

## 補剛された圧縮板の弾塑性有限変位挙動の一解析手法

ELASTO-PLASTIC FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS OF  
LONGITUDINALLY STIFFENED PLATES IN COMPRESSION

小松 定夫\*・北田 俊行\*\*

By Sadao KOMATSU and Toshiyuki KITADA

### 1. ま え が き

本論文においては、初期たわみや残留応力などの初期不整を有し、面内圧縮力を受ける補剛板が極限状態を過ぎるまでの弾塑性有限変位挙動の解析法について論じている。本法は次のような意味で厳密解析法とみなすことができる。

- ① 補剛板を直交異方性板として理想化せず、補剛材と板パネルからなる薄板と柱の集成モデルとしているため、補剛材間の板パネルの局部変形挙動および応力の不均一性を明白にできる。
- ② 線形座屈理論に基づく固有値問題（分岐問題）としては取り扱わないで、補剛板の荷重変位曲線および応力の変動状況を有限変位理論の立場から追跡しその極限強度を求めている。

圧縮補剛板の弾性もしくは弾塑性の厳密解析を実施するうえで、研究者が直面する問題は、“多自由度の非線形挙動をいかに処理するか”ということである。圧縮板の弾塑性有限変位解析法については、すでに、Murray-Wilson (1969), 大坪 (1971), Moxham (1971), 岡村・吉田 (1972), 上田・山川・藤原 (1973), 上田・安川・矢尾・池上・大南 (1975), 小松・北田・宮崎 (1975), Crisfield (1975), Needleman-Tvergaard (1976), Harding-Hobbs-Neal (1977) らにより報告されている<sup>1), 16)</sup>。等方性圧縮板の極限強度を取り扱うような比較的簡単なモデルを対象とする場合には、これらの解析法を適用すれば十分であると考えられる。しかし、補剛板などのような複雑な薄肉構造物の極限強度の解析に対しては、実用的および経済的見地からより効率のよい厳密解析法の出現が望まれている。

まず、Bilstein<sup>1)</sup> は、等方性板の有限変位  $w$  と Airy

の応力関数  $F$  に関する非線形 2 元連立偏微分方程式を取り扱った。面内のつり合いに関する方程式については厳密に、面外のつり合いに関する方程式については Galerkin 法を適用している。数値計算には標準的な Runge-Kutta 法を用いている。補剛材等の存在による横方向への形状等の非連続性については、改良された還元法を用いて対処している。また、補剛材先端での縦方向応力度あるいは板パネルの縦方向膜応力度のいずれかが降伏点に達したときを近似的に補剛板の極限状態と定義している。しかし、これは真の意味ではあくまで弾性解析の範囲にとどまっており、極限状態とはいえない。また初期たわみについて考慮しているが、残留応力については何の取り扱いもなされていない。この方法では、補剛板全体のたわみ波形と補剛材間の板パネルの局部的なたわみ波形が連成して極限状態に至るような実際的な補剛板の解析ができないという欠点がある。

岡村・吉田<sup>2), 4)</sup> は、面外の曲げモーメントと面内力が作用した場合の板内の塑性化した点（板厚方向への塑性の広がりは無視）での降伏曲面を近似式で仮定し、薄板の弾塑性有限変位挙動を支配するところの、たわみ  $w$  と応力関数  $F$  に関する非線形 2 元連立偏微分方程式を誘導している。そして、たわみ  $w$ 、応力関数  $F$ 、板内に設けられた格子状の選点における有限変位および塑性変形に伴う非線形物理量 ( $\Pi, A$ ) および ( $\psi, \Gamma$ ) ならびに補剛材と板との接合線上の選点における不静定合成力および板の周辺での境界条件を満足させるために設けられた周辺上の選点における不静定拘束力をすべて 2 重 3 角級数で表わし、上述の非線形偏微分方程式の連続関数解を得ている。計算にあたっては、最初から未知の量  $\Pi, A, \psi, \Gamma$  が存在するため、初期荷重法的な反復法を用いている。この論文では、初期たわみを有する種々の圧縮板について解析を行っているが、補剛板の残留応力については触れていない。

山田・渡辺<sup>5), 6)</sup> は、有限要素法を用いて圧縮補剛板の

\* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学教室

\*\* 正会員 工修 大阪市立大学講師 工学部土木工学教室

後座屈強度の解析を行っている。その際、材料学的非線形性を一般的な形で取り扱えば解析が煩雑になるという理由から、板は弾性挙動のみを呈し、補剛材だけが弾塑性挙動を呈するものと仮定し、準弾塑性的な解析を行っている。また、非線形の解法には摂動法を用いている。上田・矢尾・菊本<sup>7)</sup>らも有限要素法を用いた解析を行っている。この論文では、材料学的非線形性については塑性流れ理論を用い板厚方向への塑性域の広がりを考慮した厳密な取り扱いを行っている。また、増分法により、非線形の基礎方程式を線形化している。

補剛材本数の多い補剛板の解析や、圧縮補剛板の極限強度特性を明らかにするために必要なパラメトリック解析を行う場合には、通常の有限要素法よりも計算効率がよく、また、精度もよい数値計算手法の開発が望まれる。Y.K. Cheung<sup>8)</sup>が考案した有限帯板法はこの種の問題点を解決するための解析手法でもある。すなわち、板要素を細長い帯板の集合体にモデル化し、各帯板要素内の変位を長手方向の座標の有限3角級数で仮定し、自由度の節減を行っている。上田・松石・山内・田中<sup>9)</sup>および上田・松石・森・村川<sup>10)</sup>は、この帯板要素法を用いて、曲げを受ける桁の横倒れに関する弾塑性有限変位解析を行っている。非線形の解析には増分法を用いており、その計算過程で帯板要素の板面内方向および板厚方向への塑性の広がりの判定については、あらかじめ要素内に設定した3次元格子点で行い、また、接線剛性マトリックスの数値積分については、この格子点での前荷重段階における応力、ひずみおよび変位を用いて実行している。

同様な見地から、大坪<sup>11),12)</sup>も圧縮板の弾塑性有限変位解析を行っている。この方法では、板の面内挙動に対しては有限要素法を用い、面外挙動に対してはたわみ波形の単調性を利用して、それを数項の3角級数に展開することにより自由度の節減を図っている。Tvergaard-Needleman<sup>13)</sup>は大坪の方法を圧縮補剛板の弾塑性厳密解析に応用している。これらの研究においても残留応力についてはなんら取り扱っていない。彼らは、面内および面外変位とも級数で仮定した場合、すなわち完全なRayleigh-Ritz法を用いた場合と、面内挙動に対しては有限要素法を用いるRayleigh-Ritz法との混用法を用いた場合の両者を比較して次のような結論を得ている。彼が行った解析モデルでは、完全なRayleigh-Ritz法の場合、混用法と同じ精度の結果を得るためには27項の面内変位モードが必要となり、その計算時間が混用法の場合の2倍必要になったと報告している。そして、一般的に、面外変位に比べて面内変位に関しては、その変位モードを推定することが非常に難しく、このことが混用法を非常にアトラクティブな解析手法にしていると述べて

いる。このような現状にかんがみ、本文では、初期たわみと残留応力を同時に有する圧縮補剛板の弾塑性厳密解析を行っている。本法においては、面内挙動に対しては従来どおりの有限要素法に従い、面外挙動に対してはたわみ波形を数項のたわみモードでもって表現し、自由度の低減を行っている。ただし、有限要素の各節点でのたわみは、あるモードで仮定するが、各要素内のたわみは従来の有限要素法と同様、多項式で与えている。大坪の方法と本法を比較した場合、前者では、要素内のすべての点のたわみを3角級数で表現しているのに対して本法では、全補剛板についてたわみを3角級数で表現し、そのうえに要素の節点のたわみを乗せるような形で仮定し、要素内のたわみについては、別途に局所座標の3次元関数で表現している。そのため本法では次のような特長がある。

- ① 従来の有限要素法のみプログラムに若干の修正を加えることにより、大幅な自由度の低減が可能となる。
- ② したがって、解析する圧縮板の境界条件が異なり、仮定するたわみモードが変化しても、若干のプログラムの修正で対処することができる。
- ③ 有限要素内では従来どおりの多項式の変位関数を用いているため、すでに誘導された剛性マトリックスをそのまま用いることができる。
- ④ 数値計算においては、モード化したたわみおよびたわみ角の節点での値のみしか必要とせず、 $\sin$ ,  $\cos$ の複雑な積分は不要となり、計算効率向上する。

