^m \cosh \beta_m \sin \beta_m + \sinh \beta_m \cos \beta_m = 0 \dots (15)$$

式 (13) を式 (11) に用いて、 $i$  次固有振動モードに対  
する要素  $l$  の無次元接触圧を  $f_i(\xi_l, \eta_l) = \sigma_l^{(i)}$  として  
求めることができる。そして、式 (13) とともに式 (9)  
に代入し、固有振動モードの直交性を利用して式 (9) を  
整理すると、係数  $A_i$  に関する連立一次方程式が次式の  
ように得られる。

$$\sum_j A_j \left[ \sum_m \sum_n (\lambda^4 \beta_m^4 + \beta_n^4 - \mu) B_{mn}^{(i)} B_{mn}^{(j)} \right.$$

$$+ \lambda^2 \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s \{ \nu (C_{mr} \bar{C}_{ns} + \bar{C}_{mr} C_{ns}) \\ + 2(1-\nu) D_{mr} D_{ns} \} B_{mn}^{(i)} B_{rs}^{(j)} \\ + \frac{1}{2} \gamma \sum_m \sum_n \sum_{l=1}^N S_l \{ \sigma_l^{(i)} B_{mn}^{(j)} + \sigma_l^{(j)} B_{mn}^{(i)} \} \\ \cdot z_m(\xi_l) z_n(\eta_l) \left. \right] \\ = \sum_m \sum_n B_{mn}^{(i)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{p}(\xi, \eta) z_m(\xi) z_n(\eta) d\xi d\eta \\ (i=0, 1, \dots) \dots (16)$$

ここで、 $S_l$  は無次元座標系における要素  $l$  の面積であ  
る。また、式 (16) の  $C_{mr}$ 、 $D_{mr}$  は、

$$C_{mr} = \int_{-1}^1 z_m''(\xi) z_r(\xi) d\xi \\ D_{mr} = \int_{-1}^1 z_m'(\xi) z_r'(\xi) d\xi$$

で表わされる積分で、 $m, r$  の組み合わせについて積分を  
行った結果は文献 3) あるいは文献 12) に与えられてい  
る。なお、 $C_{ns}$ 、 $D_{ns}$  は上式で  $\xi, m, r$  の代りに  $\eta, n,$   
 $s$  と置き換えたものである。さらに、 $\bar{C}_{mr}$  は  $C_{mr}$  の  $m$   
と  $r$  を、また  $\bar{C}_{ns}$  は  $C_{ns}$  の  $n$  と  $s$  を入れ換えたも  
のである。

### 3. FEM による解析手法

正弦波外力による系全体の振動方程式は、時間項を省  
略して、次式のように表わされる。

$$-\frac{ab h \rho \omega^2}{25200} [M] \{\delta\} + \frac{D}{15 ab} [K_p] \{\delta\} + \{Q\} = \{P\} \dots (17)$$

ここで、 $a, b$  は分割要素の  $x, y$  方向の辺長である。  
また、 $\{\delta\}$  は節点変位、 $\{Q\}$  は節点反力、 $\{P\}$  は節点  
外力で、それぞれ回転成分と鉛直成分に分けて次式のよ  
うに表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \{\delta\} &= \{a\theta_{x1}, b\theta_{y1}, a\theta_{x2}, \dots, w_1, w_2, \dots\}^T \\ \{Q\} &= \{T_{x1}/a, T_{y1}/b, T_{x2}/a, \dots, Q_{z1}, Q_{z2}, \dots\}^T \\ \{P\} &= \{M_{x1}/a, M_{y1}/b, M_{x2}/a, \dots, P_{z1}, P_{z2}, \dots\}^T \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

ここで、 $\theta_{xi}, \theta_{yi}, w_i$  は節点  $i$  の回転角およびたわみ、  
 $T_{xi}, T_{yi}, Q_{zi}$  は節点  $i$  に働く抵抗モーメントおよび反  
力、 $M_{xi}, M_{yi}, P_{zi}$  は節点  $i$  に作用する外モーメント  
および外力である。さらに、式 (17) における  $[M]$ 、  
 $[K_p]$  は変位関数を、

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 \\ + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \\ \dots (19)$$

とするとき得られる無次元質量および無次元剛性マトリ  
ックスで、要素に対するものは周知である<sup>11)</sup>。

次に、節点に働く反力については、抵抗モーメントを

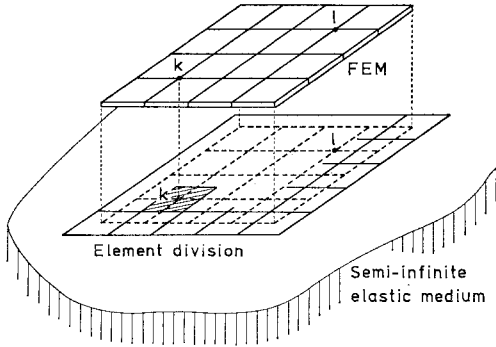


図-3 弾性地盤上の4辺自由板の模式図 (FEM の場合)

0 として、鉛直方向の反力のみ考える。このとき、板と半無限弾性体との結合の状態を模式的に示すと図-3 のようである。つまり、同図に示すように、本論文では板の節点と地盤の分割要素の中央点を直接一致させる方法をとる。ただし、この方法によると、板の周辺部では実際の接触面より広い面積に対して連続条件を考えていることになる。Cheung<sup>13)</sup>は、この連続条件を用いて、半無限弾性体上の板の静的解析を行った。一方、井口<sup>9)</sup>は、板(はり要素)と地盤と同じ分割メッシュを用い、簡単な変換マトリックスを導入して、分割要素の中央点で連続条件を満足させるよう工夫した。しかし、本論文では、この両方法の優劣に対する議論は省略し、連続条件は前者の場合のみを対象とした。したがって、FEM を利用する場合には、全体の精度を向上させるうえで大きな制限があることに留意しなければならない。

