

重力場にある載荷されたはりに関する考察

A STUDY ON A LOADED BEAM IN GRAVITATIONAL FIELD

平 井 敦*

By Atsushi HIRAI

1. 序 言

1970 年筆者は変形する物体の力学に関し従来とは異なった考え方に基づく理論を提案し、その後数回これに関連する小論を発表した¹⁾。これは土木工学界の大先輩 Cauchy が 1822 年に導入した直応力 σ 、せん断応力 τ の概念を捨てて、いわゆる弾性理論とは異なった理論の構成を試み、変形 S をいわゆる「場」の考え方によって

追求しようとしたものである。しかし筆者の説明が拙劣であったばかりでなく、多少説明に訂正を要する点もあり、この小論では筆者の理論を整理して紹介しご批判、ご討議に供するとともに、変形する物体 (Deformable body) の一例として一つのはりの中央に、ある質量を載せた場合このはりの内部の小さな世界に生起する事象を筆者の考え方で記述してみようとするものである。

弾性理論において相対変位 S の x, y, z 分素を S_x, S_y, S_z と表示するといわゆるひずみテンソルは次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{\partial S_x}{\partial y} & \frac{\partial S_x}{\partial z} \\ \frac{\partial S_y}{\partial x} & \frac{\partial S_y}{\partial y} & \frac{\partial S_y}{\partial z} \\ \frac{\partial S_z}{\partial x} & \frac{\partial S_z}{\partial y} & \frac{\partial S_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_x}{\partial z} + \frac{\partial S_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_y}{\partial x} + \frac{\partial S_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial S_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_y}{\partial z} + \frac{\partial S_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_z}{\partial x} + \frac{\partial S_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_z}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial S_z}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -W_z & W_y \\ W_z & 0 & -W_x \\ -W_y & W_x & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

ただし、

$$W = \frac{1}{2} \text{rot } S \dots\dots\dots(2)$$

Love は彼の著書²⁾で式 (1) の第 1 項に相当する変位系を Pure strain と呼称し、これに属する変位は irrotational, すなわち $\text{rot } S = 0$ と指摘している。同書 p. 47 において変位 S は、

$$S(S_x, S_y, S_z) = \text{grad } \phi + \text{rot } P \dots\dots\dots(3)$$

の形に書けると述べ、第 2 項に属する変位の div は零と指摘している。式 (3) の右辺第 1 項は筆者のいう $S-1$ の世界に第 2 項は $S-2$ の世界に相当し、式 (1) の右辺第 1 項および第 2 項に関連するものである。しかし残念なことに、彼は式 (2) のベクトルのもつ意味に背をむけて³⁾、式 (2) を無視し式 (1) の第 2 項を無視し第

1 項にのみ Cauchy 流の視線をそそぐわけである。そして弾性理論の中核である次式が導入される。 λ, G を定数として、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \cdot \text{div } S + 2G \frac{\partial S_x}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \right) \text{ 等} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

この式を微小六面体の力のつり合い式に代入し、単位体積密度を ρ として、

$$(\lambda + 2G) \text{grad div } S - \text{Grot rot } S = \rho \dot{S} \dots\dots\dots(5)$$

式 (4) の右辺の変位項 $\partial S_x / \partial x, \partial S_y / \partial y$ 等には $S-2$ の世界が混在している点は注目を要する。このことは式 (5) に由来する Volume Force と等価な Surface Stress を Gauss の定理により求めてみると〔文献 4)〕に示す

* 正会員 工博 長岡技術科学大学副学長

1) 変形する物体の力学に関する一考察, 土木学会論文報告集 190 号 (1971.6). 本文中での引用に〔文献 1)〕と簡記する。
載荷された円柱体に関する一考察, 土木学会論文報告集 249 号 (1976.5), 〔文献 2)〕と簡記。
高周波交番載荷による円柱体, 同上 251 号 (1976.7), 〔文献 3)〕と簡記。
〔文献 1)〕への討議回答, 同上 205 号 (1972.9), 〔文献 4)〕と簡記。
2) Love, A.E.H.: Mathematical Theory of Elasticity, 第 3 版, p. 39, p. 47, 1920.
3) W を剛体としての回転とみなしこれを捨てて人もある。

ごとく式 (4) が得られることより推定される。

筆者は、式 (4) で示される応力という概念を捨てて新しく変形の理論を「場」の観点から構成しようとするものであるが、その根本の考えの一つは Vector 場は勾配場と環流場とに分けられるということである⁴⁾。一例として相対変位 S なる Vector について示せば、

$$\left. \begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ \text{ただし、} \\ \text{rot } S_1 &= 0, \text{ div } S_2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

すなわち回転 (Rotation) のない場を勾配場、発散 (Divergence) のない場を環流場というが、筆者はこれらをそれぞれ $S-1$ の世界、 $S-2$ の世界と簡略化して呼ぶ。式 (6) は Love が示した式 (3) と同じ内容をもつものである。Love と筆者との考えの差は、筆者は式 (2) が重要な鍵を握っていると考える点である。Vector W は流体力学では渦、電磁力学では磁場に相当する。

2. 変形理論 (Theory of Deformation)

前節に述べたごとく筆者は Cauchy による応力 $[\sigma, \tau]$ の概念の使用を取り止めて、変形 S を「場の理論」として導こうとするものである。

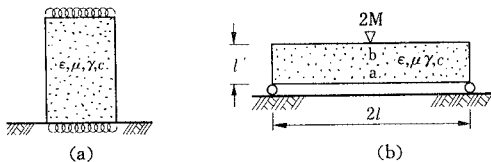


図-1

最初に、地球の表面上に置かれた円柱体の上部に全質量 M なるある物体を載せた静的状態を対象に考える。いまのところ、この円柱体の変形する物体を代表している。図-1 (a) を静電場のなかにある絶縁体とみなすと M が静電荷に相当し、大地側に誘起された符号反対の静電荷が考えられる。この場合の円柱体は、電媒定数 ϵ なる絶縁体に相当する。したがって円柱体の内部の力場 R_1 はいわゆる逆 2 乗の法則が支配する (文献 1) および 4) 参照)。次に M を質量とすると、 M と大地との間にある物体の内部の力場 R_1 は重力場と考えられる。この場合 ϵ は物体内部での万有引力の定数に相当するものの逆数に相当することになるが、この点についての討議回答は [文献 4)] の p. 158 を参照して下さい。

このようにして力場 R_1 を考えると、質量 m を電気量の定義と同じように次のごとく定義することができる [文献 1)]。

$$m = \frac{\text{div } \epsilon R_1}{4\pi} \dots\dots\dots (7)$$

R_1 は M と地球との間に介在する物体内部の力場の強さで potential をもつ。

$$R_1 = -\text{grad } \varphi \dots\dots\dots (8)$$

図-1 (b) のごとく質量 $2M$ と大地との間にあって静的状態にあるはりの内部も静電場と同じである。大地側の支点的所に描いた○印を正電荷、はりの中央部に載せた▽印を負電荷、絶縁体に相当する電媒定数を ϵ と考えるわけである ($\epsilon = \infty$ のときは導体となる)。円柱体の場合と同じく ϵ を物質定数の一つと考えることにより、この静電場を重力場と考えることができる。すなわち図-1 (b) の質量 $2M$ と地球とははりの支点を通じ互いに引力を及ぼしあう。はりを構成する物質の質量が場に及ぼす影響を無視すれば、はりの内部の重力場 R_1 は M と地球とで決められるはずである。この力場 R_1 を考える場合、 M と地球とは静止した状態を対象とするがそのときはりの内部の世界を $S-1$ の世界と呼ぶ。

図-1 (a) のごとくいわゆる等分布電荷の場合筆者は [文献 4)] p. 158 で重荷 (Juka) なる概念を次のごとく導入した。

$$w = \frac{\epsilon}{4\pi} (R \cdot n) \dots\dots\dots (9)$$

この段階でポテンシャル φ と体積膨張 $\text{div } S_1$ とに関し、筆者は一つの仮定をおいた。これは [文献 1)] p. 2 に述べたごとく $\text{div } S_1$ を起電力に、 φ を電流とみたとときに得られる関係から類推して得られたものであるが、筆者の変形理論では重要な位置を占める。筆者は、Missing Ring を発見したとさえ思っているわけであるが、第三者にとっては筆者が式 (4) に対して抱くような違和感をもたれるかも知れない。

エネルギーの消費を考えない場合その仮定は次式である。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \left(\frac{c}{\epsilon} + \gamma \right) \text{div } S_1 = 0 \dots\dots\dots (10)$$

式 (10) を更に時間 t で微分し、

$$\ddot{\varphi} = - \left(\frac{c}{\epsilon} + \gamma \right) \text{div } \dot{S}_1 = - \frac{\mu}{2c} \cdot \frac{2c}{\mu} \left(\frac{c}{\epsilon} + \gamma \right) \text{div } \dot{S}_1$$

r, μ, c 等は ϵ と同様に物質に関する定数である。いま試みに、

$$\frac{2c}{\mu} \left(\frac{c}{\epsilon} + \gamma \right) = C_1^2 \dots\dots\dots (11)^*$$

とおいてみると前式より、

$$\ddot{\varphi} = - (C_1)^2 \text{div} \left(\frac{\mu}{2c} \dot{S}_1 \right) \dots\dots\dots (a)$$

式 (8) の div をとると、

$$\left. \begin{aligned} \text{div } R_1 &= -\text{div grad } \varphi = -\nabla^2 \varphi \\ (C_1)^2 \text{div } R_1 &= - (C_1)^2 \nabla^2 \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (b)$$

したがって、

$$\ddot{\varphi} = (C_1)^2 \nabla^2 \varphi \dots\dots\dots (12)^*$$

が成立すると仮定するならば、式 (a), (b), (8) より次式が成立する。

4) 山田光雄：ベクトルとテンソル，内田老鶴圃，p. 133, 昭和 16 年。

$$C_1^2 \operatorname{div} \left(\frac{\mu}{2c} \dot{S}_1 \right) = -\ddot{\varphi} = C_1^2 \operatorname{div} R_1$$

この関係を満足する解として筆者は次式を選ぶ。

$$R_1 = \frac{\mu}{2c} \dot{S}_1 \dots\dots\dots (13 \cdot a)$$

大変奇妙に見える関係式であるが、筆者の理論では式 (10) とともに重要な関係式である。式 (12) の grad をとり、式 (7) を考慮すると、

$$\begin{aligned} \dot{R}_1 &= -\operatorname{grad} \dot{\varphi} = -(C_1)^2 \operatorname{grad} \dot{\varphi} \\ &= (C_1)^2 \nabla^2 (-\operatorname{grad} \varphi) \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{R}_1 = (C_1)^2 \nabla^2 R_1 \dots\dots\dots (14)^*$$

式 (13・a), (14) より、— x 分素のみを示す—

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\dot{S}_{1x}) &= C_1^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\dot{S}_{1x}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\dot{S}_{1x}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\dot{S}_{1x}) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\dot{S}_{1x}) &= C_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2 S_{1x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_{1x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_{1x}}{\partial z^2} \right\} \end{aligned}$$

上式より下式を導く。

$$\dot{S}_1 = (C_1)^2 \nabla^2 S_1 \dots\dots\dots (15)^*$$

式 (8), (13・a) より、

$$\frac{\mu}{2c} \dot{S}_1 = -\operatorname{grad} \varphi \dots\dots\dots (13 \cdot b)$$

この rot をとると、 $\operatorname{rot} \dot{S}_1 = 0$ 、すなわち、

$$\begin{aligned} [\operatorname{rot} \dot{S}_1]_x &= \frac{\partial \dot{S}_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{S}_{1y}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial S_{1y}}{\partial z} \right) \\ [\operatorname{rot} \dot{S}_1]_y &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S_{1x}}{\partial z} - \frac{\partial S_{1z}}{\partial x} \right) \\ [\operatorname{rot} \dot{S}_1]_z &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial S_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial S_{1x}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

この式を背景にして、式 (15) に対して次の条件を付す。

$$\operatorname{rot} S_1 = 0 \dots\dots\dots (16)^*$$

式 (11) で試みに C_1^2 を導入してみたが、式 (12), (14), (15) に同じ C_1^2 が登場した。 φ, R_1, S_1 という量が同じ伝播速度 C_1 をもつということになり、筆者が秘かに予期していた式が姿を現わしたことになる。これが $S-1$ の世界で勾配場である。

式 (10) の仮定を設定した段階でさらに式 (13) を仮定しても同じ結果を得るが、ここに説明した手法の方が比較的自然にご了解いただけるような気がする。

はりに質量 M を載荷した後、 M とはりが静止状態となるまでの時間はきわめて短くある時間が経過すれば実際的には静的状態となる。しかしこのきわめて微小な時間内に従来見過していた事象がはりの内部に生ずると筆者は考える。それが $S-2$ の世界である。そして式 (8) が示唆するごとく、われわれが観察しているのは $S-1$ と $S-2$ の世界が合成された状態であると想像するわけである。

