

平面構造の極限解析に対する骨組置換法

PLANE-FRAMEWORK METHODS FOR LIMIT ANALYSIS OF PLATE

園田 恵一郎*
By Keiichiro SONODA

1. 序論

完全塑性または剛塑性材料からなる連続体の極限解析はつり合い方程式、降伏条件式および関連づけられた塑性流れ法則を同時に満足する応力場および変形速度場を見出す問題になるが、これらの基礎方程式の一部は非線形であるため、実用上、興味ある問題に対して、厳密解を求めるることは非常に困難になる。一方、極限解析法の上、下界定理^{1), 2)}は近似解を求めるに際して非常に有力な武器であり、簡単な問題に対しては、適当な不連続応力場または不連続速度場を仮定することによって、また、比較的複雑な問題に対しては、有限要素法と数理計画手法を利用することによってかなりの成功を収めている^{3)~8)}。電子計算機の発達によってこのような数理計画法の利用は、近年、ますます活発に行われるようになったが、この種の問題は降伏条件式の非線形性に起因した非線形計画法の問題となるため、計算可能な問題の変数や制約条件式の数はおのずと限られたものとなる。したがって、極限解析に対する有限要素法の適用は弾性解析に対するほど容易ではない。

連続体の弾性問題に対して、これを骨組の集合体に置き換え、代数方程式によってこれを解こうとする試みは古くからみられる⁹⁾。この方法は、トラスやラーメンにおける節点力と節点変位の関係が連続体の微小要素の応力とひずみの関係に類似できることに基づいており、深ぼり、長方形板、斜板や厚板などの解析にこの方法が適用された例が報告されている^{9)~15)}。

近年、有限要素法の発展につれて、弾性解析に対する骨組置換法の存在価値が薄らぎ、その影を潜めてしまった感が強い。しかしながら、弾性問題におけるように場の方程式が基本的に連続的である問題に対しては、離散的な構造へ置換する方法の利点は多いとはいえないが、

塑性崩壊のように本質的に不連続な速度場や応力場を許容する問題に対しては、この方法はまだ捨てがたい魅力をもっている（たとえば、静的許容な不連続応力場をトラス相似によって見出す方法の提案¹⁶⁾は一つの現れであろう）。

以上のような観点から、本研究は連続体の極限解析に対する骨組置換法の適用性についての基礎的研究を行ったものである。

弾性解析と極限解析の相違は応力-ひずみ関係にある。前者は Hooke の法則で与えられるが、後者は応力増分とひずみ増分の関係において、降伏条件と関連づけられた塑性流れ法則に支配される。したがって、極限解析に対する骨組置換法においては、連続体要素の降伏曲面に置換骨組の塑性崩壊曲面をいかに近似させることができるかが要点になる。完全塑性または剛塑性材料からなる骨組を考えれば、この骨組の極限強度は各部材の強度と骨組形状のみに依存し、応力履歴には無関係になる。したがって、連続体の微小要素の降伏曲面を簡単な骨組の塑性崩壊曲面で近似できるならば、求めようとする連続体の極限強度は、それと相似な形状の骨組集合体の極限強度で近似でき、各部材の降伏条件を線形式で与えれば、この極限強度の決定は線形計画の問題になる。また、このような骨組置換法が一般的に可能になるならば、異種材料からなる合成構造のように、降伏条件式それ自体が確立されていない構造の極限解析も、それぞれの材料を強度および形状の相違する骨組に置き換え、それらを互いに結合した構造として、直接実行できるという利点が期待できる。

本研究は、まず最初に、平面応力状態におけるトラスカの降伏曲面、最大主応力説による降伏曲面、およびミセスの降伏曲面に類似する塑性崩壊曲面をもつトラス、ラーメン、およびトラス・ラーメンの形状と部材強度を選定する。この問題は、応力テンソルに対応する組み合わせ節点力を受けた骨組の極限強度を求め、各種の形状

* 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科

と強度をもつ骨組の塑性崩壊曲面を試算し、それらの中から最適なものを選び出すことである。次に、こうして決定した骨組の集合体に対象とする連続体を置換して終局強度を決定する方法を示す。

各部材は剛塑性または完全塑性体であるので、極限解析法の上、下界定理に従えば、この決定法は線形計画法の手法によって展開でき、応用例として、曲げと軸力を受けるはり、曲げとせん断を受けるはり、および等分布荷重を受ける片持深ばかりの終局強度解析を示した。

次に、平面応力状態における無筋コンクリートの実験破壊曲面に相似する塑性崩壊曲面をもつ骨組の形状と部材強度を考える。周知のごとく、2軸応力下のコンクリートの破壊は必ずしも塑性変形を伴う破壊ではなく、特に引張領域を含む場合には脆性破壊に支配されるといわれている。しかしながら、局所的なひびわれの進行に基づくコンクリート構造全体の破壊の追跡は非常に困難であり、今日まだ十分信頼できる解析法が見出されていない。ところで、コンクリートを剛塑性または完全塑性体とみなし、その降伏強度は破壊強度を適当な率で低減した値で仮定し、通常の極限解析法に基づいてその終局強度を決定しようとする試みは古くから行われている¹⁷⁾。適当な鉄筋で補強されたコンクリート構造では、変形は鉄筋の塑性変形能によって支配されるので、このような方法は十分信頼できることはよく知られているが、いくつかの無筋コンクリート構造においては、このような終局強度の決定法がなお合理的であるとの報告^{18)~21)}は注目に値する。本研究では、コンクリート部を完全塑性体の骨組で、また鉄筋を完全塑性体の線要素で置き換え、それらを結合させることによって、鉄筋コンクリート構造をモデル化し、極限解析手法を利用してその終局強度を決定する方法を提案した。そして、この方法による解析例として、軸圧縮と曲げを受けるはりおよび曲げとせん断力を受けるはりの問題を取り上げた。

2. トラス相似

図-1 に示すような平面応力状態にある微小要素((a) 図) の降伏条件式を

$$F(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})=0 \quad (1)$$

で表わし、置換したトラス ((b) 図) の塑性崩壊条件式を

$$\bar{F}(P_x, P_y, P_{xy})=0 \quad (2)$$

で表わす。 P_x, P_y, P_{xy} はトラスの節点に作用する力であり、 $P_x=\sigma_x a/2, P_y=\sigma_y a/2, P_{xy}=\tau_{xy} a/2$ の関係がある。

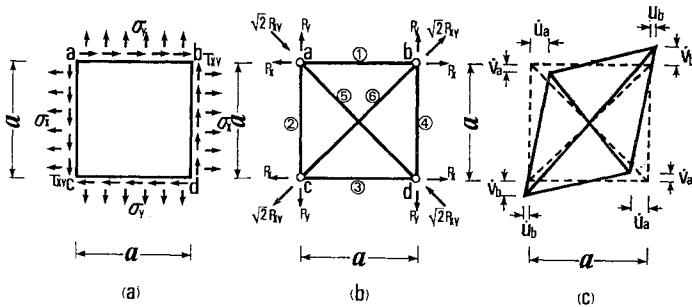


図-1 ト ラス 相似

れば、連続体要素 abcd とトラス要素 abcd は等価な応力状態にあるといえる。それゆえ、式(1)の曲面にできるだけ相似する式(2)の曲面をもつトラスの形状および各部材の強度を求めることがここでの問題になる。

いま、トラスの各部材は完全塑性または剛塑性材料からなると仮定し、各部材の降伏強度を $N_{0i}, i=1, 2, \dots, 6$ とする。等方・等質材料を対象とすれば、原降伏閑数の対称性より、

$$\left. \begin{aligned} N_{01} &= N_{03} = N_1 \\ N_{02} &= N_{04} = N_1 \\ N_{05} &= N_2, \quad N_{06} = N_2 \end{aligned} \right\} \dots \quad (3)$$