以下、本解析法の理論を述べ、その精度、計算時間、計算に必要な記憶容量について考察を加える。さらに、実験値と本解析結果を比較し、本法の妥当性を立証している。

なお、本論文では簡単のため、載荷辺の板パネル中央面に一方向の一樣相対圧縮変位を作用させた場合の解析について述べることにするが、任意の位置に載荷した場合についても取り扱うことができる。

また、本法の適用範囲の問題については、以下のように考えられる。

- 1) 本法においては、Rayleigh-Ritz法およびGalerkin法と同様、境界条件および荷重条件によりその適用範囲に制限を受けている。しかし、本論文で取り扱うような面内圧縮力を受ける周辺単純支持の長方形補剛板では、この適用範囲の制限は問題にならない。
- 2) 次に、2重3角級数による変位場の表現に関しては、次のように考えられる。本法では、周辺単純支持の補剛板のたわみを2重3角級数に展開しているが、これは従来の弾性座屈理論による変位の級数解

(厳密解)にほかならない。したがって、応力状態のいかんにかかわらず弾塑性座屈の正確解に収束するものと考えられる。なお、応力状態によっては、複雑なたわみ波形になると考えられる。このような場合、通常の有限要素法のみを用いるとメッシュ分割を細かくする必要があり、自由度が増大する。ところが、本法を用いると、級数の項数は増大するが、大幅な自由度の節減が期待できる。

## 2. モデル化

図-1 に示すように、補剛材部は直線の柱要素、板パネル部は平面の三角形板要素の集合体として補剛板をモデル化する。補剛材は開断面のものを対象にしているため、そのねじり剛性は一応無視することにする。

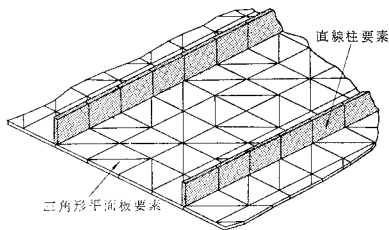


図-1 有限要素によるモデル化

## 3. 解析理論

本解析理論は、有限要素法のみを用いた圧縮板の弾塑性有限変位解析法<sup>14)</sup>を圧縮補剛板に拡張し、それにモーダル・アナリシスの手法を導入したものである。したがってここでは、文献 14) の方法と異なる点および改良した点のみを以下に記述することにする。

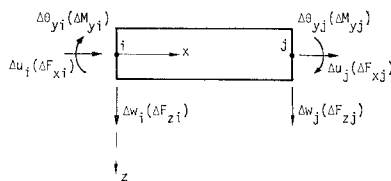


図-2 柱要素の要素座標、節点変位増分および節点力増分

### (1) 変位増分の推定

つり合い状態  $M$  から、次のつり合い状態  $M+1$  に至る反復計算の過程で、状態  $M$  から出発して  $I$  回目の反復状態  $I$  をまず求め、それから次の反復点である状態  $I+1$  に至る計算過程について考える。この計算過程におけるある板要素  $k$  のひずみ増分ベクトル  $\Delta \epsilon_I$  は文献 14) の式 (2.2.4) より、

$$\Delta \epsilon_I = B_u \cdot \Delta d_{sI} + \frac{1}{2} \cdot \Delta C_\theta \cdot A_\theta \cdot \Delta d_{bI} + C_{\theta I} \cdot A_\theta \cdot \Delta d_{bI} - \varepsilon \cdot A_\theta \cdot \Delta d_{bI} \dots (1)$$

ここに、 $\Delta d_{sI}$ 、 $\Delta d_{bI}$  は、それぞれ状態  $I$  における面内および面外の節点変位増分ベクトルであり、 $B_u$ 、 $A_\theta$ 、 $A_\theta$  は、それぞれ、板中央面におけるひずみ増分と  $\Delta d_{sI}$ 、たわみ角増分と  $\Delta d_{bI}$ 、曲率増分と  $\Delta d_{bI}$  を関係づけるマトリックスであり、 $C_{\theta I}$ 、 $\Delta C_{\theta I}$  は、それぞれ、たわみ角およびたわみ角増分に関するマトリックスである。応力増分ベクトル  $\Delta \sigma_I$  は文献 14) の式 (2.2.7) より、

$$\Delta \sigma_I = D_I \cdot \Delta \epsilon_I \dots (2)$$

図-2 に示すような柱要素においても、その節点変位増分ベクトルを板要素と同じ記号で以下のように表わす。

$$\Delta d_{sI} = \{\Delta u_i; \Delta u_j\}_I^* \dots (3)$$

$$\Delta d_{bI} = \{\Delta w_i; \Delta \theta_{y_i}; \Delta w_j; \Delta \theta_{y_j}\}_I \dots (4)$$

すると、柱要素内に生じるひずみ増分  $\Delta \epsilon_{xI}$  および応力増分  $\Delta \sigma_{xI}$  も式 (1)、(2) と同じ式で表わすことができる。ただし、柱要素の場合には、

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_I &= \Delta \epsilon_{xI}, \Delta \sigma_I = \Delta \sigma_{xI}, \Delta C_\theta = \Delta d_{bI}^T \cdot A_\theta^T, \\ C_{\theta I} &= d_{bI}^T \cdot A_\theta^T, D_I = D_I = \Delta \sigma_{xI} / \Delta \epsilon_{xI} \end{aligned} \dots (5) \sim (9)$$

ここで、 $D_I$  は補剛材の材料接線係数で、

$$D_I = \begin{cases} E & \text{(弾性的の場合, ヤング係数)} \\ E_T & \text{(塑性的の場合, 接線弾性係数)} \end{cases} \dots (10)$$

以下、板要素および柱要素を含めた任意要素  $k$  のひずみ増分ベクトルおよび応力増分ベクトルを式 (1)、(2) で表わすことにする。

要素  $k$  の状態  $I$  における応力度ベクトルを  $\sigma_I$ 、節点力ベクトルを  $f_I$ 、節点変位ベクトルを  $d_I$ 、 $I$  から  $I+1$  に至る節点力増分ベクトルを  $\Delta f_I$ 、節点変位増分ベクトルを  $\Delta d_I$  とすると、状態  $I+1$  における要素  $k$  のポテンシャルエネルギー  $\Pi$  は次のようになる。

$$\Pi = U - (d_I + \Delta d_I)^T \cdot (f_I + \Delta f_I) \dots (11)$$

ここで、 $U$  はひずみエネルギーで、

$$U = U_0 + \Delta U \dots (12)$$

$U_0$  は状態  $I$  でのひずみエネルギーで、 $\Delta U$  は、

$$\Delta U = \int_V \left( \Delta \epsilon_I^T \cdot \sigma_I + \frac{1}{2} \cdot \Delta \epsilon_I^T \cdot D_I \cdot \Delta \epsilon_I \right) dx dy dz \dots (13)$$

状態  $I$  での補剛板を直線あるいは平面の有限要素の集合体で近似する。すなわち、

$$C_{\theta I} = 0 \dots (14)$$

式 (1)、(2) を式 (13) に代入し、増分変位の 3 次以上の項を無視すると、

$$\Delta U = \Delta d_I^T \cdot f_I + \frac{1}{2} \cdot \Delta d_I^T \cdot k_I \cdot \Delta d_I \dots (15)$$

ここで、 $k_I$  は、要素の接線剛性マトリックスであり、

\* [ ; ] は列ベクトルを表わす。

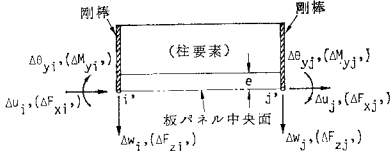


図-3 オフセットビーム

板要素の場合には、 $15 \times 15$  のマトリックスであり、柱要素の場合には、これに対応する  $6 \times 6$  のマトリックスとなる。さらに柱要素の場合、図-3 に示すオフセットビームの考え方をを用いて、図-2 に示す補剛材重心軸上にある節点  $i, j$  での節点力増分ベクトル  $\Delta \mathbf{f}_I$  および節点変位増分ベクトル  $\Delta \mathbf{d}_I$  を図-3 に示す板パネルの中央面内に設けた節点  $i', j'$  での節点力増分ベクトル  $\Delta \mathbf{f}_I'$  および節点変位増分ベクトル  $\Delta \mathbf{d}_I'$  に関係づける。すなわち、

$$\Delta \mathbf{d}_I = \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{d}_I' \dots\dots\dots (16)$$

$$\Delta \mathbf{f}_I' = \mathbf{B}^T \cdot \Delta \mathbf{f}_I \dots\dots\dots (17)$$

