

最適設計における計算の効率に関する研究

EFFICIENCY IN OBTAINING OPTIMUM DESIGNS

小山 健*・長 尚**

By Ken KOYAMA and Takashi CHOU

1. ま え が き

土木構造物の最適設計問題では、一般に設計変数および制約条件式の数が非常に多い。そのため計算に必要な容量を減らすとともに、計算時間を短縮して計算の効率向上を図ることが最大の課題となっている。Schmit¹⁾らも、最適設計の研究は第 2 段階に入り、最適解の正解を保証することと、特に実用的観点から計算の効率向上を図ることに、研究の重点がおかれるようになってきたといっている。

これまで計算の効率を図る目的でなされてきた主な試みには次のようなものがある。まず suboptimization²⁾とよばれるもので、複雑な最適設計問題を、合理的ないくつかの独立な群に分割し、その群の中でまず最適化を行い、その結果をできるだけ少ない数の設計変数と制約条件式にまとめて表現し、これらを積み重ねて全体の最適化を図ろうとするものである。次に Schmit らの研究³⁾のように、最適化問題への定式化に工夫をして、計算の効率向上と全体の最適を得ることをめざすものがある。また最適塑性設計において、制約条件を全部対象としないで、比較的少ない制約条件式を用い、反復法⁴⁾により最適解を求めようとするものがある。さらに最近では、two-level approach⁵⁾とよばれる手法が提案されている。これは全体の system を多くの小さな subsystem に分解し、それらを独立に解き、次の段階でこれら subsystem 間の調整をする。そしてこの操作を繰り返すものである。

本文では最適化計算に用いる制約条件式の数を減らすことが、計算容量の減少と計算時間の短縮に直接大きく寄与するので、その観点からの若干の工夫について述べ、具体的に変断面連続ばり、ラーメンおよび連続トラ

スなどの計算例によってその効果を検討する。

なお、連続トラスの最適設計においては、Schmit らが提案した方法⁶⁾を拡張して用いている。

2. 計算の効率向上を図るための手法

(1) 概 要

一般に最適化問題においては、その解 x^{opt} は、すべての制約条件式に対して条件いっぱいになるのではなく、かなりの制約条件式に対して余裕が残っている。このような余裕のある制約条件式は、最適化問題の制約条件式として含めなくても結果は同じである。また条件いっぱいとなる場合でも他の制約条件式と従属関係にあるものは同様に制約条件に含めなくてよい。いま変数の数を n 、制約条件式の数を m としたとき、このような結果に影響を与えない制約条件式は、普通 $m-n$ 個以上存在するはずである。したがってこれらの式を何らかの方法であらかじめ知ることができれば、制約条件式の数は n 個以下ですませることができる。

通常の最適設計問題の解法手順のマクロなフローチャートは、図-1 に示すようになる。したがって、図-1 に示されている、繰り返し計

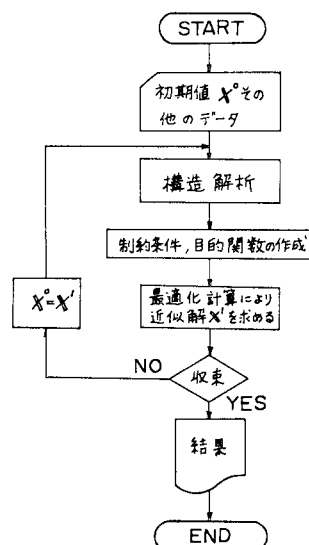


図-1 最適設計問題の解法手順を示すマクロ・フローチャート

* 正会員 工修 信州大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 信州大学教授 工学部土木工学科

算の各段階において、近似解 x^1 を求める際に、制約条件として含めなくてよいと思われる式を制約条件から除去すると、最適化計算の容量および時間の節約が図れることになる。

(2) 変数変換による制約条件式の整理⁹⁾

最適設計における最適化計算の手法としては、反復線形計画法 (SLP 法) が用いられることが多い⁶⁾。その場合、一般に move limit が設けられ、一つの変数に上下限の2つの制約条件式が付加される。形式的には $2n$ 個の制約条件式が増えることになる。また変数に上下限値が設けられている場合には、別に $2n$ 個の制約条件式がある。しかし move limit と変数の上下限値の条件は、いずれか一方の厳しい条件式が成立すれば、他方も満たされる関係にある。したがってこれらを同時に考慮した限界を、改めてその段階の move limit と考えれば、 $4n$ 個の式を $2n$ 個に整理することができる。さらに、線形計画 (LP) 法の非負条件とこの move limit の下限条件とを合わせるように変数を変換すれば、LP の非負条件は制約条件式として表面に現れないから、上記の $2n$ 個の制約条件式は n 個に整理することができる。

まず線形化する前の元の非線形計画の問題を次のように表わす。

制約条件： $g^i(x) < 0 \quad (i=1, 2, \dots, M) \dots\dots(1)$

$x_j^l < x_j < x_j^u \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots(2)$

目的関数： $z = f(x) \rightarrow \min. \dots\dots(3)$

ここに、

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \dots\dots(4)$

$x_j^u, x_j^l : x_j$ の上下限値

である。

式 (1), (3) を x^0 の近傍で線形化し、move limit l を追加すると、式 (1)~(3) は次のようになる。

制約条件：

$g^i(x^0) + \nabla g^i(x^0) \Delta x < 0 \quad (i=1, 2, \dots, M) \dots\dots(5)$

$x_j^l < x_j < x_j^u \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots(2)$

$-l_j < \Delta x_j < l_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots(6)$

