

高次振動を考慮した道路橋の単一走行車両 による非定常 r.m.s. 応答

NONSTATIONARY ROOT MEAN SQUARE RESPONSE OF
HIGHWAY BRIDGES CONSIDERING HIGHER ORDER
VIBRATIONS UNDER A SINGLE MOVING VEHICLE

岡 林 隆 敏*・中 井 一 彦**・籾 修 道***

By Takatoshi OKABAYASHI, Kazuhiko NAGAI and Shudo NAGATANI

1. はじめに

路面凹凸を定常確率過程でモデル化し、走行車両を 1 自由度系または多自由度系の質量-ばね系でモデル化すると、路面凹凸を考慮した走行車両による橋梁の応答解析は、不規則振動論による解析の対象となる。しかし、単一走行車両の場合でも橋梁の応答は複雑な応答性状を呈する。すなわち、路面で加振された車両の接地力は、橋梁に対して非定常的に作用する。

また、橋梁と車両は連成振動を行い、時変係数系となるために、応答性状は時間的に変化する。さらに、橋梁の初期条件による非定常性が加わり、橋梁の応答は顕著な非定常不規則応答となる。振動が大きい形式の橋梁にモーダルアナリシスを適用して、高次振動まで考慮した解析を行う場合、橋梁と車両の連成が生ずるばかりでなく、車両が走行することにより各モード間に連成が発生する。

このような走行車両による橋梁の応答解析に対して、不規則振動論を適用した解析が試みられている。山田・小堀¹⁾は、走行車両による非定常性を無視した定常応答理論を単純桁橋の解析に適用した。小堀・梶川²⁾は、走行車両による非定常性に着目し、ランガー桁橋を対象として非定常応答解析の手法を示した。吉村・彦坂³⁾らは、橋梁と車両の連成を考慮した非定常応答解析の手法を提案し、これを単純桁橋に適用した。その後、ランガー桁橋の解析⁴⁾を行っている。さらに、これらの手法に基づいた各種の応答解析が進められている^{5)~9)}。

しかし、従来の応答解析では^{2)~4)}橋梁と車両の連成が明確でない。さらに、高次振動を考慮した解析では、た

とえば、ランガー桁橋のような場合、各振動モード間に連成が生じるにもかかわらず、モード間の連成を考慮した解析は、いまだになされていない。著者のうちの 1 人は、単純桁橋を 1 自由度系と仮定し、1 自由度系でモデル化された単一走行車両が走行する場合、橋梁と車両の連成および非定常性を厳密に考慮した解析モデルと、その r.m.s. (root mean square) 応答解析の手法を示した。この解析の結果、橋梁と車両の連成は応答に大きく影響することを指摘した¹⁰⁾。

本論文では、走行車両が 1 台の場合、橋梁と車両の連成のみならず、モード間の連成も厳密に評価し得る解析モデルについて述べるとともに、非定常 r.m.s. 応答解析の手法を示した。本解法によれば、r.m.s. 応答解析は、確定論における応答解析と同様に、微分方程式の数値解析の問題に帰着する。

さらに、運動方程式を状態空間で表示するために、連成している変数間の関係が明瞭になる利点がある。したがって従来の解析モデル、すなわち、橋梁・車両間を無視した解析モデルならびにモード間の連成を無視した解析モデルは、本論文で示した解析モデルの特殊な場合として統一的に把握できる。

本論文では、具体的な数値計算のためにランガー桁橋を解析の対象としたが、本解法は特定の形式の橋梁に限定されるものではない。本解法の妥当性はシミュレーションにより検証した。

次に、橋梁・車両間の連成を無視した解析、モード間の連成・相関を無視した解析および、これらを厳密に考慮した解析を行うことにより、橋梁・車両の連成、ならびにモード間の連成・相関が、応答に及ぼす影響について検討した。また、近似解法として、定常応答解析による手法を提案し、その解法と精度について言及している。

* 正会員 工修 長崎大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 (株) 建設技術研究所

*** 正会員 明和設計 (株)

2. 橋梁-車両系の運動方程式と路面凹凸のモデル化

(1) 橋梁-車両系の運動方程式

不規則な路面凹凸上を走行する、1 自由度系でモデル化された車両によって加振される、橋梁の動的応答について述べる。本論文の解法は、特定の形式の橋梁に限定されるものではないが、具体的なモデルを設定するために、ここでは、図-1 で示されるランガー桁橋について考えることにする。この橋梁の動的解析は、吉村・平井により文献 11) でなされ、その後、小堀・梶川により文献 2) で、不規則応答解析の対象とされている。本研究の橋梁-車両系の運動方程式は、これらの文献を参考にしたものである。

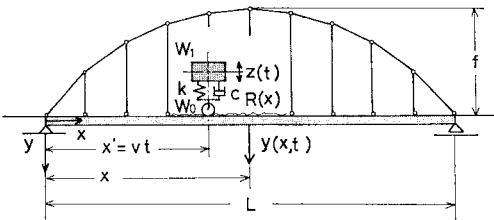


図-1 橋梁-車両系のモデル化

支点から距離 x にある着目点の動的たわみは、モーダルアナリシスを適用することにより、 n 次固有振動モードの基準関数 $\phi_n(x)$ と、基準座標 $q_n(t)$ を用いて、

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \dots\dots\dots (1)$$

で表される。この n 次固有振動モードの基準関数 $\phi_n(x)$ は、一般的な形として、次のような正弦級数^{2), 11)}、

$$\phi_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin \frac{m\pi}{L} x \dots\dots\dots (2)$$

で表すことができる。この a_{nm} は、正規化の条件、

$$\int_0^L \rho \phi_n(x)^2 dx = \frac{\rho L}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}^2 = 1 \dots\dots\dots (3)$$

を満足するものとする。ここに、 ρ および L は、橋梁の単位長さ当りの質量とスパン長である。

また、 n 次の基準座標は、方程式、

$$\ddot{q}_n(t) + 2h_n \omega_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = P(t) \phi_n(vt) \dots\dots\dots (4)$$

より求められる。ここに、 ω_n, h_n はそれぞれ橋梁の n 次固有円振動数と減衰定数、 v は車両の走行速度、 $\dot{}$ は時間微分を表わすものとする。 $P(t)$ は車両の接地力であるが、図-1 のように、 W_1, W_0 を車両のばね上質量およびばね下質量、 g を重力加速度とすると、これは、

$$P(t) = -(W_0 + W_1)g - W_0 \ddot{y}_v(t) - W_1 \ddot{z}(t) \dots\dots\dots (5)$$

になる。しかし、本研究では、ばね下質量はばね上質量に比べ小さいものと考え、これを無視する。なお、 $y_v(t)$ は車両直下の橋梁の動的たわみである。

一方、車両の垂直方向変位を $z(t)$ 、路面凹凸関数を $r(t)$ とすると、車両の運動方程式は、

$$\ddot{z}(t) + 2h_0 \omega_0 (\dot{z}(t) - \dot{y}_v(t) - \dot{r}(t)) + \omega_0^2 (z(t) - y_v(t) - r(t)) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

で表される。ここに、 ω_0, h_0 はそれぞれ固有円振動数および減衰定数である。

このような橋梁・車両系の初期条件は、次のように考えられる。橋梁は、車両が橋梁に進入するまで静止している。他方、車両は橋梁に進入するまで、路面凹凸上を走行していると考えるのが妥当であろう。すなわち、路面凹凸上を走行する車両の運動方程式は、

$$\ddot{z}(t) + 2h_0 \omega_0 (\dot{z}(t) - \dot{r}(t)) + \omega_0^2 (z(t) - r(t)) = 0 \dots\dots\dots (7)$$

となり、車両の初期条件は、車両が橋梁に進入する直前の値である。これは一般に確率変数となる。

(2) 路面凹凸のモデル化

これまでの研究^{12), 13)}によれば、路面凹凸は平均値 0 の定常正規性確率過程でモデル化され、そのパワースペクトル密度は、実測に基づいて、近似的に次式で表されることが知られている。

$$S_R(\varrho) = A \varrho^{-n} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 ϱ, A および n は、それぞれ単位長さ当りの凹凸数、路面凹凸の良否によって決まる定数およびパワースペクトル密度の形状を表す指数である。この路面凹凸は、走行車両上から観測すると時間関数となる。このパワースペクトル密度の具体的な形として、従来の研究では、

$$S_r(\omega) = Av / (\omega / 2\pi)^2 \dots\dots\dots (9)$$

が用いられている。ここに、 $\omega = 2\pi v \varrho$ であり、 A の値としては、 $S_R(\varrho)$ を $\text{cm}^2/\text{cycle}/\text{m}$ で表した場合、通常 $A = 1.0 \times 10^{-3} \text{cm}^2/\text{m}$ が用いられている¹⁾。

