土木学会論文報告集
第 294 号・1980 年 2 月
【論　　文】

変分不等式によるはりの接触問題

BEAM CONTACT PROBLEMS USING VARIATIONAL INEQUALITIES

菊　池　　昇*
By Noboru KIKUCHI

1. 緒　　言

本論文では，はりの代表的な接触問題；Signorini の問題，Rigid Punch 問題，2体接触問題の3つを，変分不等式という，許容関数の族を閉凸集合にまで拡張した変分原理で解く．ここに述べる方法は，はりの接触問題のみならず，さらに一般的な物体や材料の接触問題に適用できる[1),4)~6)]．

はりは工学的に最も基本的な要素であるとともに，力学原理を理解するうえで，自明でない最も単純な一次元モデルである．特に，はりで成立する変分原理などのほとんどすべての力学的な構造をそのまま他の2，3次元モデルに敷衍できるので，変分不等式のような新しい理論を議論するには好都合である．

変分不等式の基本的な考え方は，最適化問題の分野で不等式の拘束条件をもつ汎関数の最小値問題としてかなり古くから知られており Kuhn-Tucker の最適化十分条件として表現されているが，変分不等式と名付けられるような議論は比較的新しく，Fichera[1)] の弾性体の Signorini 問題，Stampacchia[2)] の膜の Obstacle 問題がそのはじめであろう．特に，力学に現れる種々の自由表面問題として変分不等式を語った Lions[3)] の論文が基本的である．変分不等式の発祥そのものが力学における接触問題であったことは注目に値する．

前述したように弾性体の Signorini 問題（剛体基盤に置かれた物体の変形を取り扱う問題）は Fichera[1)] によって解かれ，Fremond[4)] は基盤が半無限に広がった弾性体であるような2体接触問題にまでそれを拡張した．Duvaut[5)] は，Signorini 問題とは立場を逆転した Rigid Punch 問題，すなわち剛体を変形可能な地盤に押し込むような接触問題を解いた．

本論文に紹介する新しいはりの接触問題は Fremond[4)] と Duvaut[5)] の理論を下地にして構成されている．次節で述べる変分不等式の由来は，たとえば Lions[9)] によるが，後半部分の変分不等式がどのようにこれまでの変分原理を含むかについての説明は Ciarlet[10)] などを参照した．

3．では，力学的な問題から出発して変分不等式をどのようにして求めるかを明らかにするため Duvaut[5)] の使用した方法を紹介する．Fichera[1)] や Fremond[4)] は単純に物体の運動学的な拘束条件を課したエネルギー最小値問題から出発しているが，Duvaut[5)] の方法がもっと力学上一般的と思われる．

4．では，Duvaut[5)] を参照して Rigid Punch 問題を取り上げるが，新しく Rigid Punch を回転できるようにした．すなわち，Rigid Punch に力のみならずモーメントをも与えるようにしてある．Duvaut[5)] は押し込み方向を固定して力のみを Rigid Punch に与えているので，ここで述べる問題は，Duvaut の一般化である．**4**．の後半で議論する混合法による定式化は少なくともはりの接触問題に関する限りはじめてだと思われる．

5．の2体問題は，変位を未知関数としているので Fremond[4)] のそれとは異なるが Signorini の問題を理解したあとでは単純な一応用例にすぎない．相反的な変分不等式は他にその類例をみない独自の記述である．この定式化の特徴は一方のはりに Green の演算子を適用して問題を接触力で書き改める点にある．Fremond[4)] も Green の演算子を用いてあるが，彼は運動学的な接触条件を記述するのに使っているので本質的に異なる議論である．

以下議論する内容はもっと一般的な弾性体の接触問題にまで自然に拡張できる[6)]が，はりを例に取ったのは本質的な力学構造を強調するためであることを述べておきたい．

* 正会員　Ph.D. Assistant Professor The University of Texas at Austin

2. 変分不等式

汎関数 F の最小値をある Hilbert 空間の凸閉集合 K で求めることを考えよう．もし，F が K 上で，下に弱半連続（weakly lower semicontinuous）であり，K が有界であるか，F が，

$$F(x)\to+\infty \text{ as } \|x\|\to+\infty$$

という統御性（coercive）をもてば，F は最小値を $x_0\in K$ の点で取ることができる．汎関数 F が下に弱半連続とは，$y\in K$ に弱収束する関数列 $y_n\in K$（i.e. すべての K 上の有界線形汎関数 f に対して $f(y_n)\to f(y)$ as $n\to+\infty$）に対して，

$$\liminf_{n\to+\infty} F(y_n)\geqslant F(y)$$

となることを意味し，有限次元の空間では弱収束と普通の意味におけるノルムによる収束，i.e. $\|y_n-y\|\to 0$ as $n\to+\infty$，は同値なので，下に半連続であればよい．さらに汎関数 F は K 上で Gâteaux の意味で微分可能，すなわち，任意の $x\in K$ に対して，

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\partial}{\partial\theta}F(x+\theta(y-x))$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta}[F(x+\theta(y-x))-F(x)]$$

が，すべての K に属する要素 y について存在し，かつ

$$DF(x)(y-x)=\lim_{\theta\to 0}\frac{\partial}{\partial\theta}F(x+\theta(y-x))$$

の形の，連続な（i.e. 有界）汎関数 $DF(x):(y-x)\to DF(x)(y-x)$ が存在するものとすれば，$F(x_0)$ は K 上の最小値であり，かつ，集合 K は凸であるから任意の要素 $y\in K$ に対して，

$$F((1-\theta)x_0+\theta y)\geqslant F(x_0),\ \theta\in[0,1]\cdots\cdots(1)$$

i.e.

$$DF(x_0)(y-x_0)\geqslant 0\ \forall y\in K\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

という不等式が導かれる．式 (2) は式 (1) の両辺を $\theta>0$ で割って，$\theta\to 0$ とすれば求まる．また，F を凸汎関数とすれば，

$$F((1-\theta)x+\theta y)\leqslant(1-\theta)F(x)+\theta F(y)$$

となるので，

$$DF(x)(y-x)\leqslant F(y)-F(x)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

がすべての $x, y\in K$ について成り立つ．もし，$x_0\in K$ が不等式 (2) を満たせば式 (3) から，

$$0\leqslant F(y)-F(x_0)\ \text{i.e.}\ F(x_0)\leqslant F(y),\ \forall y\in K$$

が求まる．このことは式 (2) の解 $x_0\in K$ がとりもなおさず K 上で汎関数 F を最小にすることを意味する．これより Gâteaux の意味で微分可能な凸汎関数の最小値問題は，不等式 (2) を解くという問題と同値であることがわかる．このような事情から凸閉集合 K で不等式

$$x_0\in K: A(x_0)(y-x_0)\geqslant f(y-x_0)\forall y\in K$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

を解く問題を変分不等式とよぶ．ここで $A(x_0)$，f は K 上の有界線型汎関数である．以上の詳細な議論は，たとえば Lions[9] にある．変分不等式には2つの特徴があって，その1つは Lions[3] が述べているようにある種の自由表面問題を自然に包含できる点と，もう1つは集合 K に凸性よりもより強い構造，たとえば線形性などを導入することによって従来の変分原理を求めることができるという一般性である．

実際許容関数族 K を，㋑ ある関数 h を頂点とする凸錐体，㋺ ある関数 g について線形多様体，㋩ 線形部分空間，などと仮定すると，変分不等式 (4) は以下のように表現される．

㋑ の場合，$x, y\in K$ とすると，任意の正数 θ と，$0\leqslant t\leqslant 1$ に対して，$\theta(x-h)\in K$ および $(1-t)x+ty\in K$ となるので式 (4) で，$y=h$, $y=2x_0-h$ と取ると，

$$A(x_0)(x_0-h)=f(x_0-h)$$

また，$y=x_0+z-h$, $z\in K$, と置いて，

$$A(x_0)(z-h)\geqslant f(z-h)\forall z\in K$$

が得られる．したがって，式 (4) は，

$$\left.\begin{aligned}&A(x_0)(x_0-h)=f(x_0-h),\\&A(x_0)(z-h)\geqslant f(z-h)\ \ \forall z\in K\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(5)$$

