

ブロック有限要素法による薄肉曲線箱桁の立体解析

THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS OF THIN-WALLED CURVED BOX GIRDERS BY BLOCK FINITE ELEMENT METHOD

坂井 藤 一*・長井 正 嗣**

By Fujikazu SAKAI and Masatsugu NAGAI

Table 1 Three-Dimensional Analysis of Curved Box Girders.

1. ま え が き

近年の橋梁においては、特に都市交通における路線線形の関係上、曲線橋が数多く採用されるようになった。今後その需要は、ますます増大し、と同時にその構造も一層大型化・複雑化することが予想される。このような大型曲線橋はほとんどの場合ねじり剛性の大きい箱桁橋になり、中には道路橋示方書の適用

範囲を超える規模のものも計画されつつある。したがって、複雑な平面形状を有する大型曲線箱桁橋の立体的挙動を忠実に把握しておくことは、従来にも増して重要な問題となっている。

曲線桁の構造解析については古くからいろいろな研究がなされているが、立体挙動の解明を目的にしたものとしては、薄肉はり理論の適用をもって始まりと考えてよい。そこではいわゆるねじり（そりねじり）の問題が扱われているのであるが、薄肉箱桁橋の構造問題としてはその他に断面変形の問題とせん断遅れの問題が挙げられる。このような観点から曲線箱桁の立体挙動解析に関する研究を分類したものが Table 1 である。

このうちはり理論に関する研究では、近年わが国で母線ごとの曲率の取り扱いを厳密に考慮する基礎方程式の誘導が行われ、小西・小松の論文⁷⁾から、倉西¹¹⁾、深沢¹³⁾らの研究を経て、最近の西野・深沢¹⁷⁾らの研究に至っている。しかしながら、これらはいずれも断面形状不変の仮定に基づくものである。

断面変形の問題は、はり理論の前提条件を具備し、か

は り 理 論 (そりねじりのみ考慮)	断 面 変 形	せん断遅れ
Gottfeld ¹⁾ Wansleben ²⁾ Vlasov ³⁾ Dabrowski ⁴⁾ Becker ⁵⁾ Kollbrunner and Hajdin ⁶⁾ 小西・小松 ⁷⁾⁻¹⁰⁾ 倉西 ¹¹⁾ 島田・倉西 ¹²⁾ 深沢 ^{13),14)} 渡辺・稼農・藤井 ¹⁵⁾ 薄木・稼農 ¹⁶⁾ 西野・深沢 ¹⁷⁾	● Beam theory Dabrowski ¹⁸⁾ Oleinik and Heins ¹⁹⁾ ● Folded plate theory 能町・吉田 ²⁰⁾ Alam, Honglandaromp and Lee ²¹⁾ ● Generalized co-ordinate method 落合 ²²⁾ 坂井・奥村 ²³⁾ ● Finite strip method Cheung and Cheung ²⁴⁾ 坂井・中村 ²⁵⁾ 小松・栗村・牧浦 ²⁶⁾ 大塚・吉村・彦坂 ²⁷⁾	● Galerkin method 小松・中井・北田 ²⁸⁾ ● Folded plate theory 薄木・菅原 ²⁹⁾ 芳村・非澤 ³⁰⁾

つダイアグラムの設計法と関連するきわめて重要な問題であり、直線箱桁については相当数の研究例が報告されている^{*)}。しかしながら、曲線箱桁については、解析法が複雑なこともあって挙動自体あまり明確にされているとはいえず、近年に至りこの種の研究が次第に実施されてきている。このような研究の代表的なものを挙げると、まず、Dabrowski¹⁸⁾の簡便な取り扱いが挙げられる。これは断面変形に伴うせん断ひずみを無視してはり理論と類似の方程式を導いており、Wright ら³²⁾が直線桁で示した BEF アナロジーに対応するものである。Oleinik ら¹⁹⁾はこれを数値パラメータ解析し、断面変形付加応力の近似算定式を提案している。その他に折板理論による能町・吉田²⁰⁾、Alam ら²¹⁾の研究、一般化座標法を拡張した落合²²⁾、坂井ら²³⁾の研究、有限帯板法(FSM)を用いた Cheung ら²⁴⁾、坂井・中村²⁵⁾などの研究がある。これらの研究はほとんどが解法の提案であり、適用は単純な場合に限られ、解法としては、橋軸方向断面変化に対する処理、支点条件、中間ダイアグラムの取り扱い等に難点がある。

せん断遅れの問題は設計上有効幅の決定と関連する問

* 正会員 工博 川崎重工業(株) 鉄構事業部開発設計部
** 正会員 工修 川崎重工業(株) 鉄構事業部橋梁設計部

*) 別論文 31) で詳細に報告した。

題であるが、ガラーキン法による小松ら²⁸⁾の研究、折板理論に基づく薄木ら²⁹⁾、芳村ら³⁰⁾の研究がある。この問題については実用的な範囲内で直線箱桁の場合と大差のないことが明らかにされている。

このような観点から、本論文では薄肉曲線箱桁の立体挙動を簡便に解析する一つの解法を提案し、上記構造問題を解明しようとするものである。その考え方は、先に著者らが直線箱桁について提案した手法³¹⁾を曲線桁に応用したものである。すなわち、まず一般化座標法を用いて曲線箱桁の1次元場的基础方程式を誘導し、次にそれを有限要素法を用いて解析するという考え方である。その意味では、直線箱桁解析用のブロック有限要素法を曲線箱桁にそのまま拡張したものといえるが、曲線(円筒)座標系において有限要素法を適用する場合問題となる変位関数の採り方について考察を加えている。

本解法の特長を挙げると、

- ① 断面変形やせん断遅れの解析が簡便にできる。
- ② 任意の円曲線の組み合わせが解析できる。
- ③ ダイアフラムを弾性体として取り扱える。
- ④ 境界条件が任意である。
- ⑤ 腹板高の変化する変断面桁の解析が可能である。

などである。

本論文においては、まず曲線箱桁のブロック有限要素剛性マトリックス誘導を行うが、それに伴う変位関数の選定に関する考察および膜理論の前提に関する検討を実施する。次に本解法とFSM²⁵⁾との比較によりその妥当性を確認し、最後に応用例として特定の断面および支間長を有する箱桁について断面変形挙動の検討を実施する。特に最後の断面変形挙動の解明は、従来ほとんど明らかにされていなかった点であり、ここで得られた結果は今後の中間ダイアフラム設計法の検討に役立つものと思われる。

2. 曲線箱桁の基礎方程式

(1) 仮定条件

Fig. 1 に示す断面形状を考え、橋軸方向に α 座標、断面輪郭線方向に s 座標(フランジ部では r 座標、腹板部では z 座標に対応する)を取る。 α 方向の変位を u 、 s 方向変位を v_t 、 s 方向と直角方向変位を v_n とする。

ここで、本解法における理論の前提条件は直線桁の場合と同様に³¹⁾次のようなものである。

- ① 断面輪郭線方向の直ひずみは無視。
- ② ポアソン比は無視。
- ③ 薄板の面外曲げ作用を無視した膜理論の採用。

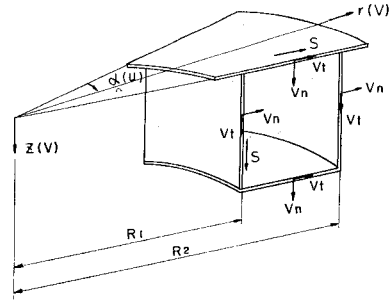


Fig. 1 Co-ordinate and Definition of Basic Cross Section.