本研究では、次式の定常解過程で路面凹凸をモデル化する¹⁰⁾。

$$\dot{r}(t) + \beta r(t) = w(t) \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $w(t)$ は確率特性が次式で規定される正規性白色雑音過程である。

$$(i) E[w(t)] = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$(ii) E[w(t_1)w(t_2)] = S_0 \delta(t_1 - t_2) \dots\dots\dots (12)$$

ただし、 $E[\]$ は集合平均のための演算子である。式(10)の解過程の平均値と分散は、それぞれ 0、 $S_0 / 2\beta$ となり、そのパワースペクトル密度は、

$$S_r(\omega) = S_0 / (\omega^2 + \beta^2) \dots\dots\dots (13)$$

で与えられる。ここに、 $\beta = 2\pi v a, S_0 = (2\pi)^2 v A$ であ

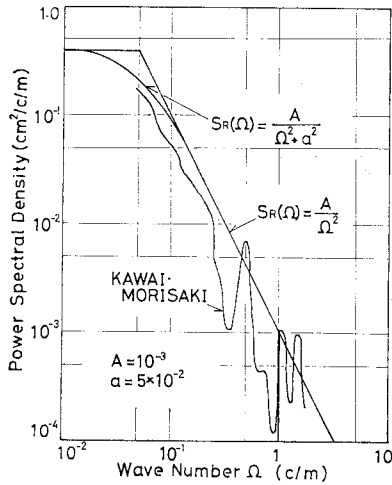


図-2 路面凹凸のパワースペクトル密度

る。なお、 a はパワースペクトルの形状に関するパラメータであるが、従来用いられているパワースペクトル密度、式 (9) に適合させて、 $a=0.05$ とした。

図-2 は、川合・森崎¹³⁾の実測結果、従来のスペクトル、本研究でモデル化した式 (13) のスペクトル、さらにシミュレーションで用いたスペクトルを、それぞれ図示したものである。なお、シミュレーションに用いたパワースペクトル密度は、

$$S_R(\Omega) = \begin{cases} 0.4 & |\Omega| \leq 0.05 \\ A/\Omega^2 & 1 \geq |\Omega| > 0.05 \end{cases} \dots\dots(14)$$

である。

3. 解析モデルの状態空間表示

橋梁の動的解析において、 n 次振動次数まで考慮すると、 x 点のたわみとその速度は、それぞれ n 次元ベクトルである基準関数 $\phi(x)$ と基準座標 $q(t)$

$$\phi(x) = [\phi_1(x) \dots \phi_n(x)]^T \dots\dots(15)$$

$$q(t) = [q_1(t) \dots q_n(t)]^T \dots\dots(16)$$

を用いて、

$$y(x, t) = \phi(x)^T q(t) \dots\dots(17)$$

$$\dot{y}(x, t) = \phi(x)^T \dot{q}(t) \dots\dots(18)$$

で与えられる。

(1) モード間の連成を考慮した解析モデル

橋梁系においては、2. で示しているように、各モードの基準座標の方程式は連成する。このような系を表現するために、次のような状態変数を導入する。橋梁系の状態変数 $Y(t)$ を、 $q(t)$ 、 $\dot{q}(t)$ の要素より構成される $2n$ 次元ベクトル、

$$Y(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} \dots\dots(19)$$

で定義する。

一方、車両-路面系の状態変数は、車両を 1 自由度系と仮定しているの、

$$Z(t) = [z(t) \dot{z}(t) r(t)]^T \dots\dots(20)$$

となる。本研究では、車両を 1 自由度系と仮定したが、多自由度系モデルを考える場合は、 $Z(t)$ の要素を増加させるだけで、本解法は、より一般的な場合に容易に拡張可能である。

さらに、橋梁-車両-路面系の状態変数を $X(t)$ で表し、次式で定義する。

$$X(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \dots\dots(21)$$

この状態変数により、式 (4)、(6)、(10) は正規性確率過程を入力とする確率微分方程式、

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + N(t), X(0) = X_0 \dots\dots(22)$$

で表現できる。ここに、係数行列 $A(t)$ と外力ベクトル $N(t)$ は、

$$A(t) = \begin{bmatrix} A_Y(t) & A_{YZ}(t) \\ A_{ZY}(t) & A_Z(t) \end{bmatrix} \dots\dots(23)$$

$$N(t) = \begin{bmatrix} N_Y(t) \\ N_Z(t) \end{bmatrix} \dots\dots(24)$$

の要素から構成されるものである。 $A_Y(t)$ 、 $A_Z(t)$ は、橋梁系、車両系の係数行列であり、 $(2n \times 2n)$ 、 (3×3) 行列である。 $A_{YZ}(t)$ 、 $A_{ZY}(t)$ は、 $(2n \times 3)$ 、 $(3 \times 2n)$ 行列であり、前者は、車両系が橋梁系に外力として作用する項の係数であり、後者は、橋梁の振動が車両の振動と干渉する項の係数である。また、 $N_Y(t)$ 、 $N_Z(t)$ は、橋梁系および車両-路面系に作用する外力ベクトルであり、それぞれ $2n$ および、3 次元ベクトルである。これら、 $A(t)$ および $N(t)$ の詳細は付録 (1) に示した。

(2) モード間の連成を無視した解析モデル

既往の不規則応答解析は、橋梁-車両-路面系の方程式を、各振動次数ごとに独立な方程式に分離し、各振動次数の方程式を解析するものである。すなわち、橋梁系および車両系では、モード間の連成を生じる項を無視している。

この解析モデルを状態空間で表示すると、次のようになる。 i 次振動次数の橋梁の状態変数を、

$$Y_i(t) = [q_i(t) \dot{q}_i(t)]^T \quad (i=1, \dots, n) \dots\dots(25)$$

とする。また、車両-路面系の状態変数を、

$$Z_i(t) = [z_i(t) \dot{z}_i(t) r(t)]^T \quad (i=1, \dots, n) \dots\dots(26)$$

とする。

さらに、 i 次振動次数に対する橋梁-車両-路面系の状態変数を、

$$X_i(t) = \begin{bmatrix} Y_i(t) \\ Z_i(t) \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, n) \dots\dots\dots(27)$$

で表す。このような状態変数を用いると、 i 次振動次数における橋梁-車両-路面系の方程式は、確率微分方程式、

$$\dot{X}_i(t) = A_i(t)X_i(t) + N_i(t), \quad X_i(0) = X_{i0} \quad (i=1, \dots, n) \dots\dots\dots(28)$$

で記述される。ここに、係数行列 $A_i(t)$ および外力ベクトル $N_i(t)$ は、それぞれ (5×5) 行列および 5 次元ベクトルである。これらの行列ならびにベクトルの詳細は、付録 (2) に示した。

(3) 橋梁・車両間の連成を無視した解析モデル

橋梁と車両の連成を無視した解析モデルが考えられる。これは、式 (28) の係数行列を、

$$A_i(t) = \begin{bmatrix} A_{Y_i} & A_{Y_i Z_i}(t) \\ \mathbf{0} & A_{Z_i} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(29)$$

とすることにより得られる。ここに、 A_{Y_i} 、 A_{Z_i} は定数行列であり、 $\mathbf{0}$ は零行列である。なお、この行列の詳細は付録 (3) に記した。

ところで、路面凹凸は正規性確率過程であるから、これらの方程式の初期値は、正規確率変数となる。

4. 不規則応答解析の理論

(1) 応答過程の確率特性

正規性確率過程を入力とする系の応答は、正規性確率過程になる。したがって、橋梁の動的応答の確率特性は、平均値応答と分散・共分散応答より規定される。

3. の式 (17), (18) より、平均値応答は、

$$\begin{bmatrix} E[y(x, t)] \\ E[\dot{y}(x, t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x)^T E[q(t)] \\ \phi(x)^T E[\dot{q}(t)] \end{bmatrix} \dots\dots\dots(30)$$