となる．

㋺ の場合，任意の $y\in K$ に対して，$g+\theta(y-g)\in K$, $\forall\theta\in\boldsymbol{R}$, であるから式 (4) で $y=x_0\pm(z-g)$, $\forall z\in K$, と取ると，

$$A(x_0)(z-g)=f(z-g)\forall z\in K\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

が得られる．

㋩ の場合，$y=x_0\pm z$, $\forall z\in K$, と取れるので式 (4) は

$$A(x_0)(z)=f(z)\ \ \forall z=K\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

に変わる．典型的な閉凸集合として $K_1=\{v:|\nabla v|\leqslant 1\}$，㋑ の例として $K_2=\{v:v\geqslant h\}$，㋺ の例として $K_3=\{v:v(0)=g\}$，㋩ の例として $K_4=\{v:v(0)=0\}$，などが考えられる．

集合 K_2 における変分式 (5) をさらに詳しく議論しよう．第一式から $A(x_0)$ が x_0-h に直交することがいえ，第二式からは，すべての z に対して $z-h\geqslant 0$ であるから $A(x_0)\geqslant 0$ が求まる．これは，たとえば，物体が基盤から離れている（$x_0-h>0$）とき平衡方程式（$A(x_0)=0$）が満たされ，他の部分（$x_0-h=0$ となる領域）では物体が基盤に接触していることを意味する．また，$x_0-h>0$ になるか $x_0-h=0$ になるかは式 (4) の解そのものが決定するので自動的に接触面を求めることになる．式 (5) の形をもつ変分不等式が以下で述べるように接触問題に代表される自由表面問題の基本となる．さらに式 (5) から (4) を導くことは自明であろう．

実際，

$$(A(x_0)-f)(y-x_0)$$
$$=(A(x_0)-f)(y)\geq 0 \ \forall y\in K \cdots\cdots (8)$$

である．以下の節ではこの種の議論がしばしば使われる．

表示 (6) は，たとえば境界条件に非斉次の変位が，表示 (7) は斉次の変位が与えられた場合を表わす．

3. はりの Signorini 問題

(1) 変位法による変分不等式

線形弾性ばりが $y=\varphi(x)$ で表わされる剛体基礎の上に張られ，荷重 $f(x)$ が作用する場合のはりのたわみ $w(x)$ を求めよう．この状況では剛体基礎に接触する部分と離れる部分が存在する．もし，はりが剛体基礎から離れるとすれば，はりが基礎から受ける反力はないので，

$$p(x)=0 \text{ if } w(x)-\varphi(x)<0$$

はりが基礎に接触すると，反力が存在するので，

$$p(x)\leqslant 0 \text{ if } w(x)-\varphi(x)=0$$

これらより，接触条件が以下のように求まる．

$$\left.\begin{array}{l} p(x)(w(x)-\varphi(x))=0, \\ w(x)-\varphi(x)\leqslant 0,\ p(x)\leqslant 0 \end{array}\right\}\cdots\cdots (9)$$

また，反力 $p(x)$ は曲げによって生じる内力と荷重 $f(x)$ の差につり合うので，変形が滑らかであれば，

$$\left.\begin{array}{l} p(x)=(EIw'')''(x)-f(x), \\ \phi'(x)=(d\phi/dx)(x) \end{array}\right\}\cdots\cdots (10)$$

となる．さて境界条件を両端単純支持と仮定しよう．このとき接触条件まで含め，はりの許容されるたわみは，集合

$$\left.\begin{array}{l} K=\{v : v(0)=v(L)=0, \\ v(x)-\varphi(x)\leqslant 0 \text{ in } (0, L)\} \end{array}\right\}\cdots\cdots (11)$$

に含まれなければならない．ここで L ははりの全長で，かつ $\varphi(0)$, $\varphi(L)>0$ を仮定している．v を K の任意の要素とし，$w\in K$ は接触条件 (9) を満たしているとしよう．部分積分より，

$$\int_0^L EIw''(v-w)''dx=\int_0^L (EIw'')''(v-w)\,dx$$

であるから，不等式

$$p(v-w)=p(v-\varphi)-p(w-\varphi)=p(v-\varphi)\geqslant 0$$

を考慮すれば，

$$\int_0^L EIw''(v-w)''dx\geqslant\int_0^L f(v-w)\,dx \ \forall v\in K$$
$$\cdots\cdots (12)$$

が導かれる．不等式 (12) を，はりの Signorini の問題に対する仮想仕事の原理とよぶ．

式 (12) を，はりのたわみが滑らかであるとして求めたが，実際は，許容関数が2階微分まで平均二乗の意味で積分可能であればよいので (10) が一般の意味で必ずしも成立しない場合も考えられる．すなわち，許容関数族を，Sobolev 空間 $H^2(0, L)$ の部分集合に取ればよい．ここで，

$$H^2(0, L)=\{v\in L^2(0, L) :$$
$$v'\in L^2(0, L), \text{ and } v''\in L^2(0, L)\}$$
$$\cdots\cdots (13)$$

$L^2(0, L)$ は，すべての $(0, L)$ 上で定義される平均二乗の意味で積分可能な関数の集合である．(13) の中に現れる微分は，広義の意味のもので，すべての限りなく滑らかで境界上で零となる関数 ϕ (すなわち $C_0^\infty(0, L)$ の要素) に対して，

$$\int_0^L v'\phi dx=-\int_0^L v\phi' dx$$

となる．なぜ $H^2(0, L)$ 空間で問題を定義できるかは，すべての $H^2(0, L)$ の要素 u, v に対して仮想仕事が，

$$\int_0^L EIu''v''dx\leq \max_{x\in(0,L)}(EI)\|u\|_2\|v\|_2<+\infty$$

に示されるように有限であるからである．ここで $\|\cdot\|_2$ は，Sobolev 空間 $H^2(0, L)$ のノルムで，

$$\|v\|_2{}^2=\int_0^L (v^2+v'^2+v''^2)\,dx$$

と定義される．また，v が $H^2(0, L)$ に属するので式 (12) の右辺が意味をもつには，f が $H^2(0, L)$ の (位相的) 双対空間に属すればよい．直感的には，点荷重や点曲げモーメントまで含むような荷重の集合が，双対空間である．これより Signorini の問題の許容関数族 K, (11)，を正確に記述すれば，

$$K=\{v\in H^2(0, L) : v(0)=v(L)=0,$$
$$v(x)-\varphi(x)\leqslant 0 \text{ in } (0, L)\}\cdots\cdots (11)'$$

となる．

以上の議論で接触条件 (9) から変分不等式 (12) を導いたが，逆に (12) から (9) を導くことを考えよう．任意の関数 $\psi\in C_0^\infty(0, L)$, $\psi(x)\leq 0$ in $(0, L)$, に対して，$v=w+\psi\in K$ であり，かつ広義の意味で，

$$\int_0^L (EIw''\psi''-f\psi)\,dx\equiv\int_0^L \{(EIw'')''-f\}\psi dx$$

であるから (12) から $(EIw'')''-f\in L^2(\Omega)$ の仮定のもとで，

$$(EIw'')''-f\leqslant 0 \text{ a.e. in } (0, L)$$

が求まる．さらに $f\in L^2(0, L)$ とすると Green の公式

$$\int_0^L EIw''v''dx=\int_0^L (EIw'')''vdx+\delta_0 v'|_0^L-\delta_1 v|_0^L$$

が，すべての $v\in H^2(0, L)$ に対して成立する．δ_0 と δ_1 は，w が十分滑らかであれば，

$$\delta_0=EIw'',\ \delta_1=(EIw'')'$$

である．これを使って，

$$\int_0^L \{(EIw'')''-f\}(v-w)\,dx + \delta_0(v-w)'|_0^L - \delta_1(v-w)|_0^L \geqq 0$$