$S-1$ の世界が勾配場であるのなら新しく追加される $S-2$ の世界は環流場のはずである。重力の場と考えられる $S-1$ の主役が Potential φ であるのに対し、 $S-2$ の特長は渦もしくは磁場であろう。すなわち Cauchy が見

捨てた W である。はりを構成する物質のある一点の微小質量 m に着目する。はりの上に M が載荷されると、 m は R_1 の場の中で変位をして静的状態に至るが、この m の変位がある新しい事象を生むものと想像するわけである。運動する電荷はそれが静止しているときには見られない効果を生むように、 R_1 の場の中で運動する質量 m は磁場に相当する渦場 W とそれに伴う新しい力場 R_2 とを作り出すと筆者は推論する。その記述の手法は電磁気学に学び得るはずである。

Maxwell が彼の電磁理論を組立てるときに参考としたのは Sink と Source のある場の流体力学的手法であったようである。流体の中に渦線が存在するときに生ずる速度場がビオ・サバール則に似た振舞いをすることは周知のことである。この自然の語りかけに耳を傾けるべきではなからうか。このような点を考えて $S-2$ の世界を筆者流に描いてみる。ただしいまのところエネルギーの消耗を考えない。

既述のごとく $S-2$ の世界の特色は渦場 W の存在である。これは電磁論でいえば磁場に相当する。変位 S_2 に対し、

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \operatorname{rot} S_2 \\ \dot{W} &= \frac{1}{2} \operatorname{rot} \dot{S}_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)^*$$

とおくとき筆者が仮定として提案した基本式は次の 2 式である⁵⁾。

$$\mu \dot{W} = -C \operatorname{rot} R_2 \dots\dots\dots (18)^*$$

$$\varepsilon \dot{R}_2 = C \operatorname{rot} W \dots\dots\dots (19)^*$$

式 (19) には $S-1$ の世界に現れた定数 ε が含まれている。

式 (17), (18) より、

$$\operatorname{rot} R_2 = -\frac{\mu}{2c} \operatorname{rot} \dot{S}_2$$

この式の積分は、

$$R_2 = -\frac{\mu}{2c} \dot{S}_2 \dots\dots\dots (20)$$

式 (19) に (20) を代入すると、

$$\dot{S}_2 = -\frac{2c^2}{\varepsilon\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \frac{1}{2} S_2 = -\frac{c^2}{\varepsilon\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} S_2$$

いま、

$$\frac{c^2}{\varepsilon\mu} = (C_2)^2 \dots\dots\dots (21)^*$$

とおくと公式、

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \nabla^2 A - \operatorname{grad} \operatorname{div} A$$

により次式を得、

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}_2 &= (C_2)^2 \nabla^2 S_2 \\ \operatorname{div} S_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)^*$$

式 (22) に式 (20) を代入する。一例として x 分素を考

5) Planck, M. (寺沢寛一・酒井佐明共訳)：理論電磁気学，裳華房，p. 26 参照。

えると、

$$-\frac{2c}{\mu} \frac{\partial R_{2x}}{\partial t} = \dot{S}_{2x}$$

$$= C_2^2 \left\{ \frac{\partial^2 S_{2x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_{2x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_{2x}}{\partial z^2} \right\}$$

この両辺をさらに t で微分すると、

$$\frac{\partial^2 R_{2x}}{\partial t^2} = \left(-\frac{\mu}{2c} \right) C_2^2 \left\{ \frac{\partial^2 \dot{S}_{2x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{S}_{2x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{S}_{2x}}{\partial z^2} \right\}$$

$$= C_2^2 \left\{ \frac{\partial^2 R_{2x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R_{2x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R_{2x}}{\partial z^2} \right\}$$

また式 (20) より、

$$\operatorname{div} \mathbf{R}_2 = -\frac{\mu}{2c} \operatorname{div} \dot{S}_2 = -\frac{\mu}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} S_2$$

式 (22) により、

$$\operatorname{div} \mathbf{R}_2 = 0$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}}_2 &= (C_2)^2 \nabla^2 \mathbf{R}_2 \\ \operatorname{div} \mathbf{R}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)^*$$

式 (17) の div をとると、 $\operatorname{div} W = 0$

式 (19) の rot をとり、式 (18) を t で微分した式に代入し、上式を考慮すると結局次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{W} &= (C_2)^2 \nabla^2 W \\ \operatorname{div} W &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)^*$$

以上では式 (17)、(18) および (19) を仮定して論を進めたが、式 (17) および (22) を仮定し、式 (15) および (8) を利用すれば逆に式 (18) および (19) を導入することができるが、頁の関係上ここでは述べない。

以上を要約すれば、変形理論の基本式は式番号の右肩に * 印を付した 6 個の波動方程式で、そのうち半分は $S-1$ の世界に属し、残りの 3 個は $S-2$ の世界に属する次の (A)、(B) 二群の式である。この段階で主な力学諸量について簡単な説明を加える。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\phi} &= (C_1)^2 \nabla^2 \phi \\ \ddot{\mathbf{R}}_1 &= (C_1)^2 \nabla^2 \mathbf{R}_1 \\ \dot{S}_1 &= (C_1)^2 \nabla^2 S_1 \\ \operatorname{rot} \mathbf{R}_1 &= 0 \\ \operatorname{rot} S_1 &= 0 \\ C_1 &= \sqrt{\frac{2c}{\mu} \left(\frac{c}{\varepsilon} + \gamma \right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}_2 &= (C_2)^2 \nabla^2 \mathbf{R}_2 \\ \ddot{W} &= (C_2)^2 \nabla^2 W \\ \dot{S}_2 &= (C_2)^2 \nabla^2 S_2 \\ \operatorname{div} \mathbf{R}_2 &= 0 \\ \operatorname{div} W &= 0 \\ \operatorname{div} S_2 &= 0 \\ C_2 &= \sqrt{\frac{c^2}{\varepsilon \mu}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B)$$

ε と \mathbf{R}_1 : 物体は地上の重力場の内にあるが、物体内部の静的な場 \mathbf{R}_1 と外部とは異なると考える。物体を構成する物質に関する定数を ε とするがこれは万有引力定数の逆数に相当するような定数で、物体内部を静電場と見なすと ε は電媒定数に相当する。元 (Dimension) は、

$$[\varepsilon] = \left[\frac{MT^2}{L^3} \right], [\mathbf{R}_1] = \left[\frac{L}{T^2} \right] \quad \text{〔文献 1〕 参照}$$

μ , \mathbf{R}_2 および W : 物体を構成する質量 m が変位するとき、新しい場 W と \mathbf{R}_2 とが生ずると仮定したとき物質定数 μ が登場する式 (18)、(19) 参照。

$$[\mu] = \left[\frac{M}{LT^2} \right], [W] = 0, [\mathbf{R}_2] = \left[\frac{L}{T^2} \right]$$

c : 一般にエネルギーの流動に関する定数。式 (25) 参照。

$$[c] = \left[\frac{M}{LT} \right]$$

γ : 縦波の存在に関連が深い物質定数。

$$[\gamma] = \left[\frac{L^2}{T^3} \right]$$

C_1 および C_2 : 変位 S に関し縦波の伝播速度を C_1 、横波の伝播速度を C_2

$$[C_1] = \left[\sqrt{2 \left(\frac{c^2}{\varepsilon \mu} + \frac{c\gamma}{\mu} \right)} \right] = \left[\frac{L}{T} \right], C_2 = \left[\frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \right] = \left[\frac{L}{T} \right]$$

エネルギーの流れ \mathcal{E} についてはこの小論ではとりあげないが、この流れは $S-2$ の世界を肯定することにより論ずることができ、〔文献 1〕 p. 3 より、

$$\mathcal{E} = \frac{c}{4\pi} - [\mathbf{R}_2 \times W] \dots\dots\dots (25)$$

基本方程式を解くにあたってはまず \mathbf{R} に関する波動方程式の解を求めるときに境界条件として力線は境界面を横断しない条件を考える。すなわち流線または電気力線を求める場合と同じである。

3. 解を構成する基本的な関数の探求

図-1 の支間 $2l$ のはりの中央断面 ab の直上 b 点にいわゆる集中荷重として質量 $2M$ を載荷し、その過渡現象が終了したときはりの下面が水平になったとする⁶⁾。このとき左支点 o を座標の原点とし図-2のごとく xy 座標を定め、はりの左半分に着目する。しばらくは二次元的に考える。はりの半分だけに着目するので b 点に質量 M が載荷され、いわゆる支点反力の位置は原点 o であるとする。

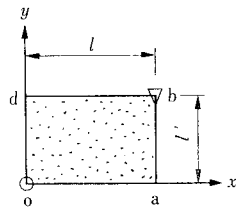


図-2

$S-1$ の世界は重力場であるが纒々述べたごとく静電場

6) 元来上方に曲っている単純ばりの中央に $2M$ を集中載荷し、はりの上下両面が水平になったときに静的状態であると想定するわけである。上下両面が水平であるが、元来が曲っていたはりであるゆえ、はりはたわんで水平になったので、もちろん材端でも断面は回転しているので、いわゆるたわみ角も考えられる。なお、図-1 および 11 参照。

と見なすこともできる。o 点に正電荷があり、b 点に負電荷がある場合の電気力線とポテンシャル線を想像するわけである。このことを流体力学で解釈すれば、o 点に湧出（湧点を○印で示す）があり、b 点に吸込（吸点を▽印で示す）があるときの流線とポテンシャルに相当する。この場合、流線は oabd なる境界を横切らないことが境界条件である。また吸点および湧点は特異点である。そこで流体力学等で応用されている等角写像の手法を借用するが、この場合登場するのは楕円関数⁷⁾である。

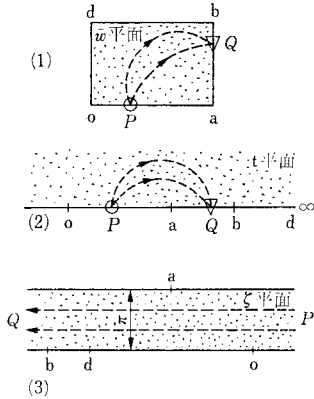


図-3

図-3 (1) の矩形 oabd の周辺上の P に湧点、Q に吸点がある場合を取扱うには次の写像 (Transformation) を考える。

$$t = \text{Sn}^2(\bar{w}, k) \dots\dots\dots (i)$$

$$\zeta = -\log \frac{t-p}{t-q} \dots\dots\dots (ii)$$

式 (i) による変換は矩形 oabd 内部の \bar{w} -平面を 図-3 (2) の t -平面上半部に写像する。図-3 (1) の oa および ab の辺長は一般的には 図-2 のごとく l, l' であるが、まず第一段階として矩形の角がそれぞれ $0, K, K+iK'$ および iK' にある場合を考える。ただし、

$$\left. \begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ K' &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \\ 0 < k < 1, k' &= \sqrt{1-k^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

式 (ii) の変換は、 p, q が実数ならば t -平面上の上半部を 図-3 (3) の ζ -平面上の無限長の帯（その幅は π ）に写像する。式 (i), (ii) より、

$$\zeta = -\log \frac{\text{Sn}^2(\bar{w}, k) - p}{\text{Sn}^2(\bar{w}, k) - q} \dots\dots\dots (27)$$

次に辺長 oa, ab が K および K' でなく、一般的に l および l' の場合を考える。楕円関数論に従い、 l/l' より K/K' がきまりこの数値より母数 (modulus) k の値を楕円積分表より求めることができる。したがって、式 (26) により、 K, K' も確定する。いま、

$$\frac{\chi}{\bar{w}} = \frac{l}{K} = \frac{l'}{K'} = \Omega \dots\dots\dots (28 \cdot a)$$

とおけば、

$$\chi = \Omega \bar{w} \dots\dots\dots (28 \cdot b)$$

もし p, q が有限ならば湧点、吸点の位置は

$$\left. \begin{aligned} p &= \text{Sn}^2\left(\frac{\chi_1}{\Omega}, k\right) \\ q &= \text{Sn}^2\left(\frac{\chi_2}{\Omega}, k\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

いま湧点および吸点を 図-3 (1) の o 点および b 点に選べば

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= 0 \\ \chi_2 &= l + il' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (iii)$$

式 (28 \cdot a) により

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_1 &= \frac{\chi_1}{\Omega} = 0 \\ \bar{w}_2 &= \frac{\chi_2}{\Omega} = \frac{l}{\Omega} + i \frac{l'}{\Omega} = K + iK' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (iv)$$

式 (29) より、

$$\left. \begin{aligned} p &= 0 \\ q &= \text{Sn}^2(K + iK') = \frac{1}{k^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (v)$$

式 (v) を式 (27) に代入し、次の公式、

$$1 - k^2 \text{Sn}^2 w = \text{dn}^2 w \dots\dots\dots (a)$$

を考慮すると、

$$\zeta = -\log(-k^2) \frac{\text{Sn}^2 \bar{w}}{1 - k^2 \text{Sn}^2 \bar{w}} = -\log(-k^2) \frac{\text{Sn}^2 \bar{w}}{\text{dn}^2 \bar{w}}$$

