

土木学会論文報告集
第 294 号・1980 年 2 月

【論文】

マトリックス構造解析に対するグラフ理論による一考察

A GRAPH-THEORETIC CONSIDERATION ON MATRIX STRUCTURAL ANALYSIS

白 石 成 人*・谷 口 健 男**

By Naruhito SHIRAISSI and Takeo TANIGUCHI

1. まえがき

マトリックス構造解析法は、今日の構造解析の主流をなしているが、さまざまな問題点も認識されるに至っている。この解析法は数値計算法と表裏一体の関係をもち、すでに顕在化した問題点の多くはその数値計算法に起因するものと思われる。数値計算法は元来いかなる問題でも数学的表現として与えられたとき、それを電子計算機の能力に適合せしめ、厳密もしくはそれに近い解を導くための方法でしかない。今日までのマトリックス構造解析の主たる研究対象は、この数値計算という制約条件のもとで構造物の力学挙動をいかに精度よく数学的に表現するかにおかれていったといえよう。この目的のために、系の解析モデルの設定を行わねばならず、そのモデル設定では力学的伝達路すなわち、モデルの位相構造と、おののの伝達路の力学特性の決定が必要とされる。骨組系のように伝達路が自明である場合、後者のみに研究対象が限定されるが、対象が連続体であれば、モデル設定において上記2つの研究対象が存在する。従来よく検討されてきたのは後者であり、前者に関してはほとんど顧みられていないかったといえる。前者が問題となつた少ない例の1つとして連続体解析における有限要素分割法が挙げられよう。

いま、問題をある構造物の解析モデルにおける線形な荷重-変位の関係に限ると、系の力学挙動はマトリックス表現を用いて下式で与えられる。

行列 K は、荷重および変位ベクトル p, u を関連づける系固有の係数行列であり、解析モデルの位相幾何学的特性および力学特性を包含する。前者は K の個々の要素が零であるか非零であるかを決定し、後者は非零要素

の値を定める。一般的にいって、マトリックス構造解析で現われる K 行列は、1) 非常に多くの零要素を含む疎行列であり、適当な行列の並べ換えによりすべての非零要素を行列のある領域に集めることができ、2) 正定値・対称性を有する場合が多いことが知られている。

一方、連立一次方程式の数値計算における最も重要な問題の1つに、容量および演算時間が挙げられ、式(1)の数値計算においても上記2つの性質の導入が図られる。特性2)のうち、対称性の利用により容量の節約が、また、正定値であることより演算プロセスの簡単化が可能となる。

1) の利用は不必要的零要素を演算より除くことにより容量および演算時間の節約を可能ならしめる帶行列法, ウェーブフロント法, スペースマトリックス法等のさまざまな解法の提案となる. 帯行列法は扱いうる行列の大きさに制限はあるものの, プログラミング, データ構成およびその値の修正の容易さ等の理由により最もよく利用される. この方法には, 扱う非零要素領域の形により固定帶行列法, 変動帶行列法, プロファイル法¹⁾があり, 特に第1の方法が一般によく利用される. しかしながら, 対象とする系の位相幾何学的特性を考慮せず1つの手法(たとえば固定帶行列法)をもって解析しようとすれば, その手法の扱いうる非零要素配列パターンに一致した K 行列の作成のための汎用性のあるいわゆるラベリング・アルゴリズムが必要となる. しかしながらそれを十分に満たすアルゴリズム設計は, ほとんど不可能と考えられる^{2)~4)}.

固定・変動帶行列法およびプロファイル法で扱う行列の非零要素配列パターンはまったく異なり、この違いはそれぞれの手法の扱う系の位相構造に差があることを示している。よって、解析の対象である系の位相構造を、おのおのの数値計算法で扱う行列の位相構造に照らし合わせ、位相構造の一致する解法を用いるのがより合理的であり、さらにその結果、それぞれの数値計算法の扱う

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 岡山大学講師 工学部土木工学科

系の位相構造が限定されることより、おののの数値計算法のためのラベリングも容易になると考えられる。すなわち、マトリックス構造解析における数値計算は、用いる解法の位相構造にあてて構造物のそれをあてはめではなく、逆に系の位相構造をもって適用すべき解法を選択すべきであろう。

2. 解析モデルの位相幾何学的特性

マトリックス構造解析において扱われる対象は、いわゆる離散系であり、いかなる解析対象も有限個の離散点と、それらを結ぶ力学的に等価な部材よりなるネットワークに置換し、さらに系に加えられる力も離散化して始めて解析可能となる。このネットワークのもつ位相幾何学的特性を探ろうとするのが本節の目的である。

いわゆる骨組構造物においては、その構造要素が力学量の伝達経路を明確に示しており、構造物の形そのものがネットワーク・トポロジーを示す。しかしながら連続体等においては、それをそのまま取り扱うことができず、たとえば有限要素法といった方法により離散化モデルに置換される。したがって、元の系における位相幾何学的特性と解析モデルのそれとはまったく異なるものである。連続体のマトリックス構造解析とは、このように元の系とは力学量の伝達経路を異にするモデルを対象として、ただその挙動が元のそれに一致、あるいは近似させるよう新たに伝達経路に適切な物理量を与えて解析する方法でしかない。したがって、応力が一様である場に対する離散化、すなわち伝達経路の設定は案外容易に行い得ても、応力の急変がある場合、その領域の離散化は困難となる。伝達経路を他の領域と同じパターンにしておけば、それに付加する物理量の修正だけでは元の系の力学量（応力）を十分に評価し得ず、したがって、その領域の伝達経路の多様化が必要となる。これが応力集中領域のメッシュ・サイズの細分化である。このように、連続体の解析モデルの設定においては、力学量の伝達経路、すなわちモデルの位相構造にも十分注意を払う必要がある。

このように設定された解析モデルの力学的伝達路の位相構造を把握するにはネットワークのもつ物理量、幾何学量は不要であり、そのグラフのみが必要とされる。グラフは点（ v で示す）と線より構成され、それぞれネットワークの節点、枝に対応する。 n 節点、 m 部材よりなる系は n 個の点、 m 本の線よりなるグラフ、 $G(n, m)$ で表現される。構造解析で扱われる系は 1 個の独立したシステムと考えられ、そのグラフ表現は 1 個の連結グラフとなる。連結グラフにおいては任意に選ばれた 2 点が一連の線のつながりを経て互いに結ばれる。もし、その