$\varphi(0)$, $\varphi(L)>0$ としたので (12) の解 w は境界の近傍 O で剛体基礎から離れる．すなわち，この近傍において，ε を適当に取ると $v=w\pm\varepsilon\psi\in K$ がすべての$C_0^\infty(0, L)$ の要素についていえるので，

$$v=w \text{ in } (0, L)/O,\ v=w\pm\varepsilon\psi,$$
$$\psi\in C_0^\infty(O),\ \varepsilon>0$$

と取ることによって，

$$\int_O (EIw''\psi''-f\psi)\,dx = \int_O \{(EIw'')''-f\}\psi\,dx=0$$

から，

$$(EIw'')''-f=0 \text{ in } O$$

が広義の意味で成り立つ．ここで A/B は集合Aから集合Bを取り除いた集合を意味する．したがって，

$$\delta_0(v-w)'|_0^L-\delta_1(v-w)|_0^L \geqq 0 \quad \forall v\in K$$

である．境界上で $v=w$ であるから，

$$\delta_0(v-w)'|_0^L \geqq 0$$

のみ残るが，$\varphi(0)$, $\varphi(L)>0$ であるから，境界付近でたわみ角を任意に取れるので，

$$\delta_0=0 \text{ on } x=0 \text{ and } L$$

が求まる．一方，φ も $H^2(0, L)$ の要素であると仮定すると $v=\varphi$, $v=2w-\varphi$ が K に含まれるので，

$$\int_0^L \{(EIw''(w-\varphi)''-f(w-\varphi)\}\,dx = \int_0^L \{(EIw'')''-f\}(w-\varphi)\,dx=0$$

がいえる．もし $(EIw'')''-f\in L^2(0, L)$ であれば，この等式は，

$$((EIw'')''-f)(w-\varphi)=0 \text{ in } (0, L)$$

を意味する．したがって，適当な仮定のもとで，変分不等式 (12) の解は，はりの接触条件 (9) を満たすことになる．

Sobolev の埋蔵定理[7] から，$H^2(0, L)$ に含まれるすべての関数は，一階導関数まで連続であるからたわみおよびたわみ角は連続である．したがって剛体基礎がたとえ角点をもっていたとしても，はりは角点の付近ではどのような力を加えても基礎に密着することはない．

また，$(EIw'')''-f\in L^2(0, L)$ は議論を単純にするために用いられたが，現実の問題でしばしばこれは無理な仮定となる．たとえば，はりの中央部分が真平らな基礎に接触する場合，接触面の内側では $p(x)=-f(x)$ になるが，接触面の境界では集中反力が生じる．これは $(EIw'')'$ が接触境界で不連続であることを意味するので Sobolev の埋蔵定理から $(EIw'')''-f\in L^2(0, L)$ は奇妙な仮定となる．しかし，変分不等式 (12) はこのような状況でも意味をもっている．このことを示そう．(12) の解 $w(x)$ に対して集合 Ω_- を，

$$\Omega_-=\{x\in(0, L) : w(x)-\varphi<0\} \cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

と定義し，$\Omega_0=(0, L)/\Omega_-$ とする．ここで $\varphi=\varphi(x)$ は基礎を真平らに仮定したので正定数である．集合 Ω_- の部分で $v=w\pm\varepsilon z$, $\forall z\in C_0^\infty(\Omega_-)$, $\varepsilon>0$, と取れるので (12) から，

$$(EIw'')''-f=0 \text{ in } \Omega_-$$

が求まる．集合 Ω_- と Ω_0 の共通する境界を Γ とし，(12) を部分積分することによって，

$$[\delta_0(v-w)']_\Gamma-[\delta_1(v-w)]_\Gamma \geqq \int_{\Omega_0} f(v-w)\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

Γ の $1/2\cdot\varepsilon$- 近傍で $v=w+\mu$, μ は負の定数，Γ の ε-近傍の外で $v=w$ となり，しかも $\varepsilon/2$- と ε- 近傍の間では滑らかな v を取ると，

$$-[\delta_1]_\Gamma\mu \geqq -\varepsilon \max_{x\in(0, L)} f(x)\mu \text{ i.e. } [\delta_1]_\Gamma \leqq C\varepsilon$$

が得られる．ここで ε は任意の正数であるから，

$$[\delta_1]_\Gamma \leqq 0$$

が結論づけられ，境界上で集中反力が生じる可能性を示している．経験的に集中反力が生じる場合および生じない場合があることを知っているのでこのことは物理現象に適合する．

(2) 相反的な変分不等式

接触反力 $p(x)$ および分布荷重 $f(x)$ を与えられた量とすれば，微分方程式，

$$(EIw'')''(x)=f(x)+p(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

は適当な境界条件のもとで一意に解くことができ，

$$w(x)=G(f)(x)+G(p)(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

と書くことができる．G は Green の演算子とよばれ，$H^2(0, L)$ の部分空間

$$V=\{v\in H^2(0, L) : v \text{ は境界条件を満たす．たとえば } v(0)=v(L)=0\} \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

の双対空間から V への写像で，もともとの微分方程式が線形なので G もまた線形である．双対空間とはすべての V 上で定義される連続（有界）線形汎関数の集合を意味し，V' で表わされ，はりの問題では分布荷重，点荷重，点モーメントなどが含まれている．すなわち，次の形式で書かれる q は V' の要素である．

$$q(v)=\int_0^L q_0(x)v(x)\,dx+\sum_{i=1}^I q_i v(x_i) + \sum_{j=1}^J \hat{q}_j v'(x_j) \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

i.e.

$$q(x)=q_0(x)+\sum_{i=1}^I q_i\delta(x_i)+\sum_{j=1}^J \hat{q}_j\delta'(x_j) \cdots\cdots\cdots\cdots (19)'$$

ここで，$\delta(x_i)$ は Dirac の δ- 関数で，$\delta'(x_i)$ はその“微分”である．

(17) を使うと接触条件 (9) は，$\hat{\varphi}=\varphi-G(f)$ と置くと，

$$p(G(p)-\hat{\varphi})=0,\ G(p)-\hat{\varphi}\leq 0,\ p\leq 0 \quad\cdots\cdots(20)$$

と書ける．式 (20) はまた不等式，

$$p\leq 0:(q-p)(G(p)-\hat{\varphi})\geqslant 0,\ \forall q\leq 0\cdots(21)$$

と同値である．実際，$G(p)-\hat{\varphi}\leq 0$ だから，

$$(q-p)(G(p)-\hat{\varphi})=q(G(p)-\hat{\varphi})\geq 0$$

不等式 (21) を (12) に対して相反的な変分不等式とよぶ．

はりのような一次元問題では Green 演算子 G を剛性が定数である限り求めることができる．たとえば，両端単純支持の場合，

$$G(p)(x)=\int_0^L g(x;y)\,p(y)\,dy\cdots\cdots(22)$$

$$g(x;y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6EIL}(L-y)(x^3-2Lxy+xy^2) & \text{if } x\leq y\\[2ex] \dfrac{1}{6EIL}(L-x)(y^3-2Lxy+yx^2) & \text{if } x\geq y\end{cases}\quad\cdots\cdots(23)$$

となる．この場合，(21) の変分不等式は，

$$p\leq 0:\int_0^L\int_0^L(q-p)(x)\{g(x;y)p(y)-\hat{\varphi}(x)\}dydx\geq 0,\ \forall q\leq 0\cdots\cdots(24)$$

という形に書かれる．他の境界条件についても (24) のような不等式を求めることができる．しかし，剛性 EI が定数でないとき Green 関数 $g(x;y)$ を求めることは難しいので，近似的な G を使うことになる．簡単にははりを有限要素法で離散化し境界条件を入れを剛性マトリックスの逆を取って G を作ればよい．