目的関数：

$z = \nabla f(x^0) \Delta x \rightarrow \min. \dots\dots(7)$

ここに、

$\Delta x_j = x_j - x_j^0 \dots\dots(8)$

$l_j : \Delta x_j$ の move limit

である。

ここで、式 (2) と式 (6) とを同時に満足する新しい move limit t^l, t^u を次のように定義する。

$t_j^l = \min\{l_j, x_j^0 - x_j^l\}$
 $t_j^u = \min\{l_j, x_j^u - x_j^0\} \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots(9)$

この新しい move limit を用いると、式 (2), (6) で表わされる制約条件は次式に集約される。

$-t_j^l < \Delta x_j < t_j^u \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots(10)$

次に LP の変数の非負条件を move limit の下限条件と一致させるために、新しい変数 Δx^* を次のように定義する。

$\Delta x_j^* = \Delta x_j + t_j^l \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots(11)$

この式 (11) の関係を式 (5), (7), (10) に代入すると、制約条件および目的関数は次のようになる。

制約条件：

$\nabla g^i(x^0) \Delta x^* < \nabla g^i(x^0) t^l - g^i(x^0) \quad (i=1, 2, \dots, M) \dots\dots(12)$

$\Delta x_j^* < d_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots(13)$

目的関数：

$z = \nabla f(x^0) \Delta x^* \rightarrow \min. \dots\dots(14)$

ここに、

$d_j = t_j^l + t_j^u \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots(15)$

である。 $x, \Delta x^*, x^l, x^u, l, t^l, t^u$ などの関係を $n=2$ の場合について図示したものが、図-2 である。

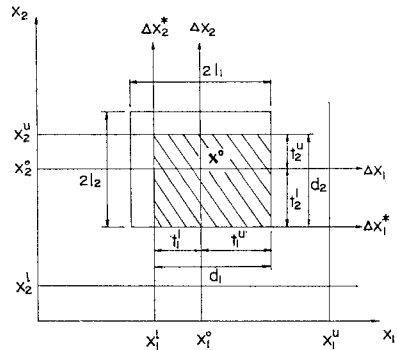


図-2 $x, \Delta x, \Delta x^*, x^l, x^u, l, t^l, t^u$ の関係

このように式 (10) で変数の上下限条件と move limit を集約した段階でも制約条件式の数は $M+2n$ 個であったものが、LP 計算時の変数を式 (11) のように変換することにより $M+n$ 個に減らすことができる。もちろん必要な解は x^1 であるから、LP の解 Δx^* を用いて x^1 は次式から求める。

$x_j^1 = x_j^0 + \Delta x_j^* - t_j^l \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots(16)$

なお、LP の計算法として先に筆者が提案した方法^{7), 8)} を用いれば、式 (12) の右辺に負が生じる場合でも、双対法を用いたり、技巧変数を用いたりする必要はなく、計算の効率がよい。

(3) 制約条件式の棄却^{9), 10)}

前述したように、最適化問題においては、制約条件の中に制約条件式として加えなくてもよいものが、通常変数の数を越えた分だけの数、すなわち $M-n$ 個存在す

る。しかしそれらをあらかじめ正確に判別することは一般に不可能である。そこで近似的に判別する方法について以下述べる。

まず、ある繰り返しの段階の各制約条件式の余裕度 r を式 (1) より次のように定義する。

$$r^i = \frac{g^i(\mathbf{x}^0)}{b^i} \quad (i=1, 2, \dots, M) \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 b^i は $g^i(\mathbf{x})$ の定数部分の値である。 $g^i(\mathbf{x}^0)$ の値が負であればその段階の近似値 \mathbf{x}^0 は、 i 番目の制約条件式に余裕をもっているわけであるが、この値からだけでは各制約条件式の余裕の程度を相対的に比較することはできない。そこで一般に $-b^i$ は応力あるいは変位等の制限値に相当するから、ここで定義した r^i は各制約条件式の制限値に対する比で余裕を評価したことになっている。したがってこの値が小さい制約条件式ほど相対的に余裕がないことになり、さらに、この値が正ならば条件を満たし、0 ならばちょうど条件いっぱい、負ならば条件を満たしていないことになる。

ところで、複数の载荷状態がある場合には、ある点あるいは部材の応力もしくは変位の制限に対して最も大きな影響を与える载荷状態についての制限式だけを制約条件式として用いればよい。このような载荷状態は、あらかじめ技術的判断によって、かなり決定することができるが、必ずしもいずれかに決定しにくい場合もある。このような場合は、異なる载荷状態のうち余裕度 r^i の最も小さい値となるものが、近似的に最も大きな影響を与える载荷状態であることになるので、このほかの载荷状態に対する制約条件式は棄却することにする。

この棄却により式 (1) で表わされる制約条件式の数はかなり減少するが、それでも変数の数 n 個以上存在する場合には、上述の棄却した制約条件式を除いた残りの式の余裕度の小さい順に n 個の制約条件式を選ぶ。これ以外の式は近似的に余裕のある制約条件式と考えられるから、この段階の制約条件から棄却することにする。