と与えられる。平均値回りの変動を \tilde{y} の記号で表すと、

$$\tilde{y}(x, t) = y(x, t) - E[y(x, t)] \dots\dots\dots(31)$$

となるが、この表記を用いて、分散・共分散応答は、定義より次式で表される。

$$\begin{bmatrix} E[\tilde{y}(x, t)^2] & E[\tilde{y}(x, t)\tilde{y}(x, t)] \\ E[\tilde{y}(x, t)\tilde{y}(x, t)] & E[\tilde{y}(x, t)^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x)^T E[\tilde{q}(t)\tilde{q}(t)^T]\phi(x) \\ \phi(x)^T E[\tilde{q}(t)\tilde{q}(t)^T]\phi(x) \\ \phi(x)^T E[\tilde{q}(t)\tilde{q}(t)^T]\phi(x) \\ \phi(x)^T E[\tilde{q}(t)\tilde{q}(t)^T]\phi(x) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(32)$$

ゆえに、応答過程の解析は、 $q(t)$ 、 $\dot{q}(t)$ の確率特性の解析に帰着する。

ところで、変数 $q(t)$ 、 $\dot{q}(t)$ の動的挙動は、3. の式 (22) の確率微分方程式で記述できることを示した。この

式において、外力ベクトル $N(t)$ は、付録 (1) で示したように、平均値と正規性白色雑音過程、

$$N(t) = E[N(t)] + W(t) \dots\dots\dots(33)$$

に分離できる。

(2) 非定常応答解析

平均値応答は、式 (22) の両辺に平均操作を施した。

$$\left. \begin{aligned} E[\dot{X}(t)] &= A(t)E[X(t)] + E[N(t)] \\ E[X(0)] &= E[X_0] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

より得られる。この方程式は、路面凹凸を考慮しない、すなわち確定論による応答解析の基礎式である。

次に、式 (22) の解過程の平均値回りの変動 $\tilde{X}(t)$ を、改めて $X(t)$ とすると、一般性を失うことなく、式 (22) は伊藤型の確率微分方程式を形式的に表した、

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + W(t), \quad X(0) = X_0 \dots\dots\dots(35)$$

になる^{14)~16)}。ここに、 X_0 は平均値 $\mathbf{0}$ の正規確率変数ベクトルである。

ここで、 $X(t)$ の共分散を $R_X(t)$ とすると、定義より、

$$R_X(t) = E[X(t)X(t)^T] \dots\dots\dots(36)$$

となり、共分散の時間的変化は、共分散方程式、

$$\left. \begin{aligned} \dot{R}_X(t) &= A_X(t)R_X(t) + R_X(t)A_X(t)^T + Q_X(t) \\ R_X(0) &= R_{X_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

に支配される。なお、共分散方程式の誘導は付録 (4) に示した。

以下、3. で示した解析モデルに対応する共分散方程式について説明する。

a) モード間の連成・相関を考慮した解析

共分散方程式は、上記のように、伊藤型の確率微分方程式から誘導される式 (37) である。なお式 (37) の係数行列および外力ベクトルの共分散は、付録 (1) に示したとおりである。この場合、変数はすべて連成する。したがって、橋梁を n 次振動次数まで考慮し、車両を 1 自由度系と仮定すると、共分散方程式の未知数の数は、 $(2n+3)(2n+4)/2$ となる。この共分散方程式の解を用いて、モード間の相関を考慮した橋梁の分散・共分散応答は、式 (32) より求められる。

b) モード間の連成・相関を無視した解析

モード間の連成を無視すると、系の減衰定数が小さい場合、異なるモード間の変数の相関は小さくなることが予想される。したがって、応答解析は、各モードごとの分散・共分散 $E[\tilde{q}_i(t)^2]$ 、 $E[\tilde{q}_i(t)\tilde{q}_i(t)]$ 、 $E[\tilde{q}_i(t)^2]$ の解析に帰着する。この分散・共分散は、モード間の連成を無視した解析モデルを表す式 (28) に対応した、共分散方程式より得られる。すなわち、 i 次振動次数の橋梁-車両-路面系の状態変数 $X_i(t)$ に関する共分散を、

$$R_{X_i}(t) = E[X_i(t)X_i(t)^T] \dots\dots\dots (38)$$

とすると、共分散方程式は、

$$\left. \begin{aligned} R_{X_i}(t) &= A_{X_i}(t)R_{X_i}(t) + R_{X_i}(t)A_{X_i}(t)^T + Q_{X_i}(t) \\ R_{X_i}(0) &= R_{X_{i0}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

となる。この方程式は、橋梁を1自由度系と考えたものに対応し、未知数は15となる。なお、係数行列の要素ならびに外力ベクトルの共分散は、付録(2)に記した。

c) 橋梁・車両間の連成を無視した解析

共分散方程式は、式(39)の係数行列を、式(29)で置き換えたものである。この場合、橋梁上を走行する車両の動的挙動は、橋梁の振動により影響されない。すなわち、橋梁上を走行する車両の方程式は、道路上を走行する車両の方程式(7)と同じ式になる。なお、車両は路面凹凸上を走行し、定常状態に達した後、橋梁に進入するものと考えている。ゆえに、車両-路面系の共分散応答は、

$$AzRz + RzAz^T + Qz = 0 \dots\dots\dots (40)$$

の連立方程式から求められる。

本研究は、分散・共分散応答に着目するものであるのに、本論文では平均値応答について言及しない。なお、共分散方程式の初期値については、次のように考えている。橋梁は車両が進入するまで静止しているため、橋梁の状態変数が含まれる分散・共分散の初期値は、すべて0である。他方、橋梁に進入する車両は、定常状態に達しているものと見なすと、車両-路面系の分散・共分散の初期値は、式(40)で与えられる。

(3) 定常応答解析

路面凹凸上を走行する車両の接地力が、常に橋梁上の定位置に作用するものと仮定すると、車両の走行による非定常性および初期条件の影響を無視した、定常共分散応答解析が可能になる¹⁾。この定常応答解析では、橋梁の応答の非定常な特性を得ることは期待できないが、非定常応答解析による最大応答を推定する有効な近似解法として利用できるものと予想される。

そこで、この定常応答解析の定式化について説明する。車両の接地力が橋梁の定位置に作用するとした仮定より、式(22)および(28)の確率微分方程式は、

$$\dot{\phi}_i(vt) = \phi_i(\lambda) \dots\dots\dots (41)$$

としたものになる。ここに、 λ は接地力が作用する橋端からの距離である。したがって、この確率微分方程式は、定数係数となる。この方程式に対応する共分散方程式、式(37)、(39)において、 $t \rightarrow \infty$ の定常状態を考えると、分散・共分散は定数となり、共分散方程式は連立方程式で記述できる²⁰⁾。つまり、微分方程式を数値解析する非定常応答解析に比べ、連立方程式の解法に還元さ

れる定常応答解析は、極めて簡便な解法であるといえる。

1) モード間の連成・相関を考慮した解析

$$A_X R_X + R_X A_X^T = -Q_X \dots\dots\dots (42)$$

2) モード間の連成・相関を無視した解析

$$A_{X_i} R_{X_i} + R_{X_i} A_{X_i}^T = -Q_{X_i} \quad (i=1, \dots, n) \dots\dots\dots (43)$$

ここに、 $A_X, A_{X_i}, Q_X, Q_{X_i}$ はそれぞれ式(41)の仮定に基づいて、 $A_X(t), A_{X_i}(t), Q_X(t), Q_{X_i}(t)$ を定数マトリックスとしたものである。また、 R_X, R_{X_i} は $R_X(t), R_{X_i}(t)$ の定常解を表すものとする。

定常応答解析を遂行するための数値計算の手法について簡単に説明する。この連立方程式は、周知のLiapunovマトリックス方程式²¹⁾の形式になっており、この解法については、多くの研究がなされている。この解法の1つの方法は、マトリックス方程式を直接解くものであり、この解法のアルゴリズム^{22), 23)}が提案されている。他の方法は、マトリックス方程式を、ベクトルを未知数とする通常の連立方程式に展開するものである。この展開に関するアルゴリズム^{21)~23)}もいくつか提案されている。本論文では、後者の方法、すなわち文献24)で提案されているアルゴリズムを用いて解析を行った。このアルゴリズムの詳細は付録(6)に示した。

