

弾性媒体中にある厚肉円筒を伝わる弾性波について

PROPAGATION OF ELASTIC WAVES OF A THICK HOLLOW CYLINDER EMBEDDED IN AN ELASTIC MEDIUM

能町 純雄*・松岡 健一**・坂下 正幸***

By Sumio NOMACHI, Ken-ichi MATSUOKA

and Masayuki SAKASHITA

1. まえがき

円筒を伝播する弾性波の問題は、シェル理論を用いて解析するものが多いが、Baron と Bleich¹⁾ は膜理論を用いて薄いシェルの問題を解析し、Naghdi と Cooper²⁾ は曲げ理論により、せん断変形と回転慣性を考慮した場合と考慮しない場合の位相速度分散曲線を求め、軸対称の場合の計算を行っている。また、Lin と Morgan³⁾ は同様に軸対称の場合に対して周波数と位相速度との分散曲線を求めている。そのほか軸対称問題に関しては Mirsky と Herrmann⁴⁾ の研究があり、高次の分散曲線まで示している。

以上はシェル理論によるものであるが、3次元弾性理論による解析としては、Gazis⁵⁾ の研究がありシェル理論とも比較し、高次の分散曲線でも波長の短いものでなければシェル理論による値も厳密解と比較してそれほど誤差を含まないことを示している。Greenspon⁶⁾ もまた各種のシェル理論と厳密解との比較を行っている。

ところで実際の地中に埋設された円管などは、無限弹性体中にある円筒の問題として取り扱えるが、これの弾性波の伝播問題を厳密に解析したものはない。著者らは先に弾性媒体中にある円柱を伝わる弾性波の伝播速度に対して Hankel 変換を用いて解析したが^{7), 8)}、本論文ではこれを弾性媒体中にある厚肉円筒の問題に拡張し、おもに軸対称および曲げ波動の位相速度の分散曲線を求め検討した。

数値解析は、多くは弾性媒体と円筒の弾性定数で与えられるせん断波の速度比を一定として、弾性媒体と円筒の弾性係数比および円筒の肉厚を数種変化させて行った。また、一部せん断波の速度比を変えたものの計算も

行い、さらに円筒の外周を面に垂直なばねで支えられたシェルとした場合の曲げ波動の解析を行い、3次元理論との比較も行った。

2. 無限円筒体の運動方程式の Hankel 変換による解

図-1 に示すように外径 a_1 、内径 a_2 の無限円筒を考え、座標軸を円筒軸方向に z 、半径方向に r 、円周方向に θ をとり、各方向の変位をそれぞれ w, u, v とする。また、波動の進行方向を z 方向とし、各変位および応力を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \tilde{u}_m \cos m\theta e^{ip(t-\frac{z}{V})}, & v &= \tilde{v}_m \sin m\theta e^{ip(t-\frac{z}{V})} \\ w &= \tilde{w}_m \cos m\theta e^{ip(t-\frac{z}{V})}, & \sigma_r &= \tilde{\sigma}_{rm} \cos m\theta e^{ip(t-\frac{z}{V})} \\ \sigma_\theta &= \tilde{\sigma}_{\theta m} \cos m\theta e^{ip(t-\frac{z}{V})}, & \sigma_z &= \tilde{\sigma}_{zm} \cos m\theta e^{ip(t-\frac{z}{V})} \\ \tau_{r\theta} &= \tilde{\tau}_{r\theta m} \sin m\theta e^{ip(t-\frac{z}{V})}, & \tau_{\theta z} &= \tilde{\tau}_{\theta zm} \sin m\theta e^{ip(t-\frac{z}{V})} \\ \tau_{rz} &= \tilde{\tau}_{rz m} \cos m\theta e^{ip(t-\frac{z}{V})} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (a)$$

ただし、 t は時間、 p は角速度、 V は z 方向の波動の伝播速度である。また、変位と応力の関係は弾性波動を対象とし Lamé の弾性定数 (μ, λ) を用い Hooke の法則が成り立つものとする。