とおける。さて、極限解析法の Static Theoremに基づけば、このトラスの塑性崩壊曲面は次の線形計画の問題の解 (P_x, P_y, P_{xy}) によって与えられる。

$$\text{Maximize } \lambda P_x + \mu P_y + \nu P_{xy} \quad (4)$$

subjected to

$$s_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s_5 = P_x - P_{xy} \quad (5)$$

$$s_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} s_5 = P_y - P_{xy} \quad (6)$$

$$s_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s_6 = P_x + P_{xy} \quad (7)$$

$$s_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} s_6 = P_y + P_{xy} \quad (8)$$

$$s_1 = s_3, \quad s_2 = s_4 \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} |s_i| &\leq N_1, \quad |s_2| \leq N_1 \\ |s_5| &\leq N_2, \quad |s_6| \leq N_2 \end{aligned} \right\} \dots \quad (10)$$

ここに、 $s_i, i=1, 2, \dots, 6$ は部材力、 λ, μ, ν は任意の定数である。この問題の解の集合、すなわち、限界曲面； $\bar{F}(P_x, P_y, P_{xy})=0$ 、は以下のように決定できる。

式(5),(6) および (7) より、

$$s_1 - s_2 = P_x - P_y \quad (11)$$

$$s_6 - s_5 = 2\sqrt{2} P_{xy} \quad (12)$$

いま、 $\alpha = N_2/N_1, P_{xy} = \zeta \alpha N_1/\sqrt{2}, -1 \leq \zeta \leq 1$ とおけば、式(12),(10) および (7) より、

$$\left. \begin{aligned} |P_{xy}| &\leq \frac{\alpha}{\sqrt{2}} N_1 \\ P_x &= -\frac{\zeta \alpha}{\sqrt{2}} N_1 + s_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} s_6 \end{aligned} \right\} \dots \quad (13)$$

また、式(10)より、

$$-\left\{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(1+\zeta)\right\}N_1 \\ \leq P_x \leq \left\{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(1-\zeta)\right\}N_1 \dots \dots \dots (14)$$

同様に、式(5)より、

$$-\left\{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(1 - \zeta)\right\}N_1 \\ \leq P_x \leq \left\{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(1 + \zeta)\right\}N_1 \dots \dots \dots \quad (15)$$

限界曲面は平面; $P_{xy}=0$, に関して対称であるから,
 $\zeta \geq 0$ の領域のみを考慮すれば, 式(14)と(15)から次式が得られる.

$$-\left\{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(1 - \zeta)\right\}N_1 \\ \leq P_x \leq \left\{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(1 - \zeta)\right\}N_1 \dots \dots \dots \quad (16)$$

P_y についてもまったく同様に誘導すれば、

$$-\left\{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(1 - \zeta)\right\}N_1 \\ \leq P_y \leq \left\{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(1 - \zeta)\right\}N_1 \dots \dots \dots (17)$$

一方、式(10)と(11)より、

$$N_1 = N_0, \quad N_2 = \alpha N_0 \quad \left. \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (19)$$

とおけば、式(16), (17) および (18) を満足する曲面は、
 $\alpha = 1/\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3/\sqrt{2}$ に対して、図-2 のようになり、トレスカの降伏曲面に類似した曲面が得られることがわかる。しかしながら、これらの曲面は座標 (P_x, P_y) の第 2, 第 4 象限では、トレスカの降伏曲面を上回っているので、これらをさらに改良するために、水平、垂直材と斜材の降伏強度の間に次の相間関係を導入する。

$$|s_1 - s_2| + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |s_6 - s_5| \leq 2 N_0 \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

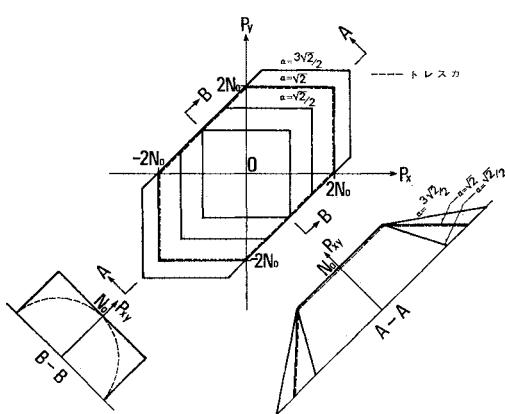


図-2 ト拉斯相似における塑性崩壊曲面

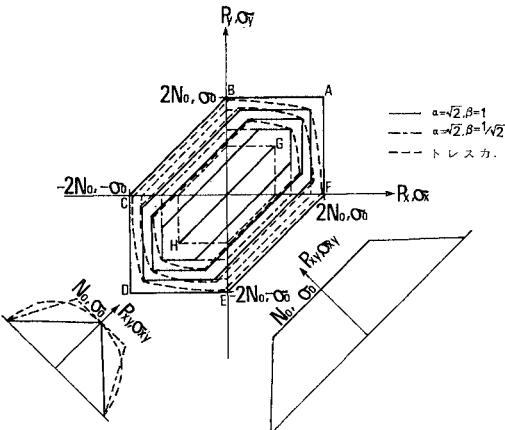


図-3 ト拉斯相似における塑性崩壊曲面と
トレスカの降伏曲面の比較

ここに β は正の定数である.

式(11)と(12)を上式に代入すれば、

式(21)は新たな制約条件式であり、これを付加することによって図-2の曲面はカットされ、 $\alpha = \sqrt{2}$ の場合には図-3に示すように、 $\beta = 1$ でトレスカの降伏曲面に内接する曲面(下界曲面)が得られ、 $\beta = 1/\sqrt{2}$ でそれに十分近似する曲面が得られる。

次に降伏曲面に関連づけられる塑性ひずみ速度場とそれに伴う塑性逸散エネルギー速度について考える。連続体要素の塑性ひずみ速度場 ($\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\tau}_{xy}$) と 図-1(c) に示す置換したトラスの崩壊時の速度場 ($\dot{u}_a, \dot{v}_a, \dot{u}_b, \dot{v}_b$) を対応させれば、それぞれの逸散エネルギー速度は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{D} &= a^2(\sigma_x \dot{\varepsilon}_x + \sigma_y \dot{\varepsilon}_y + \tau_{xy} \dot{\gamma}_{xy}) \\ \dot{D}' &= 2P_x \dot{\delta}_x + 2P_y \dot{\delta}_y + 4P_{xy} \dot{\delta}_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

ここに、

$$\dot{\delta}_x = \dot{u}_b - \dot{u}_a, \quad \dot{\delta}_y = \dot{v}_b - \dot{v}_a$$

$$\dot{\delta}_{xy} = (\dot{u}_a + \dot{u}_b + \dot{v}_a + \dot{v}_b)/2$$

前に述べた関係 ; $P_x = \sigma_x a/2$, $P_y = \sigma_y a/2$, $P_{xy} = \tau_{xy} a/2$, を上式に代入すれば, 次の関係

$$\dot{\delta}_x/a = \dot{\varepsilon}_x, \quad \dot{\delta}_y/a = \dot{\varepsilon}_y, \quad 2\dot{\delta}_{xy}/a = \dot{\gamma}_{xy} \dots \dots \dots \quad (23)$$

があれば、 $\dot{D} = \dot{D}'$ が成立し、したがって、 $(\dot{\delta}_x, \dot{\delta}_y, 2\dot{\delta}_{xy})$ が置換したトラスの塑性ひずみ速度になることがわかる。

Drucker の仮説 (Drucker's Postulate)²²⁾ により、連続体要素の塑性ひずみ速度は、式(1)を用いて、

$$\dot{\varepsilon}_x = d\mu \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \quad \dot{\varepsilon}_y = d\mu \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \quad \dot{\tau}_{xy} = d\mu \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \quad \dots \quad (24)$$