このようにすると、式 (1) の制約条件式は変数の数 n 個になる。しかし、このような n 個の式の中にも、条件に対してかなり余裕をもっているものがあることがある。特に最適化の手法として SLP 法を用いるようなとき、繰り返しの初期の段階ではこのようなことが起こる。この場合の余裕のある制約条件式の判定は次のように行う。一般に 図-1 における最適化計算を繰り返すと、式 (1) の $g^i(\mathbf{x})$ の値は次第に 0 に近づく方向に変化し、連続 2 回の変化量はほぼ同じオーダーと考えられる。したがって $g^i(\mathbf{x})$ の値が、1 つ前の段階からその段階に移るときに変化した量の α 倍、この段階で変化しても 0 にならないような式、すなわち、

$$g^i(\mathbf{x}^0) - \alpha \{g^i(\mathbf{x}^{0-1}) - g^i(\mathbf{x}^0)\} < 0$$

となる式の場合は、その段階で余裕をもっているものと判断する。このことから次式を満たす式はその段階の制約条件から棄却することにする。

$$\frac{g^i(\mathbf{x}^{0-1})}{g^i(\mathbf{x}^0)} - 1 < \frac{1}{\alpha} \quad (g^i(\mathbf{x}^0) < 0 \text{ のとき}) \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 \mathbf{x}^{0-1} は 1 つ前の段階の近似値、 $\alpha=1\sim 3$ (1 回当たりの $g^i(\mathbf{x}^0)$ の値の変化量は連続する 2 回でそれほど差がなく、1 つ前の段階の 1~3 倍程度以内と考えて) である。なおこの方法により n 個の式がすべて棄却される場合は、制約条件は式 (13) のみとなるから、LP の計算は不要となり、 \mathbf{x}^1 は式 (16) より次式で求められる。

$$\mathbf{x}^j = \mathbf{x}^0 - t_j \mathbf{t}^j \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (19)$$

以上述べた方法は、いずれも近似的な判別式によるものであるから、棄却してはならない式まで棄却してしまう危険性がある。しかしそのような場合は次の段階では制約条件式に採用されることになり、最終の収束段階では正確な判別式となるから正解が得られることになる。ただし、最初の初期値 \mathbf{x}^0 および式 (18) 中の α の値によっては発散したり、振動したりする可能性はある。そのような場合はこれらの値を変えて試みる必要がある。

3. 計算例

(1) 連続ばりおよびラーメン

a) 定式化

最適化の手法として SLP 法を用いた、連続ばりおよびラーメンの最適許容応力度設計例について述べる。一般に変形法による構造解析の式は次のようになる。

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{P} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、

$\mathbf{K}(\mathbf{x})$: 全構造系の剛性マトリックス

\mathbf{x} : 断面寸法などの設計変数ベクトル

\mathbf{u} : 全構造系の節点変位 (状態変数) ベクトル

\mathbf{P} : 節点に加わる外力ベクトル

である。変位 \mathbf{u} は式 (20) を解いて、

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{P} \dots\dots\dots (21)$$

であり、応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ は、この変位 \mathbf{u} を用いて表わせるから、変位および応力は、設計変数 \mathbf{x} の関数 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ である。

いま最適許容応力度設計の一般的な制約条件として、応力制限、変位制限および設計変数の上下制限を考えると、式 (12), (13) のように定式化した制約条件は次のようになる。

$$\mathbf{p}^k \boldsymbol{\sigma}^k(\mathbf{x}^0) \Delta \mathbf{x}^* \leq \mathbf{p}^k \boldsymbol{\sigma}^k(\mathbf{x}^0) \mathbf{t}^k - \boldsymbol{\sigma}^k(\mathbf{x}^0) + \boldsymbol{\sigma}_a^k \quad (k=1, 2, \dots, K) \dots\dots\dots (22)$$

$$\nabla u^q(\mathbf{x}^0) \Delta \mathbf{x}^* \leq \nabla u^q(\mathbf{x}^0) \mathbf{t}^i - u^q(\mathbf{x}^0) + u_a^q \quad (q=1, 2, \dots, Q) \dots\dots(23)$$

$$\Delta x_j^* \leq d_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \dots\dots(24)$$

ここに,

$\sigma^k(\mathbf{x}^0)$: 初期値 \mathbf{x}^0 に対する k 点の応力度

σ_a^k : k 点の許容応力度

K : 応力制限を考える点の数

$u^q(\mathbf{x}^0)$: 初期値 \mathbf{x}^0 に対する q 点の変位

u_a^q : q 点の許容変位

Q : 変位制限を考える点の数

である. 式 (22), (23) 中の微係数の計算には次式を利用する.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}^0} = -\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}^0) \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j} \mathbf{u}(\mathbf{x}^0) \dots\dots(25)$$

目的関数は全容積を最小にするものとする, 次式のように表わせる.

$$z = F(\mathbf{x}) \rightarrow \min. \dots\dots(26)$$

である.

ここに,

$F(\mathbf{x})$: 全容積 (設計変数の関数)

したがって式 (14) の形に表わした目的関数は次のようになる.

$$z = \nabla F(\mathbf{x}^0) \Delta \mathbf{x}^* \rightarrow \min. \dots\dots(27)$$

b) 変断面連続ばりの例

図-3 に示すような変断面連続ばりの最適設計例について述べる. これは幅 b , フランジの厚さ t_f , ウェブの厚さ t_w , 分割長 L^i , 支点の位置および荷重 V_i が既知で, 各分割点の高さ x_i を次の条件の下で容積が最も小さくなるように決める問題である. 条件は両端支点を除く分割点の最大曲げ応力度が許容応力度 σ_a 以下, 指定した点の最大せん断応力度が許容応力度 τ_a 以下, 指定した点のたわみが許容たわみ δ_a 以下および高さの上下限値が x^u, x^l であるとする.