以上のように仮定すれば無限円筒体の運動方程式の解は、Hankel 変換により次のように求められる⁹⁾。

$$u = \tilde{u}_m \cos m\theta e^{ip(t-\frac{z}{V})}, \quad \tilde{u}_m = \tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr} \dots \quad (1)$$

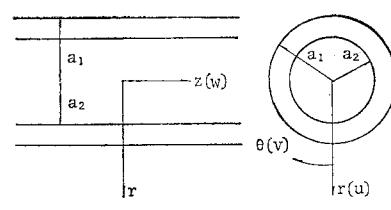


図-1 円柱座標

* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 室蘭工業大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 北海道土木部

$$v = \tilde{v}_m \sin m\theta e^{ip(t - \frac{z}{V})}, \quad \tilde{v}_m = \tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr} \dots \dots \dots (2)$$

$$w = \tilde{w}_m \cos m\theta e^{ip(t - \frac{z}{V})} \dots \dots \dots \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_{mr} = & \sum_{k=1}^2 \left[\frac{1}{N_\mu} \chi_{mp^{(k)}}(N_\mu r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} \right. \right. \\ & + (m+1) A_{mk} + (m-1) B_{mk} - i \frac{N}{2} E_{mk} \Big\} \\ & + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu} \chi_{mp^{(k)}}(N_\mu r) - \frac{N_\alpha}{N^2} \chi_{mp^{(k)}}(N_\alpha r) \right\} \\ & \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} \right. \\ & \left. \left. - i N E_{mk} \right\} \right] \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{mr} = & \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{1}{N_\mu} \chi_{ms}^{(k)}(N_\mu r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} \right. \right. \\ & + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} + i \frac{N}{2} E_{mk} \Big\} \\ & + \frac{\mu N^2}{\rho \beta^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu} \chi_{ms}^{(k)}(N_\mu r) - \frac{N_\alpha}{N^2} \chi_{ms}^{(k)}(N_\alpha r) \right\} \\ & \cdot \left. \left. \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - iNE_{mk} \right\} \right] \dots \dots \dots \quad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}_m = & \sum_{k=1}^2 \left[G_m^{(k)}(N_\mu r) E_{mk} - i \frac{2\mu N}{\rho f^2} \{G_m^{(k)}(N_\mu r) \right. \\ & - G_m^{(k)}(N_\mu r) \} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} \right. \\ & \left. - (m-1) B_{mk} - i N E_{mk} \right\} \right] \dots \quad (6)\end{aligned}$$

ここで、 $N = p/V = 2\pi/l$, l : 波長, ρ : 密度であり、円筒のせん断波の速度を V_s , 体積波の速度を V_b とすれば、

$$\begin{aligned} N_\mu^2 &= N^2 - \rho p^2 / \mu = N^2 - p^2 / V_s^2 = N^2 (1 - V^2 / V_s^2) \\ N_\alpha^2 &= N^2 - \rho p^2 / (2\mu + \lambda) = N^2 - p^2 / V_p^2 \\ &= N^2 (1 - V^2 / V_p^2) \end{aligned}$$

である。式(4)～(6)中の関数は Hankel 変換の逆変換公式より得られるもので、

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{mm}^{(k)}(Nr)}{R_{mm}^{(k)}(Na_k)} \\ \chi_{mp}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m+1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{mm}^{(k)}(Na_k)} \\ \chi_{sp}^{(k)}(Nr) &= \frac{R_{m-1,m}^{(k)}(Nr)}{R_{mm}^{(k)}(Na_k)} \end{aligned} \right\} \dots \quad (b)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{jm}^{(k)}(Nr) &= I_j(Nr) K_m(Na_{k-1}) \\ &\quad - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k-1}) K_j(Nr) \\ i=m-1, m, m+1, \dots, a &= a \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{(c)}$$