④ リブは軸方向剛性のみ考慮。

ひずみを $\{\epsilon_\alpha, \epsilon_s, \tau_{\alpha s}\}$ とすると、フランジ部(扇形板)で、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{u'}{r} + \frac{v_t'}{r} \\ \tau_{\alpha s} &= \dot{u} - \frac{u}{r} + \frac{v_t'}{r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot a, b)$$

腹板(曲面板)で、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{u'}{r} + \frac{v_n'}{r} \\ \tau_{\alpha s} &= \dot{u} + \frac{v_t'}{r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot a, b)$$

である。ただし、 $()'$ および $(\dot{ })$ はそれぞれ α および s に関する微分記号である。

応力 $\{\sigma_\alpha, \sigma_s, \tau_{\alpha s}\}$ は前提条件 ①, ② より、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= E \epsilon_\alpha \\ \tau_{\alpha s} &= G \tau_{\alpha s} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot a, b)$$

となる。ただし、 E は縦弾性係数、 G はせん断弾性係数である。

次に変位 u, v_t, v_n を以下のように仮定する。

$$u(\alpha, s) = \sum_i^8 \phi^{(i)}(s) \cdot U_i(\alpha) \quad \left. \vphantom{\sum_i^8} \right\}$$

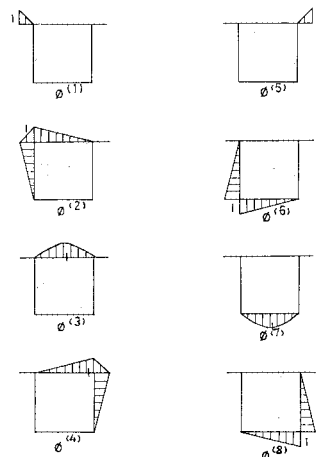


Fig. 2 Generalized Co-ordinate ϕ .

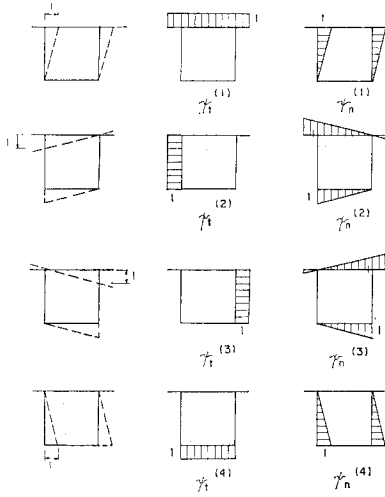


Fig. 3 Generalized Co-ordinate ψ_t, ψ_n .

$$\left. \begin{aligned} v_t(\alpha, s) &= \sum_j^4 \psi_t^{(j)}(s) \cdot V_j(\alpha) \\ v_n(\alpha, s) &= \sum_j^4 \psi_n^{(j)}(s) \cdot V_j(\alpha) \end{aligned} \right\} \dots(4 \cdot a, b, c)$$

ここで、 $\phi^{(i)}(s)$ ($i=1\sim 8$) および $\psi_t^{(j)}(s)$, $\psi_n^{(j)}(s)$ ($j=1\sim 4$) はそれぞれ縦および横方向の変位の基本モードを表わす一般化座標であり、Fig. 2, 3 に示されるものである。また、 $U_i(\alpha)$ ($i=1\sim 8$), $V_j(\alpha)$ ($j=1\sim 4$) は一般化変位である。

(2) 仮想仕事の原理の適用

式 (1)~(4) より応力-変位の関係は以下のようになる。

フランジ部で、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= E \left\{ \sum_i^8 \left(\frac{\phi^{(i)}}{r} U_i' \right) + \sum_j^4 \left(\frac{\psi_t^{(j)}}{r} V_j \right) \right\} \\ \tau_{\alpha s} &= G \left\{ \sum_i^8 \left(\dot{\phi}^{(i)} - \frac{\phi^{(i)}}{r} \right) U_i + \sum_j^4 \left(\frac{\psi_t^{(j)}}{r} V_j' \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots(5 \cdot a, b)$$

腹板部で、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\alpha &= E \left\{ \sum_i^8 \left(\frac{\phi^{(i)}}{r} U_i' \right) + \sum_j^4 \left(\frac{\psi_n^{(j)}}{r} V_j \right) \right\} \\ \tau_{\alpha s} &= G \left\{ \sum_i^8 \left(\dot{\phi}^{(i)} U_i \right) + \sum_j^4 \left(\frac{\psi_t^{(j)}}{r} V_j' \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots(6 \cdot a, b)$$

Fig. 4 に示す微小片 $d\alpha$ について、仮想仕事の原理を適用すると次の2式を得る。

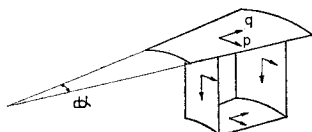


Fig. 4 Infinitesimal Element $d\alpha$.

$$\begin{aligned} \oint \sigma_\alpha' \phi^{(m)} dF - \int_F \tau_{\alpha s} \left(\dot{\phi}^{(m)} - \frac{\phi^{(m)}}{r} \right) t r d r \\ - \int_W \tau_{\alpha s} \dot{\phi}^{(m)} r t d z + \oint p \phi^{(m)} r d s \\ = 0 \quad (m=1\sim 8) \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint \tau_{\alpha s}' \psi_t^{(n)} t d S - \int_F \sigma_\alpha \psi_t^{(n)} dF - \int_W \sigma_\alpha \psi_n^{(n)} dF \\ + \oint q \psi_t^{(n)} r d s = 0 \quad (n=1\sim 4) \\ \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

ここで、 $\oint dF, \oint d s$ はそれぞれ全断面積、全輪郭線に関する積分、 \int_F, \int_W はフランジ部、腹板部における積分を意味する。

式 (7), (8) を部分積分を用いて変形し、式(5), (6) を代入すると次のような微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} E \sum_i (A_{mi} U_i')' - G \sum_i B_{mi} U_i \\ + (E \sum_j C_{mj} - G \sum_j \tilde{C}_{nj}) V_j' \\ + \bar{p}_m = 0 \quad (m=1\sim 8) \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -(E \sum_i C_{in} - G \sum_i \tilde{C}_{in}) U_i \\ + G \sum_j D_{jn} V_j' - E \sum_j F_{jn} V_j \\ + \bar{q}_n = 0 \quad (n=1\sim 4) \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} A_{mi} &= \oint \frac{\phi^{(m)} \phi^{(i)}}{r} dF \\ B_{mi} &= \int_F \left(\dot{\phi}^{(m)} - \frac{\phi^{(m)}}{r} \right) \left(\dot{\phi}^{(i)} - \frac{\phi^{(i)}}{r} \right) t r d r \\ &\quad + \int_W \dot{\phi}^{(m)} \dot{\phi}^{(i)} r t d z \\ C_{mj} &= \int_F \frac{\phi^{(m)} \psi_t^{(j)}}{r} dF + \int_W \frac{\phi^{(m)} \psi_n^{(j)}}{r} dF \\ \tilde{C}_{mj} &= \int_F \left(\dot{\phi}^{(m)} - \frac{\phi^{(m)}}{r} \right) \cdot \psi_t^{(j)} t d r \\ &\quad + \int_W \dot{\phi}^{(m)} \psi_t^{(j)} t d z \\ D_{nj} &= \oint \frac{\psi_t^{(n)} \psi_t^{(j)}}{r} t d s \\ F_{nj} &= \int_F \frac{\psi_t^{(n)} \psi_t^{(j)}}{r} dF + \int_W \frac{\psi_n^{(n)} \psi_n^{(j)}}{r} dF \\ \bar{p}_m &= \oint p \phi^{(m)} r d s \\ \bar{q}_n &= \oint q \psi_t^{(n)} r d s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11 \cdot a \sim h)$$

これをマトリックス表示すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} E [[A] \{U\}]' - G [[B] \{U\} \\ + (E [[C] - G [[\tilde{C}]] \{V\} + \{p\} = \{0\} \\ \dots\dots\dots(12) \\ -(E [[C]^T - G [[\tilde{C}]^T] \{U\} \end{aligned}$$

$$+G([D]\{V'\})'-E[F]\{V\}+\{q\}=\{0\}$$

.....(13)

式 (12),(13) が Fig. 1 に示すような単一曲線箱桁の基礎微分方程式群である。

3. 有限要素法の定式化

(1) 変位関数に関する考察

衆知のとおり、有限要素解が要素の細分化に伴い正解に収束するためには、変位関数の仮定に際して、

- ① すべての剛体モードを含み、剛体変位に伴ってひずみが生じないこと。
- ② 一定ひずみを表わす項がひずみ表示に含まれること。

なる完全性条件が必要である*)。直交デカルト座標系では変位関数として定数項を含めて低次から多項式を考へることにより上記 ①, ② の条件は自動的に満足される。ところが、曲線座標系では直交座標系のように簡単にはいかないことがすでにわかっている^{33)~37)}。したがってここでは薄肉曲線箱桁を構成する扇形板、曲面板に関する剛体モードを考へ、特に扇形板について 2~3 の変位関数による収束性の比較検討を実施する。

Fig. 5(a) に示す扇形板が Fig. 6 に示す 3 つの剛体移動を起こしたとき、変位 u, v_t は以下のようになる。

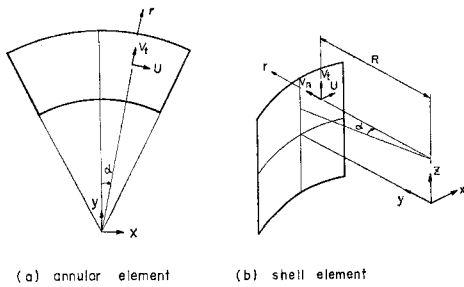


Fig. 5 Element.