経路にすべて異なる線を選んで出発点に到達し得るときそのグラフをメッシュグラフ、そうでないときトライグラフとよぶ。マトリックス構造解析の対象となるモデルのほとんどが前者に属す。トライグラフは構造的には静定基本系のような系で、その名も示すように木のような形をしている構造物がこれに該当する。

1 個の FEM 要素のグラフを考えると、任意の 1 点は他のすべての点と 1 本の線で直接結ばれている。このようなグラフは完全グラフ (G_c で示す) とよばれ、もし n 点を含む G_c の場合、すべての点に集まる線の数（次数 : \deg で示す）は $n-1$ に等しく、 G_c に含まれる線の数は $n(n-1)/2$ となる。系全体の有限要素モデルにおいては、1 点はその点を共有する要素内の点としか結ばれず G_c ではない。

グラフの任意の 2 点 (v_i と v_j) を結ぶ最短経路に含まれる線の数をもって距離 ($d(v_i, v_j)$ で示す) が定義される。その最大距離をグラフの直径 (d_0 で示す) とよぶ。グラフにおける距離は解析モデルにおける距離とはまったく異なる。グラフ全体、あるいはその一部を引き伸ばし、あるいは圧縮してもグラフの距離は不変であることより、外見のまったく異なる 2 つの解析モデルのグラフが一致する場合がある。

以上の考察で示された解析モデルの位相幾何学的特性が、式 (1) の係数行列 K の中にいかに含まれているかを調べるために、次の T 行列を定義する。グラフ G において、

$$\begin{aligned} & \text{もし, } d(v_i, v_j)=1 \text{ ならば, } T(i, j)=1 \\ & \text{もし, } d(v_i, v_j)>1 \text{ ならば, } T(i, j)=0 \end{aligned} \quad \dots \quad (2)$$

ここで、 $d(v_i, v_j)$ は 2 点 v_i, v_j 間の距離を、また、 $T(i, j)$ は行列 T の (i, j) 要素を示し、 $T(i, j)>0$ とする。式 (2) により n 点グラフ、 $G(n)$ に対する T ($n \times n$) 行列を得ることができ、もし解析モデルの i, j 両節点間に部材があれば、 $T(i, j)=1$ 、逆に部材がなければ $T(i, j)=0$ となる。これより、 T は解析モデルの位相構造を表わすことが確認される。したがって、上述した系のグラフにおいて認められたさまざまな位相幾何学的特性は、この T 行列の中においても認められることになり、それらをまとめると次のようになる。

(1) $G(n, m) : T$ は対称な $(n \times n)$ 行列であり、その上三角行列内非対角部に m 個の 1 が存在する。

(2) 連結グラフ : T の各行において、その主対角要素を除き、少なくとも 1 個の 1 をもつ。

(3) 次数 : ある点に対応する T の行に含まれる非零要素の数、すなわち 1 の個数。ただし主対角要素は除く。

(4) トライグラフとメッシュグラフ : 前者の T に

おいては、いくつかの行がただ1個の非対角部非零要素をもち、後者の T においてはすべての行が少なくとも2個以上の非対角部非零要素をもつ。

(5) 完全グラフ：完全グラフの構成する諸点に関する T の行および列より作る小行列は零要素を含まない。もし G が完全グラフであれば、 T は零要素を含まない。

(6) 距離および直径： T の非対角部非零要素の行番号、列番号が $d=1$ を満たす2点を示す。 T のべき計算、たとえば、 T^a において非零となった要素の行および列番号が、 G において $d=a$ を満たす2点を表わす。したがって、 T_d すべての要素が非零となるとき、 G の直径は β であることがわかる⁵⁾。

3. 帯行列法のグラフ理論的考察

(1) 消去法のグラフ理論的解釈

マトリックス構造解析において現われる連立一次方程式の係数行列は正定値、対称性を有することが多く、本論文ではこのような特性を有する係数行列のみ扱うこととする。

連立一次方程式の解法でその基本となるのがガウスの消去法であるといえよう。未知ベクトル x と既知ベクトル y との間に式(3)に示される線形関係があるとする。

$$y = F \cdot x \dots (3)$$

F は、 $(n \times n)$ の係数行列とする。 F の対称性により、その上三角行列を考えると、その要素は前進消去により影響を受けて値を変えることになる。たとえば、 F の (j, k) 要素 f_{jk} を例にとると、第 i 行の消去を示す下式により \tilde{f}_{jk} となる。ここで (\sim) は消去後の (j, k) 要素を示す。

$$\tilde{f}_{jk} = f_{jk} - \frac{f_{ji} \cdot f_{ik}}{f_{ii}} \quad (\text{ただし, } i < j < k) \dots (4)$$

式(4)において、たとえ、 $f_{jk}=0$ でも、もし、 $f_{ji} \neq 0$ ならば、

$$\tilde{f}_{jk} \neq 0 \dots (5)$$

すなわち、 F において零であった要素でも、前進消去過程を通じて非零化する可能性を有し、このような非零化要素をフィル・インとよぶ。この消去の過程をグラフを用いて考える⁷⁾。まず、 F 行列のグラフ表現を行う。これは式(2)とは逆の操作で以下のようにして行われる。

F は $(n \times n)$ 行列であることより、まず $1, 2, 3, \dots, n$ とラベルされた n 個の点を考え、

$$\begin{cases} \text{もし, } f_{ij} \neq 0 \text{ ならば, } i, j \text{ 両点を線で結ぶ.} \\ \text{もし, } f_{ij} = 0 \text{ ならば, } i, j \text{ 両点を結ばない.} \end{cases} \dots (6)$$