5. 数値計算と考察

本解法は、モーダルアナリシスを適用することにより、各種の橋梁に適用可能であるが、本論文では、吉村・平井¹¹⁾により解析されたランガー桁橋を数値解析の対象とした。この2例の橋梁の諸元と動特性を、文献11)より引用して、表-1に示した。本論文の数値計算では、橋梁の高次振動モードとして、対称および逆対称それぞれ2次モードまで考慮した²⁾。また、路面凹凸の特性と車両の諸元を、表-2に示した。なお、車両の諸元は、文献2)を参考にしたものである。

(1) 本解法のシミュレーションによる検証

a) シミュレーションの方法

路面凹凸関数は、次のような三角関数モデル²⁵⁾で表現することができる。

$$r(t) = \sum_{k=1}^M a_k \sin(\omega_k t + \phi_k) \dots\dots\dots (44)$$

さらに、 $\dot{r}(t)$ を上式を微分した次式で定義する。

$$\dot{r}(t) = \sum_{k=1}^M a_k \omega_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \dots\dots\dots (45)$$

ここに、 a_k は平均値0、分散 $\sigma_k^2 = 4 S_R(\Omega_k) \Delta\Omega$ で規定される正規乱数、 ϕ_k は $0 \sim 2\pi$ 範囲の一様乱数、さらに、 $\omega_k = 2\pi v \Omega_k, \Omega_k = \Omega_L + (k-1/2) \Delta\Omega, \Delta\Omega = (\Omega_U - \Omega_L) /$

表-1 ランガー桁橋の諸元

		A 橋			B 橋			
支間長 L (m)		57.2			139.2			
ライズ f (m)		9.0			19.2			
総重量 W (t)		182.358			433.327			
格間数		10			16			
減衰定数 h_n		0.02			0.02			
固有振動数と振動モード	f_n (Hz)	正規化モード ($\times 10^{-2}$)			f_n (Hz)	正規化モード ($\times 10^{-3}$)		
		a_1	a_2	a_3		a_1	a_2	a_3
対称1次 ($n=1$)	2.809	-1.0152×10	2.0964	1.0473×10^{-1}	1.173	-5.8883×10	3.2476×10	1.0228
対称2次 ($n=3$)	4.660	-2.1052	-1.0515×10	6.7039×10^{-2}	1.635	-3.2479×10	-5.8876×10	1.2100
逆対称1次 ($n=2$)	1.999	1.0368×10^{-1}			0.6582	6.7254		
逆対称2次 ($n=4$)	7.999	1.0368×10^{-1}			2.632	6.7254		

対称モード: $\phi(x) = a_1 \sin(\pi x/L) + a_2 \sin(3\pi x/L) + a_3 \sin(5\pi x/L)$
 逆対称モード: $\phi(x) = a_1 \sin(n\pi x/L)$ ($n=2, 4$)

表-2 車両と路面凹凸の諸元

路面凹凸のパワースペクトル密度	$S_R(\Omega)$ ($\text{cm}^2/\text{c/m}$)
共分散方程式	$S_R(\Omega) = 0.01/(\Omega^2 + \alpha^2)$ $\alpha = 0.05$
シミュレーション	$S_R(\Omega) = \begin{cases} 0.04 & \Omega < 0.05 \\ 0.01/\Omega^2 & \Omega \geq 0.05 \end{cases}$
走行速度	V : 10 (m/s)
総重量	W_1 : 20 (t)
固有振動数	f_0 : 2.5 (Hz)
減衰定数	h_0 : 0.05

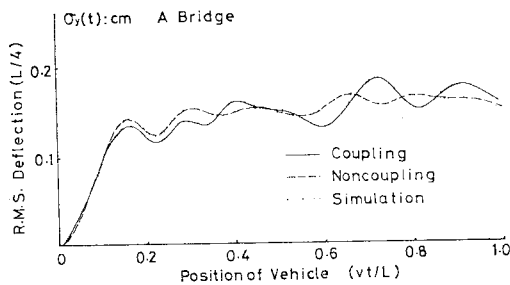
4Ω である。ただし、 Ω_U ならびに Ω_L は、合成する路面凹凸の上限および下限である。なお、路面凹凸は、凹凸の範囲 0~1 cycle/m を 100 分割して合成する。

b) 本解法とシミュレーション

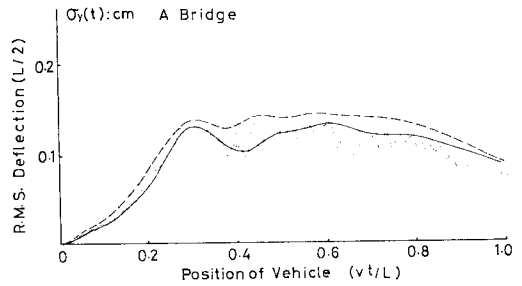
図-3, 4 は、A 橋の r.m.s. たわみ応答および r.m.s.

速度応答を示したものであり、(a) は $L/4$ 点および (b) は $L/2$ 点の応答である。図において、実線と破線は共分散方程式による応答であるが、実線はモード間の連成・相関を考慮した解析、破線はこれを無視した解析である。また、点線はモード間の連成・相関を考慮したシミュレーションの結果である。図の縦軸は、r.m.s. たわみ応答および r.m.s. 速度応答を表し、横軸はスパン長で基準化した車両の橋梁上における位置を示している。なお、数値計算は Runge-Kutta-Gill 法を用いた。また、シミュレーションは、50 本の標本関数より得られたものである。

A 橋の r.m.s. たわみ応答解析では、モード間の連成・相関を考慮した本解法による応答とシミュレーションの

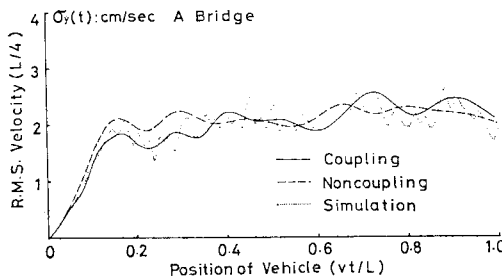


(a) $L/4$ 点の応答

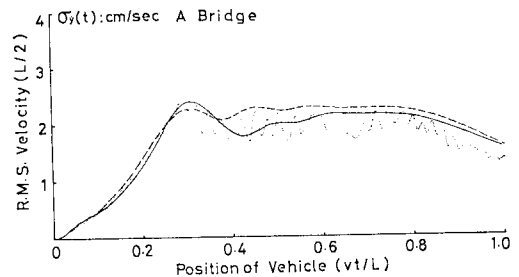


(b) $L/2$ 点の応答

図-3 共分散方程式とシミュレーションによる r.m.s. 変位応答の比較 (A 橋の場合)

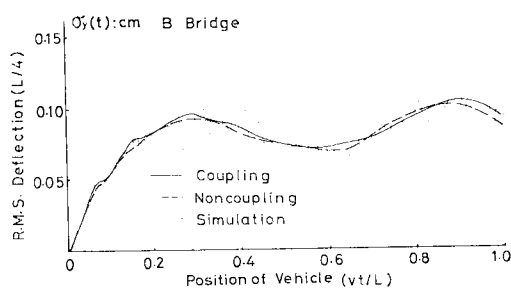


(a) $L/4$ 点の応答

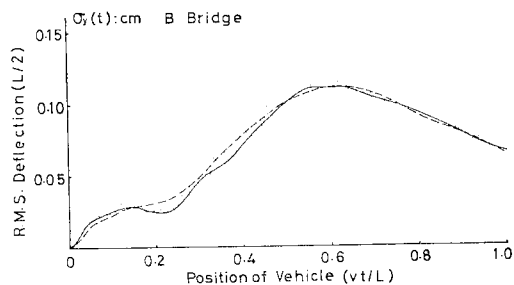


(b) $L/2$ 点の応答

図-4 共分散方程式とシミュレーションによる r.m.s. 速度応答の比較 (A 橋の場合)

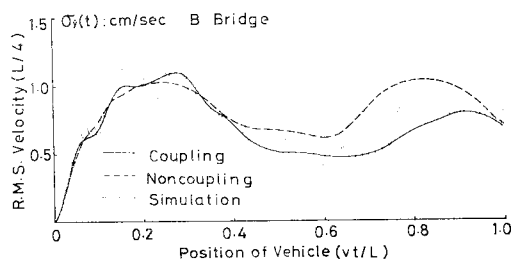


(a) $L/4$ 点の応答

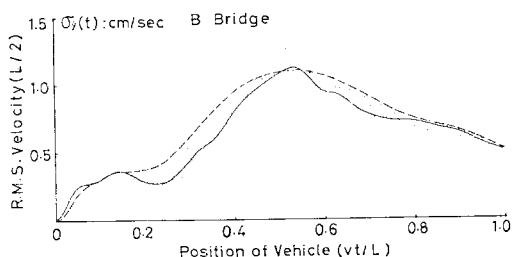


(b) $L/2$ 点の応答

図一五 共分散方程式とシミュレーションによる r.m.s. 変位応答の比較 (B 橋の場合)