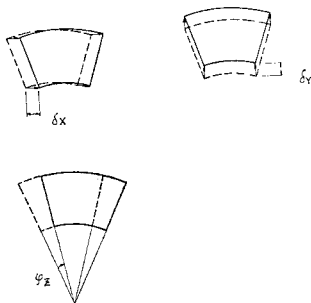


Fig. 6 Rigid Body Motion of Annular Element.

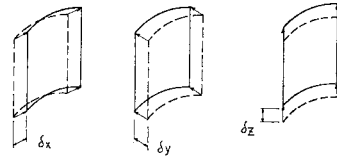


Fig. 7 Rigid Body Motion of Shell Element.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & r \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \dots\dots(14)$$

同様に Fig. 5(b) の曲面板が Fig. 7 に示す 6 つの剛体移動を起こしたとき、変位 u, v_t, v_n は以下のようになる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v_t \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & z \sin \alpha & z \cos \alpha & R \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -R \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & -z \cos \alpha & z \sin \alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \dots\dots(15)$$

以上より、曲線座標系において変位関数がすべての剛体モードを含むためには三角関数の採用が必要であることがわかる。

以下扇形板に着目して議論を進める。扇形板の有限要素は、2. (1) の一般化座標の選定によって Fig. 8 のような自由度をもつことになる。したがって、上記の剛体モードを厳密に含む変位場 $u = \{F_u\}^T \cdot \{a_u\}$, $v_t = \{F_v\}^T \cdot \{a_v\}$ の形状関数は次の形を有する。

$$\left. \begin{aligned} \{F_u\}^T &= \{\cos \alpha \sin \alpha r g(\alpha, r)\} \\ \{F_v\}^T &= \{\cos \alpha \sin \alpha\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(16 \cdot a, b)$$

ここで、関数 g は任意である。 $\{a_u\}$, $\{a_v\}$ は節点変位の一次結合を要素とするベクトルである。しかしながら、式 (16・a, b) のような変位関数を用いると、有限要素の一つの辺上の変位がその辺上にない節点変位の影響を受けることになる。このことは隣接要素との間で変位の不連続が生じることを意味し、非適合要素が形成されることになり、通常は望ましくない。

一方、著者らはあらかじめ r 方向と α 方向について変

*) 他にエネルギー上界を保証する許容条件 (適合条件) が望まれる。



Fig. 8 Freedom of Annular Element.

数分離形を仮定しているのので、これに対する有限要素は厳密には剛体モードを含まない。そこでこのような変位関数を3ケースと厳密に剛体モードを含む変位関数1ケースを考え、その比較検討を実施した。これらの形状関数を式(16)と同様の表示を使って列挙すると、以下のようになる。

i) 1次式近似

$$\left. \begin{aligned} \{F_u\}^T &= \{1 \ \alpha r \ \alpha r^2\} \\ \{F_v\}^T &= \{1 \ \alpha\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17 \cdot a, b)$$

これは式(16)において、 $\alpha \ll 1$ の場合に対応する。剛体モードについては剛体回転(φ_z)のみを含む変位仮定である。

ii) 3次式近似

$$\left. \begin{aligned} \{F_u\}^T &= \{1 \ \alpha r \ \alpha r^2 \ \alpha^2 r \ \alpha^3 r^2\} \\ \{F_v\}^T &= \{1 \ \alpha \ \alpha^2 \ \alpha^3\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18 \cdot a, b)$$

これは剛体モードについては剛体回転(φ_z)のみを含み、節点での自由度として変位の α に関する微係数も考慮したもので、自由度は、i)の場合の2倍となる。

iii) 三角級数近似

$$\left. \begin{aligned} \{F_u\}^T &= \{\cos \alpha \ \sin \alpha \ r \ \cos \alpha \ r \ \sin \alpha\} \\ \{F_v\}^T &= \{\cos \alpha \ \sin \alpha\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19 \cdot a, b)$$

この表示は剛体モードについては剛体移動(δ_x, δ_y)のみを含む。

iv) 剛体モードを完全に含む近似

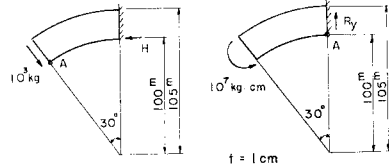
$$\left. \begin{aligned} \{F_u\}^T &= \{\cos \alpha \ \sin \alpha \ r \ \alpha r\} \\ \{F_v\}^T &= \{\cos \alpha \ \sin \alpha\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20 \cdot a, b)$$

以上の4ケースについて Fig. 9 に示すモデルを用いて比較した。Fig. 9(a) は円弧片持ちばり先端に集中荷重が作用するモデル、Fig. 9(b) は同じく集中モーメントが作用するモデルである。Fig. 10, 11 は Fig. 9(a) の場合のより先端たわみおよび水平方向反力の収束状態を示す。Fig. 11 の図中上段は水平反力値(H)、下段は水平方向のつり合い力(ΔH)の収束状態を示す。Fig. 12, 13 は Fig. 9(b) の場合のより固定端の応力度および鉛直方向反力の収束状態を示す。

以上から3次式近似の場合はたわみ、応力、反力とも良好な精度が得られ、少ない要素数で十分収束していることがわかる。1次式近似、三角級数近似の場合には、要素数を増大するにつれて正解に収束するようであるが、反力の収束は非常に悪く、十分な精度を得るためには相

当細かい要素分割が必要である。剛体モードを完全に含む場合は、反力は正解を示すが、収束性は悪い。

こうして扇形板要素において3次式近似によれば、1節点当りの自由度は2倍になるものの、特に反力関係の収束性が非常によくなることがわかった。曲面板についても同様のことはすでに文献(33)~(37)で示されている。したがって、ブロック有限要素の変位関数に3次式を採用することとした。



(a) model 1 (b) model 2

Fig. 9 Model.

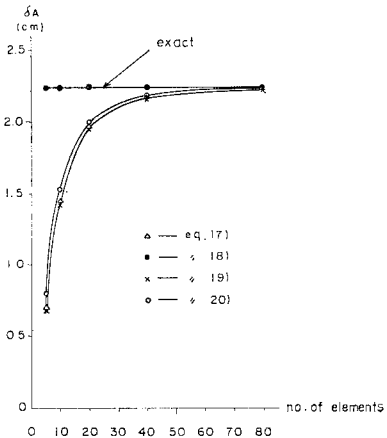


Fig. 10 Convergence of Deflection (model 1).

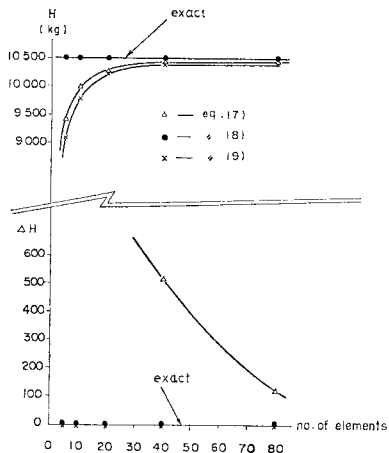


Fig. 11 Convergence of Reaction (model 1).