具体的に計算した例は, 図-4 に示すような 2 径間連

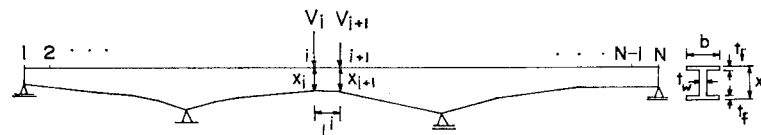


図-3 変断面連続ばりのモデル

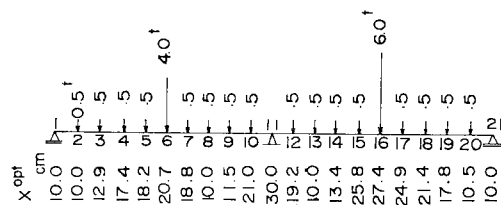


図-4 変断面連続ばりの荷重形式と最適解 \mathbf{x}^{opt}

続変断面鋼ばりで分割は 20 等分 ($N=21$) し, 荷重は図のとおりである. 用いた定数は, $b=12$ cm, $t_f=1.2$ cm, $t_w=1.0$ cm, $x^l=10$ cm, $x^u=30$ cm, $\sigma_a=1400$ kg/cm², $\tau_a=1000$ kg/cm², $\delta_a=1.4$ cm で, 設計変数の初期値 \mathbf{x}^0 はすべて 30 cm, move limit \mathbf{l} もすべて 2 cm とした. なおせん断応力度制限の計算点は支点上と中間支点の両側の分割点の 5 か所, たわみ制限の計算点は各スパンの中央付近の分割点 (5~7, 15~17) の 6 か所とした.

この問題では変数の数は $n=21$, 応力制限の計算点の数は $K=19+5=24$, 変位制限の計算点の数は $Q=6$ であるから, 式 (1) に相当する制約条件の式の数は $M=30$ となる. 変数の上下限制約の式 42 個と move limit の式 42 個を, 式 (24) のように整理すると, これら 84 個の式は 21 個の式となる. したがって式 (22)~(24) の形に定式化した場合の制約条件の式の数の総計は 51 個となる.

この問題の最適解は 図-4 に示してある. この解で制約条件式いっぱいとなったのは, 高さの下限条件 5 個 (1, 2, 8, 13, 21), 上限条件 1 個 (11), 曲げ応力度の制限条件 8 個 (9, 10, 11, 12, 16, 17, 18, 20), たわみ制限 2 個 (5, 17) の計 16 個で, せん断応力度の制限条件にはすべて余裕がある. なおこのケースは変数の数 21 より少ない数の制約条件式が条件いっぱいとなったが, 応力制限だけでなく, 変位制限が条件いっぱいとなる場合にはこのような現象が起こりがちである.

表-1 計算時間と容量の比較 (変断面連続ばり)

	(a)	(b)
CPU TIME (sec)	50.4	30.8
用いた制約条件式の数	51	22~27
繰り返し回数	26	19

ここで, 2. (3) で提案した方法の効果をみるために, 計算時間 (使用計算機 HITAC-8800, 以下同様) および計算容量 (制約条件式の数で示す, 以下同様) の比較を表-1 に示す. ここに, 表中の (a), (b) は制約条件式の棄却をしない場合とした場合を示し, また式 (18) 中の α は 1.5 を用い, 収束条件は目的関数の変化率が 1/100 000 以下とした. この例では, 2. (3) で提案した制約条件を棄却する方法によると, 計算時間で約 39% 減, 計算容量で約 28% 減の効果がある. LP の計算量は (変数の数) × (制約条件式の数) とシンプレックス演算の反復の回数の積に比例し, 反復の回数は制約条件式の数に関連する. したがって LP 計算だけの計算時間の減少率をもっと大きいはず

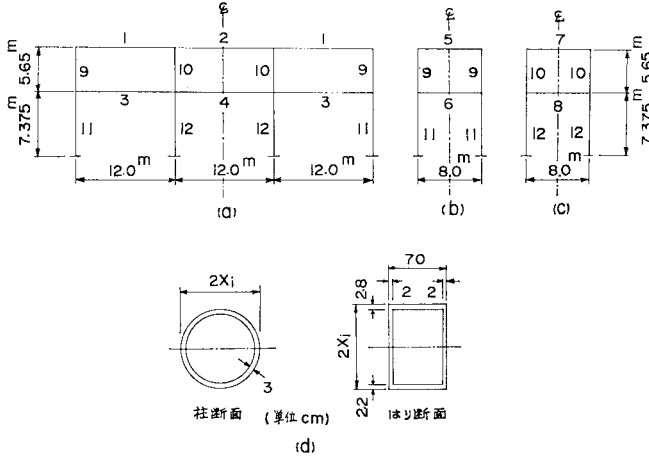


図-5 ラーメンのモデル

であるが、最適設計計算全体で考えると、この例では制約条件式の減少率の約 1.4 倍程度の時間減少率になっている。

前述したように、2. (3) の方法では場合によっては収束しない事態も考えられるが、この例ではそのような現象は起こらなかった。

なお、2. (2) で述べたような、新しい move limit 42 個から、変数の変換によって変数制約条件式は 21 個に集約されているが、その効果については計算比較するまでもないであろう。

c) ラーメンの例

図-5 に示すような、縦方向は 2 層 3 径間対称形ラーメン、横断方向は 2 層 1 径間対称形ラーメンの例について述べる。この問題の設計変数は、はりの高さ $x_1 \sim x_8$ および柱の直径 $x_9 \sim x_{12}$ の合計 12 個である。制約条件は、常時と地震時の 2 つの載荷状態について各部材の直応力度が許容応力度 σ_{sa} 以下および柱の上端の水平変位が許容変位 δ_a 以下とする。目的関数は使用鋼材の容積が最小になることとする。

計算に用いた具体的な数値は次のとおりである。常時死荷重: 600 kg/m² (各層の載荷領域は縦 48 m, 横 16 m), 常時活荷重: 350 kg/m² (各部材に対して最も危険な状態に載荷する), 衝撃係数: 0.5, 地震時死荷重: 550 kg/m², 地震時活荷重: 250 kg/m², 水平震度: 0.2, 弾性係数: 2.1×10^6 kg/cm², 許容直応力度: $\sigma_{sa} = 1300$ kg/cm², 地震時許容応力度割増 60%, 許容水平変位: 縦方向 $\delta_a^l = 5$ cm, 横方向 $\delta_a^c = 3$ cm, 初期値: はり 50 cm, 柱 42 cm, 上限値: 95 cm, 下限値: はり 35 cm, 柱 27.5 cm, move limit: 2 cm.