ただし、この操作を F の上三角行列の全要素について

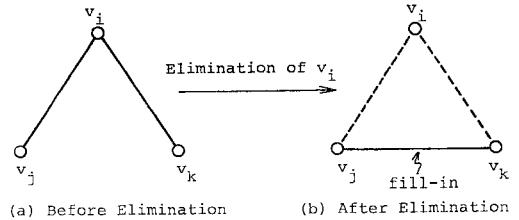


図-1 節点消去によるグラフの変化

行う。式(6)により、1つのグラフを得る。このグラフ $G(n)$ を用いるとフィル・イン発生を示す式(5)は次のように改められる。

$$\left. \begin{aligned} G \text{において, } d(v_j, v_k) > 1 \text{ であっても,} \\ \text{もし } d(v_i, v_j) = d(v_i, v_k) = 1 \text{ ならば,} \\ \tilde{G} \text{において, } d(v_j, v_k) = 1 \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

ここで、 \tilde{G} は消去後のグラフを示す。式(7)を図示すると図-1のようになり、フィル・インは新たな線の発生を意味し、前進消去はグラフの位相構造の変化を生む。

点 v_i の消去により $d(v_i, v)=1$ を満たすすべての点 $\{v\}$ より構成される部分グラフは完全グラフ G_c となり、これを係数行列 F において考えると、 $\{v\}$ で構成される小行列のすべての要素が非零となることに一致する。すなわち、 v_i の消去による位相構造の変化は $\{v\} \cdot d(v_i, v)=1$ の部分グラフに限られる。

また、一度消去の完了した部分は、以後の消去にはまったく関与しない。これを G でもって表現すれば式(8)となる。

$$G(n) \rightarrow \tilde{G}(n-1) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{G}(2) \rightarrow \tilde{G}(1) \dots (8)$$

前進消去が進むにつれて、対象としなければならないグラフの大きさは順次小さくなる。消去が完了したときの行列 \tilde{F} は上三角行列となり、 $\tilde{f}_{ij}=0$ (ただし、 $i > j$) が成り立つ。これを \tilde{G} において考えれば式(9)が与えられる。

$$d(v_i, v_j) = \infty \quad (\text{ただし, } i > j) \dots (9)$$

i 点より j 点への距離が無限大であることは、 \tilde{G} が連結グラフであることを考慮すれば、 i から j への流れが不可能である。すなわち、 \tilde{G} は有向グラフ⁵⁾となっていることを示し、したがって、前進消去はグラフの有向化と考えられる。

式(3)を消去法で解く場合の非零要素数は、 F の対称性を利用するならば元の非零要素数 $(n+m)$ とフィル・イン数の和となる。しかしながら、フィル・イン数は消去順序により変化する。

非零要素だけを用いる消去法は、スペースマトリックス法とよばれ、もしフィル・イン数が最少となるような消去順序が求まれば、最も有効な方法となる。

式(4)および消去を行単位で行うものとすると、 F の

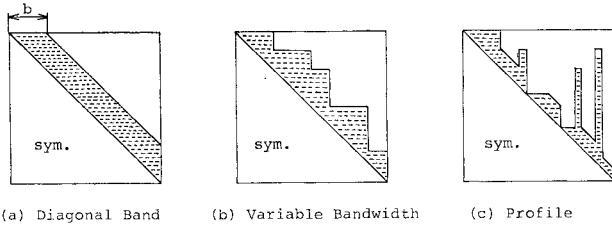


図-2 帯行列の非零要素配列パターン

各行において最も右に位置する非零要素より対角要素までの部分のみが消去で影響を受ける。この特性を利用するのが帶行列法であり、固定および変動帯行列法、さらにその変形ともいるべきプロファイル法がある。これら の方法で扱われる典型的な非零要素領域の形を図-2に示すが、一般にそれぞれの領域内にも零要素が存在する。その代りに、たとえば、計算アルゴリズムが簡単、データ構成・修正の容易さ等の利点を有す。

(2) 係数行列のグラフ表現

a) 固定帶行列のグラフ

図-2(a) の非零要素領域の幅, すなわち半帯幅 ($H.B.W.$) を b とする。ただし, $H.B.W.$ は対角要素を含めないものとする。簡単のため, $H.B.W.$ 内要素はすべて非零とし, 式(6)の方法に従ってそのグラフ表現を行う。図-3(a) にその一例を示す。ただし, $n=15$, $b=3$

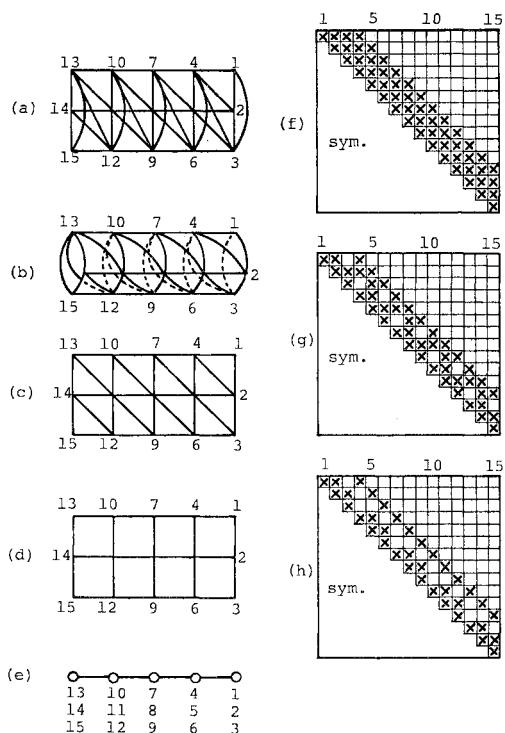


図-3 固定帶行列とそのグラフ

とし、 G を表現する場としてファイリング・フィールド⁶⁾(付録参照)を用いている。このグラフの特徴として、太さが一定、すなわちファイリング・フィールドの縦座標が一定の点個数で占められていることが挙げられる。この点個数を ℓ とすれば、H.B.W. は下式で与えられる。