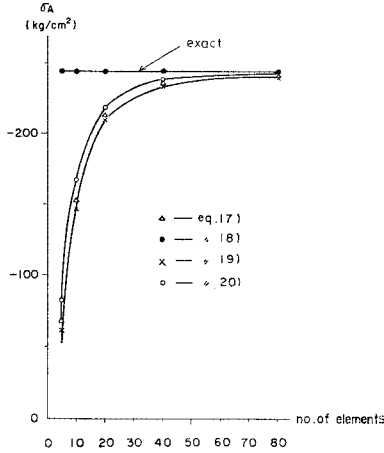


Fig. 12 Convergence of Stress (model 2).

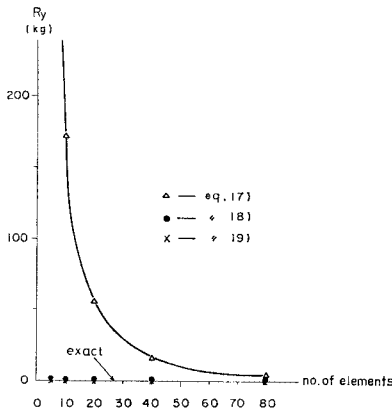


Fig. 13 Convergence of Reaction (model 2).

(2) ガラーキン法による有限要素法定式化

いま、Fig. 14 のような α 方向に角度 θ の有限要素 ($\alpha_k < \alpha < \alpha_h$) を考える。局所座標を β とし、形状関数を以下のように仮定する。

$$\begin{cases} \{U(\alpha)\} = [L_1] \cdot \{U_k\} + [L_2] \cdot \{U_h\} \\ \{V(\alpha)\} = [M_1] \cdot \{V_k\} + [M_2] \cdot \{V_h\} \end{cases} \dots\dots\dots (21 \cdot a, b)$$

ここで、

$$\begin{cases} [L_1] = \begin{bmatrix} w^{(1)} & 0 & w^{(3)} & 0 \\ 0 & w^{(1)} & 0 & w^{(3)} \end{bmatrix} \\ [L_2] = \begin{bmatrix} w^{(2)} & 0 & w^{(4)} & 0 \\ 0 & w^{(2)} & 0 & w^{(4)} \end{bmatrix} \end{cases} \dots\dots\dots (22 \cdot a, b)$$

$$\begin{cases} [M_1] = \begin{bmatrix} w^{(1)} & 0 & w^{(3)} & 0 \\ 0 & w^{(1)} & 0 & w^{(3)} \end{bmatrix} \\ [M_2] = \begin{bmatrix} w^{(2)} & 0 & w^{(4)} & 0 \\ 0 & w^{(2)} & 0 & w^{(4)} \end{bmatrix} \end{cases} \dots\dots\dots (23 \cdot a, b)$$

ただし、

$$\begin{cases} w^{(1)} = 1 - 3(\beta/\theta)^2 + 2(\beta/\theta)^3 \\ w^{(2)} = 3(\beta/\theta)^2 - 2(\beta/\theta)^3 \\ w^{(3)} = \beta - 2(\beta^2/\theta) + \beta^3/\theta^2 \\ w^{(4)} = -\beta^2/\theta + \beta^3/\theta^2 \end{cases} \dots\dots\dots (24 \cdot a \sim d)$$

また、

$$\begin{cases} \{U_k\}^T = \{U_1, U_2, \dots, U_8; U_1', U_2', \dots, U_8'\}^k \\ \{U_h\}^T = \{U_1, U_2, \dots, U_8; U_1', U_2', \dots, U_8'\}^h \\ \{V_k\}^T = \{V_1, \dots, V_4; V_1', \dots, V_4'\}^k \\ \{V_h\}^T = \{V_1, \dots, V_4; V_1', \dots, V_4'\}^h \end{cases} \dots\dots\dots (25 \cdot a \sim d)$$

は、それぞれ要素の k, h 端の変位および変位の 1 次導関数からなる節点未知数ベクトルである。

式 (12), (13) にガラーキン法を適用すると次の式を得る。

$$\int_0^\theta [E\{[A]\{U'\} - G[B]\{U\} + (E[C] - G[\tilde{C}])\{V'\} + \{p\}] \cdot w^{(l)} d\alpha = 0 \quad (l=1 \sim 4) \dots\dots\dots (26)$$

$$\int_0^\theta [-E[C]^T - G[\tilde{C}]^T]\{U\} + G([D]\{V''\} - E[F]\{V\} + \{q\}) \cdot w^{(l)} d\alpha = 0 \quad (l=1 \sim 4) \dots\dots\dots (27)$$

式 (26), (27) より部分積分を実施して次の式を得る。

$$\begin{aligned} \{\bar{P}_l\} = & \int_0^\theta [E\{[A]\{U'\} w^{(l)} + G[B]\{U\} w^{(l)} + E[C]\{V\} w^{(l)} \\ & + G[\tilde{C}]\{V'\} w^{(l)}] d\alpha \quad (l=1 \sim 4) \end{aligned} \dots\dots\dots (28)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{Q}_l\} = & \int_0^\theta [G[\tilde{C}]^T\{U\} w^{(l)} + G[D]\{V'\} w^{(l)} + E[C]^T\{U'\} w^{(l)} \\ & + E[F]\{V\} w^{(l)}] d\alpha \quad (l=1 \sim 4) \end{aligned} \dots\dots\dots (29)$$

ここで、部材端荷重ベクトル $\{\bar{P}_l\}, \{\bar{Q}_l\}$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \{\bar{P}_l\} = & E\{[A]\{U'\} + [C]\{V\}\} w^{(l)} \\ & + \int_0^\theta \{p\} w^{(l)} d\alpha \quad (l=1 \sim 4) \end{aligned} \dots\dots\dots (30)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{Q}_l\} = & G\{[\tilde{C}]^T\{U\} + [D]\{V'\}\} w^{(l)} \\ & + \int_0^\theta \{q\} w^{(l)} d\alpha \quad (l=1 \sim 4) \end{aligned} \dots\dots\dots (31)$$

最終的には Table 2 のような要素剛性マトリックス方程式を得る。

(3) 変断面桁の取り扱い

腹板高さの変化する変断面桁については、文献 31) と同様段階的に変化する等断面要素の集合体とみなして解析すればよい。

Table 2 Stiffness Matrix of Block Finite Element.