最適解は次のとおりである。

$$x^{opt} = (43.9, 41.8, 35.0, 35.0, 35.0, 50.3, 35.0, 57.7, 36.6, 30.6, 41.0, 41.3 \text{ cm})$$

この例で条件いっぱいとなった制約条件式は、変数の下限条件 4 個 (3, 4, 5, 7 の各部材), 直応力度の制限条件 5 個 (1, 2, 9, 10, 12 の各部材), 変位制限 2 個の計 11 個である。直応力度の制限条件がいっぱいとなっている荷重状態は、部材 12 については 図-5 (a) の地震時, 部材 1, 2, 9 については 図-5 (a) の常時, 部材 10 については 図-5 (c) の常時となっている。変位制約条件については 図-5 (b), (c) の地震時の頂点の水平変位が条件いっぱいとなっている。

2. (2), 2. (3) で提案した方法の効果を、前例と同様に計算時間および計算容量で比較すると表-2 のようになる。この例では荷重状態が常時と地震時の 2 種類あり、その部材

の最大応力点を探して応力度の制限式を作るとしても、形式的には 部材数 (12) × 荷重状態の数 (2) の計 24 個の応力制限式がある。変位の制限式は縦方向 1 個, 横断方向 2 個の計 3 個あり、このほか、2. (2) で述べたように、move limit と変数の上下限の条件を整理してもなお変数の数の 2 倍の変数制約の制約条件がある。これらの合計 51 個の制約条件式を各段階の LP の計算に採用する場合を表-2 の (a) とする。この (a) について、2. (2) で述べたように LP の非負条件と式 (10) の下限条件を合わせるように変数変換すれば、変数の数の 2 倍だけあった変数制約の条件式を変数の数だけに減らすことができる。この場合は合計 39 個の制約条件式を LP の計算に採用することになる。これを表-2 の (b) とする。この (b) をさらに 2. (3) で述べたように、1 つの部材については 1 つだけの荷重状態から決まる応力制限式を選び、かつ余裕のあるとみなされる制約条件式の棄却を行うと、LP の計算に用いる制約条件式の数の合計は 24 以下となる。これを表-2 の (c) とする。したがって (a) と (b) の差が 2. (2) で述べた変数変換の効果を示し、(b) と (c) の差が 2. (3) で述べた制約条件式の棄却の効果を示すことになる。なお、式 (18) 中の α には 2.0 を用い、収束条件は目的関数の変化率が 1/10000 以下とした。この例では、2. (2) で提案した変数変換を行うと、計算時間で約 60% 減, 計算容量で約 24% 減の効果があがっている。また 2. (3) で述べた棄却を行うと、計算時間で 35% 減, 計算容量で約 50% 減の効果があがっている。ここで、(a) から (b) への制

表-2 計算時間と容量の比較 (ラーメン)

	(a)	(b)	(c)
CPU TIME (sec)	165	60	39
用いた制約条件式の数	51	39	16~19
繰り返し回数	15	15	13

約条件の減少率と (b) から (c) へのそれを比べると後の方が大きくなっている。一方時間の減少率は前者の方が逆にかなり大きくなっている。このことは、制約条件式の減少が時間の減少に単純につながらないことを示している。これは次のような理由からと考えられる。つまり前者では制約条件式の減少が直接時間の減少に結びつくが、後者では 2. (3) で述べた棄却のための判断を行うための時間が必要となるためである。なお (c) の場合について、各段階の LP の計算に採用した制約条件式の数

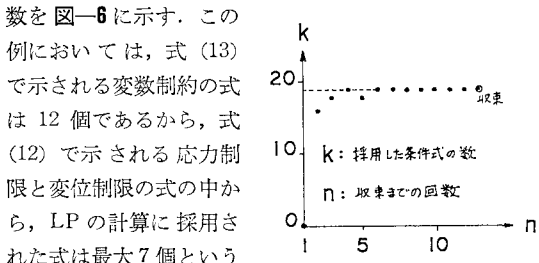


図-6 収束までの回数と採用した制約条件式の数

を最大 7 個ということになり、この数はこれらの式の中で制限いっぱいとなっている式の数に一致している。つまり、2. (3) の方法によれば、応力制限と変位制限の式の中から、最終的に条件いっぱいとなる数程度の制約条件式だけが LP 計算に用いられることになる。

(2) 連続トラス

トラスの最適設計の一般的な方法は、前項の連続ばりおよびラーメンと同様な定式化によるものである。しかしここでは応力制限と断面積の上下制限を制約条件とする場合に対し、Schmit らが提案した方法¹⁾を連続トラスに拡張して用いる。