となり、置換トラスの塑性ひずみ速度は、式(2)を用いて、

からも、 $\beta=1$ の場合の置換トラスの塑性崩壊曲面はトレスカの降伏曲面の下界になることがわかる。また、同じ塑性ひずみ速度における \dot{D} と \dot{D}' の差を調べると、これは $|\dot{\delta}_x - \dot{\delta}_y|/a = 1$ の平面内で最大になり、すべての塑性ひずみ速度場における \dot{D} と \dot{D}' の比は次の範囲にあることがわかる。

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{\dot{D}'}{\dot{D}} \leq 1 \dots \dots \dots \quad (35)$$

したがって、この場合の置換トラスの塑性崩壊曲面は最大誤差 -29% をもつといえる。

次に、 $\beta=0$ の場合、すなわち、式(21)の付加条件を考慮しない場合に対して、前述したのと同様な方法により \dot{D} と \dot{D}' の比を計算すれば、

$$0.829 \leq \frac{\dot{D}'}{\dot{D}} \leq \sqrt{2} \quad \dots \dots \dots \quad (36)$$

さらに、 $\beta=1/\sqrt{2}$ の場合(図-4参照)についても、同様に計算すれば、

$$0.829 \leq \frac{\dot{D}'}{\dot{D}} \leq 1.118 \quad \dots \dots \dots \quad (37)$$

を得、最大誤差は +12% および -17% になり、上に述べた 3 者の中では、このト拉斯が最も近似度のよい塑性崩壊曲面を与えていることがわかる。

3. ラーメン相似

連続体要素を図-5に示すようなラーメンの集合によって近似することを考える。各部材の降伏に対して軸力とせん断力の相互作用があるとし、次の条件を導入する。

ここに、 s_i, t_i は i 部材の軸力およびせん断力、 N_0 は降伏軸力、 α は降伏軸力と降伏せん断力の比である。前節同様、原材料は等方・等質体であるとすれば、対称性の条件より、独立なつり合い条件式は、

$$\left. \begin{array}{l} s_1 + t_2 = P_x - P_{xy}, \quad s_2 - t_1 = P_y - P_{xy} \\ s_3 - t_2 = P_x + P_{xy}, \quad s_2 + t_3 = P_y + P_{xy} \\ m_{11} + m_{21} = at_1, \quad m_{12} + m_{22} = at_2 \\ s_1 = s_3, \quad s_2 = s_4, \quad t_1 = t_3, \quad t_2 = t_4 \\ m_{11} = -m_{12} = m_{23} = -m_{24} \\ m_{22} = -m_{13} = m_{14} = -m_{21} \end{array} \right\} \dots\dots (39)$$

ところで、連続体要素に作用する偶応力 (Coupled Stresses) の降伏条件に与える影響を無視できるならば、ラーメン相似における材端モーメント、 $m_{1j}, m_{2j}, j=1, 2, 3, 4$ は部材の降伏に無関係で、単に、反力として取扱うことができ、それゆえ、与えられたせん断力、 $t_1 \sim t_4$ に対して、これらのモーメントは自己つり合いモーメントとして自由に選ぶことができる。したがって、図-5 のラーメンの塑性崩壊曲面、 $\bar{F}(P_x, P_y, P_{xy}) = 0$

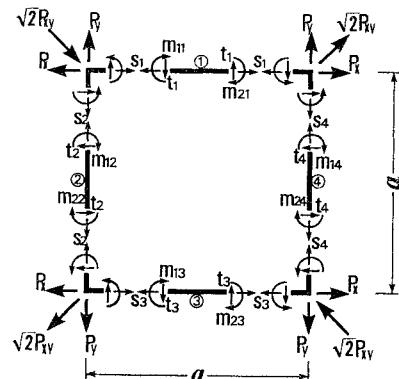


図-5 ラーメン相似度

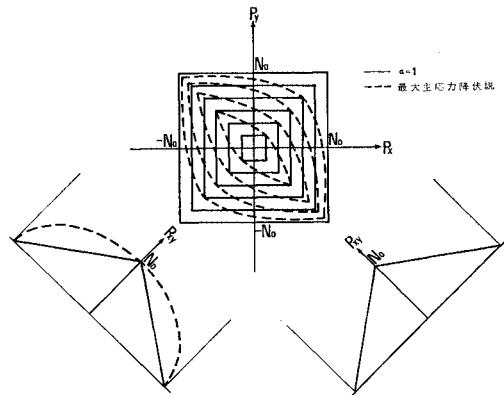


図-6 ラーメン相似による塑性崩壊曲面と最大主応力降伏説の比較

の決定に際しては、節点モーメントに関するつり合い条件は取除かれ、次の線形計画の問題が得られる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maximize } \lambda P_x + \mu P_y + \nu P_{xy} \\ \text{subjected to} \\ s_1 + t_2 = P_x - P_{xy}, \quad s_2 - t_1 = P_y - P_{xy} \\ s_1 - t_2 = P_x + P_{xy}, \quad s_2 + t_1 = P_y + P_{xy} \\ |s_1| + \alpha |t_1| \leq N_0, \quad |s_2| + \alpha |t_2| \leq N_0 \end{array} \right\} \dots\dots(40)$$

ここに, λ , μ , ν は任意の定数である. 式 (40) の問題は容易に解くことができ, 次式の解を得る.

$$\left. \begin{array}{l} |P_x| + \alpha |P_{xy}| = N_0 \\ |P_y| + \alpha |P_{xy}| = N_0 \end{array} \right\} \dots \quad (41)$$

$\alpha=1$ とおいた場合の上式が描く曲面は 図-6 のようになり、 $N_0=\sigma_0 a/2$ とおけば、このラーメン相似による塑性崩壊曲面は最大主応力説による降伏曲面の下界近似になっていることがわかる。

4. ト拉斯・ラーメン相似

図-7に示すトラス・ラーメンによる相似を考える。前節のラーメン相似の場合と同様、部材の降伏に対して、次の相関関係を考慮する。

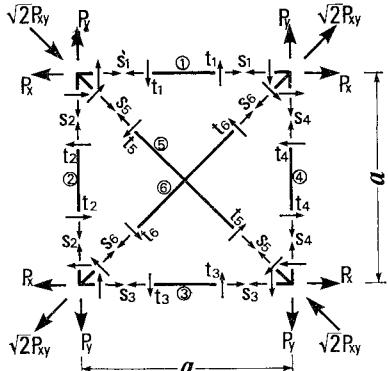


図-1 ト拉斯・ラーメン相似

水平、垂直材に対しては、

$$|s_i| + \alpha |t_i| = N_0, \quad i=1, 2, 3, 4$$

斜材に対しては、

$$|s_i| + \alpha |t_i| = \sqrt{2} N_0, \quad i=5, 6$$

ここに、 N_0 と $\sqrt{2}N_0$ は、それぞれの降伏軸力。さらに、トラス相似と同様、水平、垂直材の降伏軸力に関する次の相関関数を導入する。

$$|s_1 - s_2| + \frac{1}{\sqrt{2}} |s_5 - s_6| = r N_0 \quad \dots \dots \dots \quad (43)$$

ここに、 r は、正の定数。前節と同様の理由により、材端モーメントをつり合い条件式の中から取除けば、ここでのトラス・ラーメンの塑性崩壊曲面、 $\bar{F}(P_x, P_y, P_{xy}) = 0$ の決定は次の線形計画の問題になる。

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } \lambda P_x + \mu P_y + \nu P_{xy} \\
 & \text{subjected to} \\
 & s_1 + t_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(s_5 + t_5) = P_x - P_{xy} \\
 & s_2 - t_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(s_5 - t_5) = P_y - P_{xy} \\
 & s_1 - t_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(s_6 - t_6) = P_x + P_{xy} \\
 & s_2 + t_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(s_6 + t_6) = P_y + P_{xy} \\
 & |s_1| + \alpha |t_1| \leq N_0, \quad |s_2| + \alpha |t_2| \leq N_0 \\
 & |s_1 - s_2| + \frac{1}{\sqrt{2}}|s_5 - s_6| = \gamma N_0
 \end{aligned} \tag{44}$$