前述の式(12)で定義した影響係数の概念を用いると、節点変位の  $x$  方向成分と節点反力の  $x$  方向成分は次式で結びつけられる。

$$\{w\} = -\frac{(1-\nu_s^2)\lambda}{\pi E_s d} [F] \{Q_z\} \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 $[F]$  は無次元影響係数マトリックスで行列要素は次式のように与えられる。

$$F_{l,k} = F(\xi_l - \xi_k, \eta_l - \eta_k, \omega) d^2 / ab\lambda \dots\dots\dots (21)$$

式(20)を次式のように変形して、

$$\{Q_z\} = \frac{\pi E_s d}{(1-\nu_s^2)\lambda} [F]^{-1} \{w\} \dots\dots\dots (22)$$

式(18)で表わされている  $\{\delta\}$  と  $\{Q\}$  の関係を求めると次式となる。

$$\{Q\} = \frac{\pi E_s d}{(1-\nu_s^2)\lambda} [K_s] \{\delta\} \dots\dots\dots (23)$$

ここで、

$$[K_s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [F]^{-1} \end{bmatrix}$$

である。次に、式(23)を式(17)に代入して、式を整理する。

$$\left[ -\frac{abh\rho\omega^2}{25\,200} [M] + \frac{D}{15\,ab} [K_p] \right]$$

$$+ \frac{\pi E_s d}{(1-\nu_s^2)\lambda} [K_s] \{\delta\} = \{P\} \dots\dots\dots (24)$$

さらに、 $V_s^2 = E_s / 2\rho_s(1+\nu_s)$  であることを考慮して、式(24)を無次元化すると次式のように書き直される。

$$\left[ -\frac{\mu\bar{a}\bar{b}}{25\,200} [M] + \frac{\lambda^2}{15\,\bar{a}\bar{b}} [K_p] + r[K_s] \right] \{d\} = \{\bar{P}\} \dots\dots\dots (25)$$

ここで、 $\bar{a} = a/c = a\lambda/d$ ,  $\bar{b} = b/d$ ,  $\{d\} = \{\delta\}/d$ ,  $\{\bar{P}\} = \{P\}\lambda d/D$  である。

### 4. 影響係数

前述の式(12)で定義した影響係数は、要素  $k$  に作用する単位等分布加振力によって  $l$  点に生じる変位で、概念的に図示すると図-4 のようになる。矩形面積 ( $\bar{a} \times \bar{b}$ ) をもつ

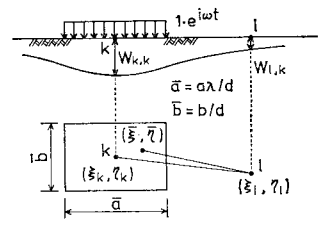


図-4 影響係数計算の概念図

要素に対する式(12)の厳密式は、二重 Fourier 変換を利用して、次式のように誘導できる。

$$F(\xi_l - \xi_k, \eta_l - \eta_k, \omega) = -\frac{2}{\pi(1-\nu_s)a_0} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\zeta^2 - \varepsilon^2}}{F(\zeta)} \frac{\sin\{(a_0\bar{a}/2)\zeta \cos \theta\} \sin\{(a_0\bar{b}/2)\zeta \sin \theta\}}{\zeta \sin \theta \cos \theta} \cdot e^{i a_0 \zeta (X \cos \theta + Y \sin \theta)} d\theta d\zeta \dots\dots\dots (26)$$

ここで、

$$F(\zeta) = (2\zeta^2 - 1)^2 - 4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - \varepsilon^2} \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\varepsilon = \sqrt{(1-2\nu_s)/2(1-\nu_s)}$$

$$X = (\xi_l - \xi_k)/\lambda, Y = \eta_l - \eta_k$$

また、 $F(\zeta)$  は Rayleigh 関数である。しかるに、式(26)は極を含む特異積分となり、その計算は容易ではない。したがって、本論文では筆者らが先の論文<sup>8),9)</sup>で用いた、次に述べるような実用的な方法によって影響係数を求める。

半無限弾性体の表面に原点をとり、原点において鉛直方向に作用する点加振力  $Q_z e^{i\omega t}$  による表面の鉛直変位は Lamb<sup>14)</sup> によって次式のように与えられている。

$$w = -\frac{(1+\nu_s)\kappa Q_z e^{i\omega t}}{\pi E_s} \int_0^\infty \frac{\zeta \sqrt{\zeta^2 - \varepsilon^2}}{F(\zeta)} J_0(\zeta \tilde{\omega}) d\zeta \dots\dots\dots (27)$$

ここで、 $\kappa = \omega/V_s$ ,  $\tilde{\omega} = \omega r/V_s$ ,  $r$  は振源距離、 $J_0(\zeta \tilde{\omega})$  は 0 次の第 1 種 Bessel 関数である。いま、式(27)を次式のような形に書き直す。

$$w = \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \cdot \frac{Q_z e^{i\omega t}}{r} \sqrt{f_1^2 + f_2^2} e^{-i\varphi_f} \dots (28)$$

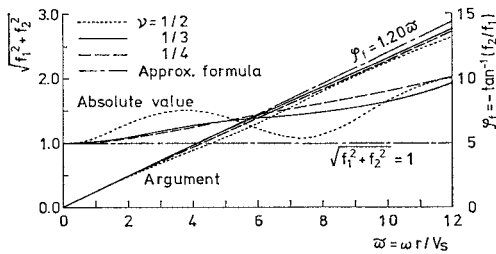


図-5 上下点加振力による変位関数の絶対値と偏角

ここで、 $\varphi_f = -\tan^{-1}(f_2/f_1)$ 、 $f_1$ 、 $f_2$  は式 (27) から得られる実部、虚部の値から式 (28) の係数を繰り出したものである。式 (28) の絶対値  $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$  および偏角  $\varphi_f$  を  $\tilde{\omega}$  に対して調べると 図-5 のように描かれる。同図において、 $\tilde{\omega}$  が小さい場合 ( $\tilde{\omega} < 1$ ) には、 $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$  は 1、 $\varphi_f$  は  $\tilde{\omega}$  に比例するとみなしてもよい。このことから、田治見<sup>15)</sup>は式 (28) の代りに次式のような近似式を提案した。

$$\omega = \frac{(1-\nu_s^2)}{\pi E_s} \cdot \frac{e^{-iC\tilde{\omega}}}{r} Q_2 e^{i\omega t} \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $C$  は比例定数である。なお、式 (28) あるいは式 (29) で  $\omega=0$  とおくと、Boussinesq の解に一致することがわかる。