式(10)は、ファイリング・フィールド内のグラフの幅と半帶幅を関連づける。図-3(a)をみやすくするために3次元的に表わしたもののが図-3(b)である。図-3(a)のグラフと図-3(f)に示すその係数行列を比較すると半帶幅を決定する帶行列の最外側の非零要素は、 G においてはすべて水平方向の線に該当することより、水平方向の線のみがH.B.W.決定に意味をもつ。よって、このグラフより水平方向の線をすべて残し、他の線を一部除くと元と同じ帯幅をもつ図-3(c), (d)のグラフを得る。 G より線を除くことは、それら点間の隣接性を除くことになり、係数行列では非零要素を零要素で置き換えることを意味する。(c), (d)の2個のグラフの係数行列は、それぞれ図-3(g), (h)となり、多くの零要素を含む。しかしながら、これらの零要素は消去演算によりすべて非零化し、演算終了後は(f)の行列に一致する。この非零化要素がフィル・インである。このようにまったく位相構造の異なるグラフが消去過程における位相的変化により、最終的にはまったく同じ位相構造をもち、1つのグラフになる場合がある。

図-3 (a), (c), (d)において、それぞれの G の縦方向の点グループ（これを縦点列とよぶ）は、左右に隣接する縦点列のみと連結され、他の縦点列とは隣接関係をもたない。もし、1つの縦点列を1つの点に置き換え、点列間の隣接関係を1本の線で表わすならば、これら3つのグラフはすべて、点が直列につながったトリーグラフで表わされることになる。図-3 (e) はこのトリーグラフを示し、(a), (c), (d) のようなグラフを今後“分岐を有しないトリー構造”とよぶことにする。すなわち、固定帶行列のグラフ表現は、分岐を有しないトリー構造となる。

b) 変動帶行列のグラフ

図-2(b)に示すように、この場合もまずその領域内がすべて非零であると仮定し、その一例を図-4に示す。(a) 図は $n=15$, $m=39$ のグラフ $G(15, 39)$ がファイリング・フィールド内に描かれていることを示す。このグラフの最大の特徴は、 G の幅、すなわち縦点列の大きさが一定でないこと、したがって、その行列においては、第 i 行に関してその最終非零要素の列番号 l_i と、対角要素との差 ($l_i - i$) が i によって変化する点にある。この行列の固定半帶幅 H.B.W. は下式で求まる。

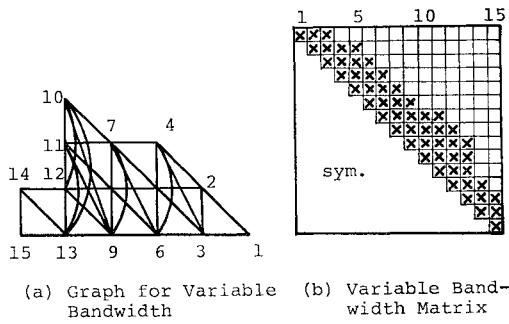


図-4 変動帯行列とそのグラフ

$$\text{H.B.W.} = \max(l_i - i), \text{ただし } i=1, 2, \dots, n$$

.....(11)

式(11)をグラフで求めようとするならば、次のようにすればよい。 $\max(l_i - i)$ はファイリング・フィールド内の G において、最大縦点列の右側に隣接する点列の諸点のうち、最大縦点列内の点と水平方向の線で結ばれている点において見出される(付録参照)。

このような行列に対し固定帯行列法を用いるならば、式(11)で求まる H.B.W. と各行における最終非零要素との間の領域内の零要素も入力データとして考慮しなければならないにもかかわらず、式(4)より明らかにこれら零要素は消去演算を通じて零のままであって、演算には不必要的領域である。経済性を高めるには、これら零要素を除くべきであり、これが変動帯行列法の基本的な考え方となる。

図-4(a)において1つの縦点列を1点と考えれば、変動帯行列のグラフも分岐を有しないトリー構造をもつ。

c) プロファイル型行列のグラフ

プロファイル型行列は、図-2(c)で示すように、列方向へ非零要素領域が突出している非零要素配列パターンを有す。このような行列に対応するグラフ表現を考える。一般性をもったプロファイル型行列に対するグラフ表現を可能とするために、まず簡単な非零要素配列パターン、すなわち行列がただ1個の列方向への突出領域をもつ場合を考える。このとき、行列には次の2つのタイプが考えられる。

タイプ1：行列の主対角部に添った帶行列のみを考えたとき、いくつかの行において、主対角要素にしか非零要素が存在しない。しかしながら、対象が連結グラフであることより、非対角部に少なくとも1個の非零要素がなければならない。したがって、その非零要素は列方向突出領域に位置する(図-5(a))。

タイプ2：行列の主対角部に添って帶行列があり、さらに突出部内にも非零要素がある(図-5(b))。まず、タイプ1の行列のグラフを考える。点グループ $g(a_1)$ 、

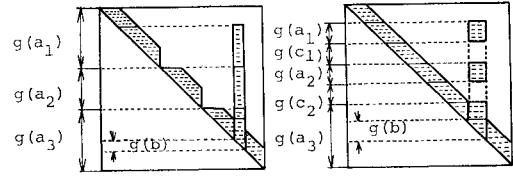


図-5 プロファイル型行列の非零要素領域

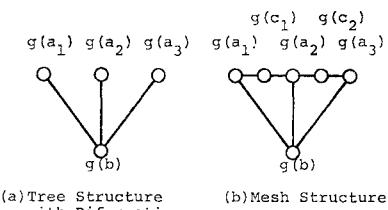


図-6 プロファイル型行列のグラフ表現

$g(a_2), g(a_3)$ はもし突出領域を無視すれば、それらは互いに独立であり、3個の連結グラフと考えられる。行列内の突出領域(非零要素が少なくとも2個存在)は、これら独立な部分グラフを $g(b)$ に連結することを示している。よって、図-5(a)をグラフ表現すれば図-6(a)となる。点グループは1個の丸印で示され、それらの隣接関係は線で示される。

一方、タイプ2の行列においては、突出領域を無視しても、グラフは1個の連結グラフを構成している。さらに、その一部の点グループ $g(a_1), g(a_2), g(a_3)$ が点グループ $g(b)$ と隣接していることが、図-5(b)の突出領域内の非零要素の存在によって示される。したがって、タイプ2のグラフ表現は図-6(b)のようになる。