(a) $L/4$ 点の応答



(b) $L/2$ 点の応答

図一六 共分散方程式とシミュレーションによる r.m.s. 速度応答の比較 (B 橋の場合)

結果は、 $L/4$ ならびに $L/2$ 点のいずれの場合でも、全区間で良好な一致を示している。さらに、r.m.s. 速度応答でも、 $L/4$ および $L/2$ 点における両者の応答は、全区間で良好な一致を示している。図一五、六は、B橋の r.m.s. たわみ応答と速度応答を示したものであり、(a) は $L/4$ 点、(b) は $L/2$ 点の応答である。r.m.s. たわみ応答および速度応答、いずれの場合でも、モード間の連成・相関を考慮した本解法の応答は、対応するシミュレーションの変動する応答曲線の平均値付近に位置し、両応答はよい一致を示している。

次に、連成・相関を考慮した共分散方程式による解析と、これを無視した解析の差異について検討する。A橋における $L/4$ 点の r.m.s. たわみ応答の場合、車両位置が $0 \sim 0.4L$ の範囲では、無視した解析は考慮した解析より大きく、 $0.7L$ 以降ではこの関係が逆になっている。 $L/2$ 点の応答では、全区間で無視した解析が考慮した解析より過大な値を示している。他方、速度応答は、図より明らかなように、たわみ応答とほぼ同様な傾向を示している。B橋における $L/4$ および $L/2$ 点のたわみ応答では、両解析はほぼ一致している。しかし、 $L/4$ 点の速度応答では、 $0.5L$ 以降において無視した解析は、考慮した解析に比べ過大な値を示している。また、 $L/2$ 点の応答では応答が最大になる点を除いてほぼ全区間で無視した解析が大きな値を示していることがわかる。

このように、動的特性の異なったA橋とB橋の応答解析について検討した結果、次のことが確認できた。モー

ド間の連成・相関を考慮した本解法による応答は、いずれの条件の場合でも対応するシミュレーションの結果と良好な一致を示し、解析モデルならびに本解法の妥当性が検証された。次に、モード間の連成・相関を考慮した解析と無視した解析では、両者の間には一般的な傾向は認められないが、条件によっては、応答曲線の形状ならびに最大 r.m.s. 応答値に差異が生ずる場合がある。

(2) 最大 r.m.s. 応答

車両と橋梁の固有振動数比を変化させて、モード間の連成・相関を考慮した解析、これを無視した解析ならびに橋梁・車両間の連成を無視した解析を行った。これらの解析結果に基づいて、橋梁・車両間の連成ならびにモード間の連成・相関が、応答に及ぼす影響について検討した。なお、本論文では、本解法をスパン長の異なった橋梁に適用する代わりに、相対的に車両の固有振動数を変化させたものである。本解法によれば、r.m.s. たわみ応答ならびに速度応答は同時に得られるが、本論文では、本解法による結果と、すでに研究されている解析結果²⁾の比較が可能な、速度応答解析の結果を示すことにする。さらに、各解析の差異については、非定常応答の代表値として最大 r.m.s. 応答に着目し、これより検討する。数値計算は、表一1 に示したA橋とB橋を対象とした。まず、A橋では、車両の固有振動数を橋梁の対称1次の固有振動数 $f_n=2.809$ に一致させた場合、これを基準として、すなわち、固有振動数比 $f_0/f_n=1$ として、固有

振動数比を $f_0/f_n=0.5, 0.716, 0.8, 0.889, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.5$ の割合で変化させた。ここに、0.716 は車両の固有振動数が、橋梁の逆対称1次振動の固有振動数と一致した場合、0.889 は車両が諸元表で表されている場合である。他方、B橋では、車両の固有振動数が、橋梁の逆対称2次振動の固有振動数 $f_n=2.632$ に一致する場合を、 $f_0/f_n=1$ として、これを $f_0/f_n=0.5, 0.621, 0.8, 0.9, 0.950, 1.0, 1.1, 1.2$ の割合で変化させた。ここに、0.621 は車両の固有振動数が、橋梁の対称2次振動の固有振動数と一致した場合、0.950 は車両が諸元表の場合である。

図-7(a), (b) は、橋梁・車両間の連成を無視した解析によるA橋とB橋の $L/4$ および $L/2$ 点の最大 r.m.s. 応答を示したものである。なお、実線が $L/4$ 点の応答、破線が $L/2$ 点の応答である。この仮定に基づく解析は、次に説明する橋梁・車両間の連成を考慮した解析と比較すると、 f_0/f_n のわずかな範囲を除いて、著しく過大な応答値を示している。すなわち、この解析モデルは、実際の橋梁-車両系の動的挙動を十分に反映したものと言えない。このことは、著者のうちの1人が単純桁橋の解析において報告¹⁰⁾した。さらに、小堀らにより文献2)で、また吉村らにより文献3)で指摘されている。

図-8(a), (b) は、A橋の $L/4$ と $L/2$ 点における最大 r.m.s. 応答を示したものである。図において、太線の実線と破線は、それぞれモード間の連成・相関を考慮した解析、およびこれを無視した解析の結果を表している。ここで、両解析による応答の差異について検討する。 $L/4$ 点の応答では、 $0.5 < f_0/f_n < 1.2$ において、無視した解析は考慮した解析よりかなり小さな値を示している。 $f_0/f_n > 1.2$ では、逆に前者は大きな値を示している。 $L/2$ 点の応答では、 $f_0/f_n < 0.9$ において、両解析はほぼ同じ値を示しているが、 $f_0/f_n > 0.9$ においては、無視した解析の方が大きな値を示している。

図-9(a), (b) は、B橋の $L/4$ と $L/2$

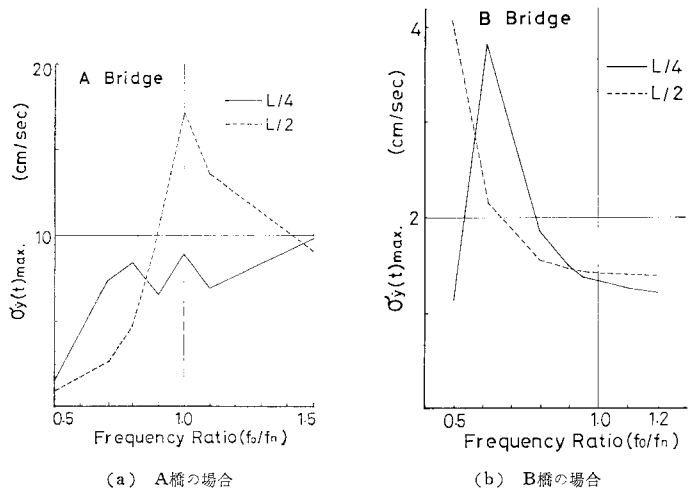


図-7 橋梁と車両の連成およびモード間の連成を無視した最大 r.m.s. 速度応答

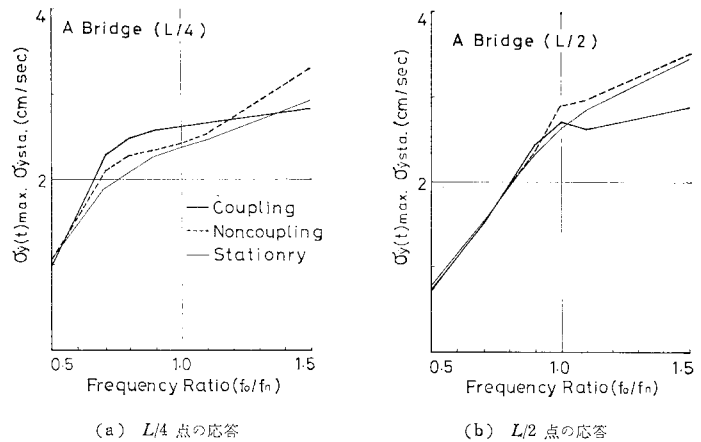


図-8 最大 r.m.s. 速度応答および定常 r.m.s. 速度応答の固有振動数比 f_0/f_n による変化 (A 橋の場合)