(1) 载荷要素以外の要素に対する影響係数

要素に働く等分布接触圧を、Saint-Venant の定理によって、要素の中央点に作用する集中力として扱う。このとき、影響係数は式 (28) によって求まる無次元変位となり、次式のように表わされる。

$$F(\xi_l - \xi_k, \eta_l - \eta_k, \omega) = \frac{\tilde{a}\tilde{b}}{R} \sqrt{f_1^2 + f_2^2} e^{-i\varphi_f} \dots\dots\dots (30)$$

ここで、 $R = \lambda r/d = \sqrt{(\xi_l - \xi_k)^2 + \lambda^2(\eta_l - \eta_k)^2}$  である。また、式 (30) の絶対値および偏角は、図-5 において、 $\tilde{\omega} = a_0 R/\lambda$  に対して求めればよい。なお、式 (26) と (30) で得られる値を比較した結果では、载荷要素に最も近い要素でもわずか数 % の差異にすぎないことがわかった<sup>9)</sup>。したがって、式 (26) の代りに式 (30) で影響係数を求めても実用上問題がない。さらに、筆者らは文献 8)、9) の解析においては、式 (30) の  $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$  および  $\varphi_f$  を  $4\tilde{\omega} = 0.5$  間隔の  $\tilde{\omega}$  に対する数値として与えておき、その間は直線補間によって求めた。

(2) 载荷要素に対する影響係数

いま、 $\tilde{\omega}$  が十分小さくなるように分割要素の大きさを決めるとき、载荷要素の影響係数は式 (29) を载荷面に対して面積積分することによって得られる。

$$F(0, 0, \omega) = \frac{4}{Ca_0} \left[ -i \{ \tan^{-1}(\lambda\tilde{\lambda}) + \tan^{-1}(1/\lambda\tilde{\lambda}) \} \right.$$

$$\left. + \int_0^{\tan^{-1}(\lambda\tilde{\lambda})} \left\{ \sin\left(\frac{Ca_0\tilde{a}}{2\lambda\cos\theta}\right) + i \cos\left(\frac{Ca_0\tilde{a}}{2\lambda\cos\theta}\right) \right\} d\theta \right. \\ \left. + \int_0^{\tan^{-1}(1/\lambda\tilde{\lambda})} \left\{ \sin\left(\frac{Ca_0\tilde{b}}{2\cos\theta}\right) + i \cos\left(\frac{Ca_0\tilde{b}}{2\cos\theta}\right) \right\} d\theta \right] \dots\dots\dots (31)$$

ここで、 $\tilde{\lambda} = \tilde{b}/\tilde{a}$  である。また、上式の積分は  $\sin(K/\cos\theta)$ 、 $\cos(K/\cos\theta)$  の展開公式を利用して次式のように行う。

$$\left. \begin{aligned} \int \sin\left(\frac{K}{\cos\theta}\right) d\theta &= K D_1 - \frac{K^3}{3!} D_3 + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{K^{2n+1}}{(2n+1)!} D_{2n+1} + \dots \\ \int \cos\left(\frac{K}{\cos\theta}\right) d\theta &= D_0 - \frac{K^2}{2!} D_2 + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{K^{2n}}{(2n)!} D_{2n} + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots (32)$$

ただし、 $D_n = \int (\cos\theta)^{-n} d\theta$  ( $n=0, 1, \dots$ ) である。式 (26) で  $X=Y=0$  ( $k=l$ ) とおいて得られる厳密式は極を含む特異積分を行わなければならないのに対して、式 (31) の近似式は極を含まないため容易に計算できる。なお、厳密式と式 (31) によって計算される値を比較した結果では両者の差異はない<sup>9)</sup>。

5. 数値計算結果とその考察

本論文の解法を実際問題へ適用するためには、いくつかの基礎的な検討が必要である。ここでは、正方形板 ( $2d \times 2d$ ,  $\lambda=1.0$ ) の中央に集中点加振力が作用する場合を例にとって検討を行った。その際、座標関数に用いる4辺自由板の固有振動モードは  $\nu=0.225$  について、影響係数は  $\nu_s=1/3$  について得られるものをそれぞれ利用した。また、本論文の数値計算は無次元化した式で行うため、式 (5)、(6) で示される無次元パラメーター  $r$ 、 $\mu$  および無次元周波数  $a_0 = \omega d/V_s$  に値を与えなければならない。まず、 $r$  は  $1 \sim 1000$  の範囲で変化させたが、参考のため、 $r$  の変化が板の変形挙動に与える影響について付録に略述しておく。さらに、 $a_0$  は  $0 \sim 3.0$  の範囲に変化させ、 $\mu$  は  $\mu = (1-\nu_s)a_0^2 r/10\pi$  として  $a_0$ 、 $r$  の値を代入して求めた。なお、本章の数値計算では  $x$  軸および  $y$  軸に関する対称性が考慮できるため、計算結果はすべて第1象限についてのみ図示した。

(1) 級数解による解の精度

付図-1 の結果から、 $r$  が大きくなると板の動的な変形挙動は複雑になり、級数解の項数<sup>注1)</sup>を増すとともに

注 1) 本論文の計算例では対称性が考慮できるため、doubly symmetric モード (式 (13) の  $m, n=\text{even}$ ) のみを用いればよい。したがって、式 (7) の項数は  $(m+2)(n+2)/4$  となる。