上記2種類のグラフの位相構造の最大の違いは、点グループ $g(a) = \{g(a_1) \cup g(a_2) \cup g(a_3)\}$ が1個の連結グラフよりなるか、それとも複数個のそれよりなるかということである。いま1つの連結部分グラフを1点と考えると、図-6(a), (b)はそれぞれトリー構造、およびメッシュ構造に対応することより、前者を“分岐を有するトリー構造”，後者を“メッシュ構造”とよぶことにする。トリーとメッシュは基本的に異なる2つのグラフであることより、プロファイルにおける主対角部に添う帶領域の存在の有無によって、行列のグラフ表現、すなわちその位相構造がまったく異なったものとなる。

次に、これら2つのグラフに消去演算を行ったときの位相構造の変化を調べる(図-7参照)。タイプ1の場合、 $g(a_1)$ を消去しても、 $g(a_1)$ は $g(b)$ のみと隣接することより、大きな位相構造の変化は生じず、その変化は $g(a_1)$ 内部、もしくは $g(a_1)$ と $g(b)$ との隣接関係の増強であって、他の部分グラフへ影響が及ばない(図-7(a))。タイプ2の場合、 $g(a_1)$ の消去により、 $\{g(a_2), g(a_3)\}$

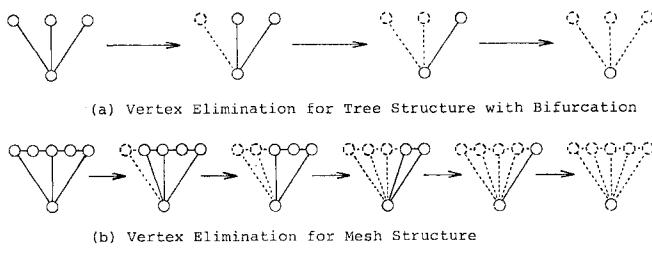


図-7 節点消去によるグラフの変化

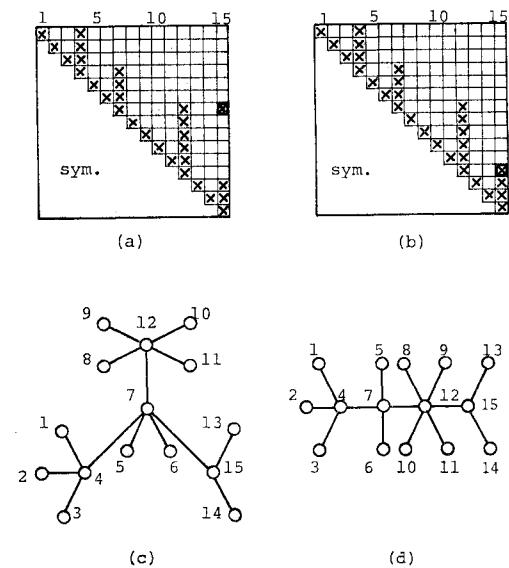


図-8 非対角部非零要素によるグラフの変化 (I)

$(a_1) \cup g(a_2) \cup g(b)\}$ の部分グラフの中に位相変化を生じる。図-6 (b) における $g(c_i)$ は元来 $g(b)$ と隣接関係をもたないが、 $g(a_1)$ の消去により新たに $g(c_i)$ と $g(b)$ との間に隣接関係 (フィル・イン) が生じる (図-7 (b))。

一般にプロファイル型係数行列は、上述の分岐を有するトリー構造とメッシュ構造が混在したようなグラフに 対応すると考えられ、それを支配するのは明らかに非対角部に位置する非零要素である。主対角部に添う帶行列内の非零要素は、本節 a), b) より明らかのように、 G を適当に分割したときの 1 つの部分連結グラフ内の位相構造のみに影響を与えるものであるのに対し、突出領域内非零要素は、それら部分グラフ間の隣接性に影響を及ぼすものである。以下、プロファイル型行列における突出領域に関する考察を行う。

まず、突出領域内非零要素がいかにグラフの構造を変えるかを示す例を 図-8 に与える。 (a), (b) に示す 2 つの行列におけるただ 1 個の非零要素配置の違いが、(c), (d) に示すようにグラフに

おいては大きな位相構造の変化を生み出す。さらに図-9 に示すメッシュ・グラフの一例より、突出領域の高さの違いが、元の位相構造を大きく変えるのみならず、消去後の位相構造にも大きな変化をもたらすことがわかる。突出領域の幅とグラフとの関係を 図-10 に示す。(a)～(c) 図のグラフを I, II, III, IV の 4 個の連結部分グラフに分割し、矢印の方向に従って行列を作ると、それぞれ (d)～(f) 図のようなプロファイル型行列を得る。問題となるのは、 b_1 の切断に関与した部分であり、切断線の長さ (グラフにおける距離) が突出領域の幅を決定することがわかる。したがって、(c) 図のように切断線長がかなり長くなると、(f) 図のようなプロファイル型行列を作るより、切断を考えず、(c) 図の 1 点鎖線の矢印方向に従って番号付けすることにより得られる (g) 図の帶行列

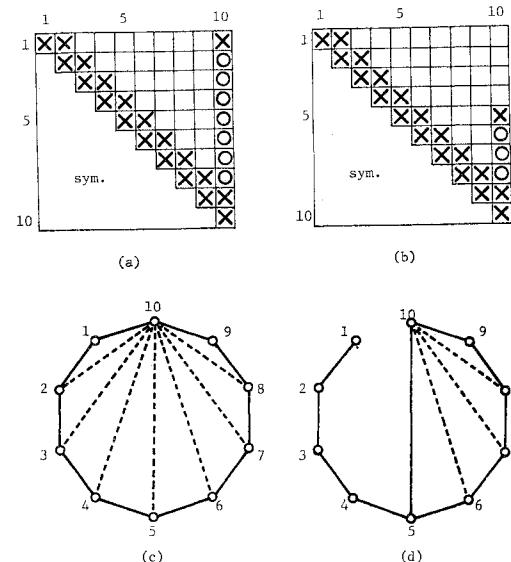


図-9 非対角部非零要素によるグラフの変化 (II)