4. はりの Rigid Punch 問題

(1) 変位法による変分不等式

剛体基礎上に張られたはりの変形を前節では考えたが，ここでは剛体をはりに押し込んだ場合の問題を議論しよう．この種の問題は Rigid Punch 問題とよばれ，塑性変形を考慮した形でしばしば議論されてきた．ここではははりの両端を固定し押し込む剛体の形状を $y=\varphi(x)$ としよう．さらに，初期の段階で剛体がはりに接触している部分の1点を座標系の原点とする．すなわち，$y=\varphi(0)=0$．はりのたわみを $w(x)$，はりの原点におけるたわみを α，はりの原点まわりの回転を θ とすると，運動学的な接触条件は，

$$w(x)-\alpha-\theta x-\varphi(x)\geq 0,\ x\in(c,d)\subset(a,b)\quad\cdots\cdots(25)$$

となる．実数 a, b は，はりの両端の座標，c, d は押し込み物体の両端の座標である．剛体に荷重 P，モーメント M をのせるとはりの各点の反力 $p(x)$ に対して力学的な接触条件は，

$$p(x)=0 \text{ if } w(x)-\alpha-\theta x-\varphi(x)>0\cdots\cdots(26)$$

$$p(x)\geqslant 0 \text{ if } w(x)-\alpha-\theta x-\varphi(x)=0\cdots\cdots(27)$$

および，

$$\int_c^d p(x)\,dx=P,\ \int_c^d p(x)\,x\,dx=M\quad\cdots\cdots(28)$$

となる．式 (28) における積分は形式的なもので，いわゆる Summation というほどの意味である．たとえば集中反力があればそれを反力やモーメントとして単に足し合わすことをあらかじめ仮定している．式 (25)～(28) をまとめて，

$$\left.\begin{array}{l}p(x)(w(x)-\alpha-\theta x-\varphi(x))=0,\ p(x)\geqslant 0,\\ w(x)-\alpha-\theta x-\varphi(x)\geqslant 0 \text{ for } x\in(a,b)\\ \displaystyle\int_c^d p(x)\,dx=P,\ \int_c^d p(x)\,x\,dx=M,\\ \qquad\text{and } p(x)=0 \text{ for } x\in(a,b)/(c,d)\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots(29)$$

Signorini の問題と異なる点は原点のたわみ（もちろん，これは未知数）α と回転 θ とが，接触条件の中に入っていることである．剛体の押し込み深さ α および回転 θ が，未知のパラメーターとして含まれる見返りとして，載荷重 P，モーメント M とがはりの反力 $p(x)$ につり合う条件 (28) が接触条件に加えられる．

反力 $p(x)$ は，たわみが滑らかであれば，

$$p(x)=(EIw(x)'')''\quad\cdots\cdots(30)$$

であるから Rigid Punch 問題は Signorini の問題と同様に，以下のような変分式で定義される．すなわち，v を，$v(a)=v'(a)=v(b)=v'(b)=0$，$v(x)-\beta-\delta x-\varphi(x)\geqslant 0$ を満たす任意の関数とすると，

$$\begin{aligned}&\int_a^b EIw''(v-w)''dx\\ &=\int_a^b(EIw'')''(v-\beta-\delta x-\varphi-u+\alpha+\theta x+\varphi)\,dx\\ &\quad+\left(\int_a^b(EIw'')''dx\right)(\beta-\alpha)\\ &\quad+\left(\int_a^b(EIw'')''x\,dx\right)(\delta-\theta)\end{aligned}$$

接触条件 (29) と，反力の式 (30) から，

$$\int_a^b EIw''(v-w)''dx\geqslant P(\beta-\alpha)+M(\delta-\theta)$$

が導かれる．すなわち，はりの Rigid Punch 問題は，

$$(w,\alpha,\theta)\in K:\int_a^b EIw''(v-w)''dx\geqslant P(\beta-\alpha)+M(\delta-\theta),\ \forall(v,\beta,\delta)\in K\cdots\cdots(31)$$

$$K=\{(v,\beta,\delta)\in H_0^2(a,b)\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}:\ v-\beta-\delta x-\varphi\geqq 0 \text{ in } (c,d)\} \quad\cdots\cdots(32)$$

という変分不等式で書かれる．$H_0^2(0,L)$ は前述した $H^2(0,L)$ の部分集合で $v(a)=v'(a)=v(b)=v'(b)$ の境界条件を満たしている．

Signorini の問題でも述べたように，(31) は，w が十分に滑らかであることを前提にして導かれたが，不等式 (31) が意味をもつためには，w は $H^2(a,b)$ に含まれていれば十分である．

さて，$(w,\alpha,\theta)\in K$ を (31) の解とすると，すべての $\psi\in C_0^\infty(a,b)$，$\psi(x)\geqq 0$，$x\in(a,b)$，に対して $(v,\beta,\delta)=(w+\psi,\alpha,\theta)\in K$ となる．これらを (31) に代入すると，広義の意味の微分の定義から，

$$\int_a^b EIw''\psi''dx=\int_a^b (EIw'')''\psi dx\geqq 0$$

この不等式は，$(EIw'')''\in L^2(a,b)$ であれば，

$$(EIw'')''\geqq 0 \text{ a.e. in } (a,b)$$

を意味する．区間 $(c,d)\subset(a,b)$ で φ が定義されているので，φ を，a と b 点で $(\alpha+\varphi)=(\alpha+\varphi)'=0$ を満たすように，(a,b) の区間まで拡張する．もし，$\varphi\in H^2(c,d)$ であれば，拡張した φ で $\alpha+\varphi\in H_0^2(a,b)$ とすることができる．したがって，$(v,\beta,\delta)=(\alpha+\theta x+\varphi,\alpha,\theta)$，$(v,\beta,\delta)=(2w-\alpha-\theta x-\varphi,\alpha,\theta)$ と取ることにより，(31) から，

$$\int_a^b EIw''(w-\alpha-\theta x-\varphi)''dx=\int_a^b (EIw'')''(w-\alpha-\theta x-\varphi)dx=0$$

$(EIw'')''\in L^2(a,b)$ であれば，

$$(EIw'')''(w-\alpha-\theta x-\varphi)=0 \quad \text{almost everywhere in } (a,c)$$

を導く．任意の $\psi_1\in C_0^\infty(a,c)$，$\psi_2\in C_0^\infty(d,b)$ に対して $v=w\pm\psi_1$ in (a,c)，$=w$ in (c,b)，$v=w$ in (a,d)，$=w\pm\psi_2$ in (d,b) と取れるので，$\beta=\alpha$ および $\delta=\theta$ として，

$$\int_a^c EIw''\psi_1''dx=0,\ \int_d^b EIw''\psi_2''dx=0$$

が得られる．すなわち，広義の意味で，

$$(EIw'')''=0 \text{ in } (a,b)/[c,d]$$

が成り立つ．一方，(31) から，

$$\int_a^b EIw''(v-w)''dx=\int_a^c EIw''(v-w)''dx+\int_b^d EIw''(v-w)''dx+\int_d^b EIw''(v-w)''dx\geqq P(\beta-\alpha)+M(\delta-\theta) \quad\cdots\cdots(32)$$

もし $(EIw'')''\in L^2(a,b)$ であれば，$(EIw'')'\in H^1(a,b)$，すなわち，Sobolev の埋蔵定理により $(EIw'')'\in C^0[a,b]$．これを考慮すると，

$$\int_c^d (EIw'')''(v-w)dx\geqq P(\beta-\alpha)+M(\delta-\theta)$$

したがって，$(v,\beta,\delta)=(w\pm\varepsilon,\alpha\pm\varepsilon,\theta)$ および $(v,\beta,\delta)=(w\pm\varepsilon x,\alpha,\theta\pm\varepsilon)$ in (c,d) と取ることによって，つり合いの式

$$\int_c^d (EIw'')''dx=P \text{ および } \int_c^d (EIw'')''xdx=M \quad\cdots\cdots(33)$$

が求まる．以上より，はりの Rigid Punch 問題は，変分不等式 (31) で表わされることがわかる．

変分不等式 (31) の解 w についてつり合いの式 (28) を求める際，$(EIw'')''\in L^2(a,b)$ であると仮定したが，この条件は常に満たされているとは限らない．押し込み剛体が十分に滑らかで，しかも接触が剛体の内部で生ずる場合，$(EIw'')''\in L^2(a,b)$ は現実的であろうが，その他の場合には $(EIw'')'$ が不連続になり得る．この場合，Signorini の問題で考慮したように〖$(EIw'')'$〗の項が式 (33) に加えられる．いずれにせよ，変分不等式の解は一般化したつり合いの式を満たすといえるだろう．