ここに、 λ , μ , ν は、任意の定数である。 α および r の値を種々変化させ、上の問題の解を数値計算により調べた結果、 $\alpha=20/3$, $r=3.2$ とおいたときの塑性限界曲面は図-8 に示すような曲面となり、 $N_0 = \sigma_0 a/4$ とすれば、この曲面はミセスの降伏曲面に良好な近似となることがわかる。

5. コンクリート体に対するブーストドーラーメン相似

2軸圧縮・引張応力下でのコンクリートの破壊条件の

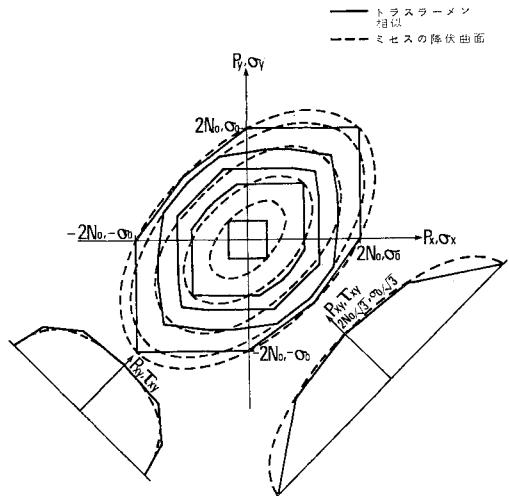


図-8 トラス・ラーメン相似による塑性崩壊曲面と
ミセスの降伏曲面の比較

研究は、McHenry と Karmi²⁴⁾, Weigler と Becker²⁵⁾ そして Kupfer と Gerstle²⁶⁾ らによって行われており、これらの研究成果によれば、破壊条件はコンクリートの品質によって影響されるが、単純圧縮強度で除して無次元化した主応力面での破壊曲線は、2軸圧縮領域では2次式で、引張を含む領域では直線によって十分近似できるといわれている。したがって、ここでは単純引張強度は単純圧縮強度の 1/12 と仮定し、Kupfer と Gerstle²⁶⁾による次の提案式によって破壊曲線を表わすこととする。

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \geq \sigma_2 > 0 \text{ では,} \\ \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{cb}} + \frac{\sigma_2}{\sigma_{cb}} \right)^2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_{cb}} - 3.65 \frac{\sigma_2}{\sigma_{cb}} = 0 \\ \sigma_2 \geq \sigma_1 \geq 0 \text{ では,} \\ \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{cb}} + \frac{\sigma_2}{\sigma_{cb}} \right)^2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_{cb}} - 3.65 \frac{\sigma_1}{\sigma_{cb}} = 0 \\ \sigma_1 \geq 0 \text{ かつ } \sigma_2 < 0 \text{ では,} \\ 0.8 \frac{\sigma_1}{\sigma_{cb}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{tb}} = 1 \\ \sigma_2 \geq 0 \text{ かつ } \sigma_1 < 0 \text{ では,} \\ 0.8 \frac{\sigma_2}{\sigma_{cb}} - \frac{\sigma_1}{\sigma_{tb}} = 1 \\ \sigma_1 < 0 \text{ かつ } \sigma_2 < 0 \text{ では,} \\ \sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_{tb} \end{array} \right\} \dots\dots (45)$$

ここに、 σ_{cb} は単純圧縮強度、 σ_{tb} は単純引張強度で、 $\sigma_{tb} = \sigma_{cb}/12$ と仮定し、圧縮を正符号にとっている。次に、原材料は等方性であるとし、式(45)で表わせる主応力面での破壊条件を一般的な応力空間 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ での条件に変換すれば、図-9 の曲面が得られる。

さて、図-9の破壊曲面に相似する塑性崩壊曲面が得られるような骨組を調べよう。若干の試算の結果、図-10に示すブレースドラーメンによる相似を考える。す

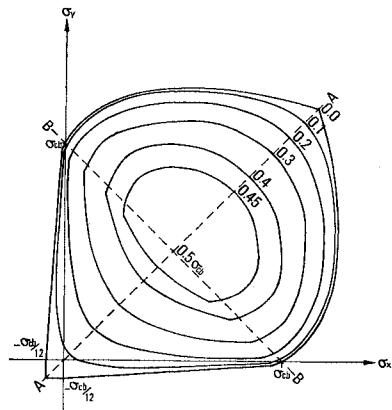


図-9 Kupfer の提案式に基づくコンクリートの破壊曲面

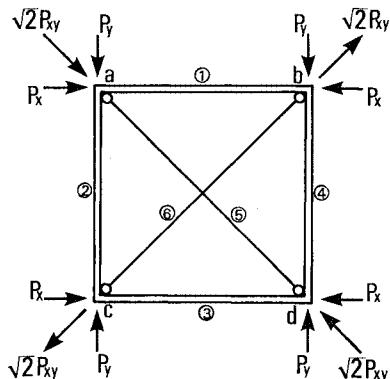


図-10 ブレースドラーメン相似

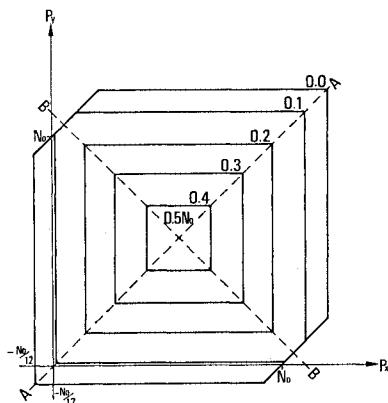


図-11 ブーストラン相似における塑性崩壊曲面

なわち、斜材は軸力のみを受けるとして塑性条件を次式で与える。

ここに, s は軸力, N_0 は基準部材強度を示す. 水平, 垂直材は曲げと軸力を受けるとし, 塑性条件として次式を採用する.

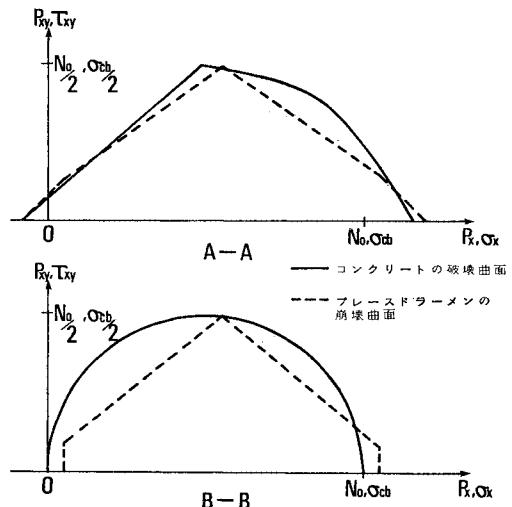


図-12 コンクリートの破壊曲面とプレースドラー・メンの塑性崩壊曲面の比較(図-9 および 図-11 を参照)

ここに, t はせん断力であり, 曲げモーメントは塑性条件には寄与せず, 反力として取扱われている. 式 (46), および (47) を制約不等式とした塑性崩壊曲面, $\bar{F}(P_x, P_y, P_{xy})=0$ の決定は式 (44) と同様な線形計画の問題となる. いま, 基準部材強度を

にとれば、この問題の解は 図-11 に示す曲面を与える、図-12 の比較が示すように、これは 図-9 で与えたコンクリートの破壊曲面に十分近似していることがわかる。

6. 骨組相似法による平板の極限解析

対象とする平板構造を微小な骨組の集合体に置換して極限解析する方法を考える。図-13は図-1のトラスの集合によって置換された平板の一部を表わすものとする。平板の端部の一部は荷重(σT_x , σT_y)を受けており、また端部の他の一部は変位が拘束されているとする。平板の内部では、隣接するトラスが結合されており、それ