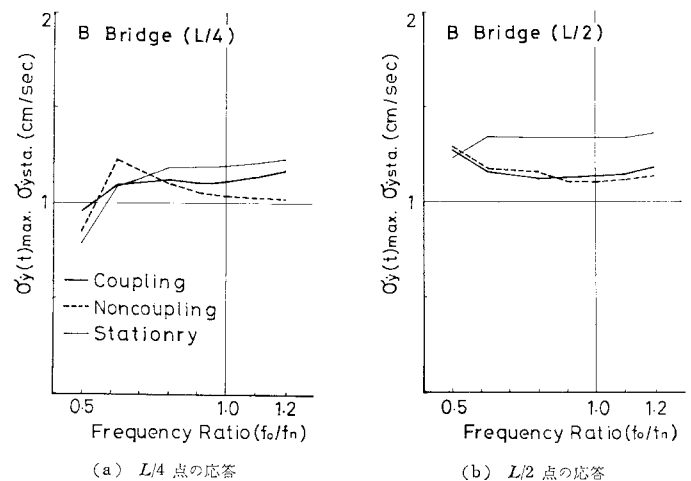


図-9 最大 r.m.s. 速度応答および定常 r.m.s. 速度応答の固有振動数比 f_0/f_n による変化 (B 橋の場合)

点の応答である。L/4 点ならびに L/2 点の応答は、それぞれ $0.53 < f_0/f_n < 0.75$, $f_0/f_n < 0.8$ において、考慮した解析より無視した解析が大きな値を示している。それ以外の f_0/f_n の範囲では、逆に無視した解析による応答が小となる。このように、両解析による応答の間には、一般的な傾向は認められない。しかし、両解析の結果には顕著な差異が生ずる場合があり、モード間の連成・相関を考慮した解析が必要であるものと考えられる。

次に、連成・相関を考慮した解析について、L/4 点と L/2 点の応答を比較する。A 橋では、 $f_0/f_n=0.716$ において、車両の固有振動数と橋梁の逆対称 1 次の固有振動数が一致する。この近傍では L/4 点の応答が卓越し、L/2 点の応答よりかなり大きな値を示している。 $f_0/f_n=1$ では、車両と橋梁の対称 1 次の固有振動数が一致する。ここでは、L/2 点の応答が卓越し、L/4 点の応答より大となるが、その差はわずかである。したがって、A 橋の場合、 $f_0/f_n < 0.95$ では L/4 点の応答が大きく、 $f_0/f_n > 0.95$ では両点の応答の差は小さい。B 橋の場合、 $f_0/f_n=0.403$ において、車両と橋梁の対称 1 次の固有振動数が一致する。そこで、 $f_0/f_n > 0.6$ では L/4 点の応答が卓越し、L/2 点より L/4 点の応答が大となる。 $f_0/f_n > 0.6$ では、車両の固有振動数と橋梁の対称ならびに逆対称 2 次振動の固有振動数が一致するが、両点の応答の間には顕著な差は認められない。

(3) 近似解法の精度

定常 r.m.s. 応答解析を、非定常応答解析による最大 r.m.s. 応答を推定する近似解法と考えた場合、この解法の精度について検討した。定常応答解析でも、モード間の連成・相関を考慮した解析と無視した解析が可能である。しかし、定常応答解析を考える限り、両解析の間には煩雑さの程度に差はないので、ここでは、連成・相関を考慮した解析結果について考えることにする。図-8、9 における実線の細線が、定常応答解析の結果である。

A 橋の応答である図-8 によれば、L/4 点の応答は、ほぼ f_0/f_n の全範囲において、最大 r.m.s. 応答が定常 r.m.s. 応答より大なる値を示している。L/2 点の応答では、 $0.8 < f_0/f_n < 1.0$ の範囲で、最大 r.m.s. 応答が大となっている。さらに、B 橋の応答である図-9 によれば、L/4 点の応答では $f_0/f_n < 0.6$ 、L/2 点の応答では $f_0/f_n=0.5$ 付近において、最大 r.m.s. 応答が大となっている。このように、橋梁の対称振動および逆対称振動の固有振動数と車両の固有振動数が接近する近傍では、非定常性の効果が顕著に表れるために、最大 r.m.s. 応答が定常 r.m.s. 応答より大きな値を示す傾向がある。それ以外の f_0/f_n の範囲では、定常 r.m.s. 応答の値が大とな

る。定常 r.m.s. 応答には、このような特性がある。しかし、両応答を比較すると、定常 r.m.s. 応答は最大 r.m.s. 応答のよい推定値となっていることがわかる。すなわち、定常応答解析による解法は、非定常応答解析による最大 r.m.s. 応答を推定する近似解法となり得るものと考えられる。特に、高次の振動次数まで考慮しなければならない橋梁の解析において、定常応答解析の有用性が発揮できるものと予想される。

6. むすび

本論文では、不規則橋面凹凸上を走行する単一車両により加振される橋梁を対象として、モーダルアナリシスにより解析された橋梁の非定常 r.m.s. 応答解析の手法を提案した。特に本論文は、高次振動まで考慮した橋梁において、モード間の連成を厳密に評価し得る解析モデルの表現とその r.m.s. 応答解析に着目したものである。ここでは、本解法をランガー桁橋に適用し、具体的な数値計算を行った。得られた結果を要約すると、以下のようである。

(1) 路面凹凸関数を、本研究で提案した路面系の定常解過程でモデル化すると、モード間の連成を厳密に考慮した橋梁-車両-路面系の方程式は、伊藤型の確率微分方程式で表現できる。

(2) 橋梁の変位および速度に関する分散・共分散の時間変化は、確定論の応答解析と同様に微分方程式の数値解析の問題に帰着する。

(3) 本解法によれば、各種連成項の関係が明瞭になり、橋梁・車両間の連成を無視した解析、モード間の連成・相関を無視した解析は、本論文で示したモード間の連成・相関を考慮した一般的な解析の特殊な場合として把握できる。

(4) 本解法の妥当性は、ランガー桁橋を対象とした数値計算により検討した。その結果、本解法による応答と対応するシミュレーションは良好な一致を示し、本解法の妥当性が検証できた。

(5) 橋梁・車両間の連成は、無視できないことが確認できた。

(6) モード間の連成・相関を考慮した解析と、これを無視した解析の間には、一般的な傾向は認められない。しかし、両解析の応答には、差異を生ずる場合があり、モード間の連成・相関を考慮した応答解析が必要になり得ることが予想される。

(7) 定常 r.m.s. 応答解析を、非定常応答解析による最大 r.m.s. 応答を推定する近似解法と考え、定常 r.m.s. 応答解析の定式化を行うとともに数値解析の方法について言及した。数値計算の結果、定常 r.m.s. 応答解析は、

最大 r.m.s. 応答を推定する近似解法となり得ることが確認できた.

謝 辞: 本研究を遂行するにあたり, 九州大学 吉村虎蔵教授, 同彦坂 照助教授には常にご指導を賜り, 深く感謝いたします. また, 日頃ご助言とご支援を賜っている長崎大学 小西保則教授, 同高橋和雄助教授, さらに広島大学 花井正実教授に深く感謝の意を表します.