定数を見捨てることのできるので $(-k^2)$ を取除き、湧点および吸点の強度を Γ とすれば次式が得られる。

$$\zeta = -\Gamma \log \frac{\text{Sn}^2 \bar{w}}{\text{dn}^2 \bar{w}} \dots\dots\dots (30 \cdot a)$$

公式を使用する便宜上から、

$$\bar{w} = \frac{w}{2} \dots\dots\dots (30 \cdot b)$$

とおくと、

$$\zeta = -\Gamma \log \frac{\text{Sn}^2 \frac{w}{2}}{\text{dn}^2 \frac{w}{2}} \dots\dots\dots (30 \cdot c)$$

いま w を、

$$w = u + iv$$

と表示すれば w の鏡像 w' は、

$$w' = u - iv$$

である。この w' に関する $\text{Sn} \frac{w'}{2}, \text{dn} \frac{w'}{2}$ を導入して式 (30 \cdot c) を変形し、 ζ の実数部と虚数部、すなわち ϕ および $i\psi$ を求めようとするのである。

式 (30 \cdot c) に w' 関連の項を挿入して、

$$\zeta = \phi + i\psi = -\Gamma \log \text{Sn}^2 \frac{w}{2} + \Gamma \log \text{dn}^2 \frac{w}{2}$$

$$= -\Gamma \log \left[\text{Sn} \frac{w}{2} \text{Sn} \frac{w'}{2} \cdot \frac{\text{Sn} \frac{w}{2}}{\text{Sn} \frac{w'}{2}} \right]$$

$$+ \Gamma \log \left[\text{dn} \frac{w}{2} \text{dn} \frac{w'}{2} \cdot \frac{\text{dn} \frac{w}{2}}{\text{dn} \frac{w'}{2}} \right]$$

$$= \Gamma \log \frac{\text{dn} \frac{w}{2} \text{dn} \frac{w'}{2}}{\text{Sn} \frac{w}{2} \text{Sn} \frac{w'}{2}} + 2\Gamma \frac{1}{2} \log \frac{\text{dn} \frac{w}{2} \text{Sn} \frac{w'}{2}}{\text{dn} \frac{w'}{2} \text{Sn} \frac{w}{2}} \dots\dots\dots (イ)$$

7) Bowman, F. (安藤四郎) : Introduction to Elliptic Functions, 楕円積分・楕円関数入門

上式の第一項から実数部が得られる。これを ϕ とおく、

$$\phi = \Gamma \log \frac{\operatorname{dn} \frac{w}{2} \operatorname{dn} \frac{w'}{2} \operatorname{Cn} \frac{w}{2} \operatorname{Cn} \frac{w'}{2}}{\operatorname{Sn} \frac{w}{2} \operatorname{Sn} \frac{w'}{2} \operatorname{Cn} \frac{w}{2} \operatorname{Cn} \frac{w'}{2}} \dots\dots\dots (\text{ロ})$$

この段階で次の公式を利用する^{8), 9)}。

$$\left. \begin{aligned} & \operatorname{Cn}(x+y) \operatorname{dn}(x-y) \\ &= \frac{1}{D} \{ \operatorname{Cn} x \operatorname{Cn} y \operatorname{dn} x \operatorname{dn} y - k'^2 \operatorname{Sn} x \operatorname{Sn} y \} \\ & \text{ただし, } D = 1 - k^2 S_1^2 S_2^2 \\ & \operatorname{Cn}(x-y) \operatorname{dn}(x+y) \\ &= \frac{1}{D} \{ \operatorname{Cn} x \operatorname{Cn} y \operatorname{dn} x \operatorname{dn} y + k'^2 \operatorname{Sn} x \operatorname{Sn} y \} \end{aligned} \right\} \dots\dots (b)$$

この公式に対し $x+y$ を u , $x-y$ を vi と考えると右辺の x は $w/2$, y は $w'/2$ となる。したがって次の公式が得られる。

$$\begin{aligned} & \operatorname{Cn} u \cdot \operatorname{dn} vi + \operatorname{Cn} vi \cdot \operatorname{dn} u \\ &= \frac{2}{D} \operatorname{Cn} \frac{w}{2} \operatorname{Cn} \frac{w'}{2} \operatorname{dn} \frac{w}{2} \operatorname{dn} \frac{w'}{2} \dots\dots\dots (c) \end{aligned}$$

また次の公式、

$$\operatorname{dn}(x-y) - \operatorname{dn}(x+y) = \frac{2k^2}{D} \operatorname{Sn} x \operatorname{Cn} x \operatorname{Sn} y \operatorname{Cn} y \dots\dots\dots (d)$$

より新しい公式として、

$$\operatorname{dn} vi - \operatorname{dn} u = \frac{2}{D} k^2 \operatorname{Sn} \frac{w}{2} \operatorname{Sn} \frac{w'}{2} \operatorname{Cn} \frac{w}{2} \operatorname{Cn} \frac{w'}{2} \dots\dots\dots (e)$$

式 (c), (e) より、

$$\frac{\operatorname{Sn} \frac{w}{2} \operatorname{Sn} \frac{w'}{2} \operatorname{Cn} \frac{w}{2} \operatorname{Cn} \frac{w'}{2}}{\operatorname{dn} \frac{w}{2} \operatorname{dn} \frac{w'}{2} \operatorname{Cn} \frac{w}{2} \operatorname{Cn} \frac{w'}{2}} = \frac{1}{k^2} \frac{(\operatorname{dn} vi - \operatorname{dn} u)}{\operatorname{Cn} u \operatorname{dn} vi + \operatorname{Cn} vi \operatorname{dn} u}$$

しかるに、

$$\operatorname{dn} vi - \operatorname{dn} u = \frac{\operatorname{dn}(v, k') - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn}(v, k')}{\operatorname{Cn}(v, k')}$$

$\operatorname{Cn}(v, k')$ 等を $\operatorname{Cn} v'$ 等と簡記することにして、

$$\operatorname{Cn} u \cdot \operatorname{dn} vi + \operatorname{Cn} vi \operatorname{dn} u = \frac{\operatorname{Cn} u \operatorname{dn} v' + \operatorname{dn} u}{\operatorname{Cn} v'}$$

したがって、次式が得られる。

$$\frac{\operatorname{dn} \frac{w}{2} \operatorname{dn} \frac{w'}{2} \operatorname{Cn} \frac{w}{2} \operatorname{Cn} \frac{w'}{2}}{\operatorname{Sn} \frac{w}{2} \operatorname{Sn} \frac{w'}{2} \operatorname{Cn} \frac{w}{2} \operatorname{Cn} \frac{w'}{2}} = k^2 \frac{\operatorname{dn} u + \operatorname{Cn} u \operatorname{dn} v'}{\operatorname{dn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn} v'} \dots\dots\dots (\text{ハ})$$

式 (ロ), (ハ) より、

$$\begin{aligned} \phi &= \Gamma \log k^2 \frac{\operatorname{dn} u + \operatorname{Cn} u \operatorname{dn} v'}{\operatorname{dn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn} v'} \\ &= \Gamma \log \frac{\operatorname{dn} u + \operatorname{Cn} u + \operatorname{dn} v'}{\operatorname{dn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn} v'} + \Gamma \log k^2 \end{aligned}$$

Const. は省略してもよいので、

$$\phi = \Gamma \log \frac{\operatorname{dn} u + \operatorname{Cn} u \operatorname{dn} v'}{\operatorname{dn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn} v'} \dots\dots\dots (31)$$

次に式 (イ) の第二項について考えるが、次の公式に留意する。

$$\frac{1}{2} \log \frac{\alpha}{\beta} = i \cdot \tan^{-1} \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} i \dots\dots\dots (f)$$

式 (イ) の第二項より、

$$\begin{aligned} i\psi &= 2\Gamma \cdot \frac{1}{2} \log \frac{\operatorname{dn} \frac{w}{2} \operatorname{Sn} \frac{w'}{2}}{\operatorname{dn} \frac{w'}{2} \operatorname{Sn} \frac{w}{2}} \\ &= 2\Gamma \cdot i \tan^{-1} \frac{\operatorname{Sn} \frac{w}{2} \operatorname{dn} \frac{w'}{2} - \operatorname{Sn} \frac{w'}{2} \operatorname{dn} \frac{w}{2}}{\operatorname{Sn} \frac{w}{2} \operatorname{dn} \frac{w'}{2} + \operatorname{Sn} \frac{w'}{2} \operatorname{dn} \frac{w}{2}} i \\ \therefore \phi &= 2\Gamma \cdot \tan^{-1} \frac{\operatorname{Sn} \frac{w}{2} \operatorname{dn} \frac{w'}{2} - \operatorname{Sn} \frac{w'}{2} \operatorname{dn} \frac{w}{2}}{\operatorname{Sn} \frac{w}{2} \operatorname{dn} \frac{w'}{2} + \operatorname{Sn} \frac{w'}{2} \operatorname{dn} \frac{w}{2}} i \dots\dots\dots (二) \end{aligned}$$

ここで、次の公式に着目する。

$$\begin{aligned} & \{1 \mp \operatorname{Cn}(x+y)\} \{1 \pm \operatorname{Cn}(x-y)\} \\ &= \frac{1}{D} (\operatorname{Sn} x \operatorname{dn} y \mp \operatorname{Sn} y \operatorname{dn} x)^2 \dots\dots\dots (g) \end{aligned}$$

$(x+y)$, $(x-y)$ をそれぞれ u および vi とすると, x , y はそれぞれ $w/2$, $w'/2$ であるゆえ次の公式が得られる。

$$\begin{aligned} & (1 \mp \operatorname{Cn} u)(1 \pm \operatorname{Cn} iv) \\ &= \frac{1}{D} \left(\operatorname{Sn} \frac{w}{2} \operatorname{dn} \frac{w'}{2} \mp \operatorname{Sn} \frac{w'}{2} \operatorname{dn} \frac{w}{2} \right)^2 \dots\dots\dots (h) \end{aligned}$$

これより、

$$\begin{aligned} i & \left(\frac{\operatorname{Sn} \frac{w}{2} \operatorname{dn} \frac{w'}{2} - \operatorname{Sn} \frac{w'}{2} \operatorname{dn} \frac{w}{2}}{\operatorname{Sn} \frac{w}{2} \operatorname{dn} \frac{w'}{2} + \operatorname{Sn} \frac{w'}{2} \operatorname{dn} \frac{w}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1 - \operatorname{Cn} u}{1 + \operatorname{Cn} u} \frac{1 + \operatorname{Cn} iv}{1 - \operatorname{Cn} iv} = \frac{1 - \operatorname{Cn} u}{1 + \operatorname{Cn} u} \frac{1 + \operatorname{Cn} v'}{1 - \operatorname{Cn} v'} \dots\dots\dots (\text{ホ}) \end{aligned}$$

式 (二), (ホ) より、

$$\phi = (2\Gamma) \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{Cn} u}{1 + \operatorname{Cn} u} \frac{1 + \operatorname{Cn} v'}{1 - \operatorname{Cn} v'}} \dots\dots\dots (32)$$

以上行ったことを総括すると、複素変数 $w = u + iv$ の正則関数 $\zeta(w)$ の実部および虚部 $\phi(u, v)$ および $i\psi(u, v)$ を式 (31), (32) に示すごとく、2つの実変数 u , v の関数として求めたということである。したがって ϕ および ψ はコーシー・リーマンの関係を満たし、また二次元のラプラスの微分方程式を満たす調和関数である。流体力学流にいへば ϕ は速度ポテンシャルで、 ψ は流れの関数であり、 ζ は複素速度ポテンシャルである。 ϕ および ψ についてはコーシー・リーマンの関係式が成立するが、後節で必要となるので一応計算を行って次の結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u} &= -\Gamma \frac{\operatorname{Sn} u \cdot \operatorname{dn} v'}{1 - \operatorname{Cn} u \cdot \operatorname{Cn} v'} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v'} &= -\Gamma \frac{\operatorname{Sn} v' \cdot \operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{Cn} u \cdot \operatorname{Cn} v'} \end{aligned} \right\}$$

8) Greenhill, A.G. : The Applications of Elliptic Functions Macmillan & Co., pp. 138~139, 1892.