（2） 混合法による変分不等式

塑性ばりなどに応用するため，(31) の変分不等式を混合法で書き直してみよう．これには構成方程式

$$M=EIw'' \quad\cdots\cdots(33)$$

を結果として含む変分式を作る必要がある．これは単純に，

$$\int_a^b\left(\frac{M}{EI}-w''\right)(N-M)dx+\int_a^b M(v-w)''dx\geqq P(\beta-\alpha)+M(\delta-\theta) \quad\cdots\cdots(34)$$

と置くことによって実現される．ここで N は (a,b) 上で定義される任意の関数で，物理的には仮想曲げモーメントである．もし，曲げモーメントに拘束条件を付加しなければ N を任意に取れるので，(34) から $v=w$，$\beta=\alpha$，$\delta=\theta$ とすることによって，

$$M=EIw''$$

が導かれる．次に，この関係を式 (34) の第二項に代入して，式 (31) を得ることができる．一般に変分不等式を閉凸集合上で定義できるので，(M,w,α,θ) に対する許容関数族を

$$K=\{(N,v,\beta,\delta)\in L^2(a,b)\times H_0^2(a,b)\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}:\ \psi_1(x)\leq N(x)\leq\psi_2(x),\ v(x)-\beta-\delta x-\varphi(x)\geqq 0 \text{ in } (a,b)\} \quad\cdots\cdots(35)$$

などと取ることができる．ψ_1 と ψ_2 は適当に与えられた関数である．$\psi_1=-\psi_2$ とすると $|N|\leqq\psi_1$ となるのではりの完全塑性条件を考慮していることになる．不等式 (34) は，さらに，

$$\int_a^b\left(\frac{A(M)}{EI}-w''\right)(N-M)dx$$

$$+\int_a^b M(v-w)''dx \geqq P(\beta-\alpha)$$
$$+M(\delta-\beta) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (36)$$

と書くことができる．ここで演算子Aは単調性

$$(A(M)-A(N))(M-N) \geqq 0$$

を満たす非線形関数で，その一例として $c \in \boldsymbol{R}^+$ と置き，

$$A(M)=M \text{ if } |M| \leqq \psi,$$
$$A(M)=c(M-\psi)+\psi \text{ if } |M| > \psi$$

が考えられる．これははりの塑性硬化を与えた構成方程式に相当する．このように混合法の定式化によって拘束条件を，たわみ w のみならず曲げモーメントなどにも与えることができる．定式化 (34) でたわみに対する許容関数は $H_0^2(a, b)$ に属していることに注意しよう．これは有限要素法で近似する際たわみの補間は C^1 連続でなければ適合しないことを意味する．たわみを C^0 要素で近似するためには，部分積分を (34) に施して，

$$\int_a^b \left\{ \frac{M}{EI}(N-M)+w'(N-M)'-M'(v-w)' \right\}$$
$$\cdot dx \geqq P(\beta-\alpha)+M(\delta-\theta) \cdots\cdots\cdots (34)'$$

$$K=\{(N, v, \beta, \delta) \in H^1(a, b) \times H_0^1(a, b)$$
$$\times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} : \psi_1(x) \leqq N(x) \leqq \psi_2(x),$$
$$v(x)-\beta-\delta x-\varphi(x) \geqq 0 \text{ in } (a, b)\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (35)'$$

たわみの許容族を $H_0^1(a, b)$ に取ったので，はりには点モーメントを荷重として加えることはできない．なぜならばたわみの勾配は区間 (a, b) 上でほとんど至るところでしかその値を定義されないからである．(34) ではたわみを $H_0^2(a, b)$ の中に取ったので Sobolev の埋蔵定理よりたわみの勾配が区間 $[a, b]$ で連続であるといえるのではりに点モーメントを加えようとすれば加えられる．この節でははりには接触力しか働かないと仮定しているので点モーメントを荷重として加えられるか否かの議論は必要ないので (34)′ を Rigid Punch 問題の混合法による定式化とよんでもさしつかえない．

5. はりの2体接触問題

(1) 変位法による変分不等式

ここでは両端が固定されている2本のはりの接触問題を考えよう．それぞれのはりのたわみを $w_1(x)$, $w_2(x)$ とし，載荷重を $f_1(x)$, $f_2(x)$, はりの剛性を EI_1, EI_2 とすると，運動学的な接触拘束条件は，

$$w_1(x) \geqq w_2(x)+\varphi(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (37)$$

となる．$\varphi(x)$ は，2本のはりの距離を示し，一般には定数となる．もし載荷重 f_1 と f_2 が反対向きで，かつそれぞれの値が十分大きいとはりは接触することが可能である．はり1の接触反力を $p_1(x)$，はり2のそれを $p_2(x)$ とすると，つり合いの式は，

$$p_1(x)+p_2(x)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (38)$$

で，さらに，

$$\left.\begin{aligned} &p_1(x)=0 \text{ if } w_1(x) > w_2(x)+\varphi, \\ &p_1(x) \geqq 0 \text{ if } w_1(x)=w_2(x)+\varphi \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (39)$$

という力学条件が満たされる．たわみが滑らかであれば，

$$\left.\begin{aligned} &p_1(x)=(EIw_1''(x))''-f_1(x), \\ &p_2(x)=(EIw_2''(x))''-f_2(x) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (40)$$

を仮定できる．v_1 と v_2 を，拘束条件 $v_1(a)=v_1'(a)=v_1(b)=v_1'(b)=0$, $v_2(a)=v_2'(a)=v_2(b)=v_2'(b)=0$, $v_1(x) \geqq v_2(x)+\varphi(x)$ を満たす任意の関数とすると，

$$\int_a^b \{EI_1w_1''(v_1-w_1)''+EI_2w_2''(v_2-w_2)''\}\,dx$$
$$=\int_a^b \{(EI_1w_1'')''(v_1-w_1)$$
$$+(EI_2w_2'')''(v_2-w_2)\}\,dx$$
$$=\int_a^b \{(p_1(x)+f_1(x))(v_1-w_1)$$
$$+(p_2(x)+f_2(x))(v_2-w_2)\}\,dx$$
$$=\int_a^b \{f_1(v_1-w_1)+f_2(v_2-w_2)\}\,dx$$
$$+\int_a^b \{p_1(v_1-w_1)+p_2(v_2-w_2)\}\,dx$$

条件 (38) と (39) から，

$$p_1(v_1-w_1)+p_2(v_2-w_2)=p_1(v_1-v_2-w_1+w_2)$$
$$=p_1(v_1-v_2-\varphi-w_1+w_2+\varphi) \geqq 0$$

が得られるので，

$$\int_a^b \{EI_1w_1''(v_1-w_1)''+EI_2w_2''(v_2-w_2)''\}\,dx$$
$$\geqq \int_a^b \{f_1(v_1-w_1)+f_2(v_2-w_2)\}\,dx$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (41)$$

という変分不等式が導かれる．

逆に w_1 と w_2 を $(EI_1w_1'')''$, $(EI_2w_2'')'' \in L^2(a, b)$ である十分滑らかな (41) の解とすれば，部分積分により，

$$\int_a^b \{((EI_1w_1'')''-f_1)(v_1-w_1)$$
$$+((EI_2w_2'')''-f_2)(v_2-w_2)\}\,dx \geqq 0$$