【付 録 (1)】 モード間の連成を考慮した解析モデル

(1) 係数行列 $A_X(t)$ の要素

$A_Y(t)$ は, 次のように $(2n \times 2n)$ 行列に分割できる.

$$A_Y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \{a_{ij}\} & \{b_{ij}\} \end{bmatrix} \quad (i, j=1, \dots, n) \quad (\text{A}\cdot 1)$$

ここに, $\mathbf{0}$ および \mathbf{I} は, それぞれ $(n \times n)$ の零行列と単位行列である. また, $\{ \}$ は行列の要素を表すものとする.

$$\begin{aligned} a_{ij} &= -(\omega_i^2 + \omega_0^2) W_1 \phi_i(vt)^2 & (i=j) \\ &= -\omega_0^2 W_1 \phi_i(vt) \phi_j(vt) & (i \neq j) \\ b_{ij} &= -(2h_i \omega_i + 2h_0 \omega_0) W_1 \phi_i(vt)^2 & (i=j) \\ &= -2h_0 \omega_0 W_1 \phi_i(vt) \phi_j(vt) & (i \neq j) \end{aligned}$$

$A_{YZ}(t)$ は, 次のように $(2n \times 3)$ 行列に分割できる.

$$A_{YZ}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \{c_{ij}\} \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, n, j=1, 2, 3) \quad (\text{A}\cdot 2)$$

$$\begin{aligned} c_{i1} &= \omega_0^2 W_1 \phi_i(vt) \\ c_{i2} &= 2h_0 \omega_0 W_1 \phi_i(vt) \\ c_{i3} &= (2h_0 \omega_0 \beta - \omega_0^2) W_1 \phi_i(vt) \end{aligned}$$

$A_{ZY}(t)$ は, $(3 \times 2n)$ 行列に分割できる.

$$\begin{aligned} A_{ZY}(t) &= [\{d_{ij}\} \mid \{e_{ij}\}] \\ & \quad (i=1, 2, 3, j=1, \dots, n) \quad (\text{A}\cdot 3) \\ d_{1j} &= d_{3j} = 0, \quad d_{2j} = \omega_0^2 \phi_j(vt), \\ e_{1j} &= e_{3j} = 0, \quad e_{2j} = 2h_0 \omega_0 \phi_j(vt) \end{aligned}$$

$A_Z(t)$ は, 車両-路面系の係数行列であり, 定数行列である.

$$A_Z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & -2h_0 \omega_0 & -(2h_0 \omega_0 \beta - \omega_0^2) \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} \quad (\text{A}\cdot 4)$$

(2) $N_X(t)$ の要素と確率特性

$N_X(t)$ は, $N_Y(t)$ と $N_Z(t)$ の要素より構成される列ベクトルである. $N_Y(t)$ は n 次元ベクトルの要素の2つの部分に分割される. ここに $\mathbf{0}$ は零ベクトルである.

$$N_Y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \{f_i\} \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, n) \quad (\text{A}\cdot 5)$$

$$f_i = -(2h_0 \omega_0 w(t) + g) W_1 \phi_i(vt)$$

他方, $N_Z(t)$ は, 次式で与えられる.

$$N_Z(t) = [0 \quad 2h_0 \omega_0 w(t) \quad w(t)]^T \quad (\text{A}\cdot 6)$$

$N_X(t)$ は, 平均値と正規性白色雑音過程の和で表されている. したがって, $N_X(t)$ の確率特性は, 平均値と分散・共分散により完全に規定される.

a) $N_Y(t), N_Z(t)$ の平均値

$$E[N_Y(t)] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \{\bar{f}_i\} \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, n) \quad (\text{A}\cdot 7)$$

$$\bar{f}_i = -g W_1 \phi_i(vt)$$

$$E[N_Z(t)] = \mathbf{0} \quad (\text{A}\cdot 8)$$

b) $N_Y(t), N_Z(t)$ の分散・共分散

$N_Y(t)$ および $N_Z(t)$ の平均値回りの変動を $W_Y(t), W_Z(t)$ とすると, この共分散行列は, 次式で表される. なお, 共分散行列は定義より, 対称行列となる.

$$\begin{bmatrix} E[W_Y(t_1) W_Y(t_2)^T] & E[W_Y(t_1) W_Z(t_2)^T] \\ E[W_Z(t_1) W_Y(t_2)^T] & E[W_Z(t_1) W_Z(t_2)^T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_Y(t_1) & Q_{YZ}(t_1) \\ Q_{ZY}(t_1) & Q_Z(t_1) \end{bmatrix} \delta(t_1 - t_2) \quad (\text{A}\cdot 9)$$

① $Q_Y(t)$ の要素

この行列は, 次のように $(n \times n)$ 行列の要素に分割される.

$$Q_Y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \{f_{ij}\} \end{bmatrix} \quad (i, j=1, \dots, n) \quad (\text{A}\cdot 10)$$

$$f_{ij} = (2h_0 \omega_0 W_1)^2 \phi_i(vt) \phi_j(vt) S_0$$

② $Q_{YZ}(t), Q_{ZY}(t)$ の要素

$Q_{YZ}(t)$ は, 次のように $(n \times 3)$ 行列の要素に分割される.

$$Q_{YZ}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \{q_{ij}\} \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, n, j=1, 2, 3) \quad (\text{A}\cdot 11)$$

$$q_{i1} = 0, \quad q_{i2} = -(2h_0 \omega_0)^2 W_1 \phi_i(vt) S_0,$$

$$q_{i3} = -2h_0 \omega_0 W_1 \phi_i(vt) S_0$$

また, $Q_{ZY}(t)$ は $Q_{YZ}(t)$ の転置行列より得られる.

③ $Q_Z(t)$ の要素

これは, 次のように定数行列で与えられる.

$$Q_Z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2h_0 \omega_0)^2 S_0 & 2h_0 \omega_0 S_0 \\ 0 & 2h_0 \omega_0 S_0 & S_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A}\cdot 12)$$

【付 録 (2)】 モード間の連成を無視した解析モデル

(1) 係数行列 $A_{X_i}(t)$ の要素

$A_{X_i}(t)$ は次のように分割される.

$$A_{X_i}(t) = \begin{bmatrix} A_{Y_i}(t) & A_{Y_i Z_i}(t) \\ A_{Z_i Y_i}(t) & A_{Z_i}(t) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A \cdot 13)$$

この行列の要素は、【付録 (1)】の式 (A・1), (A・2), (A・3), (A・4) より、次の行列の要素で表される。

$$A_{Y_i}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{ii} & b_{ii} \end{bmatrix}, \quad A_{Y_i Z_i}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} \end{bmatrix}$$

$$A_{Z_i Y_i}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d_{2i} & e_{2i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{Z_i}(t) = A_Z(t)$$

(2) $N_{X_i}(t)$ の要素と確率特性

$N_{X_i}(t)$ の要素は、【付録 (1)】の式 (A・5), (A・6) より次式で与えられる。

$$N_{Y_i}(t) = [0 \ f_i]^T, \quad N_{Z_i}(t) = N_Z(t) \dots\dots\dots (A \cdot 14)$$

平均値は、【付録 (1)】の式 (A・7), (A・8) より、

$$E[N_{Y_i}(t)] = [0 \ \bar{f}_i]^T, \quad E[N_{Z_i}(t)] = 0 \dots\dots\dots (A \cdot 15)$$

となる。また、 $N_{Y_i}(t)$, $N_{Z_i}(t)$ の平均値回りの変動を、 $W_{Y_i}(t)$, $W_{Z_i}(t)$ とすると、この共分散行列は、

$$\begin{bmatrix} E[W_{Y_i}(t_1) W_{Y_i}(t_2)^T] & E[W_{Y_i}(t_1) W_{Z_i}(t_2)^T] \\ E[W_{Z_i}(t_1) W_{Z_i}(t_2)^T] & E[W_{Z_i}(t_1) W_{Z_i}(t_2)^T] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q_{Y_i}(t_1) & Q_{Y_i Z_i}(t_1) \\ Q_{Z_i Y_i}(t_1) & Q_{Z_i}(t_1) \end{bmatrix} \delta(t_1 - t_2) \dots\dots\dots (A \cdot 16)$$

となり、各要素は、【付録 (1)】の式 (A・10), (A・11), (A・12) より、次式で与えられる。

$$Q_{Y_i}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f_{ii} \end{bmatrix}$$

$$Q_{Y_i Z_i}(t) = Q_{Z_i Y_i}(t)^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} \end{bmatrix}$$

$$Q_{Z_i}(t) = Q_Z(t)$$

【付 録 (3)】 橋梁・車両間の連成を無視した解析モデル

係数行列 $A_{X_i}(t)$ は、【付録 (2)】の式 (A・13) のように分割される。各要素は、次のようになる。

$$A_{Y_i}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2 h_i \omega_i \end{bmatrix}$$

$$A_{Z_i Y_i}(t) = 0$$

さらに、 $A_{Y_i Z_i}(t)$, $A_{Z_i}(t)$ は【付録 (2)】と同じ要素である。

【付 録 (4)】 共分散方程式の誘導^{17)~19)}

確率微分方程式、式 (35) の解過程は、状態遷移行列 $\Phi_X(t, \tau)$ を用いて、次式で与えられる。

$$X(t) = \Phi_X(t, 0) X_0 + \int_0^t \Phi_X(t, \tau) W(\tau) d\tau \dots\dots\dots (A \cdot 17)$$