まず、Schmit らの方法の概要は次のとおりである。トラスを基本静定系と余部材とに分解し、応力制限の制約条件式を次のように書き表わす。

$$\left. \begin{aligned} P_{ik} + \sum_{j=1}^J r_{ij} R_{jk} - A_i \sigma_{ti} < 0 \\ P_{ik} + \sum_{j=1}^J r_{ij} R_{jk} - A_i \sigma_{ci} > 0 \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

(i=1, 2, \dots, I), (k=1, 2, \dots, K)

ここに、

- P_{ik} : k 載荷状態における基本静定系の i 部材の軸力
- r_{ij} : j 余部材に単位の力が作用したときの基本静定系の i 部材の軸力
- R_{jk} : k 載荷状態における j 余部材の軸力
- A_i : i 部材の断面積
- σ_{ti} : i 部材の許容引張応力度
- σ_{ci} : i 部材の許容圧縮応力度
- I : 部材総数

J : 余部材数

K : 載荷状態の数

である。この式 (28) において、 P_{ik} , r_{ij} は基本静定系に関するものであるからあらかじめ計算で求めておくことができる。したがって式 (28) 中の変数は R_{jk} および A_i で、その総数は $I+J \times K$ 個である。ところでこの式 (28) ではつり合い条件は満足しているが、適合条件は入っていない。そこで近似的な適合条件式として次式を制約条件に追加する。

$$R_{jk} \varepsilon_{j,k-1} - R_{j,k-1} \varepsilon_{jk} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, J),$$

$$(k=2, 3, \dots, K) \dots \dots \dots (29)$$

ここに、

ε_{jk} : 断面積の近似値 A^0 を用いたときの、 k 載荷状態における j 余部材のひずみ

である。この式 (29) を書き直すと次のようになる。

$$A_{jk} = A_{j,k-1} \quad (j=1, 2, \dots, J),$$

$$(k=2, 3, \dots, K) \dots \dots \dots (30)$$

ここに、

$$A_{jk} = \frac{R_{jk}}{E \varepsilon_{jk}}, \quad A_{j,k-1} = \frac{R_{j,k-1}}{E \varepsilon_{j,k-1}}$$

$$(j=1, 2, \dots, J), (k=2, 3, \dots, K) \dots (31)$$

である。 A_{jk} , $A_{j,k-1}$ の意味は k もしくは $k-1$ の載荷状態に対する j 余部材の面積を表わしている。したがって式 (29) は、載荷状態によって余部材の面積は変わるものではなく、断面積は 1 組しかあり得ないという条件をひずみの条件、すなわち適合条件式として表現したものである。ただし、ひずみ ε は断面積が決まらないと求められないから、断面積の近似値を用いる。したがって式 (29) は近似的な適合条件式ということになる。これらの式 (28), (29) のほかに断面積の上下制限式として次式を制約条件に加える。

$$A_i^l \leq A_i \leq A_i^u \quad (i=1, \dots, I) \dots \dots \dots (32)$$

目的関数は全容積を最小にするものとすれば、次式のようになる。

$$z = \sum_{i=1}^I L^i A_i \rightarrow \min. \dots \dots \dots (33)$$

ここに、 L^i は i 部材の長さである。

以上のように定式化すると、式 (28), (29), (32) の制約条件および式 (33) の目的関数はすべて変数 R_{jk} , A_i の一次式である。したがって線形計画問題となる。ただし、式 (29) の制約条件式が近似式であるから、1 回の LP 計算では一般に正解は得られない。そこで Schmit らはまず最初の LP 計算では、式 (29) の制約条件を除いて解き、その解を次の回の近似値として用いて式 (29) の ε を求め、LP 計算を行い、収束するまでこの操作を繰り返す方法を提案している。なおこの方法ではどの繰り返しの段階においても、式 (28) の係数は断面積に関係しない (静定系に関するものであるから)

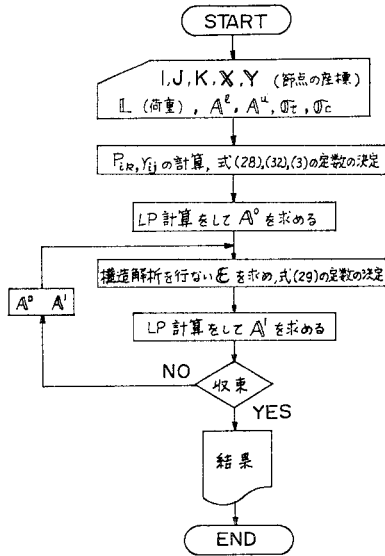


図-7 Schmit の方法のマクロ・フローチャート

ので、常に一定である。したがってこれらの係数は一度求めておくだけでよい。この解法の手順のマクロなフローチャートを図-7に示す。

この方法の特徴は、定式化が SLP 法などに比べて非常に簡単であること、基本的に LP の問題として定式化してあるということである。

次にこの方法を外的不静定トラスに拡張して適用することについて述べる。式 (28) において、余部材力 R_{jk} のほかに、外的不静定トラスの余反力を加えて定式化しても、式 (29) はこの余反力に対しては成立しないので、この方法はこのままでは外的不静定トラスに適用できない。そこで基本静定系の代わりに、基本系として、内的には静定、外的には不静定のままの系を選び、式 (28) 中の P_{ik} , r_{ij} は断面積の近似値 A^0 を用いて求めると、近似的には式 (28) は成立することになる。したがって、LP 計算で求めた断面積を次の回の近似値として、式 (28), (29) の係数を求めて、改めて LP 計算を行うことを繰り返して、収束すれば式 (28), (29) は正確なものとなるから、最適解が得られることになる。ただしこの場合も式 (28) が近似式となるから初期値の与え方によっては収束しないことも考えられる。この修正法が、Schmit らの方法と異なる点は、まず断面積の初期値 A^0 を与える必要があることと、式 (28) も式 (29) と同様に近似式となり、係数は一定でなく繰り返しのつど計算して求めなければならないことである。