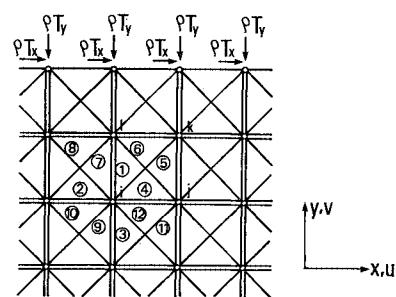


図-13 トラス相似

ゆえ、水平および垂直材は元のトラスの2倍の強度をもった部材として働く。

最初に、極限解析法の Static Theorem により、終局荷重係数 ρ を決定する問題を考える。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maximize } \rho \\ \text{Subjected to} \\ \quad Ax + \rho B P = 0 \\ \quad Dx + N_0 E \leq 0 \end{array} \right\} \dots \quad (49)$$

ここに、 x は部材力、 P は、各節点での作用荷重 (T_x , T_y) を表わす行列で、最初の制約条件式は各節点におけるつり合い方程式を、第 2 番目は部材の降伏条件を表わす。図-13 の節点 i についてこれらの制約条件式を示せば、

$$\left. \begin{array}{l} s_4 - s_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(s_5 + s_{12} - s_9 - s_8) = 0 \\ s_1 - s_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}(s_5 - s_{12} - s_9 + s_8) = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

$$\left. \begin{array}{l} |s_i| \leq 2N_0, \quad i=1, 2, 3, 4 \\ |s_i| \leq \sqrt{2}N_0, \quad i=5, 6, \dots, 12 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (51.1)$$

$$\left. \begin{aligned} |s_1 - s_2| + \sqrt{2} \beta |s_7 - s_8| &\leq 4 N_0 \\ |s_2 - s_3| + \sqrt{2} \beta |s_9 - s_{10}| &\leq 4 N_0 \\ |s_3 - s_4| + \sqrt{2} \beta |s_{11} - s_{12}| &\leq 4 N_0 \\ |s_1 - s_4| + \sqrt{2} \beta |s_5 - s_6| &\leq 4 N_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (51.2)$$

となる。標準形の線形計画の問題では、変数は非負として取扱われる所以、次の変数変換を行う。

ここに、 δ は、移行率であり、平板の端部の水平、垂直材では $\delta=1.0$ 、中間部のそれらでは $\delta=2.0$ 、斜材では $\delta=\sqrt{2}$ に取られる。さらに、不必要的制約条件式を削除し、計算の効率を高めるために、まず最初に、式(51.2)に相当する制約条件式を無視し、式(50)と(51.1)に相当する制約条件だけをもつ次の線形計画の問題を解く。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maximize } \rho \\ \text{subjected to} \\ A\bar{x} + \rho B P = N_0 C \\ 0 \leq \bar{x} \leq N_0 R \end{array} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

ここに、 \bar{x} は非負の変数； \bar{s}_q , $q=1, 2, \dots$ で、 C , R は移行率 δ に関する列マトリックスである。式(53)の解は、シンプソン法にて求めることができ、得られた解を式(51.2)に相当する制約条件式に代入し、満足しない式のみを新たな制約条件式として付加する。こうして制約条件のみが追加された問題の解は、双対シンプソン法にて容易に計算でき、さらに、得られた解を再度、式(51.2)に代入し、満足しない式を制約条件式として追加し、同様の計算を必要なすべての制約条件を満足するまで繰返すならば、式(49)の解が得られ、そのときの ρ の値が求めるべき終局荷重係数になる。

次に、極限解析法の Kinematic Theorem により、終

局状態における変位速度場の決定の問題を考える。図-13 の骨組 $ijkl$ の各部材の変形速度は、各節点における x 方向の速度を u , y 方向の速度を v とすれば、

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\delta}_1 = v_l - v_i \\ \dot{\delta}_4 = u_j - u_i \\ \dot{\delta}_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(u_k + v_k - u_i - v_i) \\ \dot{\delta}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_j - v_j - u_l + v_l) \end{array} \right\} \dots \quad (54)$$

一方、塑性流れ法則より、

$$\left. \begin{aligned} \hat{\delta}_1 &= \hat{\lambda}_1^+ - \hat{\lambda}_1^- + \hat{\lambda}_{14}^+ - \hat{\lambda}_{14}^- + \hat{\lambda}_{56}^+ - \hat{\lambda}_{56}^- \\ \hat{\delta}_4 &= \hat{\lambda}_4^+ - \hat{\lambda}_4^- - \hat{\lambda}_{14}^+ + \hat{\lambda}_{14}^- - \hat{\lambda}_{56}^+ - \hat{\lambda}_{56}^- \\ \hat{\delta}_5 &= \hat{\lambda}_5^+ - \hat{\lambda}_5^- + \sqrt{2} \beta (\hat{\lambda}_{14}^+ + \hat{\lambda}_{14}^- - \hat{\lambda}_{56}^+ - \hat{\lambda}_{56}^-) \\ \hat{\delta}_6 &= \hat{\lambda}_6^+ - \hat{\lambda}_6^- - \sqrt{2} \beta (\hat{\lambda}_{14}^+ + \hat{\lambda}_{14}^- - \hat{\lambda}_{56}^+ - \hat{\lambda}_{56}^-) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

ここに, $\dot{\nu}$ は零または正の変数であり, 単一添字のものは, 式 (51.1), 2重添字のものは式 (51.2) の降伏条件式に対応する塑性流れ係数を与える. したがって, これらの部材における逸散エネルギー速度は,

$$\begin{aligned} \dot{D}_{ijkl} = & 2N_0 \left[\dot{\lambda}_1^+ + \dot{\lambda}_1^- + \dot{\lambda}_4^+ + \dot{\lambda}_4^- \right. \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{\lambda}_5^+ + \dot{\lambda}_5^- + \dot{\lambda}_6^+ + \dot{\lambda}_6^-) \\ & \left. + 2(\dot{\lambda}_{14}^+ + \dot{\lambda}_{14}^- + \dot{\lambda}_{56}^+ + \dot{\lambda}_{56}^-) \right] \dots\dots (56) \end{aligned}$$

になる。さて、変位が拘束された境界点を除いたすべての節点の変位速度成分によって各部材の変形速度を式(54)と同様に表わせば、

ここに、 $\dot{\delta}$ は部材の変形速度、 \dot{u} は節点変位速度を表わす列マトリックスである。また、式(55)と(56)も全部材についてマトリックス形式で表わせば、

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\delta} = L\dot{\lambda} \\ \dot{D} = 2N_0Z\dot{\lambda} \end{array} \right\} \dots \quad (58)$$

ここに、 λ は全塑性流れ係数を表わす列マトリックスである。式(57)を小行列に分割し、

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} \right] \dot{u} \\ \dot{u} &= S_1^{-1} \dot{\delta}_1\end{aligned}\right\} \dots \quad (59)$$

ただし、 S_1 は特異でない正方行列、 \bar{u} を消去すれば、次の変形適合条件式が得られる。

$$[\mathbf{S}_2 \mathbf{S}_1^{-1} - \mathbf{I}] \dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{0} \quad \dots \dots \dots \quad (60)$$

ここに、 I は、単位マトリックスを表わす。したがって、式(58)および(60)を用い、極限解析法の Kinematic Theorem により、終局荷重係数 ρ を求める問題は、

$$\left. \begin{array}{l} \text{Minimize } \rho = 2 N_0 \mathbf{Z} \lambda \\ \text{subjected to} \\ \mathbf{P}^T \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{L} \lambda = 1.0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (61)$$

$$\begin{aligned} & [S_2 S_1^{-1} - I] \cdot L \lambda = 0 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad \left. \right\}$$

ここに、最初の制約条件式は、作用荷重による仕事を単位においてることを示す。上式は線形計画の問題であり、この解より、式(58)および(59)を用い、終局状態での変位速度場が決定できる。

以上、トラス相似の場合の終局荷重の決定法を述べたが、ラーメン相似、トラス・ラーメン相似やプレースドラーメン相似の場合の終局荷重の決定法も基本的に同じである。

7. 应用例

(1) 塑性崩壊に対する矩形断面ばかりの軸力、曲げモーメントおよびせん断力の相関曲線

ここでは、トレスカの降伏条件を満足する均質材料からなる矩形断面ばかりを対象とする。最初にこのはりが曲げモーメントと軸力を受ける場合の相関曲線の決定問題を考える。この問題の解は簡単であり、周知のごとく次式で与えられる²⁾。

$$\frac{\bar{M}}{\bar{M}_0} + \left(\frac{\bar{N}}{\bar{N}_0} \right)^2 = 1 \dots \dots \dots (62)$$

ここに、 \bar{M} , \bar{N} は、単位幅当りの作用曲げモーメントおよび作用軸力であり、 \bar{M}_0 , \bar{N}_0 は単位幅当りの全塑性モーメントおよび全塑性軸力であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \bar{N}_0 = h\sigma_0 \\ \bar{M}_0 = h^2\sigma_0/4 \end{array} \right\} \dots \quad (63)$$

ここに, h ははり高, σ_0 は降伏応力である.