関係式 (40) により，

$$\int_a^b \{p_1(v_1-w_1)+p_2(v_2-w_2)\}\,dx \geqq 0 \cdots\cdots (42)$$

v_2 を，$v_2=v_1-w_1+w_2$ とすると，(37) から，$v_2 \leqq v_1-\varphi$ となり，任意の v_1 に対して，$v_1 \geqq v_2+\varphi$ の条件を満たす．したがって，

$$\int_a^b (p_1+p_2)(v_1-w_1)\,dx \geqq 0$$

v_1 は任意だから，

$$p_1(x)+p_2(x)=0$$

が求まる．さらに (42) より，

$$\int_a^b p_1(v_1-v_2-w_1+w_2)\,dx \geqq 0$$

v_1 を，$v_1=v_2+w_1-w_2+\psi$, $\psi(x)\geqq 0$, とすると，$v_1\geqq v_2+w_1-w_2\geqq v_2-\varphi$ となるので，

$$\int_a^b p_1\psi dx \geqq 0 \text{ i.e. } p_1(x)\geqq 0$$

さらに，$v_1=v_2+\varphi$ および $v_1=2(w_1-w_2)-\varphi+v_2\geqq\varphi+v_2$ を取ると，

$$\int_a^b p_1(w_1-w_2-\varphi)\,dx=0$$
$$\text{i.e. } p_1(w_1-w_2-\varphi)=0$$

が得られる．以上より2本のはりの接触問題は変分不等式，

$$(w_1, w_2)\in K: \int_a^b \{EI_1w_1''(v_1-w_1)'' + EI_2w_2''(v_2-w_2)''\}\,dx \geqq \int_a^b \{f_1(v_1-w_1)+f_2(v_2-w_2)\}\,dx$$
$$\text{for } \forall(v_1, v_2)\in K \cdots\cdots\cdots\cdots (42)$$

$$K=\{(v_1, v_2)\in H_0^2(a, b)\times H^2{}_0(a, b): v_1(x)\geqq v_2(x)+\varphi(x) \text{ in } (a, b)\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

に帰着される．

(2) 相反的な変分不等式

2本のはりの接触問題 (42), (43) は，2本のはり上での変分式によって定義されたが，ここでは1本のはり上でのみ問題を定義する．このため，接触力を $p_2(x)$ とするとはり2に対して境界値問題

$$\left.\begin{array}{l} p_2(x)=(EIw_2''(x))''-f_2(x) \\ \text{および}\quad w_2(a)=w_2'(a)=w(b)=w'(b)=0 \end{array}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots (44)$$

が成立することに注目しよう．(44) は $EI_2>0$ である限り w_2 について一意に解かれるのでこの解を f_2 および p_2 の関数で，

$$w_2(x)=G(f_2)(x)+G(p_2)(x)\cdots\cdots\cdots\cdots (45)$$

と書く．演算子 G は境界値問題 (44) の Green 演算子である[7]．反力のつり合い式 (38) によって，$p_2=-p_1$ であるから，

$$w_2(x)=G(f_2)(x)-G(p_1)(x)\cdots\cdots\cdots\cdots (46)$$

運動学的な接触条件 (37) は，これより，

$$w_1(x)\geqq -G(p_1)(x)+(G(f_2)+\varphi)(x)\cdots (47)$$

と書ける．ここでは (44) に現れる微分方程式は線形であるから，Green 演算子 G もまた線形となる事実を使った．すなわち (47) は，

$$(w_1+G(p_1)-\hat{\varphi})(x)\geqq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots (48)$$
$$\hat{\varphi}(x)=G(f_2)(x)+\varphi(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (49)$$

と書ける．以上より接触条件 (39) とともに，すべての条件は，

$$\left.\begin{array}{l} p_1(w_1+G(p_1)-\hat{\varphi})=0,\ p_1\geqq 0, \\ w_1+G(p_1)-\hat{\varphi}\geqq 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (50)$$

に，まとめられる．一方，はり1に対する接触反力 p_1 を使ってつり合いの式を，

$$p_1(x)=(EIw_1''(x))''-f_1(x) \cdots\cdots\cdots\cdots (51)$$

と書けるので，2本のはりの接触問題は (50) と (51) を満たす p_1 と w_1 を求める問題に帰着される．たわみ w_2 は式 (46) から得られるからである．記号を単純にするため，w_1 を w, p_1 を p, f_1 を f と書くことにする．

さて，v を $v(a)=v'(a)=v(b)=v'(b)=0$ を満たす任意の関数，q を $q\geqq 0$ を満たす任意の関数とすると，

$$\int_a^b EIw''(v-w)''dx+\int_a^b (G(p)+w-\hat{\varphi})(q-p)\,dx$$
$$=\int_a^b (EIw'')''(v-w)\,dx + \int_a^b (G(p)+w-\hat{\varphi})(q-p)\,dx$$

条件 (50), (51) より，

$$\geqq \int_a^b (p+f)(v-w)\,dx$$

すなわち，

$$\int_a^b \{EIw''(v-w)''-p(v-w)\}\,dx + \int_a^b (G(p)+w-\hat{\varphi})(q-p)\,dx \geqq \int_a^b f(v-w)\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots (52)$$

が導かれる．一方，w と p を (52) を満たす関数とすると，$q=p$ として，任意の v に対して，

$$\int_a^b \{EIw''(v-w)''-(p+f)(v-w)\}\,dx \geqq 0$$

これは広義の意味で，

$$(EIw'')''-p=f$$

を意味する．次に，$v=w$ とし，$q=p+\psi$, $\psi(x)\geqq 0$, とすると，

$$G(p)+w-\hat{\varphi}\geqq 0 \text{ a.e. in } (a, b)$$

$q=0$ および $q=2p$ と取ることによって，

$$(G(p)+w-\hat{\varphi})p=0 \text{ a.e. in } (a, b)$$

が求められる．

数学的には接触反力 p がたわみの双対空間に属することしかわかっていないので変分不等式 (52) は，

$$\int_a^b EIw''(v-w)''dx-\langle p, v-w\rangle + \langle q-p, G(p)+w-\hat{\varphi}\rangle \geqq \int_a^b f(v-w)\,dx \text{ for } \forall(v, q)\in K \cdots\cdots (53)$$

$$K=\{(v, q)\in H_0^2(a, b)\times H^{-2}(a, b): q\geqq 0 \text{ in } (a, b)\}\cdots\cdots\cdots\cdots (54)$$

と書かれる．ここで $H^{-2}(a, b)$ は $H_0^2(a, b)$ の双対空間で $H_0^2(a, b)$ 上で定義されるすべての有界線形汎関数の集合である．また，$q \geqslant 0$ は，すべての連続二階微分可能で $\varphi(a)=\varphi'(a)=\varphi(b)=\varphi'(b)$ となる関数に対して，

$$\langle q, \varphi \rangle \geqslant 0$$

であることを意味し，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $H^{-2}(a, b)$ と $H_0^2(a, b)$ の“内積”で，もし $q \in L^1(a, b)$ であれば，

$$\langle q, v \rangle = \int_\Omega qv dx, \ \forall v \in H_0^2(a, b)$$

と書くことができる．接触問題では反力としてモーメントが含まれないので厳密ではないが $q \in H^{-2}(a, b)$ は，

$$q(x) = q_0(x) + \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(x_i) \quad \cdots\cdots (55)$$

と書けるだろう．ここに $\delta(x_i)$ は δ- 関数である．

6. Lagrange の乗数法による解法

最も自然な変分不等式の数値解法は，Lagrange の乗数法である．接触問題では，この乗数は接触圧力となるもので，接触が Unilateral であるために，正か負か一方の値のみしか取ることができない．一般に，等式で表現される拘束条件を消去する場合には Lagrange の乗数はなんらの拘束をも受けないが，不等式の拘束条件をゆるめる場合は，同種の拘束を Lagrange の乗数は受けることになる．

この節では，簡単のために，有限次元変分不等式

$$x_0 \in K : (A(x_0) - f)(y - x_0) \geqslant 0 \ \forall y \in K \quad \cdots\cdots (56)$$

$$K = \{y \in \boldsymbol{R}^N : B(y) - g \geqslant 0\} \quad \cdots\cdots (57)$$