I , K は、変形第1種および第2種の Bessel 関数である。また、式中の係数は円筒内外面の変位や応力で与えられるもので

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{mk} = \tilde{\tau}_{r\theta m})_{r=a_k}, \quad \beta_{mk} = \tilde{\sigma}_{rm})_{r=a_k} \\ A_{mk} = \tilde{A}_{mr})_{r=a_k/a_k}, \quad B_{mk} = \tilde{B}_{mr})_{r=a_k/a_k} \\ F_{mk} = \tilde{w}_m)_{r=a_k} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (d)$$

能町・松岡・坂下：

以上、無限円筒に対する変位式を示した。弾性媒体は円孔を有する無限体と考えるが、この場合の変位式は式(4)～(6)において $a_1 = \infty$ として $k=1$ の係数を消去し関数を次のように置くことにより与えられる。

$$\left. \begin{aligned} G_m^{(2)}(Nr) &= \frac{K_m(Nr)}{K_m(Na_2)} \\ \chi_{mp}^{(2)}(Nr) &= -\frac{K_{m+1}(Nr)}{K_m(Na_2)} \\ \chi_{ms}^{(2)}(Nr) &= -\frac{K_{m-1}(Nr)}{K_m(Na_2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(e)$$

3. 固有值方程式

弾性媒体中にある円筒を伝わる弾性波の速度は 2. で求めた解を組合せて、弾性媒体と円筒の境界の境界条件を満足するように導かれた境界条件式からなる固有値方程式の固有値問題として与えられる。このとき 2. で求めた解に対してまず次の適合条件を満足しなければならない。

$$\begin{aligned}
a_j A_{mk} = & \sum_{k=1}^2 \left[\frac{1}{N_\mu} \chi_{mp^{(k)}}(N_\mu a_j) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} \right. \right. \\
& + (m+1) A_{mk} + (m-1) B_{mk} - i \frac{N}{2} E_{mk} \Big\} \\
& + \frac{\mu N^2}{\sigma p^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu} \chi_{mp^{(k)}}(N_\mu a_j) - \frac{N_\sigma}{N^2} \right. \\
& \cdot \chi_{mp^{(k)}}(N_\sigma a_j) \Big\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} \right. \\
& \left. \left. - (m-1) B_{mk} - i N E_{mk} \right\} \right] \dots \dots \dots (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_j B_{mk} = & \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{1}{N_\mu} \chi_{ms^{(k)}}(N_\mu a_j) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} \right. \right. \\
& + (m+1) A_{mk} + (m-1) B_{mk} + i \frac{N}{2} E_{mk} \Big\} \\
& + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu} \chi_{ms^{(k)}}(N_\mu a_j) - \frac{N_\alpha}{N^2} \right. \\
& \cdot \chi_{ms^{(k)}}(N_\alpha a_j) \Big\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} \right. \\
& \left. \left. - (m-1) B_{mk} - i N E_{mk} \right\} \right] \dots \quad (8)
\end{aligned}$$

式(7), (8)は、円筒に対して $j=1, 2$ の合計4式、弾性媒体に対しては $j=2$ のみの2式の条件式となる。また、式中の関数は円筒、弾性媒体それぞれ対応するものを用いるが、弾性媒体では $k = 2$ のものだけである。 elastic medium

ここで図-2のように、弾性媒体を表わすものを添字1、円筒を表わすものを添字2で示す。埋込まれた円筒の内面は中空であるとすれば、円筒の内面で次の条件を満足しなければならない。

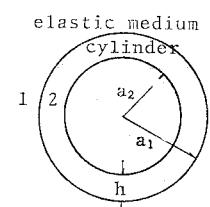


図-2 無限体中にある円筒

弾性媒体中にある厚肉円筒を伝わる弾性波について

$$\text{i) } \sigma_{r+2})_{r=a_2} = 0 \quad \therefore \beta_{m2+2} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (9)$$