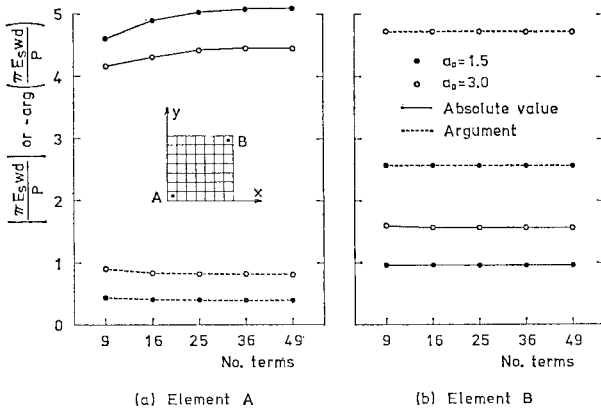


図-6 たわみに対する級数解の項数の影響 ( $r=1000$  のとき)

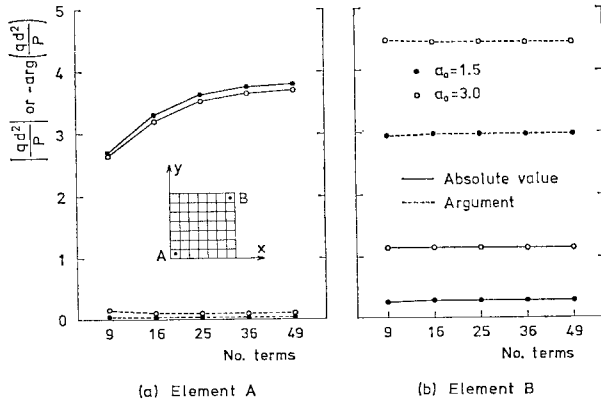


図-7 接触圧に対する級数解の項数の影響 ( $r=1000$  のとき)

接触面の分割数<sup>注2)</sup>も多くしなければならないことが予測される。いま、剛基礎 ( $r=0$  で級数解が第1項のみの場合に相当する) の場合について、文献 8) の結果から接触面の分割数と変位の関係が付表-1 のように得られる。同付表から、接触面の分割数による変位の差異は小さく、いずれの分割数でも収束値と数 % 以内の誤差であると推測される。しかし、剛基礎の場合には端部で応力集中が起こるため、分割数によって端部の接触圧分布が影響を受けやすいことには留意しなければならない。一方、文献 3) の静的解析においては、 $r$  が大きくなると級数解の項数を多くとる必要があることを述べた。

これらの参考資料をもとにして、まず接触面の分割数を 196 としたときの級数解の項数の影響を調べる。図-6, 7 は  $r=1000$  のとき、項数の増加によるたわみおよび接触圧の収束状況を示したものである。両図から、中央部のたわみ、接触圧ともに絶対値の収束性の悪いことが

注 2) 注 1) と同じ理由によって、式 (11) の連立一次方程式は第 1 象限についてのみ作製すればよい。したがって、接触面の分割数  $N$  は第 1 象限の総数でよいが、本論文では、一般的表示として、接触面の全象限に対する分割数とする。

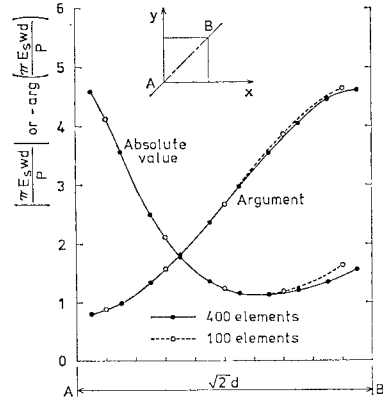


図-8 たわみ (A-B ライン) に対する接触面の分割数の影響 ( $r=1000, \alpha_0=3.0$  のとき)

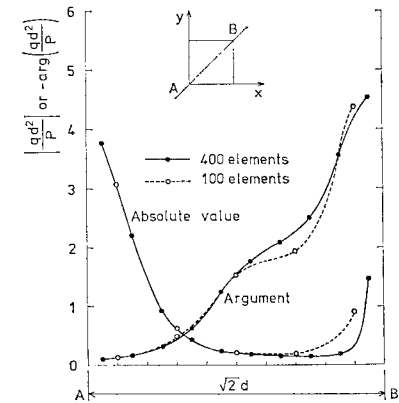


図-9 接触圧分布 (A-B ライン) に対する接触面の分割数の影響 ( $r=1000, \alpha_0=3.0$  のとき)

わかる。また、同じ分割数では、接触圧の精度はたわみよりも低くなっている。しかし、両図から、項数 49 程度で収束しているとみなしても実用的には十分であろうと考えられる。次に、級数解の項数を 25 とし、接触面の分割数がたわみおよび接触圧分布に与える影響を調べたものが 図-8, 9 である。まず、たわみについてみると、端部において若干の差異が生じている程度で、分割数の影響は項数に比べて小さいことがわかる。一方、接触圧分布に対しては、たわみの場合よりも分割数による差異が大きくなり、端部に近づくにつれて顕著になっている。この点をさらに詳しく調べるため、式 (7) あるいは式 (8) の係数  $A_i$  に注目してみる。 $r=1000$  の場合でも、4 辺自由板の低次固有振動モード成分に対する係数  $A_i$  の値が大きく、特に係数  $A_0$  (剛体モードに対する係数) の値は大きくなっている。ところで、剛基礎の場合、付表-1 から分割数による変位の差異はわずかであるのに対して、前述のように端部の接触圧分布は分割数の影響を受けやすい。これらの諸点より、本論文で考慮した  $r$  の範囲 (1~1000) に対して、分割数の影響