9) $\operatorname{Cn} x$, $\operatorname{Sn} x$, $\operatorname{dn} x$ に対し $C_1, S_1, d_1, \operatorname{Cn} y$, $\operatorname{Sn} y$, $\operatorname{dn} y$ に対し C_2, S_2, d_2 を使うことがある。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u} &= +\Gamma \frac{dn u Sn v'}{1 - Cn u Cn v'} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v'} &= -\Gamma \frac{dn v' Sn u}{1 - Cn u Cn v'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u} &= \frac{\partial \phi}{\partial v'} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v'} &= -\frac{\partial \phi}{\partial u} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} &= -\Gamma \frac{dn u dn v' (Cn u - Cn v')}{(1 - Cn u Cn v')^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial v'^2} &= -\Gamma \frac{dn u \cdot dn v' (-Cn u + Cn v')}{(1 - Cn u Cn v')^2} \\ \Gamma^2 \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v'^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} &= -\Gamma \frac{Sn u Sn v' \{k^2 Cn u + (k')^2 Cn v'\}}{(1 - Cn u Cn v')^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial v'^2} &= +\Gamma \frac{Sn u Sn v' \{k^2 Cn u + (k')^2 Cn v'\}}{(1 - Cn u Cn v')^2} \\ \Gamma^2 \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v'^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

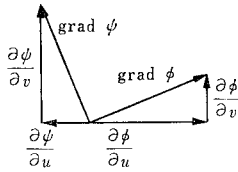


図-4

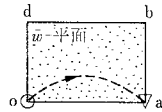


図-5

式 (34) の物理的意味は、周知のごとく 図-4 の関係にある。

図-3 の (1) の o 点に湧点, b 点に吸点がある場合の流体力学的二次元流が S-1 の世界を記述するのに関連することをこの節の最初に述べた。

S-2 の世界を記述する関数をいろいろと探求した結果、筆者は o 点に湧点があり a 点に吸点がある場合の二次元流の解がこの場合役に立つことを発見した。図-5。

湧点 $\chi_1=0 \quad \therefore \bar{w}_1 = \frac{\chi_1}{Q} = 0$

吸点 $\chi_2=0 \quad \bar{w}_2 = \frac{\chi_2}{Q} = \frac{l}{Q} = K$

したがって式 (27) より、湧点, 吸点の強度を Γ として、

$$\zeta = -\Gamma \log \frac{Sn^2 \bar{w}}{Sn^2 \bar{w} - Sn^2 K} = -\Gamma \log \frac{Cn^2 \bar{w}}{Sn^2 \bar{w}}$$

式 (30・b) により、

$$\zeta = -\Gamma \log \frac{Cn^2 \frac{w}{2}}{Sn^2 \frac{w'}{2}} \dots\dots\dots(37)$$

w の鏡像 w' を使って、

$$\zeta = -\Gamma \log \frac{Cn \frac{w}{2} \cdot Cn \frac{w'}{2}}{Sn \frac{w}{2} \cdot Sn \frac{w'}{2}} + 2\Gamma \cdot \frac{1}{2} \log \frac{Cn \frac{w'}{2} \cdot Cn \frac{w}{2}}{Cn \frac{w}{2} \cdot Sn \frac{w'}{2}}$$

右辺第二項に公式 (f) を適用して、

$$\zeta = -\Gamma \log \frac{Cn \frac{w}{2} \cdot Cn \frac{w'}{2}}{Sn \frac{w}{2} \cdot Sn \frac{w'}{2}}$$

$$+ 2\Gamma i \tan^{-1} \frac{Cn \frac{w}{2} \cdot Sn \frac{w'}{2} - Cn \frac{w'}{2} \cdot Sn \frac{w}{2}}{Cn \frac{w}{2} \cdot Sn \frac{w'}{2} + Cn \frac{w'}{2} \cdot Sn \frac{w}{2}} i$$

$$\therefore \phi = -\Gamma \log \frac{Cn \frac{w}{2} \cdot Cn \frac{w'}{2}}{Sn \frac{w}{2} \cdot Sn \frac{w'}{2}} \dots\dots\dots(i)$$

$$\phi = 2\Gamma \tan^{-1} \frac{Cn \frac{w}{2} \cdot Sn \frac{w'}{2} - Cn \frac{w'}{2} \cdot Sn \frac{w}{2}}{Cn \frac{w}{2} \cdot Sn \frac{w'}{2} + Cn \frac{w'}{2} \cdot Sn \frac{w}{2}} i \dots\dots(ii)$$

次の公式、

$$Cn(x-y) - Cn(x+y) = \frac{2}{D} Sn x dn x Sn y dn y \dots\dots(h)$$

より $(x+y)$ を u , $(x-y)$ を vi とすれば、 x, y はそれぞれ $w/2$ および $w'/2$ であるゆえ次の公式が得られる。

$$Cn vi - Cn u = \frac{2}{D} Sn \frac{w}{2} \cdot Sn \frac{w'}{2} \cdot dn \frac{w}{2} \cdot dn \frac{w'}{2} \dots\dots(i)$$

さらに前出の公式 (c) と (i) を (i) に適用して、

$$\begin{aligned} \phi &= -\Gamma \log \frac{Cn \frac{w}{2} \cdot Cn \frac{w'}{2}}{Sn \frac{w}{2} \cdot Sn \frac{w'}{2}} \times \frac{dn \frac{w}{2} \cdot dn \frac{w'}{2}}{dn \frac{w}{2} \cdot dn \frac{w'}{2}} \\ &= -\Gamma \frac{Cn u dn vi + Cn vi dn u}{Cn vi - Cn u} \end{aligned}$$

しかるに、

$$\begin{aligned} Cn vi - Cn u &= \frac{1}{Cn(v, k')} - Cn u \\ &= \frac{1 - Cn u Cn(v, k')}{Cn(v, k')} \end{aligned}$$

および、

$$Cn u dn vi + Cn vi dn u = \frac{Cn u dn(v, k') + dn u}{Cn(v, k')}$$

$$\therefore \phi = \Gamma \frac{1 - Cn u \cdot Cn v'}{Cn u dn v' + dn u} \dots\dots\dots(38)$$

式 (ii) の ϕ の計算を行うために次の公式に着目し、

$$\begin{aligned} &\{1 \pm dn(x+y)\} \{1 \mp dn(x-y)\} \\ &= \frac{k^2}{D} \{Sn x Cn y \mp Sn y Cn x\} \dots\dots\dots(j) \end{aligned}$$

次の公式を用意する。

$$\begin{aligned} &\frac{k^2}{D} \left\{ Sn \frac{w}{2} \cdot Cn \frac{w'}{2} \mp Sn \frac{w'}{2} \cdot Cn \frac{w}{2} \right\}^2 \\ &= (1 \pm dn u) (1 \mp dn vi) \dots\dots\dots(k) \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} i^2 \left[\frac{Sn \frac{w}{2} \cdot Cn \frac{w'}{2} - Sn \frac{w'}{2} \cdot Cn \frac{w}{2}}{Sn \frac{w}{2} \cdot Cn \frac{w'}{2} + Sn \frac{w'}{2} \cdot Cn \frac{w}{2}} \right] &= -\frac{1 + dn u}{1 - dn u} \frac{1 - dn vi}{1 + dn vi} \\ &= \frac{1 + dn u}{1 - dn u} \frac{dn(v, k') - Cn(v, k')}{dn(v, k') + Cn(v, k')} \dots\dots\dots(iii) \end{aligned}$$

式 (ii), (iii) より、

$$\phi = 2\Gamma \cdot \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{dn} u}{1 - \operatorname{dn} u} \frac{\operatorname{dn} v' - \operatorname{Cn} v'}{\operatorname{dn} v' + \operatorname{Cn} v'}} \dots\dots\dots (39)$$

式 (38) を u および v' で微分すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u} &= \Gamma \operatorname{Sn} u \frac{k^2 \operatorname{Cn} u + \operatorname{dn} u \operatorname{dn} u' + (k')^2 \operatorname{Cn} v'}{(\operatorname{dn} u + \operatorname{Cn} u \operatorname{dn} v')(1 - \operatorname{Cn} u \operatorname{Cn} v')} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v'} &= \Gamma \operatorname{Cn} u \operatorname{Sn} v' \frac{k^2 \operatorname{Cn} u + \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v' + (k')^2 \operatorname{Cn} v'}{(\operatorname{dn} u + \operatorname{Cn} u \operatorname{dn} v')(1 - \operatorname{Cn} u \operatorname{Cn} v')} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (iv)$$

しかるに次の関係が成立することを証明できる。

$$\frac{k^2 \operatorname{Cn} u + \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v' + (k')^2 \operatorname{Cn} v'}{(\operatorname{dn} u + \operatorname{Cn} u \operatorname{dn} v')(1 - \operatorname{Cn} u \operatorname{Cn} v')} = \frac{k^2}{\operatorname{dn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn} v'} \dots\dots\dots (1)$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u} &= \Gamma \frac{k^2 \operatorname{Sn} u}{\operatorname{dn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn} v'} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v'} &= \Gamma \frac{k^2 \operatorname{Cn} u \operatorname{Sn} v'}{\operatorname{dn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn} v'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial u} &= -\Gamma \frac{k^2 \operatorname{Cn} u \operatorname{Sn} v'}{\operatorname{dn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn} v'} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v'} &= +\Gamma \frac{k^2 \operatorname{Sn} u}{\operatorname{dn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn} v'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

ゆえに、

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \frac{\partial \phi}{\partial v'} \quad \text{および} \quad \frac{\partial \phi}{\partial v'} = -\frac{\partial \phi}{\partial u} \dots\dots\dots (42)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} &= \Gamma \frac{k^2 \operatorname{Cn} u (\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v' - \operatorname{Cn} v')}{(\operatorname{dn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn} v')^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial v'^2} &= \Gamma \frac{k^2 \operatorname{Cn} u (\operatorname{Cn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v')}{(\operatorname{dn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn} v')^2} \\ P^2 \phi &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v'^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

同様に、

$$P^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v'^2} = 0 \dots\dots\dots (44)$$

4. 集中載荷されたはりの振舞い

一様な材質 (物質定数 ϵ, μ, γ, c) のはりの両端を大地の上で支え、そのはりの中央部に質量を静的に載荷した場合¹⁰⁾の現象について考える。弾性論でいう単純ばりの中央にいわゆる集中荷重を作用させた場合であるが、この問題を直応力 σ 、せん断応力 τ の概念を否定して筆者流の考え方¹⁾で取扱ってみようとするものである。

載荷後はりはたわみを増しある時間が経過すると過渡的な現象の進行が終了し、平衡状態に達する。そのときはりは、図-6の(2)のごとくはりの上下面が水平になったものとする⁹⁾。このとき載荷を除去し、その後の現象を記述することにより、平衡状態時の変形のしくみの機構を解明しようとするわけである。

10) 単に質量を載せるのではなく \dot{S} を与える問題は、近い将来報告する予定であるが本論文では除外する。

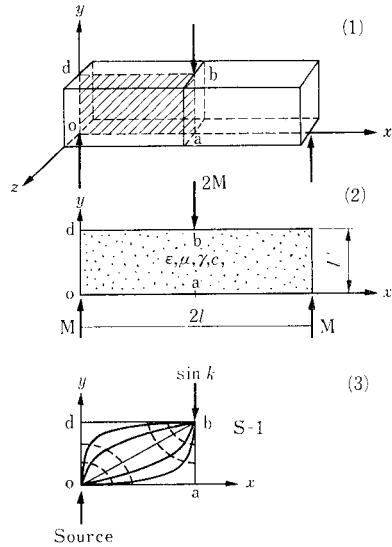


図-6

変位 S を例にとれば、

図-7の(2)図のごとく、平衡状態に達したはりから載荷した質量を除去してその後の変形の推移を知れば、無載荷のはりに載荷した場合のはりの変形 \hat{S} は(1)のごとくたどることが

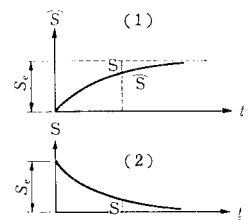


図-7

できることは〔文献2〕p. 16と同じである。ただし、エネルギーの消費は行われぬものとし $k=0$ とする。重力場である $S-1$ の世界は纏々述べたごとく静電場と見なすこともできる。さらに Maxwell の思考を逆にたどれば、この世界は流体力学的には図-6の(3)に示すごとく湧点 (Source) と吸点 (Sink) の描き出す世界でもある。筆者は図-6の(1)に示すはりを考察の対象とするのであるが(2)のごとき二次元を基本として考える。x-方向には e^{-mz} 型に減少する解を後で考える。流線に対する境界条件は等角写像法を使用したので自然に満足されている。したがって直接 ϕ を最初に求めてもよい。その際、前節で求めた関数式(31)の $\Gamma=1$ として一時これを取除いた次式を主役にする。

$$\phi = \log \frac{\operatorname{dn} u + \operatorname{Cn} u \operatorname{dn} v'}{\operatorname{dn} v' - \operatorname{dn} u \operatorname{Cn} v'} \dots\dots\dots (45)$$

式(28・b)、(30・b)を想起すれば、

$$\omega = 2\gamma/\Omega \dots\dots\dots (46 \cdot a)$$

したがって、

$$u = 2x/\Omega, \quad v = 2y/\Omega \dots\dots\dots (46 \cdot b)$$

本編では簡単のために $\Omega=1$ の場合を取扱うことにして、

$$u = 2x \quad \text{および} \quad v = 2y \dots\dots\dots (46 \cdot c)$$

$$\phi = \log \frac{dn \ 2x + Cn \ 2x \ dn \ 2y'}{dn \ 2y' - dn \ 2x \ Cn \ 2y'} \dots\dots\dots(47)$$