ここで、柱要素の場合、

$$\Delta \mathbf{d}_I' = \{\Delta u_i'; \Delta w_i'; \Delta \theta_{y_i'}; \Delta u_j'; \Delta w_j'; \Delta \theta_{y_j'}\} \dots\dots\dots (18)$$

$$\Delta \mathbf{f}_I' = \{\Delta F_{x_i'}; \Delta F_{z_i'}; \Delta M_{y_i'}; \Delta F_{x_j'}; \Delta F_{z_j'}; \Delta M_{y_j'}\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -e \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

また、板要素の場合、マトリックス  $\mathbf{B}$  はベクトル  $\Delta \mathbf{d}_I, \Delta \mathbf{f}_I$  の要素を式 (21), (22) に示すように並び変えるマトリックスとなる。

$$\Delta \mathbf{d}_I' = \{\Delta u_i; \Delta v_i; \Delta w_i; \Delta \theta_{x_i}; \Delta \theta_{y_i}; \Delta u_j; \Delta v_j; \Delta w_j; \Delta \theta_{x_j}; \Delta \theta_{y_j}; \Delta u_k; \Delta v_k; \Delta w_k; \Delta \theta_{x_k}; \Delta \theta_{y_k}\} \dots\dots\dots (21)$$

$$\Delta \mathbf{f}_I' = \{\Delta F_{x_i}; \Delta F_{y_i}; \Delta F_{z_i}; \Delta M_{x_i}; \Delta M_{y_i}; \Delta F_{x_j}; \Delta F_{y_j}; \Delta F_{z_j}; \Delta M_{x_j}; \Delta M_{y_j}; \Delta F_{x_k}; \Delta F_{y_k}; \Delta F_{z_k}; \Delta M_{x_k}; \Delta M_{y_k}\} \dots\dots\dots (22)$$

さらに、要素座標系における変位増分ベクトル  $\Delta \mathbf{d}_I'$  を全体座標系における変位増分ベクトル  $\Delta \mathbf{u}_I^{(k)}$  に置換すると、

$$\Delta \mathbf{d}_I' = \mathbf{L}_I \cdot \Delta \mathbf{u}_I^{(k)} \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $\mathbf{L}_I$  は座標変換マトリックスである。

さて、補剛板の節点のたわみ  $W$  を幾何学的な境界条件を満足する有限項の 2 重 3 角級数として表わすことを考える。そして、その 2 重 3 角級数の係数ベクトルである一般化変位増分ベクトル  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}_I$  で任意要素  $k$  の節点変

位増分ベクトル  $\Delta \mathbf{u}_I^{(k)}$  を表わすと、

$$\Delta \mathbf{u}_I^{(k)} = \mathbf{H}_k \cdot \Delta \tilde{\mathbf{u}}_I \dots\dots\dots (24)$$

ここに、 $\mathbf{H}_k$  は  $m$  行  $n$  列の変換マトリックスであり、 $m < n$  である。本論文で取り扱うような周辺単純支持の長方形圧縮補剛板のような構造物の場合には、式 (24) により数個の一般化変位増分で各節点における変位増分を表わすことができ、大幅な自由度の節減が可能になるわけである。式 (24) を式 (23), 式 (23) を式 (16) と順次代入し式 (11) まで至り  $\Pi$  を求め、 $\Delta \tilde{\mathbf{u}}_I$  の変分  $\delta \Delta \tilde{\mathbf{u}}_I$  に対する  $\Pi$  の変分  $\delta \Pi$  を計算すると、

$$\delta \Pi = \delta \Delta \tilde{\mathbf{u}}_I^{(k)T} \cdot \{\tilde{\mathbf{k}}_I \cdot \tilde{\mathbf{u}}_I^{(k)} - \Delta \tilde{\mathbf{f}}_I\} \dots\dots\dots (25)$$

ここで、

$$\mathbf{k}_I = \mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{L}_I^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_I \cdot \mathbf{H}_k \dots\dots\dots (26)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{f}}_I = \mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{L}_I^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \Delta \mathbf{f}_I \dots\dots\dots (27)$$

式 (25) の  $\delta \Pi$  を全要素について集成し、系全体のポテンシャルエネルギー極小の原理を適用すると、

$$\Delta \tilde{\mathbf{p}}_I = \tilde{\mathbf{K}}_I \cdot \Delta \tilde{\mathbf{u}}_I \dots\dots\dots (28)$$

ここに、 $\Delta \tilde{\mathbf{p}}_I$  は、 $\Delta \tilde{\mathbf{f}}_I$  を全要素について集成したものである。

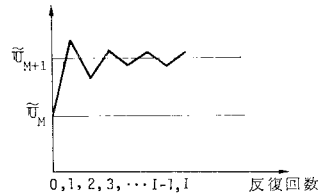


図-4 収束しない反復計算

式 (28) を解くことにより  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}_I$  が求まり、状態  $I+1$  が定まる。ただし、本解析法では、式 (14) の仮定を用いているため、補剛板の変形が大きくなると図-4 に示すように振動して、たまには、真値  $\tilde{\mathbf{u}}_{M+1}$  に収束しない場合がある。この場合には、次式により変位増分ベクトル  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{I+1}$  を考慮することによりうまく収束させることができる。

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}}_{I+1} = \frac{1}{2} \{\Delta \tilde{\mathbf{u}}_I + \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{I-1}\} \dots\dots\dots (29)$$

(2) 不つり合い力  $\tilde{\mathbf{f}}_{I+1}$  の計算

不つり合い力の計算には文献 14) で示した剛体変位を除去する方法を用いる。

状態  $M$  から状態  $I+1$  までの剛体変位を除去した要素  $k$  の節点変位増分ベクトルを  $\Delta \tilde{\mathbf{u}}_M$  とする。すると、状態  $I+1$  での真の節点力ベクトル  $\tilde{\mathbf{f}}_{I+1}$  は次のようになる。

$$\tilde{\mathbf{f}}_{I+1} = \tilde{\mathbf{f}}_M + \Delta \tilde{\mathbf{f}}_M + \mathbf{f}_r \dots\dots\dots (30)$$

ここで、

$$\Delta \tilde{\mathbf{f}}_M = \mathbf{k}_M \cdot \Delta \tilde{\mathbf{u}}_M \dots\dots\dots (31)$$

$\tilde{\mathbf{f}}_M$  : 状態  $M$  での真の節点力ベクトル,  $\mathbf{f}_r$  : 残留応

力による節点力ベクトル,  $\mathbf{k}_M$ : 剛体変位を除去した変位に微小変形理論を適用して導いた剛性マトリックスで, 板要素の場合には文献 14) の式 (2.4.11) に示した剛性マトリックスであり, 柱要素についても板要素の特別の場合として導くことができる. 式 (30) の真の節点力ベクトル  $\mathbf{f}_{I+1}$  をモード化した一般化力ベクトル  $\tilde{\mathbf{f}}_{I+1}$  に変換すると,

$$\tilde{\mathbf{f}}_{I+1} = (\tilde{\mathbf{f}}_M + \Delta\tilde{\mathbf{f}}_M) + \mathbf{H}_k^T \bar{\mathbf{f}}_r \dots (32)$$

ここで,

$$\tilde{\mathbf{f}}_M + \Delta\tilde{\mathbf{f}}_M = \mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{L}_{I+1}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot (\tilde{\mathbf{f}}_M + \Delta\tilde{\mathbf{f}}_M) \dots (33)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_r = \mathbf{L}_{I+1}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{f}_r \dots (34)$$

すべての要素について式 (32) を集成すると, 全節点における真の一般化力ベクトル  $\tilde{\mathbf{p}}_{I+1}$  が得られる.

$$\tilde{\mathbf{p}}_{I+1} = \tilde{\mathbf{p}}_M + \Delta\tilde{\mathbf{p}}_M + \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{p}}_r \dots (35)$$

すると, 不つり合い力ベクトル  $\tilde{\mathbf{r}}_{I+1}$  は次式で与えられる.

$$\tilde{\mathbf{r}}_{I+1} = \tilde{\mathbf{p}}_{M+1} + \tilde{\mathbf{p}}_{r,0} - \tilde{\mathbf{p}}_{I+1} \dots (36)$$

$$= \tilde{\mathbf{p}}_{M+1} - \{ \tilde{\mathbf{p}}_M + \Delta\tilde{\mathbf{p}}_M + \mathbf{H}^T \cdot (\bar{\mathbf{p}}_r - \bar{\mathbf{p}}_{r,0}) \} \dots (37)$$

ここで,  $\tilde{\mathbf{p}}_{M+1}$  は第 M+1 荷重段階において外力として与えた一般化力ベクトルであり,  $\bar{\mathbf{p}}_{r,0}$  は, 文献 14) で述べた仮想の節点外力ベクトルである.