さらに弾性媒体と円筒の接触面の条件を満足しなければならないが、これは接触面の状態によって2つの場合を考えられる。すなわち、接触面で弾性媒体と円筒の各方向変位が連続な場合と、接触面にせん断応力が存在しない場合である。

a) 接触面で応力・変位が連続な場合

このとき接触面で各方向変位および応力 σ_r , τ_{rh} , τ_{rz} が等しいものとする。したがって、境界条件は、

$$i) \quad u_1)_{r=a_1} = u_2)_{r=a_1}, \quad v_1)_{r=a_1} = v_2)_{r=a_1}$$

$$\therefore A_{m_1 \cdot 2} = A_{m_2 \cdot 1}, B_{m_1 \cdot 2} = B_{m_2 \cdot 1} \dots \dots \dots (12)$$

$$\text{ii) } w_1)_{r=a_1} = w_2)_{r=a_1} \quad \therefore E_{m_1 \cdot 2} = E_{m_2 \cdot 1} \dots (13)$$

$$\text{iii) } \sigma_{r+1})_{r=a_1} = \sigma_{r+2})_{r=a_1} \quad \therefore \beta_{m_1+2} = \beta_{m_2+1} \dots \quad (14)$$

$$\text{iv) } \tau_{r\theta+1})_{r=a_1} = \tau_{r\theta+2})_{r=a_1} \quad \therefore \quad \alpha_{m1+2} = \alpha_{m2+1} \quad \dots \quad (15)$$

となる。式(11), (16)に用いる τ_{zr} の式は円筒を例にとれば、次のように示される。

$$\begin{aligned} \tau_{zr} = & \sum_{k=1}^2 \left[i \frac{\mu N^2}{\rho P^2} \left\{ 2 \frac{N_\alpha}{N} \left(\chi_{mp^{(k)}}(N_\alpha r) + \frac{m}{N_\alpha r} \right. \right. \right. \\ & \cdot G_m^{(k)}(N_\alpha r) \Big) - \left(\frac{N}{N_\mu} + \frac{N_\mu}{N} \right) \left(\chi_{mp^{(k)}}(N_\mu r) \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{m}{N_\mu r} G_m^{(k)}(N_\mu r) \right) \right\} \{ \beta_{mk} + 2 \mu(m+1) A_{mk} \right. \\ & \left. - 2 \mu(m-1) B_{mk} - 2 \mu i N E_{mk} \} \\ & + i \frac{2 \mu m N}{N_\mu^2 r} G_m^{(k)}(N_\mu r) \{ (m+1) A_{mk} \\ & + (m-1) B_{mk} \} + \mu \left(\frac{N^2}{N_\mu} + N_\mu \right) \left(\chi_{mp^{(k)}}(N_\mu r) \right. \\ & \left. + \frac{m}{N_\mu r} G_m^{(k)}(N_\mu r) \right) E_{mk} + \frac{m N}{N_\mu^2 r} \\ & \cdot G_m^{(k)}(N_\mu r) \alpha_{mk} \Big] \cos m \theta e^{ip(t - \frac{z}{V})} \dots \dots (17) \end{aligned}$$

以上、弾性媒体と円筒の接触面で変位および応力が連続な場合、未知定数は $A_{m1 \cdot 2}$, $B_{m1 \cdot 2}$, $E_{m1 \cdot 2}$, $\alpha_{m1 \cdot 2}$, $\beta_{m1 \cdot 2}$, $A_{m2 \cdot 2}$, $B_{m2 \cdot 2}$, $E_{m2 \cdot 2}$ の計 8 個となり、これらは式 (7), (8) の 6 条件および式 (11), (16) とから 8 元の固有値方程式を形成し、これの根として、この場合の弾性波の位相速度を求めることができる。