図-6 の (3) の湧点と吸点の強度 A があるときの Potential が z -方向には e^{-z} 型に減少するとして Potential ϕ として¹¹⁾,

$$\phi = Ae^{-n_1 t - z} \cdot \phi \dots\dots\dots(48)$$

まずこの式が式 (12) を満足するや否やを検討すると,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \phi = n_1^2 Ae^{-n_1 t - z} \phi \\ \text{右辺} &= C_1^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \\ &= C_1^2 Ae^{-n_1 t - z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \phi \right) \end{aligned}$$

しかるに, 式 (33), (35) により,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = - \left(\frac{2}{\Omega} \right) \frac{Sn \ u \ dn \ v'}{1 - Cn \ u \ Cn \ v'} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= - \left(\frac{2}{\Omega} \right)^2 \frac{dn \ u \ dn \ v' (Cn \ u - Cn \ v')}{(1 - Cn \ u \ Cn \ v')^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= - \left(\frac{2}{\Omega} \right)^2 \frac{dn \ u \ dn \ v' (-Cn \ u + Cn \ v')}{(1 - Cn \ u \ Cn \ v')^2} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに波動方程式を満足するためには次の条件が必要である。

$$n_1 = C_1 = \sqrt{\frac{2c}{\mu} \left(\frac{c}{\varepsilon} + \gamma \right)} \dots\dots\dots(49)$$

式 (8) $R_1 = -\text{grad } \phi$ より次式が得られる。

$$\begin{aligned} R_{1x} &= - \frac{\partial \phi}{\partial x} = Ae^{-c_1 t - z} \left(- \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ &= Ae^{-c_1 t - z} \left(\frac{2}{\Omega} \right) \frac{Sn \ u \ dn \ v'}{1 - Cn \ u \ Cn \ v'} \end{aligned}$$

いま,

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \left(\frac{2}{\Omega} \right) \frac{Sn \ u \ dn \ v'}{1 - Cn \ u \ Cn \ v'} \\ V_y &= \left(\frac{2}{\Omega} \right) \frac{dn \ u \ Sn \ v'}{1 - Cn \ u \ Cn \ v'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50 \cdot a)$$

とおくと次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} R_{1x} &= Ae^{-c_1 t - z} \cdot V_x \\ R_{1y} &= Ae^{-c_1 t - z} \cdot V_y \\ R_{1z} &= Ae^{-c_1 t - z} \cdot \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(51)$$

R_1 に関する波動方程式を式 (51) が満足するための条件は次式が成立することである。 R_1 に関する境界条件は満足されている。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(52)$$

第3式 $\nabla^2 \phi = 0$ が成立することはわかっている。最初の2式の詳細な計算は省略するが、幸いにも成立することを証明することができた。

次に式 (51) が $\text{rot } R_1 = 0$ なることを証明しなければ

11) $e^{-n_1 t - mz}$ においてみると、結局 $m=1$ なることを要請される。

ならない。そのために、式 (50) について次の計算をあらかじめ行う。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial y'} &= \frac{\partial V_x}{\partial v'} \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ &= - \left(\frac{2}{\Omega} \right)^2 \frac{Sn \ u \ Sn \ v' (k^2 Cn \ u + k'^2 Cn \ v')}{(1 - Cn \ u \ Cn \ v')^2} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} &= - \left(\frac{2}{\Omega} \right)^2 \frac{Sn \ u \ Sn \ v' (k^2 Cn \ u + k'^2 Cn \ v')}{(1 - Cn \ u \ Cn \ v')^2} \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y'} = 0 \dots\dots\dots(53)$$

式 (51) より,

$$\begin{aligned} [\text{rot } R_1]_z &= \frac{\partial R_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial R_{1x}}{\partial y} = Ae^{-c_1 t - z} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = 0 \\ [\text{rot } R_1]_x &= \frac{\partial R_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial R_{1y}}{\partial z} = Ae^{-c_1 t - z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + V_y \right) \end{aligned}$$

しかるに,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= - \left(\frac{2}{\Omega} \right) \frac{Sn \ v' \ dn \ u}{1 - Cn \ u \ Cn \ v'} = -V_y \\ \therefore [\text{rot } R_1]_x &= 0 \end{aligned}$$

したがって、式 (51) は波動方程式の解であり、また $\text{rot } R_1 = 0$ を満足するので $S-1$ の世界を記述するはずである。

次に変形 S_1 として次式をとりあげる。 S_1 に関する $t=0$ における境界条件は矩形であるが、楕円関数の性質上満足されている。

$$\left. \begin{aligned} S_{1x} &= F \cdot e^{-n_1 t - z} \cdot V_x \\ S_{1y} &= G \cdot e^{-n_1 t - z} \cdot V_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(i)$$

式 (13・a) を認めれば簡単であるが、ここではこの式に触れないで解を求めてみる。式 (i) が S_1 に関する波動方程式の解であるためには式 (49) の成立が要求される。次に $[\text{rot } S_1]_z = 0$ の条件より,

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} G - \frac{\partial V_x}{\partial y} F = 0$$

式 (53) を考慮すると上式が成立するためには,

$$F = G \dots\dots\dots(ii)$$

最後に J を x, y の関数として

$$S_{1y} = J(x, y) e^{-c_1 t - z} \dots\dots\dots(iii)$$

平井仮説式 (10) を考慮すると,

$$\begin{aligned} \text{div } S_1 &= e^{-c_1 t - z} \left\{ F \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) - J \right\} \\ &= -J \cdot e^{-c_1 t - z} \dots\dots\dots(iv) \end{aligned}$$

$$\phi = - \left(\frac{c}{\varepsilon} + \gamma \right) \text{div } S_1 = J \left(\frac{c}{\varepsilon} + \gamma \right) e^{-c_1 t - z}$$

式 (48) を代入すると,

$$J = - \frac{C_1 A}{\left(\frac{c}{\varepsilon} + \gamma \right)} \cdot \phi \dots\dots\dots(v)$$

$$\therefore S_{1z} = - \frac{C_1 A}{\left(\frac{c}{\varepsilon} + \gamma \right)} e^{-c_1 t - z} \cdot \phi \dots\dots\dots(vi)$$

しかるに,

$$\frac{C_1 A}{\left(\frac{c}{\varepsilon} + \gamma\right)} = \frac{C_1^2}{\left(\frac{c}{\varepsilon} + \gamma\right)} \frac{A}{C_1} = \frac{2c}{\mu} \left(\frac{c}{\varepsilon} + \gamma\right) \frac{A}{C_1} = \frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1}$$

$$\therefore S_{1z} = -\frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} e^{-c_1 t - z} \cdot \phi \dots\dots\dots(54)$$

式 (iv), (v) より

$$\text{div } S_1 = -S_{1z} \dots\dots\dots(55)$$

すなわち, z 方向には負の体積膨張が起こる.

式 (i) および式 (54) により $[\text{rot } R_1]_x$ を計算すると,

$$V_y = -(\partial\phi/\partial y) \text{ ゆえ}$$

$$\begin{aligned} [\text{rot } R_1]_x &= \frac{\partial S_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial S_{1y}}{\partial z} \\ &= \left(G + \frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1}\right) V_y e^{-c_1 t - z} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore G = F = -\frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} \dots\dots\dots(vii)$$

ゆえに,

$$\left. \begin{aligned} S_{1x} &= -\frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} e^{-c_1 t - z} \cdot V_x \\ S_{1y} &= -\frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} e^{-c_1 t - z} \cdot V_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(56)$$

したがって,

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}_{1x} &= \frac{2c}{\mu} A e^{-c_1 t - z} \cdot V_x \\ \dot{S}_{1y} &= \frac{2c}{\mu} A e^{-c_1 t - z} \cdot V_y \\ \dot{S}_{1z} &= \frac{2c}{\mu} A e^{-c_1 t - z} \cdot \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(57)$$

式 (51), (57) より,

$$R_1 = \frac{\mu}{2c} \dot{S}_1 \dots\dots\dots(58)$$

これは式 (13・a) にほかならない. 以上述べたところでは,

式 (iii) に式 (10) を考え (vi) を導入するという方法をとったが, 式 (13・a) を認めれば直接式 (51) より式 (57) が得られる. その場合

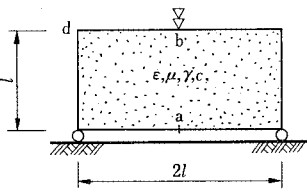


図-8

表-1 \bar{V}_x, \bar{V}_y

	x=0		x=2/10 K		x=5/10 K		x=8/10 K		x=K	
	\bar{V}_x	\bar{V}_y	\bar{V}_x	\bar{V}_y	\bar{V}_x	\bar{V}_y	\bar{V}_x	\bar{V}_y	\bar{V}_x	\bar{V}_y
y=K	0	0.	0.3715	0.	1.	0.	2.6917	0.	0	
0.9K	0	0.1854	0.3700	0.1863	0.9673	0.2535	2.1562	1.0857	0	5.4754
0.8K	0	0.3715	0.3690	0.3690	0.8871	0.4617	1.3586	1.3586	0	2.6917
0.7K	0	0.5616	0.3733	0.5433	0.7972	0.6038	0.8592	1.2504	0	1.7807
0.6K	0	0.7647	0.3982	0.7143	0.7310	0.6824	0.5955	1.0681	0	1.3078
0.5K	0	1.	0.4617	0.8871	0.7071	0.7071	0.4617	0.8871	0	1.
0.4K	0	1.3078	0.5955	1.0681	0.7310	0.6824	0.3982	0.7143	0	0.7647
0.3K	0	1.7807	0.8592	1.2504	0.7972	0.6038	0.3733	0.5433	0	0.5616
0.2K	0	2.6917	1.3586	1.3586	0.8871	0.4617	0.3690	0.3690	0	0.3715
0.1K	0	5.4754	2.1562	1.0857	0.9673	0.2535	0.3700	0.1863	0	0.1854
y=0	0		2.6917	0.	1.	0.	0.3715	0.	0	0.

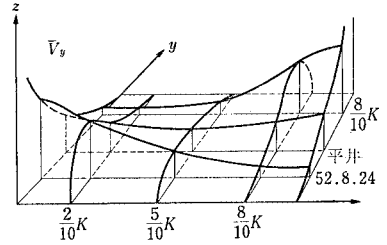
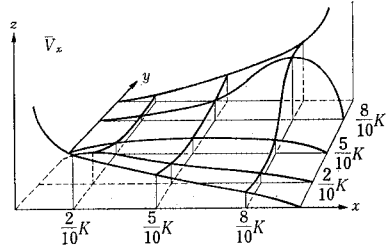


図-9

には式 (54), (56) は積分常数が入った形となる.

S-1 の世界を記述する解を構成する基本的な関数は式 (50・a) で示される流れの関数 V_x, V_y である. この関数の性質を概観するために $\Omega=1$ の場合について数値計算をこの段階で行ってみる. $l=l', K=K', k=1/\sqrt{2}$ のはりの場合に相当する. 便宜上次のごとくおく.

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_x &= \left(\frac{V_x}{2}\right)_{n=1} = \frac{\text{Sn } 2x \text{ dn } 2y'}{1 - \text{Cn } 2x \text{ Cn } 2y'} \\ \bar{V}_y &= \left(\frac{V_y}{2}\right)_{n=1} = \frac{\text{Sn } 2y' \text{ dn } 2x}{1 - \text{Cn } 2x \text{ Cn } 2y'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50 \cdot b)$$

図-8 のごとく $l=l'$ のはりでは式 (28・a) により $K=K'$ であって, $\Omega=1$ となる. このとき $k=1/\sqrt{2}$. このときの楕円関数の概略図は後掲の図-15 に示されている. 関数表により計算し表-1 が得られる. これを図示したのが図-9 である.

S-2 の解の構成にあたっては式 (38), (40) で $\Gamma=1$ とした次式を取上げる. ϕ に指標 2 を付して,

$$\phi_2 = \log \frac{1 - \text{Cn } u \text{ Cn } v'}{\text{Cn } u \text{ dn } v' + \text{dn } u} \dots\dots\dots(i)$$

これを u および v' で微分した式 (40) を考慮して,

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \left(\frac{2}{\Omega}\right) \frac{k^2 \text{Sn } u}{\text{dn } v' - \text{dn } u \text{ Cn } v'}$$

[$\frac{\partial \phi_2}{\partial y'}$ は省略]

いま次の関数 H を考える.