P^k	$E[A] \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{5\theta} & \frac{1}{10} \\ \frac{13}{35}\theta & \frac{11}{210}\theta^2 \end{bmatrix}$ $+G[B] \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{35}\theta & \frac{11}{210}\theta^2 \\ \frac{6}{5\theta} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$	$E[C] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\theta \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{10}\theta \end{bmatrix}$ $+G[\tilde{C}] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{10}\theta \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\theta \end{bmatrix}$	$E[A] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{6}{5\theta} & \frac{1}{10} \\ \frac{9}{70}\theta & -\frac{13}{420}\theta^2 \end{bmatrix}$ $+G[B] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{9}{70}\theta & -\frac{13}{420}\theta^2 \\ \frac{6}{5\theta} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$	$E[C] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{10}\theta \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\theta \end{bmatrix}$ $+G[\tilde{C}] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\theta \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10}\theta \end{bmatrix}$	U^k
P^k	$E[A] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{15}\theta \\ \frac{11}{210}\theta^2 & \frac{1}{105}\theta^3 \end{bmatrix}$ $+G[B] \cdot \begin{bmatrix} \frac{11}{210}\theta^2 & \frac{1}{105}\theta^3 \\ \frac{6}{5\theta} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$	$E[C] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10}\theta & 0 \\ -\frac{1}{10}\theta & 0 \end{bmatrix}$ $+G[\tilde{C}] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}\theta & 0 \\ -\frac{1}{10}\theta & 0 \end{bmatrix}$	$E[A] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30}\theta \\ \frac{13}{420}\theta^2 & -\frac{1}{140}\theta^3 \end{bmatrix}$ $+G[B] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}\theta & -\frac{1}{140}\theta^3 \\ \frac{6}{5\theta} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$	$E[C] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}\theta & \frac{1}{60}\theta^2 \\ \frac{1}{10}\theta & -\frac{1}{60}\theta^2 \end{bmatrix}$ $+G[\tilde{C}] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}\theta & -\frac{1}{60}\theta^2 \\ \frac{1}{10}\theta & \frac{1}{60}\theta^2 \end{bmatrix}$	U^k
Q^k		$E[F] \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{35}\theta & \frac{11}{210}\theta^2 \\ \frac{6}{5\theta} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ $+G[D] \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{5\theta} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{10}\theta \end{bmatrix}$	$E[C]T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\theta \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{10}\theta \end{bmatrix}$ $+G[\tilde{C}]T \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{10}\theta \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\theta \end{bmatrix}$	$E[F] \cdot \begin{bmatrix} \frac{9}{70}\theta & -\frac{13}{420}\theta^2 \\ -\frac{6}{5\theta} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ $+G[D] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{6}{5\theta} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{10}\theta \end{bmatrix}$	V^k
Q^k		$E[F] \cdot \begin{bmatrix} \frac{11}{210}\theta^2 & \frac{1}{105}\theta^3 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15}\theta \end{bmatrix}$ $+G[D] \cdot \begin{bmatrix} \frac{11}{210}\theta^2 & \frac{1}{105}\theta^3 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{15}\theta \end{bmatrix}$	$E[C]T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10}\theta & -\frac{1}{60}\theta^2 \\ -\frac{1}{10}\theta & \frac{1}{60}\theta^2 \end{bmatrix}$ $+G[\tilde{C}]T \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}\theta & \frac{1}{60}\theta^2 \\ -\frac{1}{10}\theta & -\frac{1}{60}\theta^2 \end{bmatrix}$	$E[F] \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{420}\theta^2 & -\frac{1}{140}\theta^3 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{30}\theta \end{bmatrix}$ $+G[D] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{30}\theta \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}\theta \end{bmatrix}$	V^k
P^h			$E[A] \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{5\theta} & -\frac{1}{10} \\ \frac{13}{35}\theta & -\frac{11}{210}\theta^2 \end{bmatrix}$ $+G[B] \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{35}\theta & -\frac{11}{210}\theta^2 \\ \frac{6}{5\theta} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$	$E[A] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\theta \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10}\theta \end{bmatrix}$ $+G[B] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{10}\theta \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{10}\theta \end{bmatrix}$	U^h
P^h			$E[A] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}\theta \\ -\frac{11}{210}\theta^2 & \frac{1}{105}\theta^3 \end{bmatrix}$ $+G[B] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}\theta \\ -\frac{11}{210}\theta^2 & \frac{1}{105}\theta^3 \end{bmatrix}$	$E[A] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10}\theta & 0 \\ -\frac{1}{10}\theta & 0 \end{bmatrix}$ $+G[B] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{10}\theta & 0 \\ -\frac{1}{10}\theta & 0 \end{bmatrix}$	U^h
Q^h				$E[F] \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{35}\theta & -\frac{11}{210}\theta^2 \\ \frac{6}{5\theta} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$ $+G[D] \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{5\theta} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{10}\theta \end{bmatrix}$	V^h
Q^h				$E[F] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{11}{210}\theta^2 & \frac{1}{105}\theta^3 \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}\theta \end{bmatrix}$ $+G[D] \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}\theta \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15}\theta \end{bmatrix}$	V^h

注) たとえば, $\begin{bmatrix} \frac{6}{5\theta} & \frac{1}{10} \\ \frac{13}{35}\theta & \frac{11}{210}\theta^2 \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} \frac{6}{5\theta} & & & \\ & \frac{1}{10} & & \\ & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$ の対角マトリックスである.

(4) ダイアフラムの取り扱い

今回考えたダイアフラムは充腹板形式であり, 他の形式(トラス, ラーメン)については等価板厚の概念を利用することにより容易に処理し得る. 取り扱いは文献31)と同様であり, 桁の自由度 $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ に対応するダイアフラムの具体的な剛性マトリックスは次のようなものである.

$$Gt_D \begin{bmatrix} B/H & 1 & -1 & -B/H \\ & H/B & -H/B & -1 \\ & & H/B & 1 \\ \text{sym.} & & & B/H \end{bmatrix} \dots\dots\dots (32)$$

ここで, t_D はダイアフラムの板厚である.

4. 数値計算

(1) 膜理論について

本法は箱断面を構成する板の板曲げ作用を無視した膜理論に立脚している. 直線桁において, 剛なダイアフラムがある程度密に配置されるならば, 膜理論の成立することはすでに述べた²³⁾. ここでは, 曲線桁の場合にも同様のことが成立するかどうか検討する.

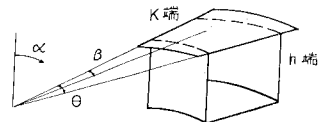


Fig. 14 Block Finite Element of Curved Box Girder.

Fig. 15 は一つの計算モデルであり, 桁端部には断面変形を生じないように剛なダイアフラム, 中間部には厚さ 2cm のダイアフラムが等間隔で配置されている. この桁に等分布満載および支間中央集中の逆対称荷重が作用する場合を解析する.

Fig. 16 は断面変形に伴うそり応力 σ_{DW} とダイアフラム個数の関係を示す結果である. 比較のため, 同じモデルで板曲げを考慮した場合, および桁の板厚をそれぞれ 1, 2cm とし板曲げを考慮した場合の結果も併記してある. これよりダイアフラムを適当に配置することによって, 膜理論の成立することが曲線桁においても確認される. 板曲げの影響があるような場合でも, 膜理論の値は若干安全側になる程度と考えてよい.

(2) 有限帯板法 (FSM) との比較

本解法の妥当性を検討するために, 文献 25) で得ら

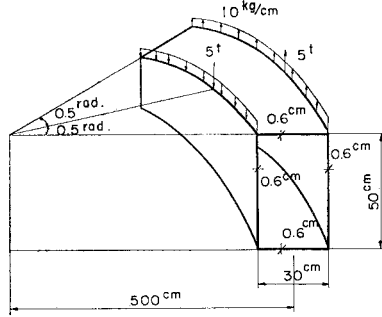
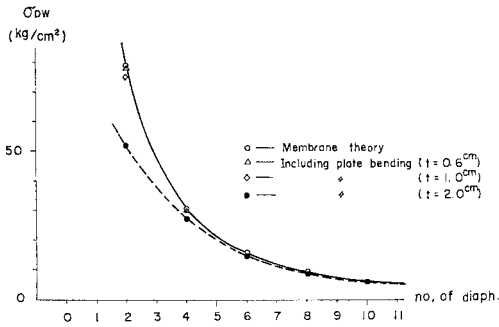
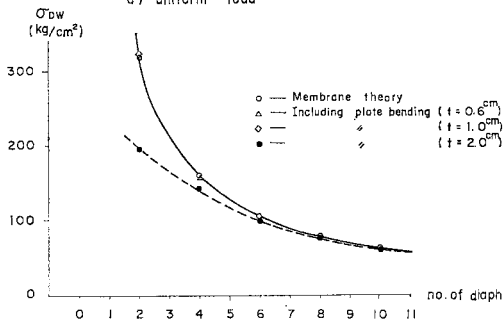


Fig. 15 Model Girder.



a) uniform load



b) concentrated load

Fig. 16 Validity of Membrane Theory.

れている結果と本法の計算結果の比較を行う。Fig. 15に示す曲線箱桁モデルの支間中央に逆対称荷重を載荷した場合について検討する。

Fig. 17 に内側腹板（曲率半径の小さい側）の荷重方向たわみ、Fig. 18 に同じく外側腹板のたわみを示す。図中のダイアフラム数は中間ダイアフラム個数を意味する。FSM と本法の結果はきわめてよい一致を示した。

次にせん断遅れの問題として、Fig. 19 に文献 30) で与えられている折板理論による計算結果と本法の結果の比較を示す。両者は十分な精度で一致していることがわかる。

以上から本法は断面変形・せん断遅れなどの問題を正確に解析するものであることが確認された。

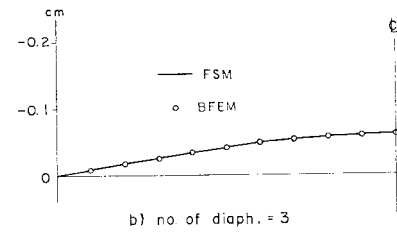
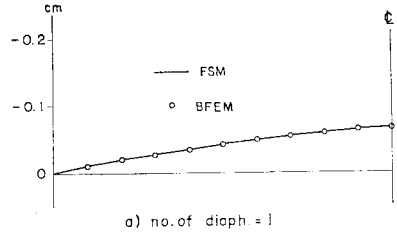


Fig. 17 Comparison between FSM and BFEM (vertical deflection of inner web).