b) 接触面にせん断応力が存在しない場合

このとき接触面にせん断応力は存在しないが、半径方向応力 σ_r は存在し、この応力と半径方向変位 u は接触面で連続できるものとする。したがって、このときの境界条件は、

$$\text{i) } u_1)_{r=a_1} = u_2)_{r=a_1}$$

$$\therefore A_{m_1 \cdot 2} + B_{m_1 \cdot 2} = A_{m_2 \cdot 1} + B_{m_2 \cdot 1} \dots \dots \dots (18)$$

$$\text{ii) } \sigma_{r+1})_{r=a_1} = \sigma_{r+2})_{r=a_1} \quad \therefore \beta_{m1+2} = \beta_{m2+1} \dots (19)$$

$$\text{iii) } \tau_{r\theta+1})_{r=a_1} = \tau_{r\theta+2})_{r=a_1} = 0$$

$$\therefore \alpha_{m_1 \cdot 2} = \alpha_{m_2 \cdot 1} = 0 \dots \dots \dots \quad (20)$$

となる。このときの未知定数は $A_{m1 \cdot 2}, B_{m1 \cdot 2}, E_{m1 \cdot 2}, \beta_{m1 \cdot 2}, A_{m2 \cdot 1}, B_{m2 \cdot 1}, E_{m2 \cdot 1}, A_{m2 \cdot 2}, B_{m2 \cdot 2}, E_{m2 \cdot 2}$ である。これらは **a)** の場合と同様式 (7), (8) の 6 条件および式 (11), さらに式 (18) と (21) の 2 式とから 10 元の固有値方程式を形成しこれの根として位相速度を求めることができる。

4. 解析例

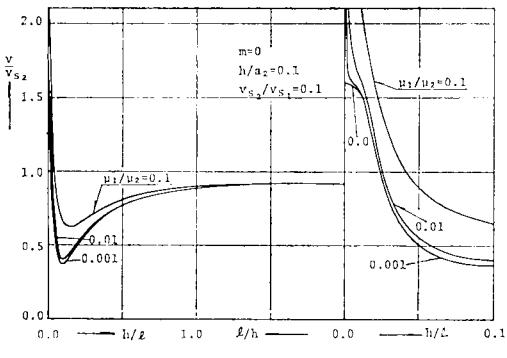
3. の理論により解析した弾性媒体中に埋込まれた円筒を伝播する弾性波の位相速度分散曲線の数値計算結果を示す。解析は、軸対称波動および曲げ波動、すなわち波動の円周方向の性質を示す係数 $m=0$ および 1 を対象とし、円筒の肉厚、弾性係数比を二、三変化させて行った。計算に用いた数値はほとんどのものは弾性媒体と円筒のボアソン比 $\nu_1=\nu_2=0.25$ で $\mu_1/\mu_2=0, 0.001, 0.01, 0.1$ とし、 $\rho_1\mu_2/\rho_2\mu_1=0.1$ の場合で、埋込まれた円筒の内径と肉厚の比 $(a_1-a_2)/a_2=h/a_2=0.1$ および 0.5 の2種である。従来この種の問題は弾性媒体を弹性ばねで置き換えることが多い。これは弾性媒体の密度を無視し、そのばね効果のみに注目することになる。これと同等に近い条件として、ここでは $\rho_1\mu_2/\rho_2\mu_1=0.1$ と仮定した。さらに一部密度の変化による差を検討するため $\nu_1=\nu_2=0.25, \mu_1/\mu_2=0.1$ で、 $\rho_1/\rho_2=0.01, 0.1, 0.2, 0.4$ のものの計算も行った。

数値計算は、3. a) または b) で示した固有値方程式の根としての位相速度を求めるが、根は繰り返し計算により根の有効桁数が 5 衡以上になるまで繰り返して計算を行い求めた。各図の説明で Case-I とあるのは接触面で変位および応力が連続な場合であり、Case-II とあるのは接触面にせん断応力が存在しない場合である。