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \left(\frac{2}{\Omega}\right) \frac{k^2 \text{Sn } u}{\text{dn } v' - \text{dn } u \text{ Cn } v'} \\ H_y &= \left(\frac{2}{\Omega}\right) \frac{k^2 \text{Cn } u \text{ Sn } v'}{\text{dn } v' - \text{dn } u \text{ Cn } v'} \end{aligned} \right\}$$

ただし,

$$u = \frac{2}{\Omega} x, v' = \frac{2}{\Omega} y'$$

.....(59)

この関数を基に、未定係数を B とし R_{2x} , R_{2y} の解として筆者は次式を考える。

$$\left. \begin{aligned} R_{2x} &= B e^{-n_2 t - z} \cdot H_x \\ R_{2y} &= B e^{-n_2 t - z} \cdot H_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

この式が式 (23) の R_2 に関する波動方程式の解であるためには次式が成立しなければならぬ。

$$n_2^2 B e^{-n_2 t - z} \cdot H_x = (C_2)^2 B e^{-n_2 t - z} \left\{ \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + H_x \right\} \dots\dots\dots (ii)$$

$$H_u = \frac{k^2 \text{Sn } u}{\text{dn } v' - \text{dn } u \text{Cn } v'} \dots\dots\dots (iii)$$

とおけば式 (43) より、

$$\frac{\partial H_u}{\partial u} = \frac{k^2 \text{Cn } u (\text{dn } u \text{dn } v' - \text{Cn } v')}{(\text{dn } v' - \text{dn } u \text{Cn } v')^2}$$

これより、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_u}{\partial u^2} &= \frac{-k^2 \text{Sn } u}{(\text{dn } v' - \text{dn } u \text{Cn } v')^3} J \\ \text{ただし、} \\ J &= \text{dn}^2 u \text{dn}^2 v' - k'^2 \text{dn}^2 v' - \text{Cn } v' \text{dn } u \text{dn } v' \\ &\quad - k'^2 \text{Cn } v' \text{dn } u \text{dn } v' + k^2 \text{dn}^2 u \text{Sn}^2 v' \\ &\quad + 2 k'^2 \text{Cn}^3 v' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (iv)$$

また式 (iii) より、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_u}{\partial v'} &= \frac{k^2 \text{Sn } u \text{Sn } v' \{k'^2 \text{Cn } v' - \text{dn } u \text{dn } v'\}}{(\text{dn } v' - \text{dn } u \text{Cn } v')^2} \\ \frac{\partial^2 H_u}{\partial v'^2} &= \frac{+k^2 \text{Sn } u}{(\text{dn } v' - \text{dn } u \text{Cn } v')^3} J \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (v)$$

式 (iv), (v) より、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H_u}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H_u}{\partial v'^2} &= 0 \\ \therefore \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61 \cdot a)$$

同様に、

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (61 \cdot b)$$

式 (61・a) を考慮すると式 (ii) より、

$$n_2 = C_2 = \sqrt{\frac{c^2}{\varepsilon \mu}} \dots\dots\dots (62)$$

次に $\text{div } R_2 = 0$ の条件を考える。

$$\text{div } R_2 = B e^{-c_2 t - z} \left\{ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right\} + \frac{\partial R_{2z}}{\partial z} = 0$$

式 (43) より、

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0$$

であるから、

$$\frac{\partial R_{2z}}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (63)$$

常数を K_x, K_y として (楕円関数の周期 K ではない)

$$\left. \begin{aligned} S_{2x} &= D e^{-c_2 t - z} \cdot H_x + K_x \\ S_{2y} &= D e^{-c_2 t - z} \cdot H_y + K_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (64)$$

式 (64) は波動方程式、

$$\dot{S}_2 = (C_2)^2 F^2 S_2$$

を満足し、 $t=0$ での境界が図-6 (2) のごとく矩形である条件も満たす。式 (17) により W_z をまず考える、

$$2 W_z = [\text{rot } S_2]_z = -\frac{\partial S_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial S_{2x}}{\partial y} = D e^{-c_2 t - z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (i)$$

式 (i) のかつこ部分の計算が必要である。式 (59) より、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_u}{\partial v'} &= \frac{k^2 \text{Sn } u \text{Sn } v' \{k'^2 \text{Cn } v' - \text{dn } u \text{dn } v'\}}{(\text{dn } v' - \text{dn } u \text{Cn } v')^2} \\ \frac{\partial H_v}{\partial u} &= \frac{k^2 \text{Sn } u \text{Sn } v' \{k'^2 \text{Cn } v' - \text{dn } u \text{dn } v'\}}{(\text{dn } v' - \text{dn } u \text{Cn } v')^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (ii)$$

ゆえに次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_v}{\partial u} - \frac{\partial H_u}{\partial v'} &= 0 \\ \frac{\partial H_v}{\partial u} + \frac{\partial H_u}{\partial v'} &= 2 \frac{k^2 \text{Sn } u \text{Sn } v' \{k'^2 \text{Cn } v' - \text{dn } u \text{dn } v'\}}{(\text{dn } v' - \text{dn } u \text{Cn } v')^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (65)$$

また、

$$\frac{\partial H_u}{\partial u} + \frac{\partial H_v}{\partial v'} = 0 \dots\dots\dots (66)$$

したがって式 (i) は式 (65) により、

$$W_z = 0 \dots\dots\dots (67)$$

$\text{div } S_z = 0$ の条件を考えると、

$$\text{div } S_z = D e^{-c_2 t - z} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial S_{2z}}{\partial z} = 0$$

式 (66) により、

$$\frac{\partial S_{2y}}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (68)$$

次に式 (17) を想起して、

$$\begin{aligned} 2 W_y &= [\text{rot } S_2]_y = \frac{\partial S_{2x}}{\partial z} - \frac{\partial S_{2z}}{\partial x} \\ &= -D e^{-c_2 t - z} \cdot H_x - \frac{\partial S_{2z}}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 W_x &= [\text{rot } S_2]_x = \frac{\partial S_{2z}}{\partial y} - \frac{\partial S_{2z}}{\partial z} \\ &= D e^{-c_2 t - z} \cdot H_y + \frac{\partial S_{2z}}{\partial y} \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\left. \begin{aligned} 2 W_x &= D e^{-c_2 t - z} \cdot H_y + \frac{\partial S_{2z}}{\partial y} \\ 2 W_y &= -D e^{-c_2 t - z} \cdot H_x - \frac{\partial S_{2z}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (69)$$

$\text{div } W$ については、

$$\text{div } W = \frac{1}{2} \left[D e^{-c_2 t - z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 S_{2z}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 S_{2z}}{\partial x \partial y} \right]$$

式 (65) により、

$$\text{div } W = 0$$

最後に式 (18) を使って、

$$\left. \begin{aligned} \dot{W}_x &= -\frac{c}{\mu} \left\{ \frac{\partial R_{2z}}{\partial y} - \frac{\partial R_{2y}}{\partial z} \right\} = -\frac{c}{\mu} \left\{ B e^{-c_2 t - z} \cdot H_y + \frac{\partial R_{2z}}{\partial y} \right\} \\ \dot{W}_y &= -\frac{c}{\mu} \left\{ -B e^{-c_2 t - z} \cdot H_x - \frac{\partial R_{2z}}{\partial x} \right\} \end{aligned} \right\}$$

ゆえに、

$$\left. \begin{aligned} 2 \dot{W}_x &= -\frac{2c}{\mu} B e^{-c_2 t - z} \cdot H_y - \frac{2c}{\mu} \left(\frac{\partial R_{2z}}{\partial y} \right) \\ 2 \dot{W}_y &= \frac{2c}{\mu} B e^{-c_2 t - z} \cdot H_x + \frac{2c}{\mu} \left(\frac{\partial R_{2z}}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (ii)$$

しかるに式 (69) によれば、

$$\left. \begin{aligned} 2 \dot{W}_x &= -DC_2 e^{-c_1 t - z} \cdot H_y + \frac{\partial \dot{S}_{2z}}{\partial y} \\ 2 \dot{W}_y &= DC_2 e^{-c_1 t - z} \cdot H_x - \frac{\partial \dot{S}_{2z}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (二)$$

式 (ハ) と (二) を等値すれば、

$$e^{-c_1 t - z} \cdot H_y \left\{ -\frac{2c}{\mu} B + DC_2 \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{2c}{\mu} R_{2z} + \dot{S}_{2z} \right\} = 0$$

この式が成立するためには、

$$D = \frac{2c}{\mu} \frac{B}{C_2} \dots\dots\dots (70)$$

$$\dot{S}_{2z} = -\frac{2c}{\mu} R_{2z} \dots\dots\dots (71)$$

式 (70), (64) より、

$$\left. \begin{aligned} S_{2x} &= \frac{2c}{\mu} \frac{B}{C_2} e^{-c_1 t - z} \cdot H_x + K_x \\ S_{2y} &= \frac{2c}{\mu} \frac{B}{C_2} e^{-c_1 t - z} \cdot H_y + K_y \\ \frac{\partial S_{2z}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (72)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}_{2x} &= -\frac{2c}{\mu} B e^{-c_1 t - z} \cdot H_x \\ \dot{S}_{2y} &= -\frac{2c}{\mu} B e^{-c_1 t - z} \cdot H_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (73)$$

式 (69), (70) より、

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \frac{c}{\mu} \frac{B}{C_2} e^{-c_1 t - z} \cdot H_y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_{2z}}{\partial y} \right) \\ W_y &= -\frac{c}{\mu} \frac{B}{C_2} e^{-c_1 t - z} \cdot H_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S_{2z}}{\partial x} \right) \\ W_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (74)$$

次に未定係数 B を決定する仕事が残っているが、この段階で式 (59) の関数 H の具合をのぞいてみる。 V について行ったごとく支間 $2l$, はり高 l , $K=K'$, $k=1/\sqrt{2}$ の場合をまず対称とする。

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_x &= \left(\frac{H_x}{2} \right)_{\theta=1} = \frac{k^2 \text{Sn } 2x}{\text{dn } 2y' - \text{dn } 2x \text{Cn } 2y'} \\ \bar{H}_y &= \left(\frac{H_y}{2} \right)_{\theta=1} = \frac{k^2 \text{Cn } 2x \text{Sn } 2y'}{\text{dn } 2y' - \text{dn } 2x \text{Cn } 2y'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (75)$$

この計算結果が表-2 である。 \bar{H}_x は $x=0, x=K$ で は零である。表-1 の \bar{V}_x でも零であった。流線の x 分

表-2 \bar{H}_x, \bar{H}_y

	$x=0$		$x=\frac{2}{10}K$		$x=\frac{5}{10}K$		$x=\frac{8}{10}K$		$x=K$	
	\bar{H}_x	\bar{H}_y	\bar{H}_x	\bar{H}_y	\bar{H}_x	\bar{H}_y	\bar{H}_x	\bar{H}_y	\bar{H}_x	\bar{H}_y
$y=K$	0	0	0.1730	0.	0.2929	0	0.1730	0.	0	0.
0.9K	0	0.0743	0.1818	0.0756	0.3072	0	0.1818	-0.0756	0	-0.0943
0.8K	0	0.1985	0.2094	0.1586	0.3515	0	0.2094	-0.1586	0	-0.1985
0.7K	0	0.3240	0.2593	0.2569	0.4291	0	0.2593	-0.2569	0	-0.3240
0.6K	0	0.5171	0.3388	0.3680	0.5457	0	0.3287	-0.3680	0	-0.5171
0.5K	0	0.7071	0.4617	0.5356	0.7071	0	0.4617	-0.5356	0	-0.7071
0.4K	0	1.0290	0.6549	0.7331	0.9163	0	0.6549	-0.7331	0	-1.0290
0.3K	0	1.5427	0.9731	0.9640	1.1652	0	0.9731	-0.9640	0	-1.5427
0.2K	0	2.5186	1.5172	1.1492	1.4226	0	1.5172	-1.1492	0	-2.5186
0.1K	0	5.3021	2.3444	0.9751	1.6275	0	2.3444	-0.9751	0	-5.3021
$y=0$	0	0	2.8903	0.	1.7071	0	2.8903	0.	0	0

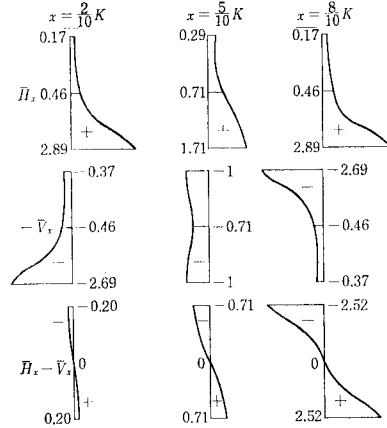


図-10 変位図 S_x

素がこの点ではないので当然のことである。

未定係数 B の決定をするために S_x に着目する。

Const. を零と考えると、式 (56), (72) は、

$$\begin{aligned} S_{1x} &= -\frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} e^{-c_1 t - z} \cdot V_x \\ S_{2x} &= \frac{2c}{\mu} \frac{B}{C_2} e^{-c_1 t - z} \cdot H_x \end{aligned}$$

この両式を加算するとき気にかかるのは伝播速度 C_1 と C_2 の異なる Vector の加算である。そこで (A/C_1) 項と (B/C_2) 項に着目することとなる。

この段階で再び 図-7 に戻り、初期条件について、

$$[\dot{S}]_{t \rightarrow \infty} = S_e = [S]_{t \rightarrow 0}$$

なることに注目し、式 (56), (72) で $t=0, z=0$ の変位を加算した変位を \bar{S}_x とする。はりの上下両面は上方凸ではなく水平で、図-6 の状態にある。 $\angle doa = \angle oab = \pi/2$

$$\bar{S}_x = [S_{1x} + S_{2x}]_{z=0} = \frac{2c}{\mu} \left\{ \frac{B}{C_2} H_x - \frac{A}{C_1} V_x \right\} \dots (i)$$