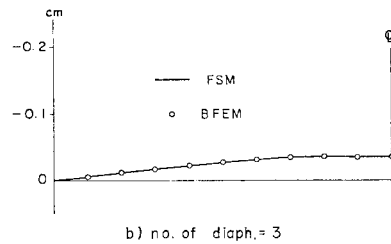
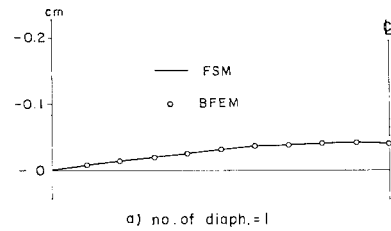


Fig. 18 Comparison between FSM and BFEM (vertical deflection of outer web).

(3) 断面変形挙動

Fig. 20 に示すような支間 65 m の単純桁（端支点で剛なダイアフラム、中間で板厚 2 cm のダイアフラムを配置）をモデルとして、曲率半径 R やダイアフラム個数などを変化させ、断面変形挙動を考察する。支間長を一樣に保つように、 R と中心角 ϕ は反比例するものとする。荷重は腹板直上の等分布満載荷重 (1t/m) と支間中央集中荷重 (10 t) の 2 ケースを考える。

a) 断面変形に伴うそり応力^{*}およびダイアフラム応力

Fig. 21 および 22 は等分布荷重が作用する $R=100$

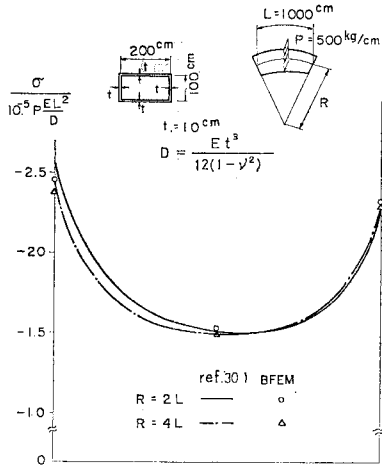


Fig. 19 Shear-lag Analysis (normal stress distribution of upper flange).

m ($\phi=0.65$ rad) および $R=30$ m ($\phi=2.17$ rad) の桁の断面変形そり応力分布を示したものである。ただし、ダイアフラムは個数 12 (間隔 5 m) の場合である。図には比較のため同一荷重を曲線桁の内側と外側、および同一支間長の直線桁に載せた場合の結果を挙げてある。これよりみると、曲線桁においては直線桁よりも断面変形の影響がずっと大きい。特にこの影響は $R=30$ m のような曲率の厳しい桁に著しく現われている。そり応力の分布は、直線桁の場合中間部のダイアフラム間分布が一定のパターンを繰返すのに対し、曲線桁の場合中央に向かって漸増している。内側载荷と外側载荷を比較すると、 $R=100$ m のような普通の曲率の場合には内側载荷の方が厳しくなるが、 $R=30$ m の場合にはほとんど差がみられず、むしろ外側载荷の方がいくぶん大きな値を示している。

Fig. 23 および 24 は中央集中荷重が作用するダイアフラム個数 6 の場合の結果である。曲線桁の方にそり応力が厳しく生じ、直線桁において折線状のそり応力分布は、曲線桁において大きく変化している。なお、内側载荷と外側载荷では、特に集中荷重近傍で分布形状が異なっている。

Fig. 25 はダイアフラム数 12 個の場合に対するダイアフラム応力の分布図である。曲線桁では直線桁よりもずっと大きな応力がダイアフラムに作用する。分布性状における両者の差は、等分布载荷の場合直線桁ではほぼ一定となるのに対し、曲線桁では放物線状になり、集中载荷の場合直線桁では载荷部ダイアフラムに力が集中するのに対し、曲線桁では非载荷部ダイアフラムにも载荷部

* 断面変形に伴うそり応力は次のように求めた。すなわち、有限個のダイアフラムを配した場合の計算値から、すべての節点に剛なダイアフラムがあると仮定した場合の計算値を差引き、これを σ_{dw} とした。

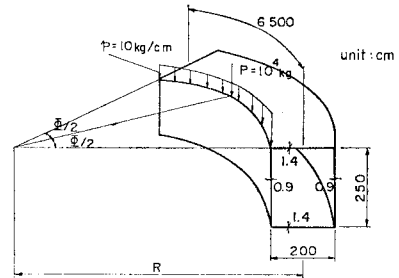


Fig. 20 Model Girder.

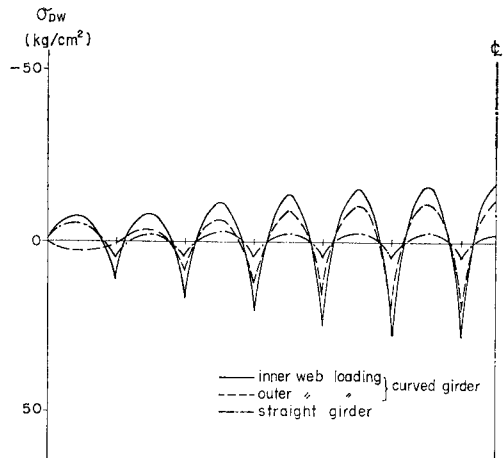


Fig. 21 Distorsional Warping Stress (uniform load, no. of diaph.=12, R=100m).

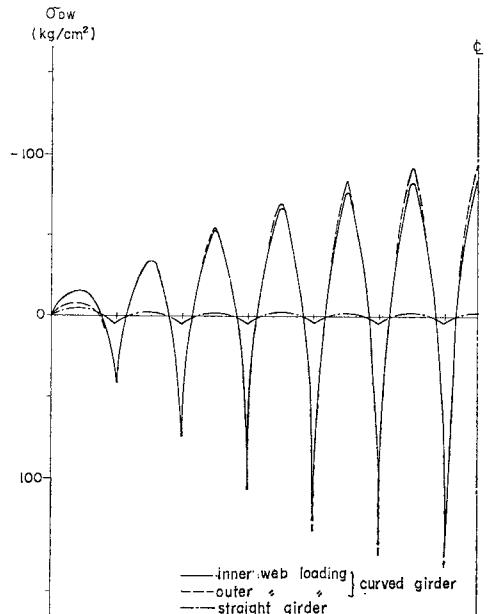


Fig. 22 Distorsional Warping Stress (uniform load, no. of diaph.=12, R=30m).

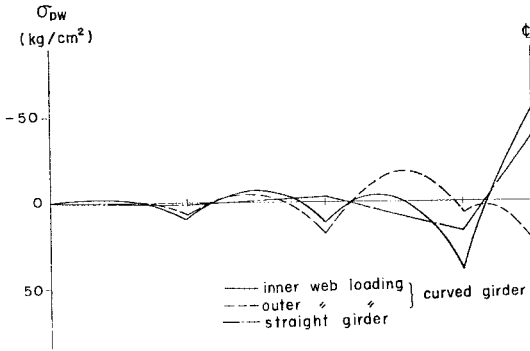


Fig. 23 Distorsional Warping Stress (concentrated load, no. of diaph. = 6, $R=100\text{ m}$).

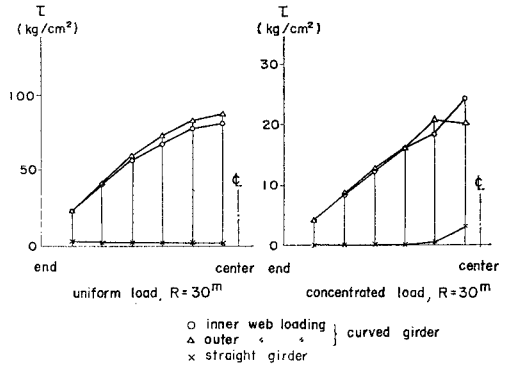
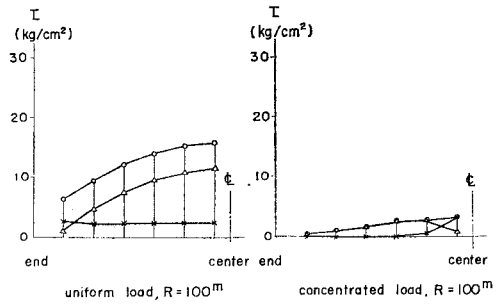


Fig. 25 Shear Stress around Diaphragms (no. of diaph. = 12).