さて、図-14 に示すようにはり断面を 1. で求めた図-1 のトラスの集合で置換する。はり理論では、鉛直方向の直応力の影響を無視し、はり軸に垂直な断面を使用する応力のみを考慮しているので、ここでのトラス相似においては、軸方向には一層で近似する。はりの深さ方向には n 層に分割し、基準部材強度、 $N_0 = \sigma_0 a/4$ により、式 (49) により作用荷重 (\bar{M} , \bar{N}) の終局強度を計算すれば、図-14 に示す結果が得られた。この場合はせん断力が作用しないため、式 (21) の付加条件の影響はまったく現れていない。明らかに层数を増せば、式 (63) の理論曲線に近づくことがわかる。なお、層数が少ない場合には、計算値は理論値を上回っており、図-1 のトラス相似の塑性崩壊曲線は、 $\beta=1$ の場合には、トレスカの降伏曲線の下界であったにもかかわらず、このトラスの集合による終局強度は上界値を与える。これは要素の寸法効果の現れであり、もともと、トレスカの降伏条件式は無限小の連続体要素に対するもので、有限の大きさの要素に対しては当然考慮しなければならぬ。

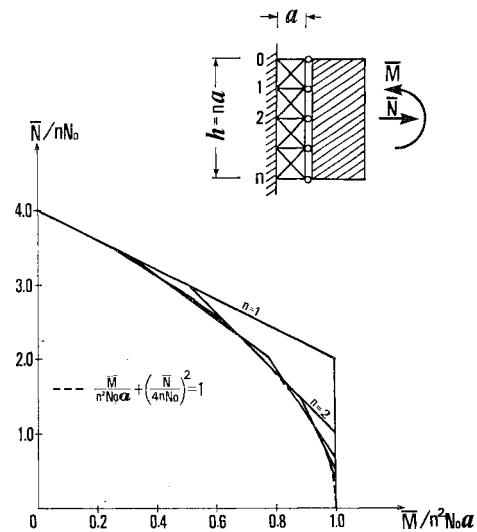


図-14 トラス相似による曲げモーメントと軸力の
相関曲線 ($\beta=1/\sqrt{2}$, $\beta=1$ の場合)

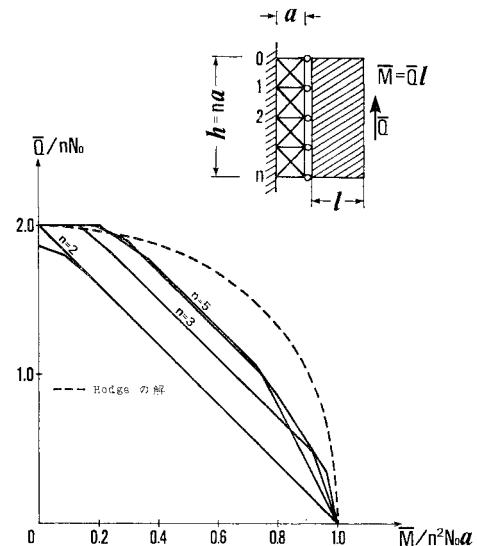


図-15 トラス相似による曲げモーメントとせん断力の相関曲線 ($\beta=1/\sqrt{2}$ の場合)

い応力勾配の影響が無視されていることに起因している。

次に、せん断力と曲げモーメントの相関曲線の計算結果を 図-15 および 図-16 に示す。この場合は、 $\beta=1$ と $\beta=1/\sqrt{2}$ では異なる結果を与えており、収束性は両者とも同じである。 $\beta=1$ では、Hodge の理論曲線²⁾に完全に内包された曲線（下界曲線）を与えており、層数を増せば、計算曲線は収束するが、その収束値は理論値と一致していない。これは、図-1 のトラス相似による塑性崩壊曲線はせん断力を含む場合には、トレスカの降伏曲線に完全に一致していないので、この差が直接

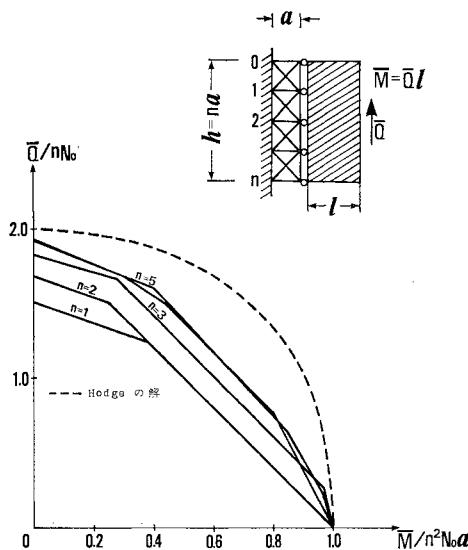


図-16 ト拉斯相似による曲げモーメントとせん断力の相関曲線 ($\beta=1$ の場合)

に現れている。

(2) 片持深ばかりの終局強度解析

図-17 に示すようなはり高とスパンの比が 1.0 の片持深ばかりがその上面に等分布荷重 q を受ける場合の終局強度を式(49)または式(61)により求める。この深ばかりを図-1のト拉斯の n 層、 n 列の集合体で置換すれば、式(49)により終局荷重を求める問題は、 $n(4n+1)$ 個の変数と $2n(n+1)$ 個の等式制約条件および初期状態で $n(4n+1)$ 個の不等式制約条件をもつ線形計画の問

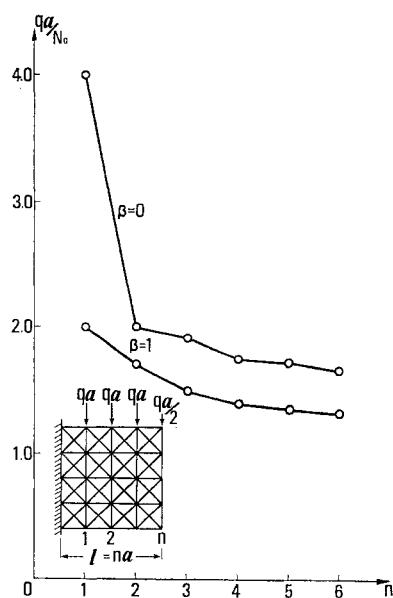


図-17 片持深ばかりの終局強度

題になる。各層数に対する終局荷重のシンプソン法による計算結果を図-17 に示す。層数が少なければ、等分布荷重の節点集中荷重への置換による近似度が悪くなり、計算結果に大きな誤差を生んでいるが、4 層以上も取れば、十分安定した結果が得られるようと思われる。また、基本ト拉斯の水平、垂直部材強度間の相関性を考慮した場合 ($\beta=1$) と考慮しない場合 ($\beta=0$) では、その収束状況はほとんど同じであるが、収束値にはかなりの差 ($q_{\beta=1}/q_{\beta=0} \approx 0.837$) が生じている。しかしながら、この差は式(35)と式(36)で与えられる逸散エネルギー速度の差の範囲内に留まっている。このことより、基本ト拉斯の塑性崩壊曲面の原材料の降伏曲面への近似度が本ト拉斯相似法の精度に大きく影響することが推測される。