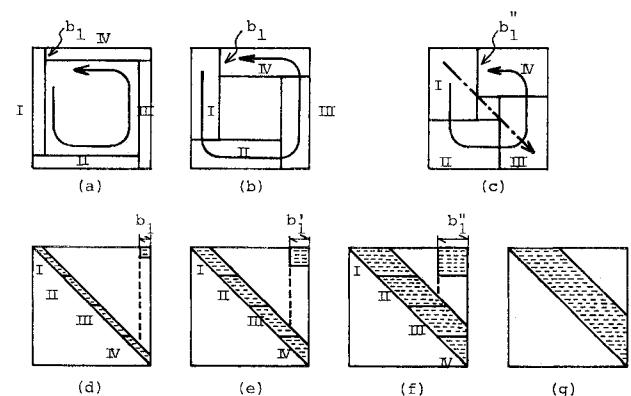


図-10 切断線の長さと、突出領域の幅

の方がよくなる場合もある。

4. 構造解析モデルの分類

本節の目的は、前節の結果をもとに、マトリックス構造解析で扱われるさまざまな解析モデルの分類方法を確立することにあり、この分類に従って最適な数値計算法が選択される。なお、分類は前節で扱った係数行列の非零要素配列パターンによるものとし、解析モデルの係数行列の非零要素配列パターンが、いかにそれらの1つに容易にあてはめられるかによる。しかしながら、数値計算法の係数行列とモデルのそれを比較する必要はなく、前節で得た3種類のグラフと解析モデルのグラフを対比するだけでよい。

固定・変動帯行列の示す分岐のないトリー構造、およびプロファイル型行列の示す分岐を有するトリー構造、メッシュ構造の特徴を述べると次のようになる。

- 分岐のないトリー構造：グラフの外周辺形状が簡単であって、大きな凹凸を有しない（図-3(e)）。
- 分岐のあるトリー構造：グラフの外周辺形状が非常に入り組んでいる（図-6(a)）。
- メッシュ構造：たとえば図-10(a)に示すように外周辺（連続体における境界に該当）を2個以上有するグラフ（図-6(b)）。

上記3種類のグラフと解析モデルとの比較で注意しなければならないことは“距離”である。モデルの外観が非常に複雑であったとしても、それが必ずしも分岐を有するトリー構造とは限らず、また、モデルの外周辺形状が単純であっても、そのグラフは必ずしも分岐のないトリー構造であるとはいえない。前者の例としてカンティレバートラス橋（たとえば大阪・港大橋）が挙げられ、後者の例として不均一にメッシュ分割された矩形板のFEMモデルが挙げられよう。このような外観とグラフとの不一致は、それぞれの“距離”的定義の違いによるものであり、ここではグラフの距離をもってモデルとグラフとの対応を行わなければならない。

上記考察をまとめると、いま1つの構造物に適した数値計算法を決定するには、

1. 境界（あるいは外周辺）の数…(1, 2以上)
2. 境界（あるいは外周辺）の形…(簡単, 複雑)
3. 点密度（メッシュサイズ）…(均一, 不均一)

の3つの要因を考慮しなければならない。項目1は、系がメッシュ構造であるかどうかの判定に用いられ、もし境界が2個以上あればメッシュ構造と考えられ、そのような系に対してはプロファイル法を用いるべきである。もし境界が1つであれば系はトリー構造と判定され、項目2および3を用いて、モデルの境界の形状および点密

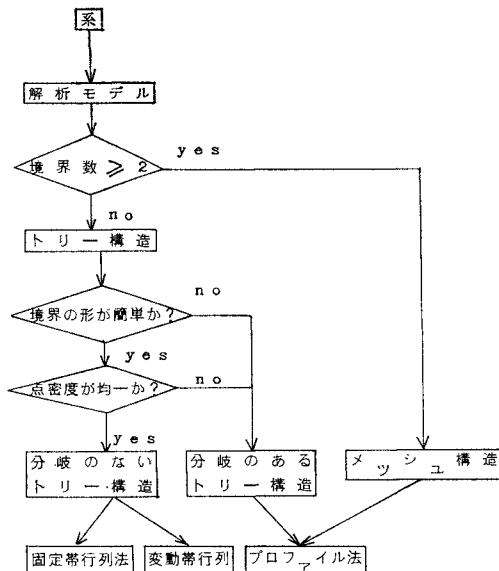


図-11 数値計算法選択の手順

度により、分岐の存在の有無を調べ、もし分岐があればプロファイル法で、また分岐がないと考えられれば固定あるいは変動帯行列法で解析すべきであろうと判定される。この分類手順を図-11にフローチャート形式でもって与える。同図において、分岐のないトリー構造に対する数値計算法として固定および変動帯行列法の2つが挙げられている。一般的にいって、完全に固定帯行列に対応する系は少なく、ほとんどが変動帯行列となるといえよう。これはファイリング・フィールドに描かれたグラフの幅が行列の半帯幅を決定することより明らかである。しかしながら、計算手法の選択においては、数値計算上の他の要因、たとえば、プログラミング、データ構成および修正等をも考慮すべきであり、一般的にいって凹凸が少なければ固定帯行列法を、多少凹凸があれば変動帯行列法を選ぶべきであろう。

矩形板のFEMモデルを例にとり、解析モデルの分類手順の説明を行う。もしメッシュパターンが一様であり、点密度が均一であれば、モデルは分岐のないトリー構造となり固定あるいは変動帯行列法を適用すべきである。しかし、もしそのモデルに集中荷重が載荷されたり、あるいは境界上に切り込みがあり、そのため応力集中を考慮しなければならないとき不均一なメッシュパターン、不均一な点密度となり、このような場合、分岐のあるトリー構造となることが多く、プロファイル法がよい方法である。また、このモデルが穴あき板であれば、境界を少なくとも2個有し、メッシュ構造となり、したがってプロファイル法が選ばれる。

5. マトリックス構造解析のための節点番号付け問題

前節で示した方法により、与えられた構造物に対して用いるべき数値計算法の選択が可能となる。残された問題は、係数行列を用いることに決めた解法の係数行列の非零要素配列パターンに一致させ、また同時に図-2に示す領域を最小にさせる方法の確立であり、これが解析モデルに対する最適節点番号付け手法とよばれる。

一般にこの節点番号付け問題は、NP-Complete Problem (Nondeterministic Polynominal-Time Complete Problem の略) とよばれ、眞の汎用性をもち、かつ経済的な番号付けアルゴリズム設計はほとんど不可能と考えられている^{2)~4)}。