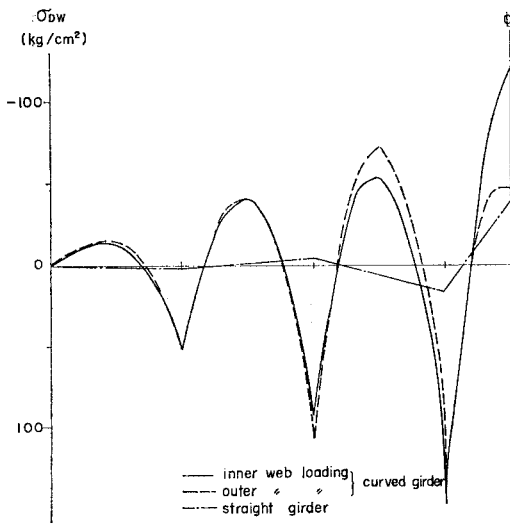


Fig. 24 Distorsional Warping Stress (concentrated load, no. of diaph. = 6, $R=30\text{ m}$).

と同程度の力が加わる、などの点である。

b) 曲率の変化に伴うそり応力

Fig. 26 および 27 は、ダイアフラム数を 10 として、曲率半径を変化させた場合の結果である。等分布荷重、集中荷重いずれの場合にも、 R が小さくなるにつれて断面変形に伴うそり応力は大きくなり、支間の端部から中央に向けて漸増している。

そり応力のダイアフラム上およびダイアフラム間での値を結ぶ包絡線、あるいは Fig. 25 のダイアフラム応力の橋軸方向分布は桁の曲げモーメント分布に似ていることがわかる。この現象は桁の曲げ変形に伴い、上下フランジおよび腹板に桁の曲がりの影響で法線方向力が生じ、それが新たに断面変形を生じさせる力（曲げモーメント/曲率半径に比例する）として作用していると考えると説明できる*）。

c) 桁の曲げ応力とそり応力の比率

Fig. 28, 29 にダイアフラム個数 10 個の場合のそり

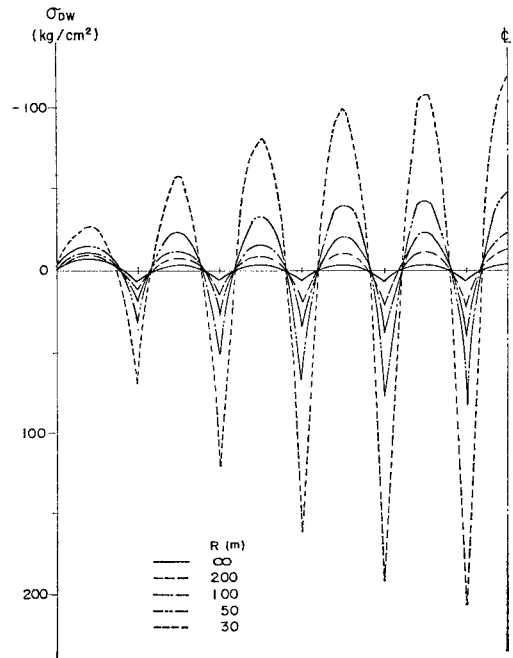


Fig. 26 Distorsional Warping Stress with Variation of R (uniform load, no. of diaph. = 10).

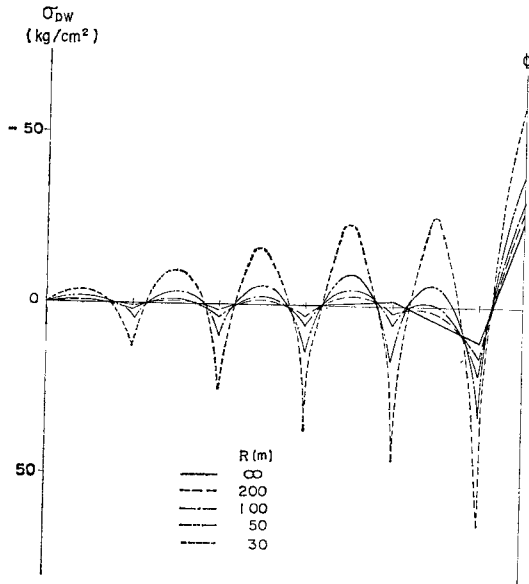


Fig. 27 Distorsional Warping Stress with Variation of R (concentrated load, no. of diaph.=10).

応力値と曲げ応力の 5% 値の比較を示す。 R が小さくなるにつれて曲げ応力も増加するが、そり応力の増加がより急激であり、 $R=50$ m, 等分布荷重の場合でも曲げ応力の 10% 強のそり応力が生じている。このことから、そり応力を桁曲げ応力に対し 2 次的なものとして無視できるようなダイアフラム配置を考えると³⁸⁾、曲線桁では直線桁の場合よりダイアフラム間隔を狭くする必要があることがわかる。

d) ダイアフラム板厚変化に伴うそり応力の変化

Fig. 30, 31 にダイアフラム個数 8 個の場合のそり応

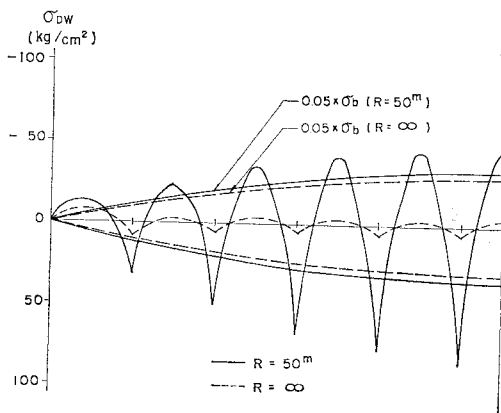


Fig. 28 Comparison between Distorsional Warping Stress and Bending Stress (uniform load, no. of diaph.=10).

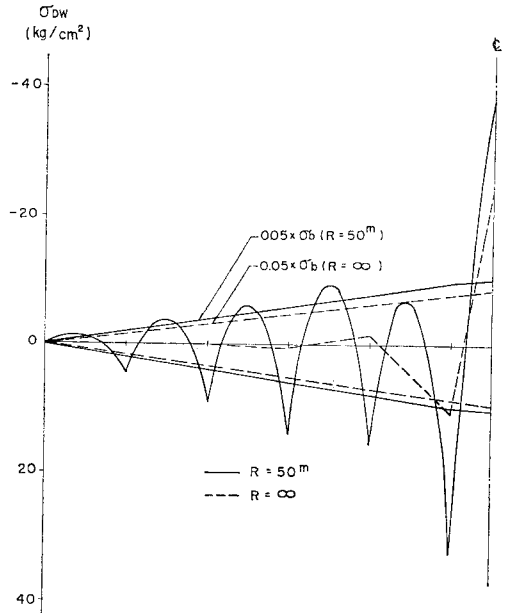


Fig. 29 Comparison between Distorsional Warping Stress and Bending Stress (concentrated load, no. of diaph.=10).

力(等分布荷重に対しては支間の 1/18, 1/6, 1/2 点, 集中荷重に対しては支間中央に着目)とダイアフラム板厚の関係を $R=100$ m, 50 m について示す。図中横軸 r は先に著者が直線箱桁で提案した相關剛比³⁸⁾である。これらの図より曲線桁のダイアフラム板厚(必要剛度)は直線桁と同様 $r=10\sim30$ で支障のないようである。

5. おわりに

以上, Vlasov の提案した一般化座標法と FEM を利

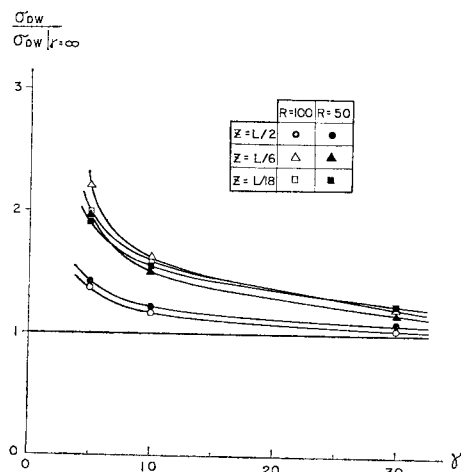


Fig. 30 Convergency of Distorsional Warping Stress (uniform load, no. of diaph.=8).