次に、 $n=4$ の場合の終局状態での応力分布および崩壊モードを図-18 および図-19 に示す。この応力分布は式(49)の線形計画の解より得たもので、静的許容か

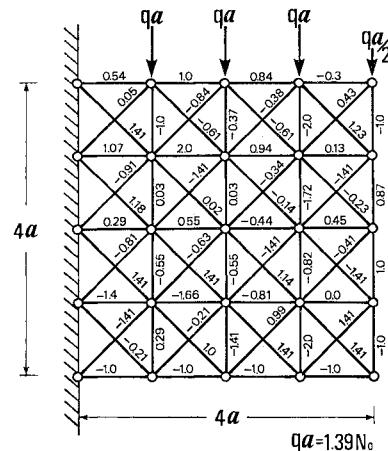


図-18 終局状態における静的許容かつ安全な応力場（ただし $\beta=1, n=4$ のときの計算値、単位は N_0 ）

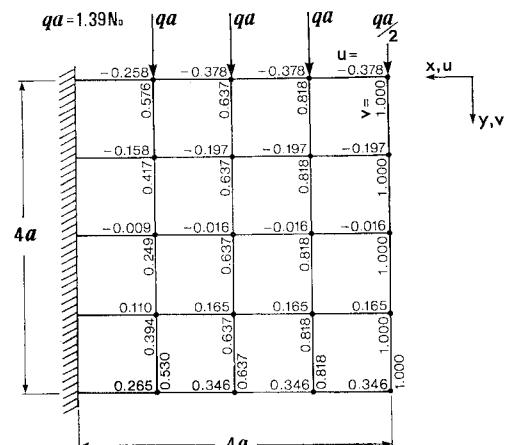


図-19 崩壊モード（ただし $\beta=1, n=4$ のときの計算値）

つ安全な応力場を表わしている。終局荷重の下で、この骨組構造は完全崩壊ではなく部分崩壊を起こしているので、このような応力場は唯一でなく、したがって、ここで示したもののはその一つを表わしたものにすぎない。一方、図-19 は式(61)によって決定した終局状態における変形速度場を示す。この図から、曲げ変形とせん断変形が混在しており、ごくわずかではあるが、鉛直方向の縮みも発生していることがわかるであろう。

最後に、式(49)および式(61)の線形計画の問題の計算法について述べる。これらの問題の制約条件式の係数は、ほとんど、同じ数かまたは零より成り立っているため、シンプソン法による計算途中で一種の退化(degeneracy)が起こりやすく、またそれに伴う誤差も入りやすいものと思われる。図-17 のデータを求めるに際しては、摂動法²⁹⁾を用いてこれを解決しようと試みたが、正負の判定時に必要となる誤差の評価との絡み合いもあって予想外の苦労を強いられた。このような特殊な形をした大次元の線形計画の問題の合理的な計算法がないものかと線形計画法に関する専門書を調べたが、適切なものが見出しえず、ここでは、通常のシンプソン法の2段階法(two phase method)³⁰⁾を用いた。もし、本論文で提案した骨組置換法が実用化される段階に達すれば、より合理的な計算法の確立が非常に望まれる。

(3) 鉄筋コンクリート矩形ばかりの軸力と曲げモーメントまたは曲げモーメントとせん断力の相関曲線

2軸応力下のコンクリートの破壊条件は図-9 に示す Kupfer の提案式に従うものと仮定し、コンクリート部には図-10 のプレースドラーメンで、鉄筋は軸方向力のみに抵抗すると仮定し、線要素で置換する。もし鉄筋のダウエル効果によるせん断抵抗を考慮するならば、軸方向力のほかに曲げモーメントも受ける棒要素に置き換える必要がある。

最初に、軸圧縮と曲げを受ける場合の相関曲線の問題を考える。曲げ引張側のコンクリートのかぶりの部分を無視し、図-20 に示すように骨組相似を行う。鉄筋を表わす線要素はラーメンの節点で結合され、その降伏強度(σ_{sy})は引張、圧縮とも同じである。はりの断面全体に作用する曲げモーメントを \bar{M} 、軸力を \bar{N} とすれば、 $\bar{M}-\bar{N}$ 平面での限界曲線を決定する問題は、 \bar{M} と \bar{N} の比を変化させて、式(49)の線形計画法を反復計算することによって解くことができる。鉄筋比(p_s)：1%，鉄筋とコンクリートの強度比(σ_{sy}/σ_{cb})：8 とした場合の計算結果を図-20 に示す。層数の増加に伴う収束状況は前述の結果とほぼ同様である。通常よく行われているように圧縮側コンクリートの応力分布は単純圧縮強度

(σ_{cb}) のストレスブロックを仮定し、引張側コンクリートの強度を無視した場合の計算結果を図の点線で示す。これは骨組相似法による結果よりかなり下回っているが、この原因是、図-11 の塑性崩壊曲線においては、一方向圧縮塑性変形を起こす応力は $1.2\sigma_{cb}$ になること、ならびに $\sigma_{cb}/12$ の引張強度を考慮したことによるものと思われる。たとえば、縦軸の値を $1/1.2$ 倍し、横軸の値を $1/1.42$ 倍(引張強度が零のときの 1.42 倍になる)すれば、 $n=5$ のときの曲線は点線とほとんど一致することがわかる。このような材料定数の取り方にはまだ検

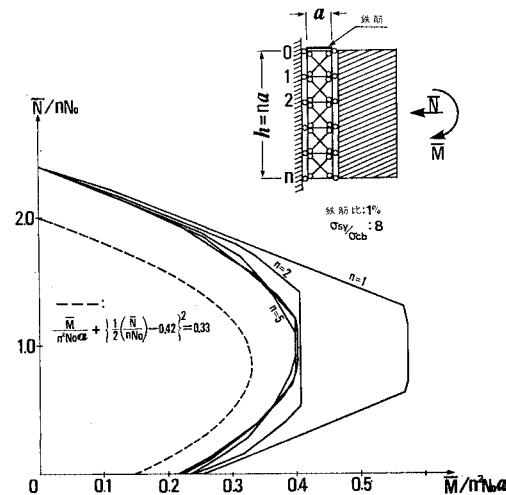


図-20 プレースドラーメン相似による鉄筋コンクリートばかりの軸力と曲げモーメントの相関曲線

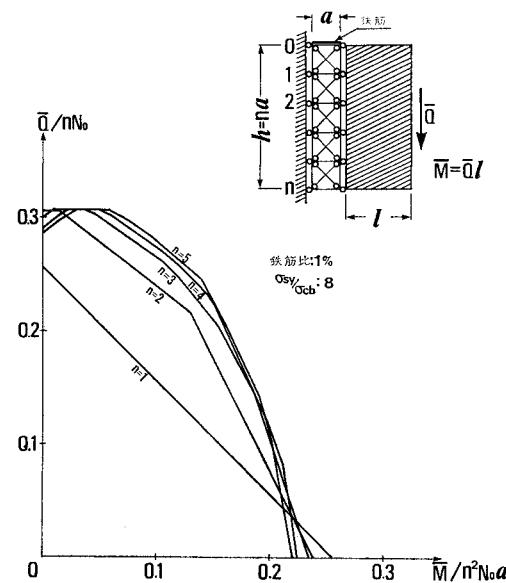


図-21 プレースドラーメン相似による鉄筋コンクリートばかりの曲げモーメントとせん断力の相関曲線

討すべき点が多いが、純曲げ強度 (\bar{M}_0) と純軸圧縮強度 (\bar{N}_0) でそれぞれ \bar{M} , \bar{N} を除した無次元化した曲線はほとんど両者一致していることより、本相似法の妥当性は十分に得られたものと思われる。