このように修正された方法によ

る LP 問題は次のように表わされる。

制約条件:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^J r_{ij}' R_{jk}^* - \sigma_{ti} A_i^* &\leq \sigma_{ti} A_i' + R_0 \sum_{j=1}^J r_{ij}' - P_{ik}' \\ - \sum_{j=1}^J r_{ij}' R_{jk}^* + \sigma_{ci} A_i^* &\leq -\sigma_{ci} A_i' - R_0 \sum_{j=1}^J r_{ij}' + P_{ik}' \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, \dots, I), (k=1, 2, \dots, K) \quad (34)$$

$$A_i^* \leq A_i^u - A_i^l \quad (i=1, 2, \dots, I) \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{jk}^* \varepsilon_{j,k-1} - R_{j,k-1}^* \varepsilon_{jk} &= R_0 (\varepsilon_{j,k-1} - \varepsilon_{jk}) \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2, \dots, J), (k=2, 3, \dots, K) \quad (36)$$

$$\text{目的関数: } z = \sum_{i=1}^I L^i A_i^* \rightarrow \min \quad (37)$$

ここに、

P_{ik}' : k 载荷状態における修正基本系の i 部材の軸力

r_{ij}' : j 余部材に単位の力が作用したときの修正基本系の i 部材の軸力

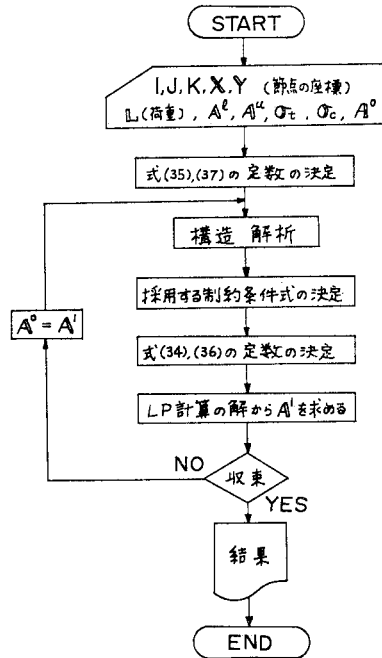


図-8 拡張した方法のマクロ・フローチャート

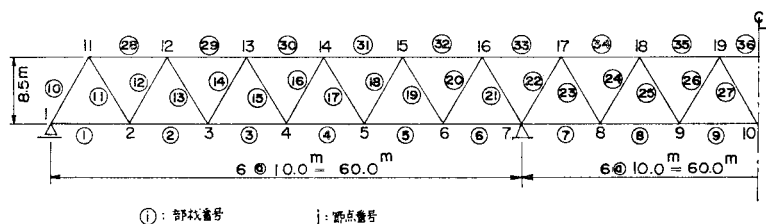


図-9 連続トラスのモデル

$$R_{jk}^* = R_{jk} + R_0$$

R_0 : R_{jk}^* を非負にするための正の大きな値

$$A_i^* = A_i - A_i^l$$

である。

さてこの LP 問題の制約条件式の数は形式的には、式 (28) が $2I \times K$ 個、式 (29) が $J(K-1)$ 個、式 (32) が $2I$ 個の総計 $2I(K+1) + J(K-1)$ 個となるが、2. (2) で述べたような変数変換を行うと、式 (32) は式 (35) のように I 個となり、式 (34)~(36) の総計は $I(2K+1) + J(K-1)$ 個となる。さらに 2. (3) で述べたような制約条件式の棄却を行うと式 (34) は I 個以下となる。したがって実際に LP 計算に用いる制約条件式の総数は $2I + J(K-1)$ 以下となる。 $J=0$ 、すなわち内の静定トラスの場合には制約条件式の数は載荷状態に関係なく常に $2I$ 個以下となる。この修正された方法のマクロなフローチャートを 図-8 に示す。

なお、式 (34)、(36) の制約条件式の右辺は負になるものが生ずるが、2. (2) の最後に述べたことがここでもいえる。

具体的な計算例として 図-9 に示すような 3 径間連続対称トラスについて述べる。荷重は、死荷重が 42.2 t/m、集中活荷重が 19.9 t、等分布活荷重が 1.38 t/m とする。この場合、各部材に最大の影響を与える活荷重の載荷状態として 図-10 に示すように 16 ケース ($K=16$) が考えられる。部材数は $I=36$ 、内の不静定次数は $J=0$ であるから、制約条件式の数は形式的には、 $2I(K+1) = 1224$ 個であるが、前述のような整理を行うと $2I = 72$ 個となる。断面積の初期値 A^0 、上下限值 A^u, A^l 、許容応力度 σ_t, σ_c 、最適解 A^{opt} および応力制限がいつ