### (3) 柱要素の変位関数および剛性マトリックスの計算

変位関数として次のものを用いる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{軸方向変位 } u = \alpha_1 + \alpha_2 x \dots (38) \\ \text{たわみ } w = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 x^3 \dots (39) \end{array} \right.$$

また, 柱要素の場合も, 補剛材の高さ方向への塑性の広がりを考慮できるように, 板要素の場合と同様に, 層割りを行って剛性マトリックスの計算を行っている.

## 4. 数値計算例およびその考察

### (1) 周辺単純支持の圧縮板

文献 14) と同様, 図-5 に示すような周辺単純支持の一方方向圧縮板を解析例とする.

#### a) マトリックス $\mathbf{H}_k$

面外挙動に関する周辺の境界条件は,

$$\left. \begin{array}{l} \text{辺 } X = \pm a/2 \text{ および辺 } Y = 0, b \text{ において } \Delta W = 0 \\ \text{辺 } X = \pm a/2 \text{ において } \partial^2 \Delta W / \partial X^2 = 0 \\ \text{辺 } Y = 0, b \text{ において } \partial^2 \Delta W / \partial Y^2 = 0 \end{array} \right\} \dots (40)$$

この境界条件を満足し, さらに, たわみの対称性を考慮して, 以下に示す関数を板のたわみ波形に用いる.

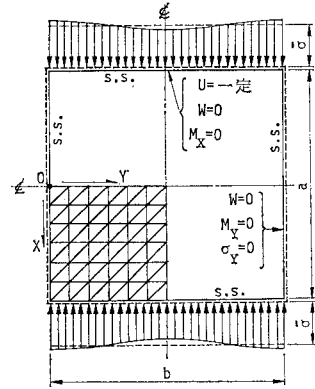


図-5 周辺単純支持の圧縮板

$$\Delta W = \sum_{m=1,3,5,\dots}^M \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \Delta W_{mn} \cdot \cos \frac{m\pi X}{a} \cdot \sin \frac{n\pi Y}{b} \dots (41)$$

すると, 式 (24) に示したマトリックス  $\mathbf{H}_k$  は次のようになる.

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{wi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{wj} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{wk} \end{bmatrix} \dots (42)$$

ここで,  $\mathbf{I}$  は  $2 \times 2$  の単位マトリックス,  $\mathbf{H}_{wi}$  は板要素  $k$  の節点  $i$  (全体座標  $X_i, Y_i$ ) の面外変位増分ベクトル  $\Delta \mathbf{w}_i$  と一般化したわみ増分ベクトル  $\Delta \tilde{\mathbf{w}}$  を関係づけるマトリックスである. すなわち,

$$\Delta \mathbf{w}_i = \mathbf{H}_{wi} \cdot \Delta \tilde{\mathbf{w}} \dots (43)$$

ここに,

$$\Delta \mathbf{w}_i = \{ \Delta W_i; \Delta \theta_{Xi}; \Delta \theta_{Yi} \} \dots (44)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{w}} = \{ \Delta W_{11}; \Delta W_{13}; \Delta W_{31}; \Delta W_{33}; \dots; \Delta W_{mn}; \dots \} \dots (45)$$

$$\mathbf{H}_{wi} = \begin{bmatrix} H_{111} & H_{113} & H_{131} & H_{133} & \dots & H_{1mn} & \dots \\ H_{211} & H_{213} & H_{231} & H_{233} & \dots & H_{2mn} & \dots \\ H_{311} & H_{313} & H_{331} & H_{333} & \dots & H_{3mn} & \dots \end{bmatrix} \dots (46)$$

$$H_{1mn} = \cos a_m X_i \cdot \sin b_n Y_i \dots (47)$$

$$H_{2mn} = -b_n \cdot \cos a_m X_i \cdot \cos b_n Y_i \dots (48)$$

$$H_{3mn} = -a_m \cdot \sin a_m X_i \cdot \sin b_n Y_i \dots (49)$$

$$a_m = m\pi/a, \quad b_n = n\pi/b \dots (50, 51)$$

$\mathbf{H}_{wj}, \mathbf{H}_{wk}$  についても同様である.

#### b) 連立方程式 (28) の解法

式 (28) の剛性マトリックス  $\tilde{\mathbf{K}}_I$  においては 図-6(a) に示す薄墨部分のところ以外の要素は 0 である. 対角線付近のバンド部分 (1) は板の面内剛性に関する要素である. 右下隅角部 (3) は面外剛性に関する要素であり, 外側のバンド部分 (2) は両者の連成効果に関する要素であ

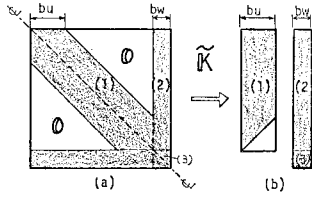


図-6  $\bar{K}$  の記憶方法

る。[対称性を利用して、このマトリックス  $\bar{K}$  の上半分を 図-6(b) に示すようにバンド状に記憶させ、コレスキー法により連立方程式 (28) を解いた。

c) 解析に用いた初期不整

任意の波形の初期たわみを含む場合も解析可能であるが、ここでは文献 14) と同様に、次式で示す初期たわみ波形を仮定した。

$$W_0 = \bar{W}_0 \cdot \cos \pi X/a \cdot \sin \pi Y/b, \bar{W}_0 = 0.1 \cdot t \dots \dots \dots (52)$$

t: 板厚。圧縮板の数値解析では 残留応力を 考慮しなかった。

d) 解析結果とその考察

① たわみ波形の項数 (NWN) と精度の関係

解析結果を 図-7 と 表-1 に示す。これらの図表におけるパラメーター NWN は式 (41) に示したたわみ波形の打ち切り項数である。ただし、それぞれのたわみ波形は  $4W_{11}, 4W_{13}, 4W_{31}, 4W_{33}, 4W_{15}, 4W_{51}$  の順に並んでいる。幅厚比パラメーター  $R (=b/t \sqrt{\sigma_y/E} \cdot 1.2(1-\nu^2)/\pi^2 k)$  が 1.34 と比較的大きい板に対して、NWN を 1, 3, 4,

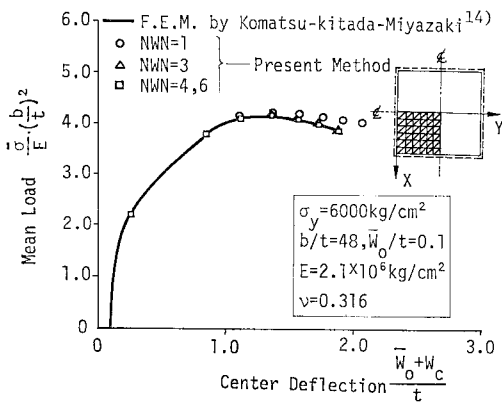


図-7 平均圧縮応力度と中央たわみの関係 (R=1.34)

表-1 級数の項数と精度の関係

	NWN	$4W_{i,j}$	$\bar{\sigma}_m$ (kg/cm <sup>2</sup> )	Error (%)	$\bar{\sigma}_m$ (kg/cm <sup>2</sup> )	Error (%)
F.E.M. (1)			3782.0	—	2327.4	—
Present Method	1	11 (i=1, j=1)	3875.8	2.48	2334.9	0.32
	3	11,13,31	3807.2	0.66	2332.9	0.24
	4	11,13,31,33	3800.0	0.48	2332.2	0.21
	6	11,13,31,33,15,51	3799.1	0.45	2332.2	0.21
$\bar{\sigma}_m$ : 平均圧縮応力度の最大値			$\sigma_y = 6000 \text{ kg/cm}^2$ $b/t = 48.0 \quad \bar{W}_0/t = 0.1$		$\sigma_y = 2400 \text{ kg/cm}^2$ , $R = 0.71$ $b/t = 40.0 \quad \bar{W}_0/t = 0.1$	