*) Dabrowski¹⁸⁾ は曲線桁の断面変形挙動を簡便に取り扱う手法を提案しているが、その中で桁の曲がりの影響としてこの力を取り扱っている。

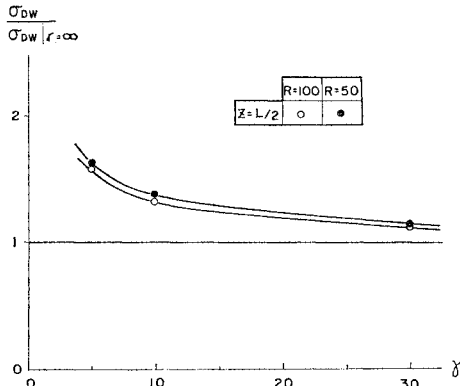


Fig. 31 Convergency of Distorsional Warping Stress (concentrated load, no. of diaph.=8).

用することにより曲線箱桁解析用のブロック有限要素法を開発した。本法は厳密には剛体モードを含まない有限要素法ではあるが、いくつかの検討結果から実用上問題のないことを確認した。

解析例を通して本法により曲線箱桁の立体挙動を簡便に精度よく考慮し得ることを示したが、特に曲線箱桁特有の断面変形挙動をかなり明確に把握することができた。これらの結果は今後中間ダイアフラム設計法を考えるうえで有用であり、具体的設計法の検討もすでに行っているため、次の機会に発表したいと考えている。

今回の計算では張出し付の一室箱断面に限定した議論を進めたが、多室断面への拡張は容易であり、本法は複雑な形状を有する曲線箱桁の立体挙動解析に資するものと考えられる。

参考文献

- 1) Gottfeld, H.: Die Berechnung räumlich gekrümmter Stahlbrücken, Bautechnik, 1932.
- 2) Wansleben, F.: Die Berechnung drehfester, gekrümmter Stahlbrücken, Stahlbau, 1952.
- 3) Vlasov, V.Z.: Thin-walled Elastic Beams, Publ. for the National Science Foundation, 1961.
- 4) Dabrowski, R.: Gekrümmte dünnwandige Träger, Springer-Verlag, 1968.
- 5) Becker, G.: Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter gekrümmter ebener Stäbe mit einfach-symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wolkrafttorsion, Stahlbau, 1965.
- 6) Kollbrunner, C.F. and N. Hajdin: Dünnwandige Stäbe, Band 1, Springer-Verlag, 1972.
- 7) 小西一郎・小松定夫: 薄肉曲線桁の基礎理論, 土木学会論文集, 第 87 号, 1962 年 11 月.
- 8) 小西一郎・小松定夫: 単純支持曲線箱桁の立体的解析, 土木学会論文集, 第 90 号, 1963 年 2 月.
- 9) 小西一郎・小松定夫: 薄肉連続曲線箱桁の立体的解析, 土木学会論文集, 第 91 号, 1963 年 3 月.
- 10) 小松定夫: 曲線並列桁橋の実用計算式, 土木学会論文集, 第 93 号, 1963 年 5 月.
- 11) 倉西 茂: 一般薄肉断面の曲がりばりの解析, 土木学会

論文集, 第 108 号, 1964 年 8 月.

- 12) 島田静男・倉西 茂: 曲がりばりの計算式, 技報堂, 1966 年.
- 13) 深沢泰晴: 薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論, 土木学会論文集, 第 110 号, 1964 年 10 月.
- 14) 深沢泰晴: 薄肉多角断面曲りばりの曲げねじれ問題, 土木学会論文報告集, 第 234 号, 1975 年 2 月.
- 15) 渡辺 昇・稼農知徳・藤井裕司: 曲げねじれ剛性をもった曲線箱桁の剛性マトリックス法による解析, 土木学会論文報告集, 第 218 号, 1973 年 10 月.
- 16) 薄木征三・稼農知徳: 薄肉断面曲線材の変形法による解法, 土木学会論文報告集, 第 235 号, 1975 年 3 月.
- 17) 西野文雄・深沢泰晴: ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化, 土木学会論文報告集, 第 247 号, 1976 年 3 月.
- 18) Dabrowski, R.: Näherungsberechnung der gekrümmten Kastenträger mit verformbarem Querschnitt, Proc. of seventh Congress of IABSE, 1964.
- 19) Oleinik, J.C. and C.P. Heins: Diaphragms for Curved Box Beam Bridges, Proc. ASCE, Vol. 101, No. ST 10, Oct., 1975.
- 20) 能町純雄・吉田紘一: 断面変形を考慮した曲線箱桁の応力解析, 土木学会論文報告集, 第 187 号, 1971 年 3 月.
- 21) Alam, K.M., T. Honglendaromp and S.L. Lee: Curved Box Girder Bridges with Intermediate Diaphragms and Supports, Pub. of IABSE, Vol. 33-II, 1973.
- 22) 落合重俊: 多壁断面桁の力学的性状について, 東京大学工学部土木工科学科博士論文, 1966 年.
- 23) Sakai, F. and T. Okumura: Influence of Diaphragms on Behaviour of Box Girders with Deformable Cross Section, Proc. of ninth Congress of IABSE, Amsterdam, May, 1972.
- 24) Cheung, M.S. and Y.K. Cheung: Analysis of Curved Box Girder Bridges by Finite Strip Method, Pub. of IABSE, Vol. 31-1, 1971.
- 25) 坂井藤一・中村秀治: 薄肉曲線ばりの板殻構造としての一解法, 土木学会論文報告集, 第 235 号, 1975 年 3 月.
- 26) 小松定夫・栗村 優・牧浦信一: 曲線箱けたの隔壁の補剛効果に関する研究, 第 30 回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1975 年 10 月.
- 27) 大塚久哲・吉村虎藏・彦坂 照: 曲線箱桁橋における中間隔壁の補剛効果(上),(下), 橋梁と基礎, Vol. 12, No. 1, 2, 1978 年 1 月, 2 月.
- 28) 小松定夫・中井 博・北田俊行: 曲線箱桁の Shear-lag と有効幅に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 191 号, 1971 年 7 月.
- 29) 薄木征三・菅原 登: 曲線箱桁のフランジ有効幅について, 第 23 回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1968 年 10 月.
- 30) 芳村 仁・菲澤憲吉: 折板理論解析による曲線箱桁の床版応力と有効幅について, 土木学会論文報告集, 第 233 号, 1975 年 1 月.
- 31) 坂井藤一・長井正嗣・佐野信一郎: ブロック有限要素法による薄肉箱桁の立体解析, 土木学会論文報告集, 第 255 号, 1976 年 11 月.
- 32) Wright, R.N., S.N. Abdel-Samad and A. R. Robinson: BEF Analogy for Analysis of Box Girders, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. ST 7, July, 1968.
- 33) 川股重也: シェル構造解析, コンピュータによる構造工学講座 II-6-A, 培風館, 1974.
- 34) Bogner, F.K., R.L. Fox and L.A. Schmit: A Cylindrical Shell Discrete Element, AIAA Journal, Vol. 5, No. 4, Aug., 1967.

- 35) Haisler, W.E. and J.A. Stricklin : Rigid-Body Displacements of Curved Elements in the Analysis of Shells by the Matrix-Displacement Method, AIAA Journal, Vol. 5, No. 4, Aug., 1967.
- 36) Gantn, G. and R.W. Clough : A Curved, Cylindrical-Shell, Finite Element, AIAA Journal, Vol. 6, No. 6, June, 1968.
- 37) Mebane, P.M. and J.A. Stricklin : Implicit Rigid Body Motion in Curved Finite Elements, AIAA Journal, Vol. 9, No. 2, Feb., 1972.
- 38) 坂井藤一・長井正嗣 : 鋼箱桁橋の中間ダイヤフラム設計法に関する一試案, 土木学会論文報告集, 第 261 号, 1977 年 5 月.

(1978.6.15・受付)