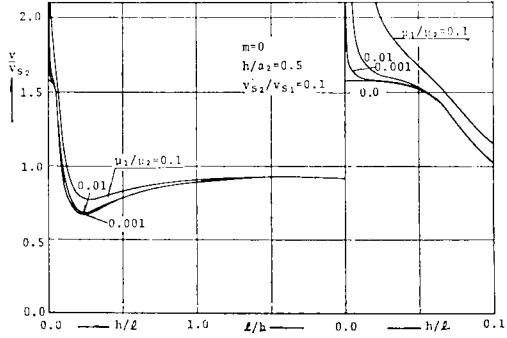
(1) 軸対称波動

上に述べた条件で解析した軸対称波動の位相速度分散曲線を図-3~5に示す。

図-3 (Case-I) は各肉厚比に対する1次の位相速度分散曲線を弾性係数比を変えて示したものである。図は縦軸に位相速度と円筒のせん断波の速度 (V_{s2})との比、横軸には円筒の肉厚と波長の比を左から h/l 、右から l/h をとり全体として波長零から無限大までの値を示している。また、右側には波長の長い範囲を拡大して示した。分散曲線の形状は、 h/a_2 の小さなものでは波長の長いところに小さな極小値をもち h/a_2 の大きなものではこの極小値が h/a_2 の小さなものに比べて大きくなり円柱



(a)



(b)

図-3 軸対称波動の位相速度分散曲線 (Case-I)

の状態に近づいていることがわかる。また、この極小値の生ずる位置は h/a_2 , μ_1/μ_2 の大きなものほど波長の短いところになり、その極小値の大きさも大きくなっている。波長無限大では $\mu_1=0$ すなわち円筒だけの場合には円筒の bar velocity ($\sqrt{E/\rho}$; E は円筒の弾性係数)となるが $\mu_1 \neq 0$ のときは波長の長いところで位相速度は急激に大きくなる。また、波長零では $\mu_1=0$ のとき円筒の Rayleigh 波の速度となり、 $\mu_1 \neq 0$ のときにもほぼ Rayleigh 波の速度に等しくなる。

図-4 には $h/a_2=0.5$, $\mu_1/\mu_2=0.01$ の場合の 2 次までの分散曲線を示した。図中点線は円筒のみのものであるが 1 次の場合上で示したように波長の長いところで両者の間に差がみられる。2 次の曲線では波長の長いところで多少差を示すものの全体としては 1 次の曲線より両者は一致する傾向にある。図は $h/l=1.0$ までの結果を示したが、 $h/l > 1.0$ では両者は差をほとんど示さない。

図-5 (Case-II) は図-3 と同様 1 次の分散曲線を示したものであるが、接触面にせん断応力が存在しない場合のものである。分布は全体として図-3 と似ておりわずかに小さい値である。図-3 と比較して特徴的なことは波長無限大に近づくにつれて図-3 のように大きな値にはならず $\mu_1 \neq 0$ のときでも円筒の bar velocity よ