を解くことを考えよう．ここで，$g \in \boldsymbol{R}^M$ は与えられたデータ，B は $\boldsymbol{R}^N$ から $\boldsymbol{R}^M$ への，A は $\boldsymbol{R}^N$ から $\boldsymbol{R}^N$ への写像とする．この場合，Lagrange の乗数 p, q を導入して，

$$\left.\begin{aligned} & x_0 \in \boldsymbol{R}^N : (A(x_0) - f) y - p(DB(x_0) y) = 0 \\ & \qquad\qquad \forall y \in \boldsymbol{R}^N \\ & p \in N : (B(x_0) - g)(q - p) \geqslant 0 \ \forall q \in N \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (58)$$

$$N = \{q \in \boldsymbol{R}^M : q \geqslant 0\} \quad \cdots\cdots (59)$$

を解くことになる．もし，

$$p(DB(x_0) y) = (DB^*(x_0) p) y \quad \cdots\cdots (60)$$

と書ければ，(58) の不等式のシステムは，Uzawa の反復方法[8]

$$\left.\begin{aligned} & (\mathrm{i}) \quad p^{(0)} = 0 \text{ に取って，} \\ & (\mathrm{ii}) \quad (x_0^{(t)}, P^{(t)}) \text{ がわかっているとして，} \\ & \qquad A(x_0^{(t+1)}) - f = DB^*(x_0^{(t)}) p^{(t)} \\ & \qquad \text{を解き，} \\ & (\mathrm{iii}) \quad p^{(t+1)} = P_N(p^{(t)} - \rho(B(x_0^{(t+1)}) - g)) \\ & \qquad\qquad = \max(0, p^{(t)} - \rho(B(x_0^{(t+1)}) - g)) \\ & \qquad \text{を求める．} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (61)$$

によって，適当に小さい $\rho > 0$ に対し，解くことができる．もし A が単調連続，B が Lipschitz 連続であれば，十分小さい $\rho > 0$ に対して Uzawa の方法は収束する．もし，写像 A が線形で逆 A^{-1} が存在すれば，(61) の第二段は，

$$(\mathrm{ii})' \quad x_0^{(t+1)} = A^{-1}(f + DB^*(x_0^{(t)}) p^{(t)})$$

となる．

7. 数値計算例

理論の自然な延長として，上で述べた問題のいくつかを，実際に適当な離散化法，すなわち，有限要素法を用いて数値計算を行う．はりの有限要素として，たわみおよびたわみ角まで含めた一階 Hermite 型（3次多項式近似）要素を適用する．離散化したのち，前節で述べた Uzawa の方法で解く．

例題 1

Fig. 1 に示すように，片端が水平な剛体基礎上に固定され，初めの状態が $y = kx^3$ の形状の曲げばりを考える．はりの長さを a とし，はりの水平地盤への射影の長さを a とみなし得るほど，ka^3 に比べて a は大きいものとする（すなわち，曲げばりを直線ばりの理論で考えることができるものと仮定する）．一方の端に P の力を加えた場合，はりの剛性を EI とすると，はりの接触する部分の長さは $c = Pa/(P + 6kEI)$，また自由端と地盤との距離は，$\delta = 36(EIka)^2 ka/(P + 6kEI)^2$ で与えられる．

この古典的な問題を，(12) で表わされるような変分不等式で解いてみよう．(11), (12) は，この問題では，

$$K = \{v : v(0) = v'(0) = 0, \ v(x) + kx^3 \geqslant 0, \ x \in (0, a)\}$$

$$\int_0^a EIw''(v - w)'' dx \geqslant -P(v(a) - w(a)) \quad \forall v \in K$$

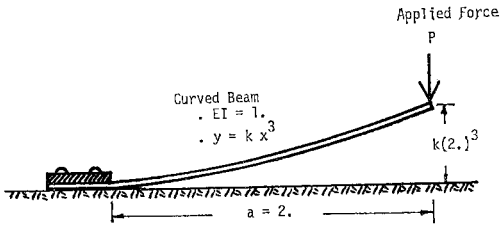

Fig. 1 The Model Problem for Signorini's Problems (EXAMPLE 1)

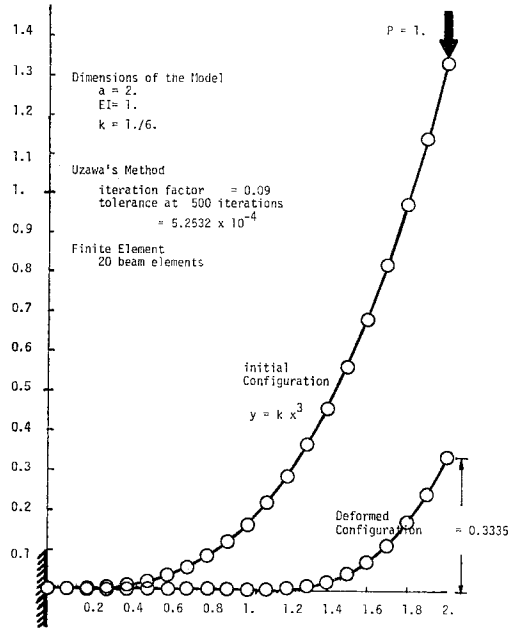

Fig. 2 Numerical Results for EXAMPLE 1 (1)

となる．$EI=1.0$, $k=1/6$, $a=2.0$ のはりを，20 個の有限要素に分割し，(61) に表われる反復係数 $\rho=0.09$ として 500 回反復を繰り返すと，$\sum|p_i^t-p_i^{t-1}|/\sum|p_i^t|\leq 5.2532\times10^{-4}$ と求まる．Uzawa の方法は，反復の初期の段階では一様に収束してゆき，一定の反復誤差がその後しばらく続き，収束の速度はきわめて遅くなる．自由端 ($x=2.0$) におけるたわみは，かなり早い時期に収束をみている．実際に，Uzawa の方法の反復収束速度が急激に落ちるあたりでは，ほとんど，たわみは収束しているといってよい．たわみの形状は反復のかなり早い時期からほぼ一定になっているが，接触面付近では微妙に動く．また，接触面を $c_p=\{x:p(x)>0\}$ とした場合と $c_w=\{x:w(x)+kx^3>0\}$ とした場合では，かなりの差が生じる．また，この種の計算では，零を零とみなすことができないので，$c_p=\{x:p(x)>\varepsilon_p\}$, $c_w=\{x:w(x)+kx^3>\varepsilon_w\}$ とすると，$c_p=(0, 1.2)$, $c_w=(0, 1.1)$ となる．ここでは $\varepsilon_p=\varepsilon_w=0$ とした．したがって，0.1 だけ，接触面に差異が生じることになる．もし，$\varepsilon_w=10^{-3}$ とすると，$c_w=(0, 1.0)$ となる．解析解では，接触面は (0, 1) である．一方，右端の剛体基礎からの浮き上がりは，0.3335 となり，解析解 $\delta=0.33333\cdots$ にほぼ一致する．

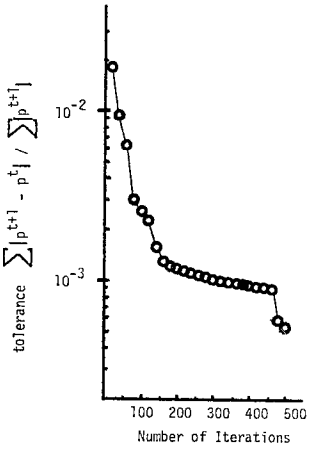

Fig. 3 Numerical Results for EXAMPLE 1 (2)

数値解を **Fig. 2**, Uzawa の方法の収束速度を **Fig. 3** に示す．

例題 2

Fig. 4 に示すような両端固定のはりへ，$y=kx^2$ という形状をもつ剛体をはりの中央に載せた場合，押し込み深さ α を与えてやると，式(31) および (32) の変分不等式は，

$$w\in K(\alpha):\int_a^b EIw''(v-w)''dx\geqslant 0\ \forall v\in K(\alpha)$$

$$K(\alpha)=\{v\in H_0^2(a,b):\ v-\alpha-\varphi\geqslant 0 \text{ a.e. in } (c,d)\}$$