一方、最小帯幅値に関するグラフ理論的な考察より解析モデルが、

1. 非常に入り組んだ外周辺形状を有する場合
2. たとえ、外周辺形状が簡単であっても節点分布が一様でなく、グラフにおける距離の概念を導入すれば、1. に一致する場合

いいかえれば、分岐を有するトリー構造の帯幅最小化には、非常に複雑な手順が要求されることが指摘されている⁵⁾。さらにこのような系の典型ともいべきトリー・グラフを対象としたプロファイル最小化法はほとんど完全なものとして提案されている⁶⁾。これら 2 つの研究は、分岐を有しないトリー構造に対する帯幅最小化法、および分岐を有するトリー構造に対するプロファイル最小化法のアルゴリズム設計が可能であることを示す。

文献 6) によれば、係数行列の最小半帯幅 H.B.W. は下式で与えられる。

$$H.B.W. \propto \max |L_i|, i=0, 1, 2, \dots, d_0 \dots \quad (12)$$

ここで、 $|L_i|$ は、係数行列のグラフ G のファイリング・フィールド内での右より第 $(i+1)$ 番目の縦点列に含まれる節点数を示す。上式より最小半帯幅は、ファイリング・フィールドに描かれた“図形の幅”に支配され、もし G が分岐のないトリー構造であれば、そのグラフの幅が H.B.W. を決定する。したがって、 G の最大幅をいかに正確に求めるかが重要であり、その方法として次の 2 つが挙げられよう。

1. 図式解法⁶⁾と同様に、 G の直径をまず見出し、 G のすべての点を直径の一端よりの等距離節点グループ $\{L_0, L_1, L_2, \dots, L_{d_0}\}$ に分け、 $\max |L_i|$ を探す。
2. G のすべての節点を外周辺上の節点よりの等距離節点グループ $\{R_0, R_1, R_2, \dots, R_r\}$ に分類すれば、 R_r は外周辺より最も遠い節点グループを示すことより、 G の最大幅の位置を知ることができる。

今日、提案されているアルゴリズムのうち Cheng's Algorithm⁹⁾ は 1. の考え方と一致する。しかしながら、正確な直径を求ることは効率悪く、帯幅問題では直径を正確に求める必要はなく、グラフの長手軸を知るだけでよいことを考慮すれば、Gibbs らの提案した pseudo-peripheral node を求めるアルゴリズム¹⁰⁾を適用することによりグラフの長手軸を知り、その後、たとえば、Cuthill-McKee Algorithm¹¹⁾ を適用すれば分岐のないトリー構造に対しては有効となり、これも 1. の考え方による方法であるといえる。一方、2. の考え方による番号付け・アルゴリズムは、現在のところ提案されていない。

一般的なグラフに対する最小プロファイル問題を扱った研究はみられないが、その特殊な場合としてのトリー・グラフに対するプロファイル最小化アルゴリズムがすでに確立されていること、さらに、トリー・グラフの各枝に幅をもたせることによりトリー構造を得ることができるることを考慮すれば¹²⁾、分岐を有するトリー構造に対するプロファイルの最小化は下式で与えられる。

$$\begin{aligned} \min. \text{Loss} = & \min. \left\{ \sum_{i=1}^{\alpha} l_i \right\} + \min. \left\{ \sum_{j=1}^{\beta} c_j \right\} \\ & + \min. \{r\} \dots \dots \dots \quad (13) \end{aligned}$$

上式において、Loss は係数行列の主対角要素と各列の最初の非零要素との間に存在する零要素(ロスとよぶ)の個数の総和を示し、右辺第 1 項はトリー構造の各分岐枝を適切に切断して得られる各部分グラフを独立に扱って節点番号付けしたときに求まる部分グラフのロスの数、第 2 項は独立に扱われた分岐枝を再接合するときにその接合箇所において現われるロスであり、その値はそれぞれの分岐枝に含まれる節点数に支配され、第 3 項はここで扱われるのがトリー・グラフではなくトリー構造であることにより発生するロスを示す。式 (13) より、プロファイル最小化法は、

1. 最適な切断箇所の設定法
2. 各部分グラフに対する最適なラベリング法
3. 再接合時の各部分グラフの最適な組み合わせ

の 3 ステップよりなると考えられる。一方、今日提案されているプロファイル最小化アルゴリズムのうち、Reverse Cuthill-McKee Algorithm¹²⁾ は、節点番号を $n, n-1, \dots, 3, 2, 1$ と逆順に与えることにより、上記項目のうち第 2 に対して非常によい結果を与える、さらにこの逆順の番号付けは第 1 項目に対しても 1 つの解答を与えており、さらにグラフの長手軸を考慮に入れることにより、このアルゴリズムを改良したものが Gibbs らによって提案されている¹⁰⁾。

対象がメッシュ構造である場合、メッシュの一部に仮の切断を入れることによりトリー構造に置き換えれば、

分岐を有する、あるいは有しないトリー構造に対するラベリング・アルゴリズムの適用が可能となる。たとえば図-10 (a), (b) に示されるような 1 個のメッシュ構造を有する場合、それぞれ b_1, b_1' において切断を入れれば、分岐のないトリー構造となり、本節で挙げたアルゴリズムを適用すれば最適に近い節点番号を与えることができる。しかしながら、さらに複雑なメッシュ構造に適用し得るラベリング・アルゴリズムは現在提案されてはいない。

6. あとがき

本研究により、マトリックス構造解析法で用いられる数値計算法は、解析対象となる系の位相構造によって選ぶべきであるという考え方が示された。

この考え方から、用いられる数値計算法の合理的かつ経済的な利用が可能となるのはもちろんデータ・プレプロセッシングにおける節点番号付け問題に対しても 1 つの解答を与えることができ、ひいてはマトリックス構造解析の全自動化も容易となる。

また、本論文で示した数値解法の選択という考え方とは、構造解析の分野に限らず、係数行列が対称性を有しかつ疎行列であるような連立一次方程式の解法の選択に对しても明らかに有効である。しかしながら、もし行列のサイズが大きければ、あるいは多くの非零要素を含めば、その位相特性は複雑となり、数値解法のそれと比較することが困難となる。したがって、行列の位相構造がある程度明らかであるか、あるいは簡単な場合に対してここで示した方法は有効であろう。