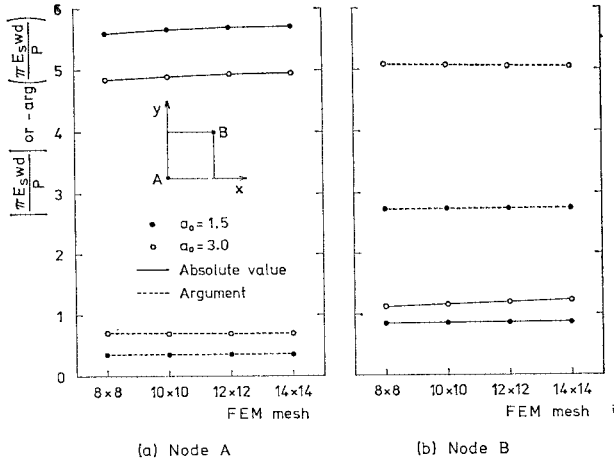


図-10 たわみに対する要素分割数の影響 ( $r=1000$  のとき)

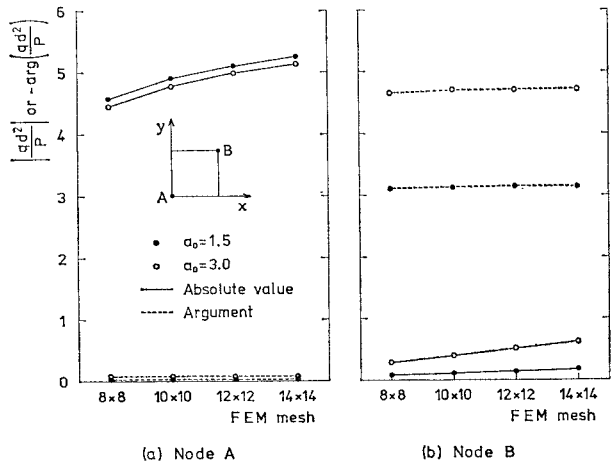


図-11 接触圧に対する要素分割数の影響 ( $r=1000$  のとき)

は端部の接触圧分布に現われるものと考えられる。

以上の結果から、高精度に接触圧分布を求めるためには、級数解の項数、接触面の分割数ともに多くしなければならないことがわかる。しかし、本章における以降の検討事項に対しては十分な精度であるとの判断のもとに、級数解に対する計算条件は項数 49、分割数 196 とした。

(2) FEM による解の精度

FEM を用いる場合、板の節点と地盤の分割要素の中央点を一致させるため、板の要素分割数注3) (以下、表現の便宜上この用語を用いて接触面の分割数と区別する) に対する検討結果は接触面の分割数の影響も含めたものになる。図-10, 11 は要素分割数がたわみおよび接触圧

注3) 注2)と同様に、式(25)の連立一次方程式は第1象限についてのみ作製すればよいが、本論文では全象限に対して要素分割数を表示する。

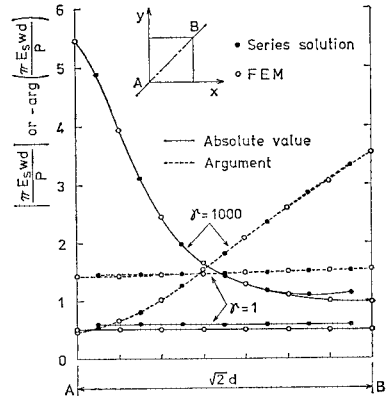


図-12 級数解と FEM によるたわみ (A-B ライン) の比較 ( $\alpha_0=2.0$  のとき)

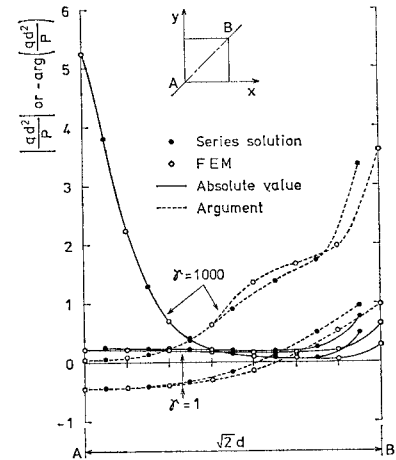


図-13 級数解と FEM による接触圧分布 (A-B ライン) の比較 ( $\alpha_0=2.0$  のとき)

に及ぼす影響を調べたものである。両図から、収束性としては、級数解の場合と同様にたわみよりも接触圧の方が悪くなっている。また、隅角部節点のたわみ、接触圧ともに、その絶対値は直線的に増加しており、この程度の要素分割数では収束する様子がみられない。これは、先に述べたように、板周辺節点での地盤との連続条件が十分満足されていないことが原因の1つであると考えられる。

以上の結果より、接触圧分布に関してはさらに要素分割数を多くする必要があると思われるが、ここでは要素分割数を一応  $14 \times 14$  として、級数解による結果との比較を次に示す。図-12, 13 は  $r$  の違いが級数解と FEM による計算結果の比較にどのような影響を与えているか調べたものである。まず、 $r=1000$  のとき、たわみは端部において若干の差異があるものの両解法による結果はよく一致していることがわかる。一方、ほとんど剛体とみなし得る  $r=1$  におけるたわみの差異は接触圧分布の

違いによるものと考えられる。つまり、未知接触圧に関する連立一次方程式に問題を帰着させたとき、端部においては、接触圧を求める位置が異なっていることの影響が強く現われる。したがって、 $r=1$  の場合、両解法による合反力の差がたわみの差異に関係しているものと考えられる。同様に、 $r=1000$  に対しては、端部の接触圧分布の違いが、端部のたわみに影響を与えているものとみなされる。

これらの考察から、板周辺部におけるたわみ、接触圧ともに多少精度上の問題が残るが、FEM を用いる解法は実用的には十分利用可能である。

(3) 近似式を用いた影響係数の精度

载荷要素以外の要素に対する影響係数は式 (27) で与えられる点加振力と変位の関係式を用いた。しかるに、前章で述べたように、無次元周波数  $\omega$  が小さい範囲に対する近似式が式 (29) のようにきわめて簡単な形で提案されている。実務的にはより簡単な方法が要求されるため、式 (27) および式 (29) で計算される影響係数の差異がたわみおよび接触圧分布に及ぼす影響について調べる。図 14, 15 は級数解によって得られた中央部および隅角部要素のたわみおよび接触圧を無次元周波数  $a_0$  に対して描いたものである。両図から、 $a_0$  の増加とともに隅角部要素のたわみの絶対値における差異が若干大きくなっている程度である。このように、両者の差異が小さい理由としては、次のように考えることによってほぼ説明できる。まず、影響係数の計算にあたっては、式 (30) に示すように図 5 の絶対値は接触面の分割要素間の距離で割らなければならない。このため、全体の影響係数マトリックスに対して、図 5 に示されている違いほどの影響は与えていないことになる。さらに、影響係数マトリックスにおいては、载荷要素の影響係数が最も大きな値となる。これらの諸点から、本節で考慮した  $a_0$  の範囲では、近似式による影響係数を用いて計算されるたわみおよび接触圧の精度は実用上十分であるとみなしてよい。