6 と変化させた場合の平均圧縮応力度  $\bar{\sigma}$  と板中央のたわみ  $W_c$  の関係を 図-7 に示した。同図には、文献 14) の有限要素法のみによる解析結果をも示している。この有限要素法のみによる解はすでに文献 14) で Coan の厳密解と比較し、その精度の検証を行ったものである。NWN=3 とすれば、本法による解析結果は完全に有限要素法のみ結果に一致することが 図-7 からわかる。表-1 より、最大平均応力度  $\bar{\sigma}_m$  も、NWN が 3 以上であれば、有限要素法のみ結果と比較して、その誤差は 1% 以下になることがわかる。次に、R が 0.71 と比較的小さい板に対する同様な解析結果を表-1 の右側の欄に示す。この場合、本法による解はさらに精度がよく NWN が 1 で有限要素法による解に十分収束していることがわかる。

表-2 1 回の反復計算に必要な計算時間 (CPU タイム) (要素分割数 N=6, 層数 NT=8)

状態 I	表-2 1 回の反復計算に必要な計算時間 (CPU タイム)		
	(a) F.E.M.	(b) 本法 (NWN=6)	(c) 本法 (改良)
$x_j + \lambda_k + y_k$	0.64	0.64	0.00
$k_s$	0.47	0.46	0.46
$k_b$	2.59	2.58	1.17
$k_g$	1.70	1.70	1.70
$k_{sb}$	0.77	0.78	0.78
$k = B^T \cdot k_T \cdot B$	6.35	6.35	0.92
$k_T = L^T \cdot k \cdot L$	6.11	6.11	2.85
$H_k^T \cdot k_T \cdot H_k$		4.21	2.49
ASSEMBLY	0.26	0.13	0.13
境界条件	0.08	0.04	0.04
連立方程式の解法	5.29	0.67	0.67
$\Delta \bar{U} = H_k^T \cdot \Delta U_{I+1}$		0.03	0.03
不釣り合力 $\bar{W}_{I+1}$	12.28	12.66	3.60
状態 I+1			
Total	36.53	36.37	14.84

② 計算時間について

有限要素法のみを用いた場合と本法を用いた場合のそれぞれについて、第 I 段階から第 I+1 段階に至る 1 回の反復計算における各計算過程 (各サブルーチン) に必要な CPU タイムを表-2 に示す。この表より以下のことが明らかになった。

- i) 本法を用いることにより解析モデルの自由度が有限要素法の場合に比して約 40% に低減されている。したがって、連立方程式の解法に必要な CPU タイムは、5.3 秒から 0.67 秒へとときわめて短くなっていることがわかる。
- ii) しかし、この程度の構造物では、

1回の反復計算に必要な CPU タイムの中に占める連立方程式の解法に要する CPU タイムの割合は、有限要素法の場合約 14% にしかすぎない。すなわち、全体系の連立一次方程式を解くより、それを組み立てる作業の方にかかなりの時間を要していることがわかる。

iii) 剛性マトリックスの計算によく出てくる  $A^T \cdot X \cdot A$  という形のマトリックスの掛け算にはかなりの計算時間を要するということがわかった。

iv) さらに、 $A^T \cdot X \cdot A$  という形のマトリックスの掛け算において、マトリックス  $A, X$  に 0 要素が多い場合には、あらかじめ手計算で数式化しておくことと計算時間がかなり短縮できることがわかった。たとえば、 $B^T \cdot k_L \cdot B, L^T \cdot k_L \cdot L$  および  $H_k^T \cdot k_L \cdot H_k$  の計算においてこの処理を行うことにより表-2 の (c) 欄 (改良) に示すように CPU タイムがかなり減少でき、当初1回の反復計算に 36.4 秒かかっていたのに、この処理を行った後は 14.8 秒となった。合計して、反復計算1回ごとに、36.4 秒から 14.8 秒と約 60% の CPU タイムの節減が達成できた。なお、この圧縮板の計算は大阪大学大型計算機センター NEAC シリーズ 2200 N-700 を用いて行った。

(2) 周辺単純支持の圧縮補剛板

a) 解析モデル

図-8 に示すような縦リブ2本を有する周辺単純支持

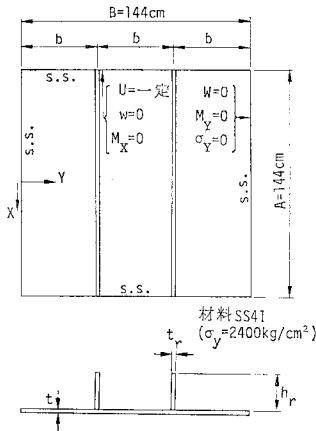


図-8 補剛板の解析モデル

表-3 補剛板モデルの寸法諸元

供試体	R	$\gamma/\gamma_N$	A	B	t	$h_r$	$t_r$
M 1	0.7	1.0	1440	1440	12.0	90.065	12.0
M 2	0.7	5.0	1440	1440	12.0	134.68	17.944
M 2	1.3	1.0*	1440	1440	6.56	56.538	7.54
M 3	1.3	5.0*	1440	1440	6.56	84.549	11.273

\*)  $\gamma/\gamma^*$

(長さの単位mm)

の圧縮板を解析例に取り上げる。板厚  $t_r$  とリブの高さ  $h_r$  を表-3 に示すように変化させた4種類の解析モデルを考えた。すなわち、幅厚比パラメーター R が道路橋示方書 (以下、道示という) で規定する限界値 0.7 および R が大きく 1.3 の2ケース、さらに補剛材の剛比については道示 (あるいは DIN 4114) で定める必要最小剛比  $r_N$  (あるいは  $r^*$ ) の1倍ないし5倍の2ケースとした。載荷辺の板パネル中央面に一樣相対圧縮変位を導入することによって圧縮荷重を与えた。

b) メッシュ分割

図-9 に示すように全体の1/4部分を  $9 \times 9$  の細かいメッシュ分割と  $6 \times 6$  の若干粗いメッシュ分割にした2種類の離散化モデルについて解析を行った。縦リブが曲げに対して比較的剛な場合には、縦リブ間の板パネルのたわみが卓越して発生する。この場合には、板パネルでは文献 14) の圧縮板の挙動と類似して

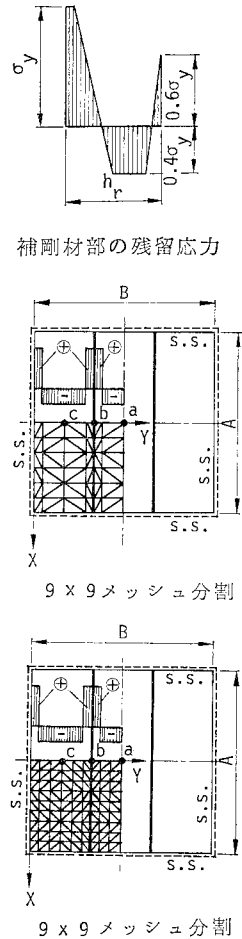


図-9 メッシュ分割

るので、同文献を参考にして、リブ間を6分割することにした。リブが弾性曲げを生じる場合には、補剛板の全体的なたわみが卓越してくるため、それよりも粗い分割でもよいものと思われる。平面三角形要素の層分割数は文献 14) により 4 とした。補剛材部分に相当する柱要素の層分割数は 6 とした。6層と 10層の場合の結果を比較したが有意な差は認められなかった。

c) 解析に用いたたわみ波形

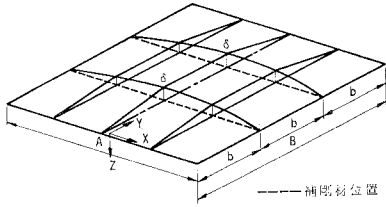
式 (41) に示されるたわみ波形を用いた。級数の項数は、最大  $m=5, n=5$  の合計 25 項までを考慮することにした。