本研究で示したように、マトリックス法自体が、点と線よりなるネットワークの一表現法であることより、その特性の一部はグラフのそれに属すると考えられ、したがって、今後、マトリックス構造解析へのグラフ理論に基づく一層の研究がなされなければならない。

付録 図式帯幅減少法⁶⁾

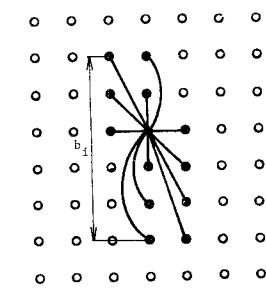
半帶幅値 H.B.W. は離散化された解析モデル（あるいはそのグラフ）の全節点に対し、適当に $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ の節点番号を与えたとき、 $d(v_i, v_j) = 1$ の関係にある任意の 2 点 v_i, v_j (ただし $j > i$) 間における最大節点番号差 $\max(j-i)$ でもって与えられ、したがって H.B.W. の減少、あるいはその最小化は節点番号の付け直しによって行われる。

しかしながら、これとは逆に番号列 $\{1, 2, \dots, n\}$ に對しグラフの節点を写像することも可能である。この操作によれば $\max(j-i)$ は最大個数の節点をジャンプする“線”において発生し、その値はジャンプされた節点

数によって決まる。したがって、H.B.W. の減少、あるいは最小化はジャンプされる節点数を減少し、もしくは最小化することと等価である。

この考え方の特徴は、H.B.W. を節点番号を媒介させずに得ようとする点にある。上記の考え方をもとにして、最大ジャンプ位置およびジャンプされた節点個数を一見して求めることができる、いいかえれば H.B.W. を容易に求められるように改良したのがファイリング・フィールドである。

ファイリング・フィールド（以下、場とよぶ）とは付図に示すように互いに直交する 2 組の等距離線群の交点の集合のことであり、この場に写像されたグラフは次の条件を満たさねばならない。



付図 ファイリング・フィールド

1. グラフの点は、場の交点に必ず位置する。このように配置された縦方向の点列を縦点列とよぶと、すべての縦点列の最上端と最下端の間に位置するすべての交点はグラフの点で満たされねばならない。すなわち空点があってはならない。

2. グラフの線は、同一縦点列内の任意の 2 点間、および隣接する 2 縦点列に含まれる 2 点間に配置される。ただし線の傾きは付図に示すものでなければならない。また、隣接する 2 縦点列間には少なくとも 1 本の水平方向の線が配置されなければならない。

このようにして、場に描かれたグラフの節点番号は最右側縦点列の最上端の点より下方へ、ついで第 2 縦点列の最上端の点へと順次付けられ、最左側点列最下端の点で終わる。

H.B.W. を決定する上述の最大ジャンプは、場に描かれたグラフにおいては、最大相対高さ b_1 (付図参照) を構成する隣接する 2 縦点列間の水平方向の線であり、H.B.W. は下式で与えられる。

$$H.B.W. = \max b_i \quad (i=1, 2, \dots, \alpha)$$

ただし、 $\alpha \leq d_0$

上式において、 i は、最右側の相対高さより順次 1, 2, ..., α と付ける。縦点列は最右側点列よりの等距離節点グループを示すことより、 i の最大 α はグラフの直径 d_0 以下である。

このように半帶幅はファイリング・フィールドに描かれたグラフの最大幅として把握されることがわかり、したがって半帶幅の最小化は、描かれたグラフの最大幅をいかに最小にするかというグラフの書き方に置き換えられる。

なお、3次元のファイリング・フィールドも考えられ、その場に描かれたグラフの一例が本文中 図-3(b)に示される。

参考文献

- 1) Cuthill, E. : Several Strategies for Reducing the Bandwidth of Matrices, *Sparse Matrices and Their Applications* (Editors : D.J. Rose and R.A. Willoughby), Plenum Press, pp. 157~166, 1972.
- 2) Garey, M.R., D.S. Johnson and L. Stockmeyer : Some Simplified NP-Complete Problems, Conference Record of 6th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 47~63, 1974.
- 3) Papadimitriou, ch. H. : The NP-Completeness of the Bandwidth Minimization Problem, *Computing* 16, pp. 263~270, 1976.
- 4) 白石成人・谷口健男：帯幅最小化問題に関する基礎的研究、電算機利用に関するシンポジウム（土木学会），pp. 57~60, 1977.
- 5) 成岡昌夫・中村恒善共編：骨組構造解析法要覧・第1章（日本鋼構造協会），培風館，pp. 1~21, 1976.
- 6) Konishi, I., N. Shiraishi and T. Taniguchi : Reducing the Bandwidth of Structural Stiffness Matrices, *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 4, No. 2, pp. 197~226, 1976.
- 7) Rose, D.J. : A Graph-Theoretic Study of the Numerical Solution of Sparse Positive Definite Systems of Linear Equations, *Graph Theory and Computing* (Editor; R.C. Read), Academic Press, pp. 183~217, 1972.
- 8) 白石成人・谷口健男：構造解析のための節点番号付け最適化手法について、電算機利用に関するシンポジウム, pp. 5~8, 1976.
- 9) Cheng, K.Y. : Minimizing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices, *Computing* 11, pp. 103~110, 1973.
- 10) Gibbs, N.E., W.G. Poole Jr. and P.K. Stockmeyer : An Algorithm for Reducing the Bandwidth and Profile of a Sparse Matrix, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 13, No. 2, pp. 236~250, 1976.
- 11) Cuthill, E. and J. McKee : Reducing the Bandwidth of Sparse Symmetric Matrices, *Proc. of ACM National Conference*, pp. 157~172, 1969.
- 12) Liu, Wai-Hung and A.H. Sherman : Comparative Analysis of the Cuthill-McKee and the Reverse Cuthill-McKee Ordering Algorithms for Sparse Matrices, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 13, No. 2, pp. 198~213, 1976.

(1978.6.12・受付)