に変化する．ここでは押し込み深さ α が与えられるので，剛体にどれだけの荷重 P を加えたかは未知である．しかしながら，結果的に，解 w が滑らかであるとして，

$$P=\int_c^d (EIw'')''dx$$

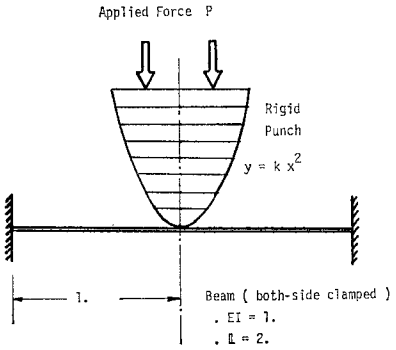

Fig. 4 The Model Problem for Rigid Punch Problems (EXAMPLE 2)

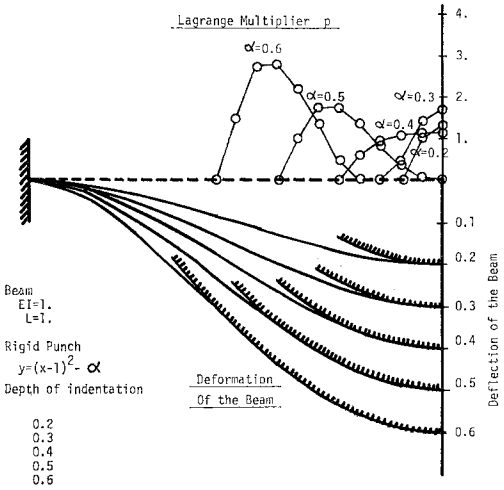

Fig. 5 Numerical Results for EXAMPLE 2

により求めることができる．数値解析では，$EI=1.0$, $k=1.0$, $a=0$, $b=2.0$ として，21 個の有限要素にはりを分割して，拘束条件 $w-\alpha-\varphi \geqslant 0$ を各節点で満たすように制御した．**Fig. 5** に $\alpha=0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ の場合の計算例を示す．正確にどの点ではりは剛体の押し込み下にあるかを数値解析結果から割り出すことは困難であるが，はりの変形形状を求めるには十分である．接触面を $C=\{x : |w(x)-\alpha-\varphi| < \varepsilon\}$, $\varepsilon=\alpha\times10^{-2}$ (i.e. 押し込み深さの 1%) として求めると，$\alpha=0.2$ に対して (0.95, 1.05)，$\alpha=0.3$ に対して (0.90, 1.10)，$\alpha=0.4$ に対して (0.75, 1.25)，$\alpha=0.5$ に対して (0.6, 1.4)，$\alpha=0.6$ に対して (0.45, 1.65) が接触面と考えられる．Uzawa の方法で，$\rho=2.25$ とし，収束を $\sum|p^t-p^{t-1}|/\sum|p^t| < 10^{-3}$ で判定した．

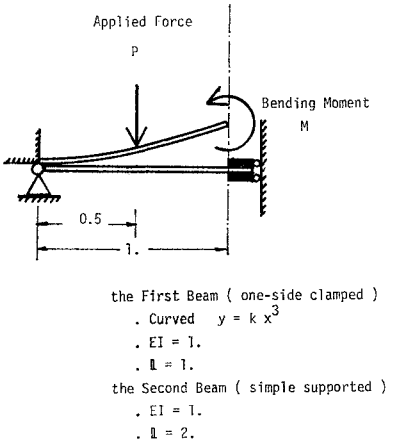

Fig. 6 The Model Problem for Two-Beam Contact Problems (EXAMPLE 3)

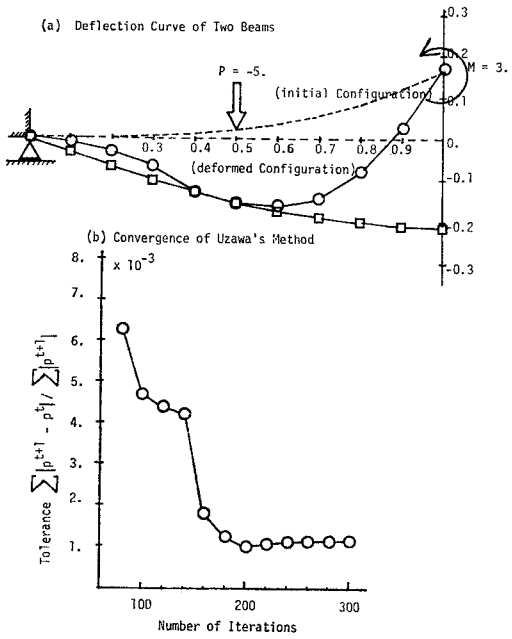

Fig. 7 Numerical Results for EXAMPLE 3

例題 3

Fig. 6 に示すような 2 本のはりの接触問題は，式 (24) で表わすように，$EI_1=EI_2=1.0$ として，

$$\int_0^1 \{w_1''(v_1-w_1)''+w_2''(v_2-w_2)''\}\,dx$$
$$\geqslant P\left(v_1\left(\frac{1}{2}\right)-w_2\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$+M(v_1'(1)-w_1'(1)) \quad \forall(v_1, v_2)\in K$$
$$K=\{(v_1, v_2)\in H^2(0, 1)\times H^2(0, 1) :$$
$$v_1(0)=v_1'(0)=0,\ v_2(0)=0,\ v_2'(1)=0,$$
$$v_1(x)+kx^3-v_2(x)\geqslant 0,\ x\in(0, 1)\}$$

となる．$P=-5$, $M=3$, $k=1/6$ として，10 個の有限要素を用いて計算する．反復係数 ρ を 0.05 に取ると，200 回目の反復で $\sum|p^t-p^{t-1}|/\sum|p^t|=1.0098\times10^{-3}$ を得る．接触面を $\{x : |w_1(x)+kx^3-w_2(x)| < \varepsilon\}$, $\varepsilon=0.01\times|w_2(1)|$ (i.e. はり 2 の最大たわみの 1%) とすると，(4.0, 5.0) の区間で 2 本のはりは接触する．計算結果を **Fig.** に示す．

謝辞：筆者はこの論文を書くにあたって AFOSR F-49620-78-C-0083 の補助を受けていたことを記し感謝の意を表します．

参考文献

1) Fichera, G. : Problemi elastostatici con vincoli unilaterali il problema die Signorini con ambigue condizioni al contorno, Mem. Accad. Naz. Lincei 8 (7), pp. 91～140, 1964.
2) Stampacchia, G. : Formes Bilinéaires Coercitive sur les Ensembles Convexes, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A. 258, pp. 4413～4416, 1964.
3) Lions, J.L. : On Free Surface Problems, in Computational Mechanics, Lecture Notes in Mathematics, No. 461, edited by J.T. Oden, Springer-Verlag, Berlin, pp. 129～148, 1975.
4) Fremond, M. : Utilisation de la Dualité en Elasticité Compléments sur les Energies de Reissner Equililue d'une dalle Elastique Reposant sur un Structure Stratifiée, Annales de l'institute Technique du Batiment et des Travaux Publics, No. 294, Juin 1972.
5) Duvaut, G. : Problems de Contact entre Corps Solides Deformables, in Lecture Notes in Mathematics, No. 503, edited by P. Germain and B. Nayroles, Springer-Verlag, Berlin, pp. 317～327, 1976.
6) Kikuchi, N. : Analysis of Contact Problems using Variational Inequalities, Dissertation, The University of Texas at Austin, 1977.
7) 溝畑 茂：偏微分方程式論，岩波書店，1965.
8) Arrow, K.J., L. Hurwitz and H. Uzawa : Studies of Linear and Nonlinear Programing, Chapter 10, Stanford University Press, 1959.
9) Lions, J.L. : Sur le Contrôle Optimal des Systémes Gouvernés par des Équations aux Dérivées Partielles, Dunod, Gauthier-Villars, Chapter 1, 1968.
10) Ciarlet, P.G. : The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, Chapter 1, 1978.

(1978.10.9・受付)