d) 初期たわみおよび残留応力度

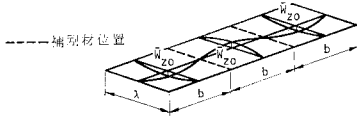
初期たわみについては、図-10 (a) の全体的な初期たわみモード ( $W_{g0}$ ) と、図-10 (b) に示すような板パネルの局所的な初期たわみモード ( $W_{lg}$ ) の和として補剛板各節点の初期たわみを与えた。すなわち、

$$W_0 = W_{g0} + W_{l0} \dots (53)$$

$$W_{g0} = \delta \cdot f(X, Y) \dots (54)$$



(a) 全体の初期たわみモード  $W_0$



(b) 板パネルの局部的初期たわみモード  $W_{10}$

図-10 補剛板の初期たわみモード

$$f(X, Y) = \begin{cases} Y/b \cdot \cos(\pi X/A) & (0 \leq Y \leq b) \\ \cos(\pi X/A) & (b \leq Y \leq 2b) \\ (B-Y)/b \cdot \cos(\pi X/A) & (2b \leq Y \leq B) \\ \dots\dots\dots & (55) \end{cases}$$

$$W_{10} = \bar{W}_{10} \cdot \cos(\pi X/\lambda) \cdot \sin(\pi Y/b),$$

$$\lambda = b \text{ (正方形パネル) } \dots\dots\dots (56)$$

$\delta$  は補剛材の最大初期たわみでその符号はたわみが補剛材側に変形している場合を正とする。今回の解析例では道示の規定限界値を準用するという意味で、

$$\delta = A/1000, \bar{W}_{10} = b/150$$

とした。

残留応力分布については、板パネルおよび補剛材部の平均残留圧縮応力度  $\bar{\sigma}_{rc}$ 、 $\bar{\sigma}_{rc,r}$  をともに  $-0.4\sigma_y$ 、残留引張り応力度  $\sigma_{rt}$  を降伏点  $\sigma_y$  とし、自己平衡条件を考慮して、図-9 に示すような分布形とした。

e) 解析結果とその考察

① 精度について

i) 本法と有限要素法との比較

級数の項数  $NWN$  を 25 項に取り、解析モデル M1 について、図-9 に示すよ

表-4 M1 モデルの解析結果 ( $\bar{\sigma}_m/\sigma_y$ )

メッシュ	6 × 6	9 × 9
① FEM	0.697	0.678
② 本法(NWN=25)	0.700	0.681
(②-①)/①	0.4%	0.4%

( R=0.7,  $\gamma/\gamma^*=1.0$  )

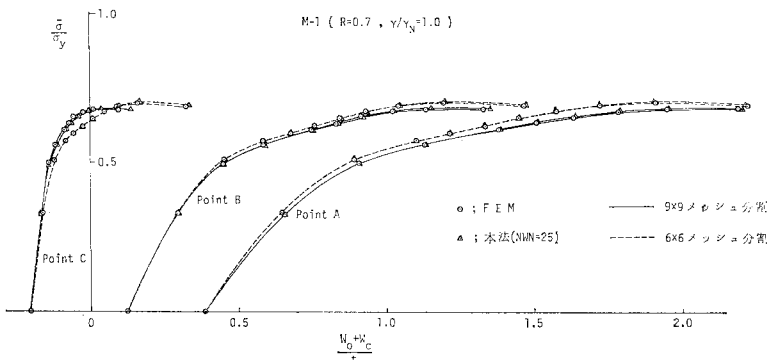


図-11 F.E.M. と本法との比較

表-5  $\bar{\sigma}_m/\sigma_y$  (F.E.M. と本法の比較)

モデル	M1 (R=0.7, $\gamma/\gamma^*=1$ )	M2 (R=0.7, $\gamma/\gamma^*=5$ )	M3 (R=1.3, $\gamma/\gamma^*=1$ )	M4 (R=1.3, $\gamma/\gamma^*=5$ )
① FEM	0.697	0.733	0.375	0.548
② 本法(NWN=25)	0.700	0.740	0.377	0.550
(②-①)/①	0.4%	1.0%	0.5%	1.0%

(6 × 6 メッシュ分割)

表-6  $\bar{\sigma}_m/\sigma_y$  (メッシュ分割と精度の関係)

モデル	M-1 (R=0.7, $\gamma/\gamma^*=1$ )	M-2 (R=0.7, $\gamma/\gamma^*=5$ )	M-3 (R=1.3, $\gamma/\gamma^*=1$ )	M-4 (R=1.3, $\gamma/\gamma^*=5$ )
① 6x6 分割	0.700	0.740	0.377	0.550
② 9x9 分割	0.681	0.700	0.360	0.501
(①-②)/②	2.8%	5.7%	4.7%	9.8%

(NWN=25)

うな 2 種類のメッシュ分割を用いた解析結果を 図-11 と表-4 に示す。表-4 には最大平均圧縮応力度  $\bar{\sigma}_m$  を降伏点  $\sigma_y$  で無次元化した値  $\bar{\sigma}_m/\sigma_y$  が示されている。これらの図表より、有限要素のメッシュ分割数にかかわらず、級数の項数が十分であれば、本法による解析結果は有限要素法のみを適用した場合の結果に収束していることがわかる。

また、表-5 には、幅厚比パラメーター  $R$  および補剛材剛比  $r$  を変化させた 4 つの解析モデルについて、6 × 6 のメッシュ分割を用いた解析結果を、本法と有限要素法のみを用いた場合とを比較して示してある。この表より、級数の項数  $NWN$  を多く (いまの場合 25 項) 取れば、本法による結果は有限要素法のみ解に収束することがわかる。

ii) メッシュ分割数と精度の関係

$NWN=25$  とし、メッシュ分割を 6 × 6 と 9 × 9 の 2 通りについて、本法を用いて解析した結果を表-6 に示す。この表より以下のことがわかる。幅厚比パラメーター  $R$  が 0.7 で補剛材の剛比  $r$  が道示の最小剛比  $r_N$  に等しい解析モデル M1 では 6 × 6 メッシュ分割を用いることによる誤差は 2.8% と小さい。ところが、 $R$  が 0.7 より大きくなるにつれて、また、剛比  $r$  が  $r_N$  あるいは  $r^*$  に比して大きくなるにつれて、6 × 6 メッシュ分割を用いることによる誤差は大きくなっていくことがわかる。すなわち、 $R \leq 0.7$ 、 $r/r_N \approx 1$  なる全体変形の卓越する補剛板では 6 × 6 メッシュ分割でよい。それに対して  $R \leq 0.7$ 、 $r/r_N > 1$  および  $R > 0.7$ 、 $r/r_N \geq 1$  あるいは  $r/r^* \geq 1$  なる全体変形と局部変形がとも

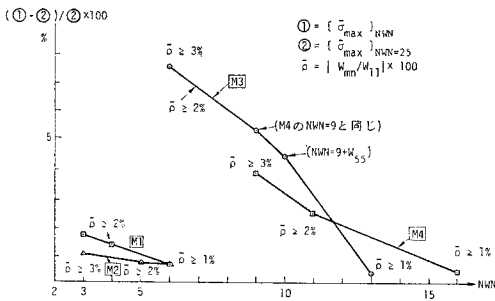


表一 極限状態でのたわみモードの係数の比  $\rho$  ( $\rho = |W_{mn}/W_{11}|$ )

(a) M1 ( R=0.7 , $\gamma/\gamma_N^*=1$ )						(b) M2 ( R=0.7 , $\gamma/\gamma_N^*=5$ )					
m \ n	1	3	5	7	9	m \ n	1	3	5	7	9
1	1.000	0.020	0.021	0.006	0.000	1	1.000	0.010	0.025	0.003	0.001
3	0.026	0.301	0.012	0.001	0.002	3	0.037	0.702	0.015	0.000	0.002
5	0.002	0.008	0.001	0.005	0.005	5	0.004	0.028	0.006	0.007	0.005
7	0.003	0.001	0.003	0.002	0.000	7	0.002	0.000	0.002	0.002	0.000
9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	9	0.001	0.004	0.001	0.000	0.006