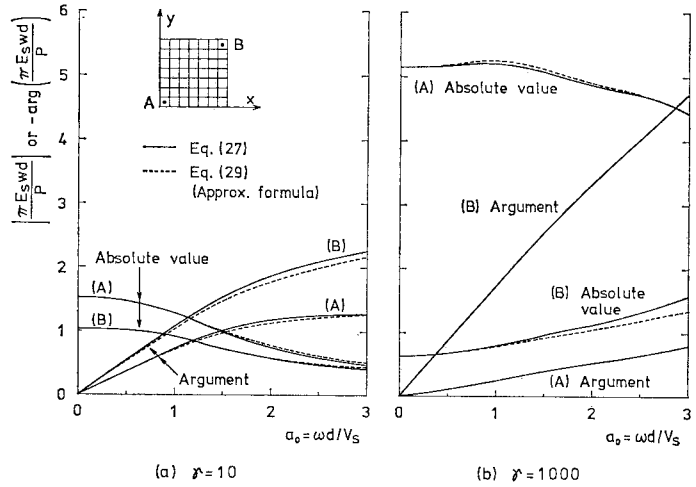


図-14 影響係数の求め方の違いがたわみに及ぼす影響

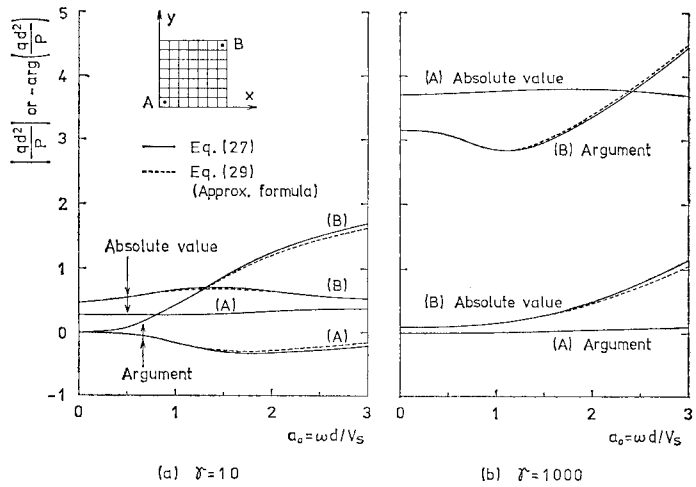


図-15 影響係数の求め方の違いが接触圧に及ぼす影響

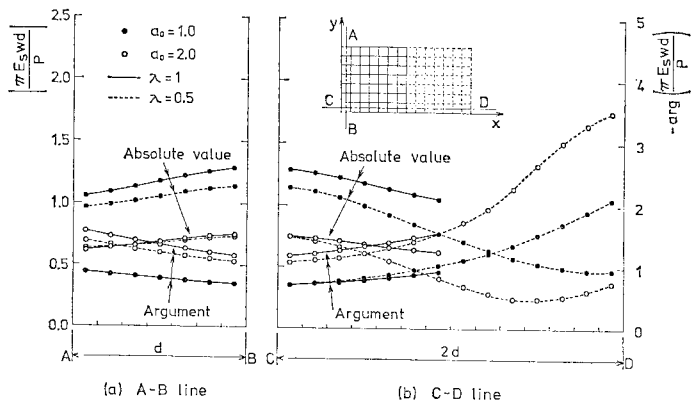


図-16 たわみに対する辺長比の影響 ( $r=10$  のとき)

(4) たわみおよび接触圧分布に関する若干の考察

本節では、辺長比の影響も含めて、たわみおよび接触



圧分布そのものについて若干の考察を行う。計算に用いた各パラメータは本章のはじめに述べたものと同じとし、級数解によって解析した。また、辺長比の影響につ

いては、正方形板 ( $2d \times 2d, \lambda=1.0$ ) と  $x$  方向の辺長が2倍の長方形板 ( $4d \times 2d, \lambda=0.5$ ) の比較のみである。なお、 $\lambda=0.5$  に対する計算条件としては、級数解

における  $x$  方向の項数および接触面の  $x$  方向分割数はそれぞれ  $y$  方向の2倍とする必要がある。したがって、前述の検討結果より、 $\lambda=0.5$  に対する級数解の項数は91、接触面の分割数は392となる。図-16~19 はたわみおよび接触圧分布を  $a_0$  および  $r$  をパラメータとして描いたものである。

まず、これらの図から辺長比の影響に注目すると、 $a_0$  の値いかんにかかわらず、 $\lambda=0.5$  と  $\lambda=1.0$  の差異がたわみ、接触圧分布ともに現われている。たとえば、同じ加振力に対するたわみは  $\lambda=0.5$  の方が  $\lambda=1.0$  よりも小さくなる傾向にある。これは、面積の大きい  $\lambda=0.5$  の方が板の変形に加振力のエネルギーを多く消費するためであると考えられる。同様に、接触圧分布についても、 $\lambda=0.5$  の方が  $\lambda=1.0$  よりも小さくなっており、 $r=10$  の場合には接触圧が分散される様子がよくわかる。また、本論文に図示することは省略したが、正方形板で面積を4倍にした場合においても同じ傾向の結果になっている。