未定係数 B を決定するにあたり式 (i) の係数に対し次式を仮定する。

$$\frac{A}{C_1} = \frac{B}{C_2} \dots\dots\dots (ii)$$

このような関係を認めれば、 C_1 と C_2 との差に基づく危惧は除かれるが後述の計算例であきらかなごとくいわゆる中立軸がはりの中央部にくる (図-10 参照)。

式 (ii) より、

$$B = \frac{C_2}{C_1} A = \sqrt{\frac{\frac{c^2}{\epsilon \mu}}{\frac{2c}{\mu} \left(\frac{c}{\epsilon} + \gamma \right)}} \cdot A \dots\dots\dots (76)$$

しかるとき式 (i) より

$$\bar{S}_x = \frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} (H_x - V_x) \dots\dots\dots (77)$$

同様に \bar{S}_y を考えると,

$$\bar{S}_y = [S_{1y} + S_{2y}]_{z=0} = \frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} \left\{ (H_y - V_y) + \frac{2}{\Omega} K_y \right\} \dots\dots\dots (78 \cdot a)$$

$\Omega=1$ の場合には,

$$\bar{S}_y = 2 \frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} \{ (\bar{H}_y - \bar{V}_y) + K_y \} \dots\dots\dots (79 \cdot a)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_y &= \frac{k^2 Cn 2x Sn 2y'}{dn 2y' - dn 2xCn 2y'} \\ \bar{V}_y &= \frac{dn 2x Sn 2y'}{1 - Cn 2xCn 2y'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (79 \cdot b)$$

式 (76) で未定係数 B を決定したが、この条件が妥当であるや否やを検証する目的で、式 (77) の $(H_x - V_x)$ の数値計算結果を図示したのが図-10である。脚注 6) で述べたごとく $t=0$ ではりは図-11 に示すように矩形になっているが、その際の x 方向の変形状況を図-10 が語る。

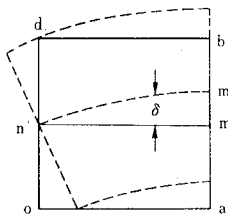


図-11

表-3 ($\bar{H}_x - \bar{V}_x$)

	$x = \frac{2}{10} K$			$x = \frac{5}{10} K$			$x = \frac{8}{10} K$		
	\bar{H}_x	\bar{V}_x	$\bar{H}_x - \bar{V}_x$	\bar{H}_x	\bar{V}_x	$\bar{H}_x - \bar{V}_x$	\bar{H}_x	\bar{V}_x	$\bar{H}_x - \bar{V}_x$
$y = K$	0.1730	0.3715	-0.199	0.2929	1.	-0.707	0.1730	2.6917	-2.519
0.9K	0.1818	0.3700	-0.188	0.3072	0.9673	-0.660	0.1818	2.1562	-1.974
0.8K	0.2094	0.3690	-0.160	0.3515	0.8871	-0.536	0.2094	1.3586	-1.149
0.7K	0.2593	0.3733	-0.114	0.4291	0.7972	-0.368	0.2593	0.8592	-0.600
0.6K	0.3388	0.3982	-0.069	0.5457	0.7310	-0.185	0.3287	0.5955	-0.267
0.5K	0.4617	0.4617	0.	0.7071	0.7071	0.	0.4617	0.4617	0.
0.4K	0.6549	0.5955	0.059	0.9163	0.7310	0.185	0.6549	0.3982	0.257
0.3K	0.9731	0.8592	0.114	1.1652	0.7972	0.368	0.9731	0.3733	0.600
0.2K	1.5172	1.3586	0.158	1.4226	0.8871	0.536	1.5172	0.3690	1.148
0.1K	2.3444	2.1562	0.188	1.6275	0.9673	0.660	2.3444	0.3700	1.974
$y = 0$	2.8903	2.6917	0.198	1.7071	1.	0.707	2.8903	0.3715	2.519

表-4

	$x = \frac{2}{10} K$			$x = \frac{5}{10} K$			$x = \frac{8}{10} K$			$x = K$		
	\bar{H}_y	\bar{V}_y	$\bar{H}_y - \bar{V}_y$	\bar{H}_y	\bar{V}_y	$\bar{H}_y - \bar{V}_y$	\bar{H}_y	\bar{V}_y	$\bar{H}_y - \bar{V}_y$	\bar{H}_y	\bar{V}_y	$\bar{H}_y - \bar{V}_y$
$y = K$	0.	0.	0.	0	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
0.9K	0.0756	0.1863	-0.1100	0	0.2535	-0.2535	-0.0756	1.0857	-1.1613	-0.0943	5.4754	-5.5697
0.8K	0.1586	0.3690	-0.2104	0	0.4617	-0.4617	-0.1586	1.3586	-1.5172	-0.1985	2.6917	-2.8902
0.7K	0.2569	0.5433	-0.2864	0	0.6038	-0.6038	-0.2569	1.2504	-1.5073	-0.3240	1.7807	-1.4567
0.6K	0.3680	0.7143	-0.3463	0	0.6824	-0.6824	-0.3680	1.0681	-1.4361	-0.5171	1.3078	-1.8249
0.5K	0.5356	0.8871	-0.3515	0	0.7071	-0.7071	-0.5356	0.8871	-1.4227	-0.7071	1.	-1.7071
0.4K	0.7331	1.0681	-0.3350	0	0.6824	-0.6824	-0.7331	0.7143	-1.4474	-1.0290	0.7647	-1.7937
0.3K	0.9640	1.2504	-0.2864	0	0.6038	-0.6038	-0.9640	0.5433	-1.5073	-1.5427	0.5616	-0.9811
0.2K	1.1492	1.3586	-0.2094	0	0.4617	-0.4617	-1.1492	0.3690	-1.5182	-2.5186	0.3715	-2.8901
0.1K	0.9751	1.0857	-0.1106	0	0.2535	-0.2535	-0.9751	0.1863	-1.1614	-5.3021	0.1854	-5.4875
$y = 0$	0.	0.	0.	0	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.	0.

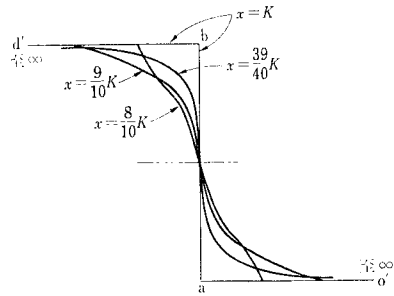


図-12

はりの端部 $x=0$ および中央部 $x=K$ ではともに $\bar{H}_x - \bar{V}_x = 0$ という結果になっている。流線を考えてそれは当然のことである。これらの点では図-11 に示すごとく ($t=0$) 相対変位はない。a, b 断面近傍の変位の移り変りの様相を図-12 に示すが ab に近づくにつれ上下の縁辺に変位が増加し, ab では $d'ba'o'$ なる折線となる。すなわち ab では $\bar{S}_x = 0$ である。

次に y 方向の変位を式 (79) により考える。 ($\bar{H}_y - \bar{V}_y$) を計算したのが表-4, 図示したのが図-13 である。はりは図-11 に示すごとく上方に凸のはりで載荷後は上下面は水平, 端部および中央断面は垂直になったものと仮定している。表-4 に示されているごとく $y=0, y=K$ においては $\bar{H}_y - \bar{V}_y = 0$ 。変位図の図-13 が矩形であった場合を考える。すなわち y 軸方向の変位がすべて同一であるならば, 相対的変位がなく剛体的に全体が y 方向に移動すると解釈される。図-13 の最下段の図は矩形ではないので, 相対的変位があるが $x=0.8K$ 点は矩形に近づいている。

式 (79) に戻り $y=0.5K'$, すなわちいわゆる中立軸の \bar{S}_y について

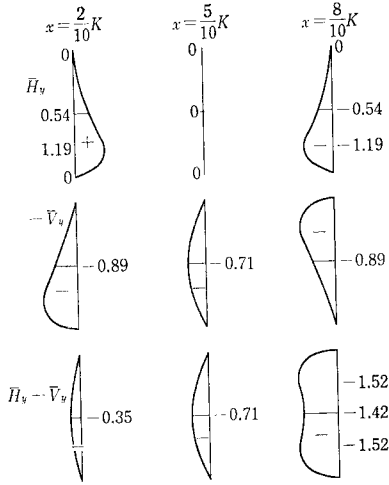


図-13 変位図 \bar{S}_y

考察する。

$$[\bar{H}_y]_{y=\frac{K}{2}} = \frac{K}{2} \left[\frac{k^2 \text{Sn } 2y' \text{Cn } 2x}{\text{dn } 2y' - \text{dn } 2x \text{Cn } 2y'} \right]_{y=\frac{K}{2}} = k \cdot \text{Cn } 2x$$

$$[\bar{V}_y]_{y=\frac{K}{2}} = \frac{K}{2} \left[\frac{\text{dn } 2x \text{Sn } 2y'}{1 - \text{Cn } 2x \text{Cn } 2y'} \right]_{y=\frac{K}{2}} = \text{dn } 2x$$

いま中立軸線の y 方向だけのたわみを示す $[\bar{S}_y]_{y=\frac{K'}{2}}$ を δ と記号すれば、これは x の関数で次式で与えられる (図-12 参照)。

$$\delta = -2 \frac{2c}{\mu} \left(\frac{A}{C_1} \right) \{ \text{dn } 2x - k \text{Cn } 2x + K_y \} \dots\dots(i)$$

常数 K_y をきめるために、支点上のはりの短縮を無視して次の条件を使う。

$$x=0 \text{ で } \delta=0 \dots\dots(ii)$$

しかるとき、

$$[\text{dn } 2x - k \text{cos } 2x + K_y]_{x=0} = 1 - k + K_y = 0$$

$$\therefore K_y = (k-1) \dots\dots(iii)$$

したがって $Q=1$ の場合、たわみは、

$$\delta = -\frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} \{ \text{dn } 2x - k \text{Cn } 2x - (1-k) \} \dots\dots(80 \cdot a)$$

表-5

	$(\text{dn } 2x - k \text{Cn } 2x)$	(左欄) -0.293
$x=0$	0.293	0
$x=0.1K$	0.307	0.014
$0.2K$	0.351	0.058
$0.3K$	0.429	0.136
$0.4K$	0.546	0.253
$0.5K$	0.707	0.414
$0.6K$	0.916	0.623
$0.7K$	1.165	0.872
$0.8K$	1.423	1.130
$0.9K$	1.627	1.334
$x=K$	1.707	1.414

($1-k$)=0.293 であるが、上式の $(\text{dn } 2x = k \text{cn } 2x)$ を計算すると 表-5。

最後に A について考える。物質定数 ϵ なる空間の内部にある質量 M より r だけ離れた点の $S-1$ の世界としてのポテンシャルは、

$$\varphi = -\frac{M}{\epsilon} \frac{1}{r} \dots\dots(i)$$

しかるに無渦運動をする液体の吸点 (Sink) より r だけ離れた点のポテンシャルは、

$$\varphi = -\Gamma \frac{1}{r} \dots\dots(ii)$$

この両式より、

$$\Gamma = \frac{M}{\epsilon}$$

を得るが、本節の最初の部分の式 (48) の A として上記の M/ϵ を採用する¹³⁾。

$$A = \frac{M}{\epsilon} \dots\dots(81)$$

しかるとき、

$$\frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} = 2 \frac{C_2}{C_1} \frac{C_2}{C} M$$

と書き換えられるので、式 (80・a) は、

$$\delta = -4 \frac{C_2}{C_1} \frac{C_2}{C} M \{ \text{dn } 2x - k \text{Cn } 2x - (1-k) \} \dots\dots(80 \cdot b)$$

上式に含まれている定数 c はエネルギーの流れを示す。式 (25) に現われた定数である。すなわち、

$$C = \frac{4 \pi \mathcal{E}}{[R_y \times W]}$$

式 (80・b) によりはりの 1/4 点および 1/2 点のたわみ $\delta_{1/4}$ 、 $\delta_{1/2}$ を求めると (図-8 の場合)、

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1/4} &= -4 \frac{C_2}{C_1} \frac{C_2}{C} M (2k-1) \\ \delta_{1/2} &= -4 \frac{C_2}{C_1} \frac{C_2}{C} M (2k) \\ \frac{\delta_{1/4}}{\delta_{1/2}} &= \frac{2k-1}{2k} \end{aligned} \right\} \dots\dots(82)$$

表-6 支間 6.71 m、はり高 1.58 m

	$x=0$	$x=\frac{2}{10}K$	$x=\frac{5}{10}K$	$x=\frac{8}{10}K$	$x=K$					
	\bar{H}_x	\bar{H}_y	\bar{H}_x	\bar{H}_y	\bar{H}_x	\bar{H}_y	\bar{H}_x	\bar{H}_y	\bar{H}_x	\bar{H}_y
$y=K'$	0	0.	0.5715	0.	0.8586	0	0.5715	0.	0	0.
$0.9K'$	0	0.1560	0.5815	0.1000	0.8646	0	0.5815	-0.1000	0	-0.1560
$0.8K'$	0	0.3203	0.6122	0.2000	0.8823	0	0.6122	-0.2000	0	-0.3203
$0.7K'$	0	0.5029	0.6665	0.2991	0.9106	0	0.6665	-0.2991	0	-0.5029
$0.6K'$	0	0.7181	0.7489	0.3947	0.9474	0	0.7489	-0.3947	0	-0.7181
$0.5K'$	0	0.9900	0.8660	0.4796	0.9900	0	0.8660	-0.4796	0	-0.9900
$0.4K'$	0	1.3647	1.0242	0.5397	1.0344	0	1.0242	-0.5397	0	-1.3647
$0.3K'$	0	1.9487	1.2239	0.5493	1.0763	0	1.2239	-0.5493	0	-1.9487
$0.2K'$	0	3.0592	1.4464	0.4724	1.1107	0	1.4464	-0.4724	0	-3.0592
$0.1K'$	0	6.2804	1.6369	0.2814	1.1335	0	1.6369	-0.2814	0	-6.2804
$y=0$	0	0	1.7147	0.	1.1414	0	1.7147	0.	0	0

12) プランク (寺沢寛一訳)：理論物理学汎論，裳華房，第二巻「変形する物体の力学」，p. 203.