次に、上と同じくに対する曲げモーメントとせん断力の相関曲線を 図-21 に示す。この場合も 5 層程度で十分安定した解が得られている。実験によれば²⁸⁾、コンクリートばかりのせん断破壊モードは、シアースパンに対するはり高の比によって異なるので、図-21 に示すように曲げモーメントとせん断力の相関関係を一つの曲線で表わすことは合理的でないかもしれない。より厳密には、プレースドラーーメンの径間数も増加させた片持ばかりモデルによる解析を行い、スパンとはり高の比と終局曲げモーメントまたは終局せん断力の関係を見出すべきであろう。

8. 結 論

剛塑性または完全塑性 2 次元連続体の極限解析に対して、連続体を平面骨組の集合体に置換する方法を研究した。極限解析に対しては、降伏条件の相似性が最も重要なので、各種の形状と部材強度をもつ骨組の終局強度を調べ、原材料の降伏曲面と置換骨組の塑性崩壊曲面ができるだけ類似する骨組を選び出すことに努力した。その結果、

(1) トレスカの降伏曲面に類似する塑性崩壊曲面をもつ骨組は正方形トラスで、その斜材の強度は水平および垂直材の強度の $\sqrt{2}$ 倍になる(図-1)。

(2) ミセスの降伏条件に従う連続体に対しては、正方形トラス・ラーメン相似が適当である(図-7)。

(3) 最大主応力降伏説に従う連続体に対しては、ラーメン相似が適当である(図-5)。

(4) 2 軸応力下のコンクリートの破壊曲面はプレースドラーーメン(図-10)の塑性崩壊曲面と類似している。

次に、上で見出した正方形トラスの積層によってはり断面を置換し、断面の塑性崩壊に対する曲げモーメントと軸力および曲げモーメントと軸力の相関曲線を求めた結果と通常のはり理論による結果を比較し、それらの間の差は降伏曲面の相似度の範囲内にあることを示した。さらに、同じトラスの集合によって、等分布荷重を受ける片持ばかりを置換し、その終局強度を計算し、置換トラスの層数および径間数と終局強度の計算値の収束状況を調べ、この計算例では、4 層、4 径間で十分安定した解が得られることがわかった。最後に、鉄筋コンクリートばかりに対して、コンクリート部はプレースドラーーメンで鉄筋は線要素で置換し、軸力と曲げモーメントおよび曲げモーメントとせん断力の相関曲線を求めた結果、層

数を 5 度とすれば、十分安定した結果が得られることがわかった。なお、コンクリートに対する完全塑性体としての材料定数の取り方には不明な点が多く、今後さらに検討すべき問題が山積しているが、組み合わせ荷重を受ける鉄筋コンクリート構造の終局強度特性を求めるうえで、このような骨組相似法は一つの有力な武器になるものと確信している。

参 考 文 献

- 1) Drucker, D.C., H.J. Greenberg and W. Prager : Extended limit design theorems for continuous media, Quart. Appl. Math., Vol. IX, No. 4, pp. 381~389, 1951.
- 2) Hodge, P.G. : Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill, New York, 1959.
- 3) Shield, R.T. and D.C. Drucker : The application of limit analysis to punch-indentation problems, J. Appl. Mech., Vol. 20, No. 4, pp. 453~460, 1953.
- 4) Hodge, P.G. : Numerical Applications of Minimum Principles in Plasticity, Engineering Plasticity, Cambridge at the University Press, Cambridge, pp. 237~256, 1968.
- 5) Koopmann, D.C. and R.H. Lance : On linear programming and plastic limit analysis, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, pp. 77~87, 1965.
- 6) Hodge, P.G. and T. Belytschko : Numerical method for the limit analysis of plate, J. Appl. Mech., Vol. 35, No. 4, pp. 796~802, 1968.
- 7) Herakovich, C.T. and P.G. Hodge : Elastic-Plastic torsion of hollow bars by quadratic programming, Int. J. Mech. Sci., Vol. 11, pp. 53~63, 1969.
- 8) Sonoda, K. and M. Kurata : A numerical method for the limit analysis of grillage griders and plates, Proc. of JSCE, No. 182, pp. 93~114, 1970.
- 9) Hrennikoff, A. : Solution of problems of elasticity by the framework method, J. Appl. Mech., Vol. 8, A-169~175, 1941.
- 10) Lightfoot, E. : A grid framework analogy for laterally loaded plates, Int. J. Mech. Sci., Vol. 6, pp. 201~208, 1964.
- 11) Yettram, A.L. and H.M. Husain : Grid-framework method for plates in flexure, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 91, No. EM 3, pp. 53~64, 1965.
- 12) Yettram, A.L. and H.M. Husain : Plate-framework methods for plates in extension, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 92, No. EM 1, pp. 157~167, 1966.
- 13) Salonen, E.M. : Triangular framework model for plate bending, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 97, No. EM 1, pp. 149~153, 1971.
- 14) Yettram, A.L. : An equivalent grid framework for skew plates in flexure, Int. J. Mech. Sci., Vol. 14, pp. 407~416, 1972.
- 15) Yettram, A.L. and V. McKinnon : Grid framework method for thick plates, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 100, No. EM 5, pp. 1073~1079, 1974.
- 16) Drucker, D.C. and W.F. Chen : On the use of simple discontinuous fields to bound limit loads, Engineering

- Plasticity, Cambridge at the university press, Cambridge pp. 129~145, 1968.
- 17) Drucker, D.C. : On structural concrete and the theorems of limit analysis, IABSE, Publication, Vol. 21, pp. 45~59, 1961.
- 18) Chen, W.F. and D.C. Drucker : Bearing capacity of concrete blocks or rock, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 95, No. EM 4, pp. 955~978, 1969.
- 19) Santhakumar, A.R., L.K. Kamaraj and M. Lakshmi-pathy : Discussion to Bearing capacity of concrete blocks or rock, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 96, No. EM 3, pp. 370~371, 1970.
- 20) 末永保美・石丸麟太郎：組み合せ応力を受けるコンクリート材の動力学的解析（その3），日本建築学会論文報告集，No. 220, pp. 1~6, 1974.
- 21) Chen, W. and T.P. Chang : Plasticity solutions for concrete splitting tests, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 104, No. EM 3, pp. 691~704, 1978.
- 22) Drucker, D.C. : A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Proc. 1st. U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., pp. 487~491, 1952.
- 23) 岩下恒雄：鉄筋コンクリート造構造物の2次元弾塑性解析に対する一方法，日本建築学会論文報告集，No. 141, pp. 11~18, 1967.
- 24) McHenry, D. and J. Karni : Strength of concrete under combined tensile and compressive stress, Jour. of ACI, Proc., Vol. 54, No. 10, pp. 829~840, 1958.
- 25) Weigler, H. and J. Becker : Untersuchungen über das bruch-und verformungs-verhalten von beton bei zweiachsigem beanspruchung, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlin, Wilhelm Ernst & Sohn, 1963.
- 26) Kupfer, H.B. and K.H. Gerstle : Behavior of concrete under biaxial stresses, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 99, No. EM 4, pp. 853~866, 1973.
- 27) Darwin, D. and D.A. Pecknold : Nonlinear biaxial stress-strain law for concrete, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 103, No. EM 2, pp. 229~241, 1977.
- 28) The Joint ASCE-ACI Task Committee 426 on Shear and Diagonal Tension of the Committee on Masonry and Reinforced Concrete of the Structural Division, The shear strength of reinforced concrete members, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST 6, pp. 1091~1187, 1973.
- 29) Gass, S.I. : Linear Programming, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1964.
- 30) 山内二郎・森山繁一・一松 信：電子計算機のための数值計算法 I, 培風館, 東京, 1964.

(1978.10.18・受付)