次に、たわみについてみると、 $a_0$  が大きくなるとともに偏角の変化が大きくなり、板の変形は複雑になる傾向にある。さらに、 $r=1000$  に対する図-14の結果も考慮すると、 $r$  が大きくなれば、 $a_0$  の増加とともに中央部のたわみは小さく、端部のたわみは大きくなる。また、接触圧については、図-15の結果も含め、 $r$  が大きくなると、 $a_0$  の増加に対して中央部の接触圧はほとんど変化しないが、端部の接触圧は増加している。一方、 $r=10$  の場合のたわみと接触圧分布を対比するとき、 $a_0=1.0$  のたわみが  $a_0=2.0$  のたわみより大きくなっているのに対して、接触圧分布についてはその関係が逆になっている。この原因としては、 $a_0=2.0$  のときの慣性力が  $a_0=1.0$  のときより大きくなっており、これに伴って接触圧が大きくなっているものと考えられる。これに対して、 $r=100$  の場

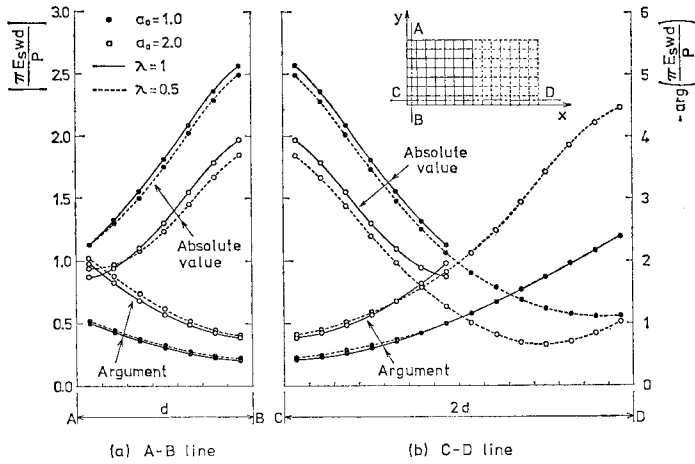


図-17 たわみに対する辺長比の影響 ( $r=100$  のとき)

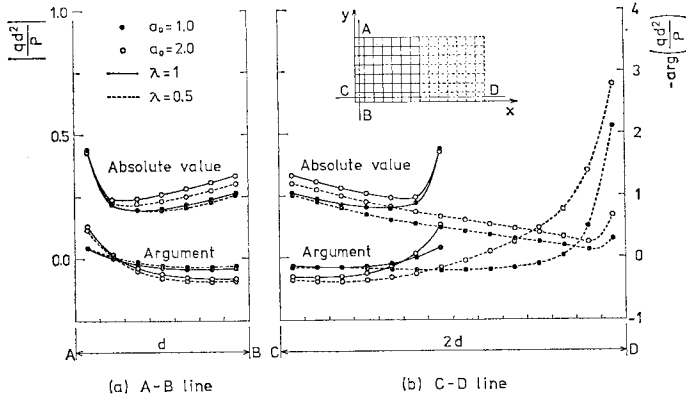


図-18 接触圧分布に対する辺長比の影響 ( $r=10$  のとき)

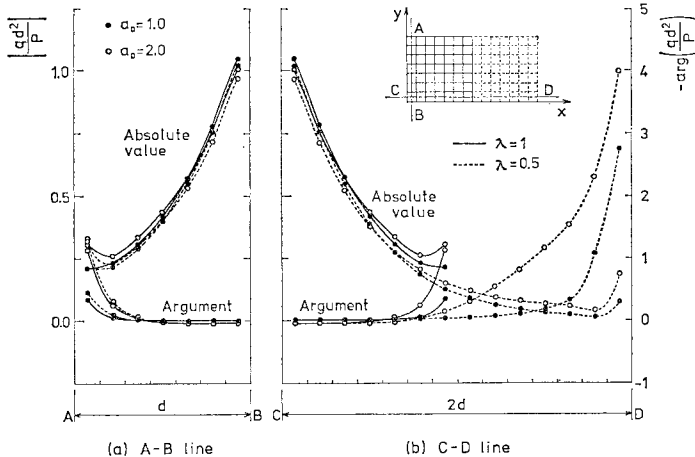


図-19 接触圧分布に対する辺長比の影響 ( $r=100$  のとき)

合には、 $r=10$  のときに比べて板の変形が複雑になるため、この慣性力の効果がはっきりしなくなっているものと思われる。

## 6. あとがき

本論文の特徴は、従来の研究においては見られなかった、板および地盤の両者を3次元的に取り扱っている点である。解析法として級数解による場合とFEMを用いた場合の2つの方法を示し、その両者の差異について詳細に基礎的検討を行った。混合境界値問題に対する積分方程式の解は分割法を利用して求めたが、その際必要となる影響係数についても近似式の有用性を確かめた。なお、本論文では解析の対象は板の中央に集中点加振力が作用する場合に限られているが、ここで示した解法は種々の荷重パターンあるいは波動入射の問題などへも適用が可能であり、その研究を行う必要がある。そのとき、ここに得られた多くの情報は有益な示唆を与えるものと考えられる。

本論文では級数解とFEMの両者の方法に対する優劣についての断定は避けるが、今後利用する上で次の点を考慮する必要がある。まず、FEMによる計算では、曲げモーメントと曲率に関する剛性マトリックスが必要となるため、計算機の容量が非常に多くなる。一方、級数解による場合、級数解の項数と接触面の分割数の両者をバランスよく決定することは煩雑であるが、計算機の容量の面では有利である。ところが、級数解は固有振動モードを用いているため、構造物の形状が限定される。これに対して、FEMによる場合、任意形状の構造物へ拡張可能という非常にすぐれた面を持っている<sup>16)</sup>。しかし、板周辺部における地盤との連続条件が十分満足されないことは精度の向上に制限となる点に留意しなければならない。

最後に、この研究を遂行するにあたって、名古屋大学成岡昌夫教授に種々の文献のご紹介とご教示をいただいたことを記し、ここに感謝の意を表します。さらに、本論文の数値計算には、炬口 正君（現・神戸市役所）に協力していただいたことを感謝します。