13) なお，集中載荷 ($S-1$ の世界) について [文献 4)] p. 159 において試みた計算に登場する係数 M/ϵ の取扱い方を参照こう。

$$C = \frac{M}{-a_{1/2}} \frac{8kC_2^2}{C_1} \dots\dots\dots (83)$$

以上述べた計算例では $l=l'$ の場合を取りあげたので $\Omega=1$ であった。一般の場合は、 l'/l の関係により Ω の数値が変化する。いわゆる断面係数の影響は、 Ω のなかにひそんでいるが、本稿では取りあげず、後日にゆずる。

弾性理論に好意を抱かれる方々の立場から見ると、はり高と支間長の比が大きすぎる。いわゆる deep beam を取扱っているのに x 方向の変位が 図-11 のごとくなり、中立軸がはり高の半分の高さに位置するのはおかしいと指摘されることと思われる。そこで筆者の手元にある楕円関数表¹⁴⁾で取扱い得るもっとも slender beam として 図-14 のはりについて同様な計算を行ってみる。 $k^2=0.98$, $K=3.3541414$ とすると、 $K'/K=0.4706838$, $K'=1.5787400$ となるので、図-15 のはりのごとくはり高 1.58 m, 支間長 6.71 m のものを計算の対象とすることとなる。この計算では Ω の影響を考えないこととし、便宜的に $\Omega=1$ の場合を取扱っている¹⁵⁾。楕円関数値を $k^2=0.50$ の場合に対し $k^2=0.98$ の場合を比較すると 図-15 のようになる。この場合の計算結果で $(\bar{H}_x - \bar{V}_x)$ を図示したものが 図-16 である。これは S_x の傾向を示すもので中立軸ははり高の中心にある。

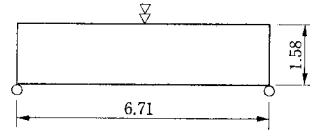


図-14

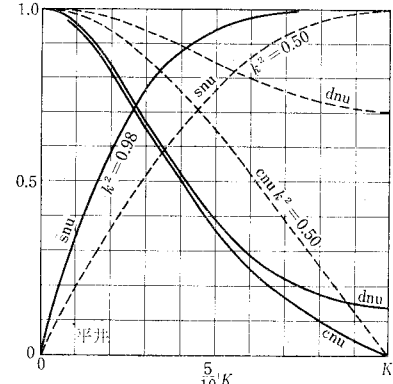


図-15

$$\left. \begin{aligned} \frac{2c}{\mu} \left(\frac{c}{\varepsilon} + \gamma \right) &= C_1^2 = \frac{2G + \lambda}{\rho} \\ \frac{c^2}{\varepsilon\mu} &= C_2^2 = \frac{G}{\rho} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (85)$$

G, λ はいわゆる弾性定数、 ρ は密度である²⁰⁾。

式 (84) の両式を加算すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (S_1 + S_2) = C_1^2 \text{grad div } S_1 - C_2^2 \text{rot rot } S_2$$

$S = S_1 + S_2$ であるゆえ上式より $\text{div } S_2 = 0, \text{rot } S_1 = 0$ を考慮して、

$$\ddot{S} = C_1^2 \text{grad div } S - C_2^2 \text{rot rot } S \dots\dots\dots (86)$$

この式は式 (5) に他ならない。伝播速度が異なるがこれを加算するというをすれば形式的に弾性論の式が得られる。

5. 弾性理論との関連について

この節では弾性理論とのかかわりあいについて触れてみる。式 (15), (22) より次式をとり出して考えよう。

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}_1 &= (C_1)^2 p^2 S_1 \\ \dot{S}_2 &= (C_2)^2 p^2 S_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (84)$$

第一式は縦波の、第二式は横波の伝播を示す式であるので、伝播速度 C_1, C_2 を仲介として次式が得られる。

表-7 支間 2*l*, はり高 *l*

	$(U_2 - U_1)_{x=0} \frac{8}{10K}$	ϕ	$(U_2 - U_1) + 0.06215\phi$
$y = K'$	-3.85757	-2.678	-4.024
$0.9K'$	-1.97153	-2.454	-2.124
$0.8K'$	-0.24065	-1.980	-0.364
$0.7K'$	+0.16322	-1.492	+0.070
$0.6K'$	+0.12853	-1.061	+0.063
$0.5K'$	+0.19678	-0.699	+0.153
$0.4K'$	-0.12854	-0.402	-0.154
$0.3K'$	-0.16322	-0.169	-0.174
$0.2K'$	+0.24058	0.	+0.241
$0.1K'$	+2.92439	+0.103	+2.931
$y = 0$	+3.85733	+0.138	+3.866

表-8 支間 6.71 m, はり高 1.58 m

	U_2	U_1	$(U_2 - U_1)_{x=0} \frac{8}{10K}$	$\chi\phi$	$\chi\phi + (U_2 - U_1)$
$y = K'$	-0.31652	-0.96990	-1.28642	-0.28620	-1.573
$0.9K'$	-0.31674	-0.80010	-1.11684	-0.28028	-1.397
$0.8K'$	-0.31618	-0.43449	-0.75067	-0.27487	-1.026
$0.7K'$	-0.31062	-0.40879	-0.40879	-0.26100	-0.670
$0.6K'$	-0.29097	+0.12101	-0.16996	-0.25322	-0.423
$0.5K'$	-0.23980	+0.23981	0.	-0.24009	-0.240
$0.4K'$	-0.12728	+0.29725	+0.16997	-0.23444	-0.064
$0.3K'$	+0.08619	+0.32256	+0.40875	-0.22447	+0.184
$0.2K'$	+0.41805	+0.33261	+0.75066	-0.22003	+0.531
$0.1K'$	+0.78078	+0.33605	+1.11683	-0.21589	+0.901
$y = 0$	+0.94958	+0.33683	+1.28641	-0.21589	+1.071

14) 春日屋伸昌編：数値表，学献社，p. 123.

16) Timoshenko : Theory of Elasticity, p. 487.

15) $\Omega = \frac{l}{K} = \frac{l'}{K'}$ ゆえ、 $\frac{l}{K} = \frac{3.35414}{3.35414} = 1$

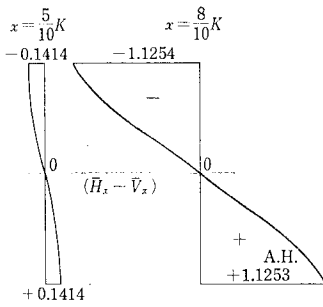


図-16

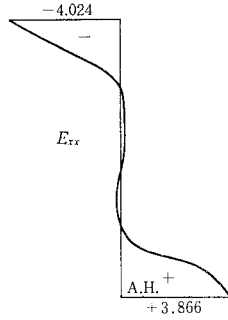


図-17

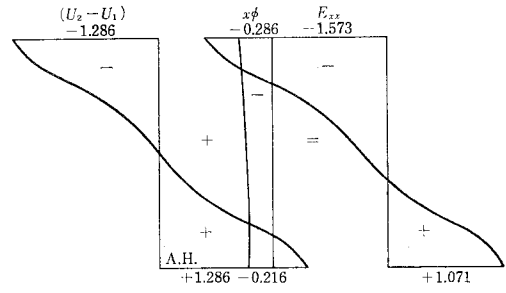


図-18

この小論で取扱っているはりの問題の式 (84) の解は式 (55), (56), (72) より,

$$\left. \begin{aligned} S_{1x} &= -\frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} e^{-c_1 t - z} \cdot V_x \\ S_{1y} &= -\frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} e^{-c_1 t - z} \cdot V_y \\ S_{1z} &= -\text{div } S_1 = -\frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} e^{-c_1 t - z} \cdot \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots(87 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{2x} &= \frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} e^{-c_2 t - z} \cdot H_x \\ S_{2y} &= \frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} e^{-c_2 t - z} \cdot H_y + K_y \\ \frac{\partial S_{2z}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(87 \cdot b)$$

この解は式 (86), すなわち式 (5) を満足する. 式 (5) を満足する解を Cauchy は追い求めていたのではなからうか. そのために彼は $[\sigma, \tau]$ の概念を導入してみたのではなからうか.

筆者は, $[\sigma, \tau]$ の概念の導入には反対であるが, 式 (6) を静的な問題として取扱ひ表面力 $[\sigma, \tau]$ を Gauss の定理を利用して式 (4) を与えた. したがって式 (5) の解である式 (87) より σ および τ を式 (4) より算出することが可能である. 式 (87) より算出したことを明かにするために, σ_x を t_{xx} , τ_{xy} を t_{xy} のごとく表示する. 式 (87) より $\partial S_x / \partial x$ および $\text{div } S$ を計算し, 式 (5) に代入し, $t=0, z=0$ とおけば, t_{xx} が次のごとく得られる.

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} (2G) \left\{ \left(\frac{\epsilon \gamma}{c} \right) \phi + \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial x} \right) \right\} \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} &= \left(\frac{2}{\Omega} \right)^2 \frac{\text{dn } 2x \text{ dn } 2y' (\text{Cn } 2x - \text{Cn } 2y')}{(1 - \text{Cn } 2x \text{ Cn } 2y')^2} \\ &= \left(\frac{2}{\Omega} \right)^2 U_1 \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} &= \left(\frac{2}{\Omega} \right)^2 \frac{k^2 \text{Cn } 2x (\text{dn } 2x \text{ dn } 2y' - \text{Cn } 2y')}{(\text{dn } 2y' - \text{dn } 2x \text{ Cn } 2y')^2} \\ &= \left(\frac{2}{\Omega} \right)^2 U_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(88)$$

$\Omega=1$ として,

$$\therefore t_{xx} = \frac{2c}{\mu} \frac{A}{C_1} (8G) \left\{ \left(\frac{\epsilon \gamma}{4c} \right) \phi + (U_2 - U_1) \right\} \dots\dots(89)$$

C_1^2 および C_2^2 より,

$$\frac{2c}{\mu} \gamma = C_1^2 - 2C_2^2 \dots\dots(90)$$

鉄の場合, $C_1=5120 \text{ m/s}$, $C_2=3240 \text{ m/s}$ と仮定すると,

$$\frac{2c}{\mu} \gamma = C_1^2 - 2C_2^2 = 0.49718 C_2^2 = 0.49718 \frac{c^2}{\epsilon \mu}$$

$$\therefore \frac{\epsilon \gamma}{4c} = \frac{0.49718}{8} = 0.06215 = \chi$$

したがって鉄の場合, 式 (89) の $\{ \}$ の中だけを取り出して仮に E_{xx} と記号すると,

$$E_{xx} = \frac{\epsilon \gamma}{4c} \phi + (U_2 - U_1) \dots\dots(91)$$

この E_{xx} を計算すると, t_{xx} のだいたいの傾向がわかるわけである. 図-8 に対応する場合を $x=8/10 \cdot K$ に対して計算したのが表-7 および 図-17 である.

本来図-10 のような S_x に対して $[\sigma, \tau]$ の σ は図-17 の姿となる. 同様な計算を 図-14, 図-16 の $x=0.8K$ に対して行った結果 図-18 を得る.

図-10 の変形 S_x は式 (5) の解である. これをもとにして式 (4) で σ_x に相当するものを求めたところ, 図-17 が得られた. 筆者は $[\sigma, \tau]$ の概念の導入に反対し, R_1 および R_2 なる「場の概念」を導入することにより変位 S の解法を探し得たと思っている.

6. 結 語

会員諸兄のご疑念に答えるためにはもっと丁寧な解説を行わなければならなかったのであるが, 頁数に制限があるためお許しをいただきたい. 不備の点はさらに討議でお答えしたい.

最後にこの小論をまとめるにあたり流体力学について種々ご教示いただいた中央大学理工学部 林 泰造教授に感謝申し上げます. またこの研究にご鞭撻とご援助をいただいた故田坂輝敬氏の霊に深い感謝の念を捧げるものである.