(c) M3 ( R=1.3 , $\gamma/\gamma_N^*=1$ )						(d) M4 ( R=1.3 , $\gamma/\gamma_N^*=5$ )					
m \ n	1	3	5	7	9	m \ n	1	3	5	7	9
1	1.000	0.048	0.021	0.005	0.001	1	1.000	0.050	0.030	0.006	0.001
3	0.037	0.344	0.031	0.004	0.003	3	0.037	0.673	0.040	0.017	0.018
5	0.032	0.013	0.017	0.014	0.003	5	0.038	0.035	0.018	0.025	0.002
7	0.016	0.013	0.011	0.003	0.000	7	0.031	0.019	0.024	0.006	0.002
9	0.001	0.000	0.002	0.001	0.001	9	0.003	0.012	0.005	0.003	0.005



図一十二 NWN と精度の関係

に問題となるような補剛板では 9×9 メッシュ分割を用いるのがよい。

iii) 級数の項数 NWN と精度の関係

極限状態における各たわみモードの係数  $W_{mn}$  を係数  $W_{11}$  で無次元化し、その絶対値  $\rho$  を表一に示す。解析に用いる NWN の項数として、 $\rho \geq 1\%$  を満足する波形を取ると、解析モデル M1, M2 では NWN=6 となり、M3 では NWN=13, M4 では NWN=16 となる。この NWN を用いて解析した場合の最大平均応力度  $\bar{\sigma}_m$  は、NWN=25 とした場合の結果に比して、その誤差はすべて 0.6% 以下に収まっていることが図一十二からわかる。この図には、NWN を徐々に少なくしていった場合の結果をも示している。図より、2本の縦補剛材を有する縦横比 1 の周辺単純支持板に一方方向の一樣圧縮力が作用する場合の解析を行ううえで、以下のことが結論できる。幅厚比パラメーター  $R$  が 0.7 以下で、補剛材剛比  $r/r_N$  が 1~5 の範囲にある補剛板の場合、

解析に用いる級数を  $W_{11}, W_{33}, W_{31}$  の 3 項、 $R$  が 0.7 より大きく、 $r/r_N$  が 1~5 の範囲内にある補剛板の場合、解析に用いる級数を  $W_{11}, W_{13}, W_{33}, W_{31}, W_{15}, W_{35}, W_{55}, W_{53}, W_{51}, W_{57}, W_{75}, W_{73}, W_{71}$  の 13 項にすれば、項数を減らしたことによる誤差は 2% 以下に収まる。

② 記憶容量

表一に、全体系の剛性マトリックス  $K_I$  を記憶するのに必要なコンピュータのワード数を示す。本法により大幅な記憶容量の節減が期待できることがわかる。

表一 剛性マトリックスを記憶するのに必要なワード数 (バンド状にしたもの)

メッシュ分割	6 × 6	9 × 9
① F.E.M.	11,025	30,000
② 本法 NWN=3	2,069 (1/5.3)	5,409 (1/5.5)
③ 本法 NWN=13	3,207 (1/3.4)	7,569 (1/4.0)

( )内は F.E.M. に対する比

③ 計算時間について

表一に 1 回の反復計算 (状態 I から I+1 への計算)

表一 1 回の反復計算に必要な計算時間 (CPU タイム)

メッシュ	F.E.M.	本法				
		NWN=3	NWN=6	NWN=9	NWN=13	NWN=25
6 × 6	1.8	1.4	--	1.8	--	2.7
9 × 9	4.7	3.2	3.5	3.9	4.3	6.2

sec

表一 解析に必要なメッシュ分割および級数の項数 NWN (縦横比 1, 縦補剛材 2 本)

$\gamma$	R	
	R ≤ 0.7	0.7 < R ≤ 1.3
$\gamma/\gamma_N^*=1$	6 × 6 メッシュ	9 × 9 メッシュ
$\gamma/\gamma_N^*=5$	NWN=3	NWN=13
$1 < \frac{\gamma}{\gamma_N^*} \leq 5$	9 × 9 メッシュ	9 × 9 メッシュ
$1 < \frac{\gamma}{\gamma_N^*} \leq 5$	NWN=3	NWN=13

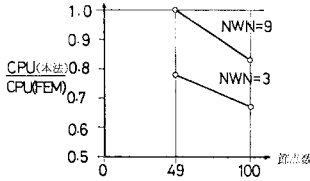


図-13 1回の反復計算に必要な CPU タイムと節点数の関係

に必要な CPU タイムを示す。いままでの考察をまとめると、解析に必要なメッシュ分割と級数の項数 NWN は表-10 のようになる。表-9 と表-10 を比較すると、NWN=13 で解析を行う必要がある  $R > 0.7$  なる補剛板では、本法は有限要素法のみを用いる方法に比較して、計算時間については大差ないことがわかる。しかし、わが国の実橋で普通によく用いられる  $R \leq 0.7$  なる補剛板では NWN=3 で解析してよく、計算時間の節減も期待できることがわかる。また、図-13 に示すように、F.E.M. の自由度が大きくなるにつれて、計算時間についても、一般的に、本法が有力な武器になることが推測される。なお、補剛板の計算については、京都大学大型計算機センターの FACOM・M-190 を用いた。

5. 実験値との比較

以下のように、本法による結果と実験結果を比較することにより、本解析理論で用いた種々の力学的仮定の合理性の検証を行った。

(1) 対象とした実験供試体とその挙動

文献 17) に示されている実験結果のうちで、縦リブのみを有し、その剛比が道示の基準値に等しい供試体 L2D1 の実験結果と本解析結果の比較を行う。供試体 L2D1 の断面寸法を図-14 に示す。供試体材料は、実測板厚 10.6 mm の SS 41 で、その実測降伏点は  $2680 \text{ kg/cm}^2$  である。圧縮力は、板パネルの中央面に一様相対圧縮変位として与えられ、面外境界条件に対しては周辺単純支持、面内の境界条件に対しては側辺拘束なしという条件で実験が行われた。供試体は、縦方向および横方向に

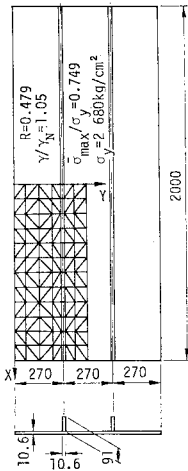


図-14 供試体 L2D1 の寸法諸元と解析モデル

大きな半波形のたわみが卓越して極限状態に至った。その極限強度  $\bar{\sigma}_{\max}/\sigma_y$  は 0.749 となっている。供試体が極限状態を通過しても補剛材間の板パネルの局部たわみおよび補剛材の横倒れ局部変形は観察からは明白に認められなかった。

(2) 解析モデル

a) モデル化

形状の対称性を利用して、供試体の 1/4 を取り出し解析を行った。幅厚比パラメーター  $R$  が 0.479 であり、 $r/r_N=1.0$  であるので、4. (2) e) の結論を参考にして、解析は  $12 \times 6$  のメッシュ分割で  $NWN=6$  ( $W_{11}, W_{13}, W_{33}, W_{31}, W_{15}, W_{35}$ ) として行った。

b) 残留応力および初期たわみ

実験では、全体的な半波形のたわみすなわち  $W_{11}$  モードのみが卓越していたので、解析でも  $W_{11}$  モードに対応する初期たわみ  $W_0$  のみを考慮することにした。実測した補剛材の初期たわみを 3 角級数にあてはめ、それを基に以下のように初期たわみ波形を仮定した。

$$W_0 = 0.139 \cdot t \cdot \cos(\pi X/200) \cdot \sin(\pi Y/81) \dots (57)$$

また、残留応力については、今回の実測値に最もよく適合する以下の諸量を用いて、文献 15) の式 (1)~(13) に従って分布形を決定した。

$$\bar{\sigma}_{rc}/\sigma_y = -0.41, \sigma_{rt}/\sigma_y = 1.0, \bar{\sigma}_{rc,r}/\sigma_y = -0.52,$$

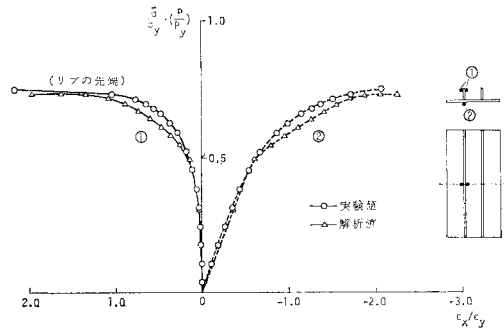


図-15 解析値と実験値との比較 ( $(\bar{\sigma}_y - \epsilon_y)/\sigma_y$ )