なお、本論文は昭和53年度文部省科学研究費一般研究(D)「道路交通振動の伝達特性に関する理論的研究」(研究代表者 北村泰寿)による研究成果の一部である。また、数値計算には、京都大学大型計算機センターのFACOM M190を利用したことを付記する。

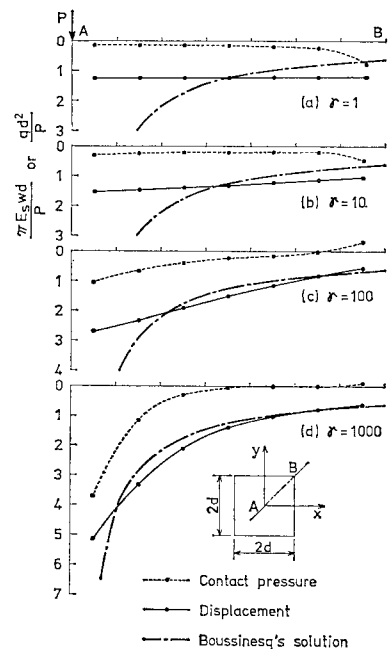
## 【付 録】

### (1) パラメーター $r$ に対する補足説明

本論文の数値計算に際して、 $r$  の変化がたわみおよび接触圧分布にどのような影響を及ぼしているか多少わかりにくい面があるものと思われる。文献3)はその理解の一助にはなるが、改めて本論文でも静的な場合を例にとり若干の補足説明を行っておく。付図-1は $r$ の変化による板のたわみおよび接触圧分布と Boussinesq の解(表面変位)を描いたものである。まず、 $r=1$  の場合には、たわみは剛体変位とほとんど一致しており、接触圧分布は剛体分布となっている。一方、 $r=1000$  の場合、たわみは Boussinesq の解に近づいており、接触圧は中央部に集中してくる。したがって、これらの図から、 $r$  が大きくなることは、板の剛性が相対的に小さくなることを意味している。

### (2) 剛基礎の振動における接触面の分割数

文献8)および9)において、接触面の分割数が剛基礎の複素剛性に与える影響について論じた。その結果では、無次元周波数  $\alpha_0$  が大きくなるとともに、上下振動に対する複素剛性の実部の計算精度が悪くなっている。しかし、本論文のような強制振動の場合、 $\alpha_0$  の増加とともに構造物の慣性力が大きくなるため、複素剛性の誤差



付図-1  $r$  の変化が A-B ラインのたわみおよび接触圧分布に及ぼす影響(静的な場合)

付表一 剛基礎の変位に対する接触面の分割数の影響 ( $a_0=2.5$  のとき)

分割要素総数	無次元変位 $\pi E_s w d / P$	
	絶対値	偏角 (rad.)
64	0.476	-1.582
100	0.471	-1.563
144	0.467	-1.553
196	0.464	-1.546
256	0.462	-1.541

が剛基礎の変位に与える影響は相対的に小さくなる。このため、付表一に示すように、接触面の分割数は剛基礎の変位にそれほど大きな影響を与えない。

## 参 考 文 献

- 1) Yen, D.H.Y. and S.C. Tang : On the Vibration of an Elastic Plate on an Elastic Foundation, Journal of Sound and Vibration, Vol. 14, No. 1, pp. 81~89, 1971.
- 2) 横田 漢 : 垂直周期荷重による弾性地盤上の板の相互作用—板-基礎の相互作用 (第3報)—, 九州大学工学集報, 第45巻, 第2号, pp. 176~180, 1972.
- 3) 北村泰寿・桜井春輔 : 弾性基礎上の4辺自由板の級数解, 土木学会誌, Vol. 64-3, pp. 61~66, 1979.
- 4) Oien, M.A. : Steady Motion of a Plate on an Elastic Half Space, Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, Trans. ASME, Vol. 95, pp. 478~484, 1973.
- 5) 井口道雄 : 平面的に細長い構造物の地震時における挙動に関する基礎的研究, 第4回日本地震工学シンポジウム, pp. 783~789, 1975.
- 6) Iguchi, M. : Dynamic Interaction of Soil-Structure with Elastic Rectangular Foundation, 第5回日本地震工学シンポジウム, pp. 457~464, 1978.
- 7) 桜井春輔・北村泰寿 : 長方形剛基礎底面の接触圧分布, 土木学会論文報告集, 第175号, pp. 59~73, 1970.
- 8) Kitamura, Y. and S. Sakurai : Dynamic Stiffness for Rectangular Rigid Foundations on a Semi-infinite Elastic Medium, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 3, No. 2, pp. 159~171, 1979.
- 9) 北村泰寿・桜井春輔 : 剛基礎底面の複素剛性に関する一解析法, 土木学会論文報告集, No. 290, pp. 43~52, 1979.
- 10) 日高孝次 : 数値積分法 (下巻), 岩波書店, 1948.
- 11) Zienkiewicz, O.C. and Y.K. Cheung : The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1967 (邦訳 吉識雅夫監訳 : マトリックス有限要素法, 培風館, 1970).
- 12) 北村泰寿・桜井春輔 : 4辺自由板の固有振動について, 建設工学研究所報告, 第20号, pp. 49~65, 1978.
- 13) Cheung, Y.K. and O.C. Zienkiewicz : Plates and Tanks on Elastic Foundations—An Application of Finite Element Method, International Journal of Solids and Structures, Vol. 1, pp. 451~461, 1965.
- 14) Lamb, H. : On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid, Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Series A, Vol. 203, pp. 1~42, 1904.
- 15) 田治見 宏 : 耐震理論に関する基礎的研究, 東京大学生産技術研究所報告, 第8巻, 第4号, pp. 170~215, 1959.
- 16) 北村泰寿・桜井春輔 : 長方形基礎底面の接触圧分布, 土木学会関西支部年次学術講演概要, III-14, 1970.

(1979.7.4・受付)