表-3 連続トラスの初期値など最適解

i	A^0 (cm^2)	A^l (cm^2)	A^u (cm^2)	σ_t (kg/cm^2)	σ_c (kg/cm^2)	A^{opt} (cm^2)	k
1	300.0	50.0	500.0	1400.0	-1000.0	54.4	1
2	"	"	"	"	"	134.8	2
3	"	"	"	"	"	161.9	3
4	"	"	"	"	"	138.3	3
5	"	"	"	"	"	63.0	4
6	"	"	"	"	"	138.9	-15
7	"	"	"	"	"	152.6	-12
8	"	"	"	"	"	50.0	
9	"	"	"	"	"	70.2	8
10	"	200.0	"	"	"	200.0	
11	"	50.0	"	1900.0	-900.0	79.0	1
12	"	"	"	1400.0	"	89.7	-2
13	"	"	"	"	"	57.7	2
14	"	"	"	"	-700.0	50.0	
15	"	"	"	"	"	50.0	
16	"	"	"	"	"	59.4	11
17	"	"	"	"	"	118.8	-11
18	"	"	"	"	-900.0	108.7	12
19	"	"	"	"	"	169.1	-12
20	"	"	"	1900.0	"	116.1	13
21	"	200.0	"	1400.0	-1000.0	220.5	-13
22	"	200.0	"	"	"	200.0	
23	"	50.0	"	1900.0	-900.0	99.2	14
24	"	"	"	1400.0	"	133.0	-15
25	"	"	"	"	"	85.5	15
26	"	"	"	"	"	55.5	-16
27	"	"	"	"	-700.0	50.0	
28	"	"	"	"	-1000.0	152.3	-1
29	"	"	"	2100.0	-1250.0	183.8	-2
30	"	"	"	"	"	186.0	-3
31	"	"	"	"	"	129.6	-4
32	"	"	"	1400.0	-1000.0	50.0	
33	"	"	"	2100.0	-1250.0	115.0	15
34	"	"	"	1400.0	-1000.0	51.9	4
35	"	"	"	2100.0	-1250.0	67.1	-7
36	"	"	"	"	-1250.0	96.5	-8

ばいとなった部材の載荷種別番号 (正番号は σ_{ti} っぽい、負番号は σ_{ci} っぽいであることを示す) を 表-3 に示す。収束条件は断面積の変化率が 1/1000 以下となることとして、繰返し回数は 7 回、CPU TIME は 51.2 sec であった。この例では 表-3 に示すように、応力制限いっぱいとなった式の数は 29 個、断面積の下限条件でいっぱいとなった式の数が 7 個、合計変数の数に等しい 36 個であった。なお、 $\alpha=2.0$ を用いて、72 個の中から LP の計算に採用した制約条件式の数は 32~62 個であった。この例のような場合では、前述のような制約条件式の整理を行わなければ、実用上計算することは不可能であろう。この例においても、発散とか振動するといった現象は起こらなかった。

4. まとめ

以上を要約すると次のようになる。

(1) 最適設計計算の効率向上を図る手法として、変数変換による変数制約条件式の集約法と、近似的な判別

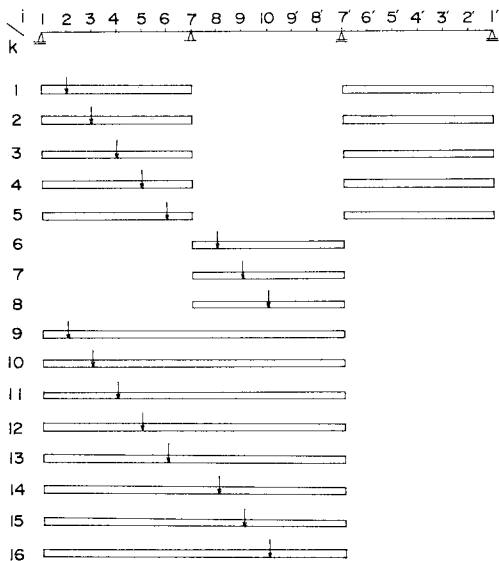


図-10 連続トラスの載荷形式

式による制約条件式の棄却法とが提案された。

(2) これらの方法の効果をみるために、具体的に変断面連続ばり、ラーメンおよび連続トラスの例が示された。

(3) いずれも計算容量の減少および計算時間の短縮の効果は顕著であった。ただし、制約条件式の棄却による効果のうち、時間の減少は容量の減少ほどではない。

(4) 近似的な判別式を用いていることによる、解の発散もしくは振動現象は起こらなかった。初期値が極端な値でない限り、通常は収束するようである。

(5) 連続トラスの最適設計の方法として、Schmitらの提案した方法を拡張修正して用いた。

最後に本文の計算は、信州大学リモートパッチステーションを経由した東京大学大型計算機センターのHITAC-8700/8800を利用したことを付記する。

参 考 文 献

1) Farshi, B. and L.A. Schmit, Jr.: Minimum Weight

Design of Stress Limited Trusses, Proc. of ASCE, Vol. 100, No. ST 1, pp. 97~107, 1974.

- 2) 大久保禎二: トラス構造物の最適設計法に関する研究, 土木学会論文報告集, No. 177, pp. 9~19, 1970.
- 3) Ishikawa, N.: Iterative Optimal Plastic Design of Steel Frames, Proc. of JSCE, No. 237, pp. 109~119, 1975.
- 4) Krisch, U.: Multilevel Approach to Optimum Structural Design, Proc. of ASCE, Vol. 101, No. ST 4, pp. 957~973, 1975.
- 5) 長 尚: 変断面連続ばりの最適設計, 土木学会第29回年次学術講演会, 1974.
- 6) 土木学会編: 土木工学における数値解析/計画法編, サイエンス社, p. 87, 1974.
- 7) 長 尚: 最適設計に用いる線形計画法の改良, 土木学会第25回年次学術講演会, 1970.
- 8) 長 尚: 構造物の最適設計, 朝倉書店, pp. 28~32, 1971.
- 9) 小山 健・長 尚: 最適設計における計算の効率化について, 土木学会中部支部昭和51年度研究発表会, 1977.
- 10) 小山 健・長 尚: 最適化計算の効率化, 土木学会第32回年次学術講演会, 1977.

(1978.2.6・受付)