$X(t)$ の共分散行列 $R_X(t)$ は、定義に式 (A・17) を適用させて、

$$R_X(t) = \Phi_X(t, 0) R_{X_0} \Phi_X(t, 0)^T + \int_0^t \int_0^t \Phi_X(t, \tau_1) E[W(\tau_1) W(\tau_2)^T] \cdot \Phi_X(t, \tau_2)^T d\tau_1 d\tau_2 \dots\dots\dots (A \cdot 18)$$

となる。ここで、白色雑音過程の性質、式 (A・9) を用いて第 2 項の積分を遂行すると、次式を得る。

$$R_X(t) = \Phi_X(t, 0) R_{X_0} \Phi_X(t, 0)^T + \int_0^t \Phi_X(t, \tau_1) Q_X(\tau_1) \Phi_X(t, \tau_1)^T d\tau_1 \dots\dots\dots (A \cdot 19)$$

この両辺を t で微分して、状態遷移行列の性質を考慮すると、次式を得る。

$$\dot{R}_X(t) = A_X(t) \Phi_X(t, 0) R_{X_0} \Phi_X(t, 0)^T + \Phi_X(t, 0) R_{X_0} \Phi_X(t, 0)^T A_X(t)^T + \int_0^t A_X(t) \Phi_X(t, \tau) Q_X(\tau) \Phi_X(t, \tau)^T d\tau + \int_0^t \Phi_X(t, \tau) Q(\tau) \Phi_X(t, \tau)^T A(t)^T d\tau + Q_X(t) \dots\dots\dots (A \cdot 20)$$

ここで、式 (A・19) を代入すると、

$$\dot{R}_X(t) = A_X(t) R_X(t) + R_X(t) A_X(t)^T + Q_X(t) \dots\dots\dots (A \cdot 21)$$

が得られる。なお、共分散方程式の誘導については、文献 18) にいくつかの異なった方法が示されている。

【付 録 (5)】 $A_Z R_Z + R_Z A_Z + Q_Z = 0$ の解

Z の共分散行列 R_Z の要素を、

$$R_Z = \begin{bmatrix} m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ & m_{44} & m_{45} \\ \text{sym.} & & m_{55} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A \cdot 22)$$

と表すと、各要素は次のようになる。

$$m_{33} = (2 h_0 A 1 + \beta \omega_0) S_0 / 4 h_0 \beta A 2, \quad m_{34} = 0,$$

$$m_{35} = A 1 S_0 / 2 \beta A 2, \quad m_{44} = \omega_0 (\omega_0^2 + 4 h_0 A 1) S_0 / 4 h_0 A 2,$$

$$m_{45} = A 1 S_0 / 2 A 2, \quad m_{55} = S_0 / 2 \beta$$

ただし、 $A 1 = \omega_0^2 + 2 h_0 \omega_0 \beta$, $A 2 = \omega_0^2 + \beta (2 h_0 \omega_0 + \beta)$ である。

【付 録 (6)】 $AR + RA^T = -Q$ の解析²⁴⁾

C.F. Chen, L.S. Shieh によって提案された解法の概要について説明する。これは、未知数が行列の形で表される行列方程式、

$$AR + RA^T = -Q \dots\dots\dots (A \cdot 23)$$

を、未知数が列ベクトルで表される通常の連立方程式、

$$ar = -\frac{1}{2}q \dots\dots\dots (A \cdot 24)$$

の形に展開するアルゴリズムを示したものである。ここに、 A, R, Q は $(n \times n)$ 行列である。共分散行列は対称行列であるから、 r および q は $n(n+1)/2$ 次元ベクトル、 a は $(n(n+1)/2 \times n(n+1)/2)$ 行列となる。

R, Q の要素 $\{R_{ij}\}, \{Q_{ij}\}$ の指標を用いると、 r の要素は、 $r(1, 1), \dots, r(1, n), r(2, 1), \dots, r(2, n), \dots, r(n, n)$ 、また、 q の要素は、 $q(1, 1), 2 \cdot q(1, 2), \dots, 2 \cdot q(1, n), q(2, 2), \dots, 2 \cdot q(2, n), \dots, q(n, n)$ で表される。さらに、 $(i, j), (k, l)$ を a の列と行の指標とすると、 a の要素は、次のように表される。

- 1) $k = i, l \ni j \rightarrow A(l, j)$
 $k \ni i, l = j \rightarrow A(k, i)$
- 2) $k \ni i, l \ni j, k = j, l \ni i \rightarrow A(l, i)$
 $k \ni j, l = i \rightarrow A(k, j)$
 $k \ni j, l \ni i \rightarrow 0$
- 3) $k = i, l = j, k = j, l = i \rightarrow A(k, i)$
 $k \ni j, l \ni i \rightarrow A(k, i) + A(l, i)$

参考文献

- 1) 山田・小堀：活荷重に対する道路橋の動的応答—衝撃係数—に関する研究，土木学会論文集第 148 号，pp. 40~50, 1967.12.
- 2) 小堀・梶川：単一動荷重に対する道路橋の振動感覚，土木学会論文報告集第 248 号，pp. 11~23, 1976.4.
- 3) 吉村・彦坂・内容：単一走行車両による道路橋の非定常ランダム応答の解析，土木学会論文報告集第 258 号，pp. 35~44, 1977.2.
- 4) Hikosaka, H., T. Yoshimura and T. Uchitani: Non-Stationary Random Response of Bridges to a Single Load Moving on Uneven Road Surfaces, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 26, pp. 373~381, 1978.
- 5) 肥後野・吉村・池田：単一走行車両による補剛アーチ橋の非定常ランダム応答，土木学会第 32 回年次学術講演会講演概要集第 1 部，pp. 338~339, 1977.
- 6) Nakai, H. and H. Kotoguchi: Dynamic Response of Horizontally Curved Girder Bridges under Random Traffic Flows, *土木学会論文報告集*第 244 号，pp. 117~128, 1975.12.

- 7) 小堀・梶川：振動感覚を評価するためのアーチ橋の動的応答スペクトル，土木学会論文報告集第 251 号，pp. 127~130, 1976.7.
- 8) 小堀・三上：走行車両による連続桁橋の動的応答解析，土木学会第 32 回年次学術講演会講演概要集第 1 部，pp. 342~343, 1977.
- 9) 小堀・三上：三径間連続鋼桁橋の動的応答解析，土木学会第 33 回年次学術講演会講演概要集第 1 部，pp. 520~521.
- 10) 岡林隆敏：単一走行車両による道路橋の二乗平均応答解析，土木学会論文報告集第 286 号，pp. 15~27, 1979.6.
- 11) 吉村・平井：ランガー桁の動的解析，土木学会論文報告集第 101 号，pp. 1~14, 1964.1.
- 12) 兼重一郎：パワースペクトル解析の自動車への応用，いすゞ技報，No. 33, pp. 1~9, 1960.
- 13) 川合・森崎：自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性，三菱重工技報，Vol. 2, No. 2, pp. 51~58, 1964.
- 14) 伊藤 清：確率論，岩波書店，1969.
- 15) Soong, T.T.: *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press, 1973.
- 16) Arnold, L.: *Stochastic Differential Equations—Theory and Applications*, John Wiley and Sons, 1974.
- 17) Gonkar, G.H.: A General Method with Shaping Filter to Study Random Vibration Statistics of Lifting Rotors with Feedback Controls, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 21, No. 2, pp. 213~225, 1972.
- 18) 榎木・添田・中溝：確率システム制御の基礎，日新出版，1975.
- 19) 有本 卓：カルマンフィルター，産業図書，1977.
- 20) Gersch, W.: Mean-Square Response in Structural Systems, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 48, No. 1, pp. 403~413, 1970.
- 21) Bellman, R.: *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, 1970.
- 22) Davison, E.J. and F.T. Man: The Numerical Solution of $A'Q+QA=-C$, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-13, pp. 448~449, 1968.
- 23) Smith, P.G.: Numerical Solution of Matrix Equation $AX+XA^T+B=0$, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-30, pp. 278~279, 1971.
- 24) Chen, C.F. and L.S. Shieh: A Note on Expanding, $PA+A^T P=-Q$, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-13, pp. 122~123, 1968.
- 25) Bingular, S.P.: An Alternate Approach to Expanding $PA+A^T P=-Q$, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC-21, pp. 135~137, 1970.
- 26) 星谷 勝：確率論手法による振動解析，鹿島出版会，1974.

(1978.12.1・受付)