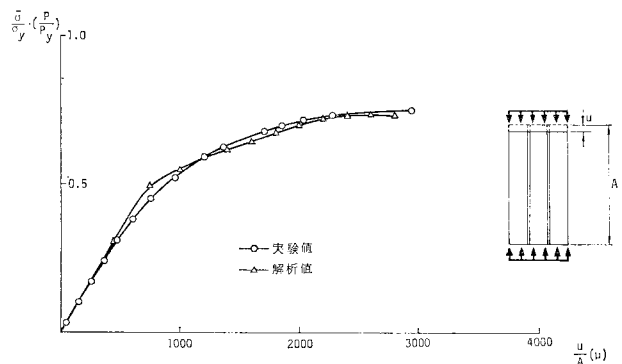


図-16 解析値と実験値との比較 ( $(\bar{\sigma}_y - u)/A$ )

$$\sigma_r/\sigma_y=0.35, r_s=0.29, r_{ss}=0.5, r_t=1.0$$

### (3) 解析結果と実験結果との対比および考察

#### a) 平均圧縮応力度と圧縮ひずみの関係

解析ならびに実験から得られた平均圧縮応力度  $\bar{\sigma}$  と中央断面における補剛材先端と付け根の軸方向ひずみ  $\epsilon_x$  の関係を、それぞれ、降伏点  $\sigma_y$  および降伏ひずみ  $\epsilon_y$  ( $\sigma_y/E$ ) で無次元化して図-15 に示す。解析結果と実験結果はきわめて良好な一致を示している。さらに  $\bar{\sigma}/\sigma_y$  と平均圧縮ひずみ  $u/A$  ( $u$ : 圧縮変位) の関係を図-16 に示す。両者はきわめて良好な一致を示している。

#### b) 極限強度

無次元極限応力度  $\bar{\sigma}_{max}/\sigma_y$  の実験値は 0.749, 計算値は 0.735 となった。1.8% 低めの、すなわち、若干安全側のきわめて良好な計算値を得た。

## 6. 結 論

本論文で得られた結論のうちで、補剛板の解析に関するものをまとめると以下のとおりである。

(1) 初期たわみと残留応力が共存する圧縮補剛板の弾塑性解析に関して、通常の有限要素法にモーダル・アナリシスの手法を導入した一解析手法を提示した。

(2) たわみ波形を有限項の級数で表わすことにより、本法による解は通常の有限要素法のみ解に収束することがわかった。

(3) 実験値と対比することにより本法の妥当性を示した。

(4) 一般の単純支持長方形圧縮補剛板の解析においては、本法では通常の有限要素法に比し、構造系の自由度を大幅に節減できることがわかった。

(5) また、本法によれば、幅厚比パラメーター  $R \leq 0.7$  で一様圧縮を受ける周辺単純支持の補剛板では、計算時間の節減も期待できる。

(6) 縦リブ2本、縦横比1で一様圧縮を受ける板に本法を適用する場合、 $R \leq 0.7$  で補剛材剛比  $r$  が道路橋示方書の規準値  $r_N$  程度であれば、有限要素のメッシュ分割は  $6 \times 6$ 、用いる級数の項数は3で解析してよい。また、 $R \leq 0.7$  で  $1 < r/r_N \leq 5$  なる補剛板では、 $9 \times 9$  メッシュ分割、項数3、 $0.7 < R \leq 1.3$  で  $1 \leq r/r^* \leq 5$  なる補剛板では  $9 \times 9$  メッシュ分割、項数13で解析を行えばよい。

さらに、有限要素法による数値計算に関して、以下の付随的成果を得た。

(1) 従来、連立一次方程式の数値解析法によるCPUタイムの低減について種々研究がなされている。しかし、本研究の結果、計算に必要なCPUタイムのうちで、

連立方程式の解法に要するCPUタイムの占める割合はわずかであることがわかった。それに比して、剛性マトリックスを組み立てる作業にかなりの時間を要することがわかった。

(2) 剛性マトリックスの計算によく出てくる  $A^T \cdot X \cdot A$  という形のマトリックスの掛け算にはかなりの計算時間を要することがわかった。 $A, X$  に0要素が多い場合には、あらかじめ手計算で数式化しておくとかなり計算時間が短縮できることがわかった。

## 7. あとがき

本論文の作成にあたり、当時、大阪大学大学院学生の岡田純一氏（現在・住友金属工業（株））同じく奈良 敬氏（現在・大阪大学工学部）にご協力いただいたことを付記しここに感謝の意を表します。

### 参 考 文 献

- 1) Bilstein, W.: Beitrag zur Berechnung vorverformter, mit diskreten Längssteifen ausgesteifter, ausschließlich in Längsrichtung belasteter Rechteckplatten nach der nichtlinearen Beultheorie, Der Stahlbau, 7/1974, S. 193~201, Fortsetzung, 9/1974, S. 276~282.
- 2) 岡村宏一・吉田公憲: 大たわみ, および, リブの補剛を考慮した長方形鋼板の弾塑性解析, 土木学会論文報告集, 第196号, pp. 29~43, 1971年12月.
- 3) 岡村宏一・吉田公憲: 大たわみ, および, リブの補剛を考慮した長方形鋼板の弾塑性曲げ座屈, 土木学会第27回年次学術講演会概要集, 1-88, pp. 231~234, 1972年10月.
- 4) 岡村宏一・吉田公憲: 圧縮を受けるリブ付き鋼板の弾塑性座屈, 昭和49年度土木学会関西支部年次学術講演会概要集, 1-64, 1974年5月.
- 5) 山田善一・渡辺英一・中村公信・富田年耕: F.E.M. による補剛板の後座屈強度の解析, 日本鋼構造協会第9回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 233~238, 1975年6月.
- 6) Yamada, Y. and E. Watanabe: On the behaviour and ultimate strength of Longitudinally stiffened flanges of steel box girders, Proc. of JSCE, No. 252, pp. 127~142, Aug. 1978.
- 7) 上田幸雄・欠尾哲也・菊本仁司: 補剛材の最小剛比について, 日本造船学会論文集, 第140号, pp. 199~204, 昭和51年11月, (第2報), 第143号, pp. 308~315, 昭和53年6月.
- 8) Cheung, Y.K.: Finite strip method analysis of slabs, Proc. ASCE, EM 6, pp. 1365~1378, 1968.
- 9) 上田幸雄・松石正克・山内 裕・田中雅子: 有限帯板法による平板の弾塑性大たわみ解析, 関西造船協会誌, 第154号, pp. 83~92, 昭和49年9月.
- 10) 上田幸雄・松石正克・森 信義・村川英一: 曲げを受ける横桁の最終強度に関する研究, 日本造船学会論文集, 第139号, pp. 111~121, 1976年.
- 11) Ohtsubo, H.: A method of elastic-plastic analysis of largely deformed plate problems, Proc. Symposium on Application of F.E.M. in Civil Engineering, Vanderbilt Univ., ASCE, pp. 439~456, November 13~14,

- 1969.
- 12) 大坪英臣：平板の弾塑性大たわみ問題の一解法，日本造船学会論文集，第 130 号，pp. 173~182, 1971 年.
  - 13) Tvergaard, V. and A. Needleman：Buckling of eccentrically stiffened elastic-plastic panels on two simple supports or multiply supported, Int. J. Solids Structures, Vol. 11, pp. 647~663, 1975.
  - 14) 小松定夫・北田俊行・宮崎清司：残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析，土木学会論文報告集，第 244 号，pp. 1~14, 1975 年 12 月.
  - 15) 小松定夫・牛尾正之・北田俊行：補剛板の溶接残留応力および初期たわみに関する実験的研究，土木学会論文報告集，第 265 号，pp. 25~35, 1977 年 9 月.
  - 16) 小松定夫・北田俊行：初期不整を有する圧縮板の極限強度特性に関する研究，土木学会論文報告集，第 270 号，pp. 1~14, 1978 年 2 月.
  - 17) 小松定夫・牛尾正之・北田俊行・奈良 敬：縦横に補剛された圧縮板の極限強度に関する実験的研究，土木学会論文報告集，第 288 号，pp. 13~28, 1979 年 6 月.  
(1978.9.16・受付)
-