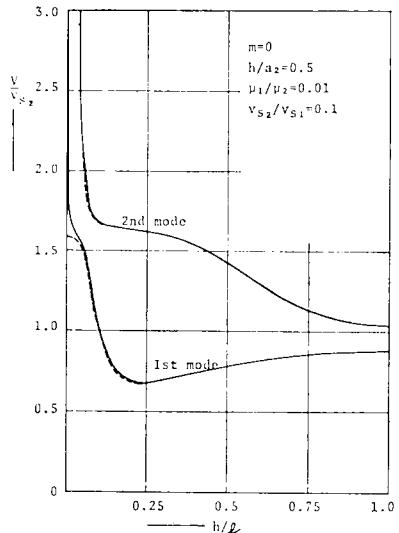
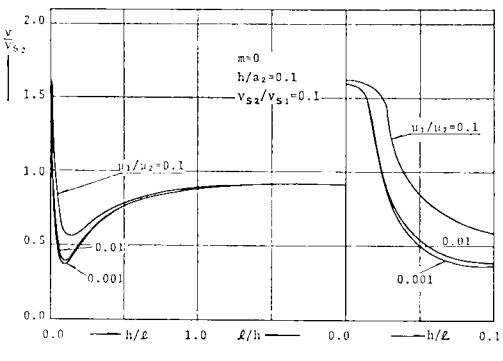
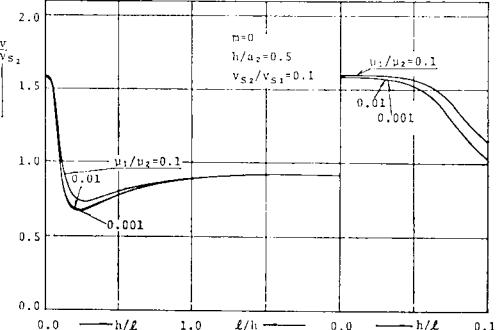


図-4 軸対称波動の高次の位相速度分散曲線 (Case-I)



(a)



(b)

図-5 軸対称波動の位相速度分散曲線 (Case-II)

りわずかに大きな値に収束することである。波長零ではやはり Rayleigh 波の速度と同じ値を示している。

接触面にせん断応力が存在しない場合の高次の分散曲線は示していないが、図-4 と同じ条件で計算したものは図-4 の結果よりさらに円筒のみの分散曲線に近い値となっていた。

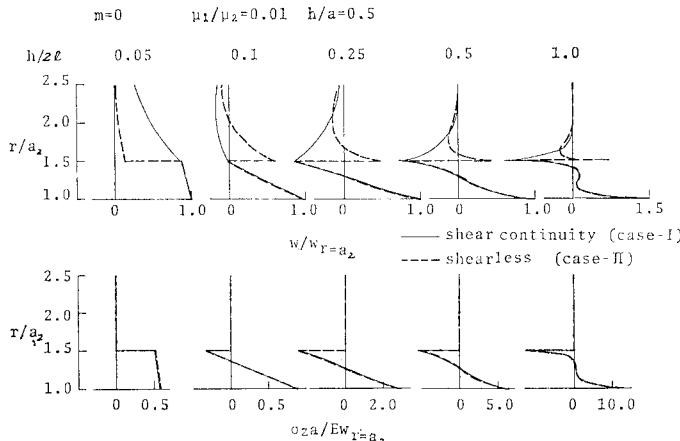


図-6 軸対称波動モード

$h/a_2=0.5$, $\mu_1/\mu_2=0.01$ の 1 次の位相速度に対する軸方向変位 w と軸方向応力 σ_z のモードを若干の波長について求めた結果を図-6 に示した。図中実線は接觸面で変位が連続な場合で、点線は接觸面にせん断応力が存在しない場合のものである。まず前者の場合を考察してみると $h/l=0.05$ では円筒部分の変位はほぼ一定で弾性媒体の変位は r の増加に従いわりあい急速に減少している。 $h/l>0.1$ では円筒部でも変位は急変し、弾性媒体では r の増加に伴い急速に減少するようになっている。 $h/l=1.0$ では変位が円筒の境界面に集中して生じ、表面波の様相を顕著に示している。また、応力の分布は、弾性媒体ではこれの弾性係数が小さいためほとんど零であり、円筒部ではほぼ変位と相似の分布をしているが、 h/l の大きなものほど値は大きくなっている。これは波長が短くなれば円筒部に軸方向に局部的な曲げが強く働くようになるからであろう。次に接觸面にせん断応力が存在しない場合は、円筒部の変位および応力とも変位が連続な場合とそれほど差はないが、弾性媒体の変位は変位が連続な場合とかなり異なった分布をしている。すなわち、各波長に対する分布とも接觸面で変位のずれが表われ、波長の小さいときには、接觸面で円筒の変位とは逆の変

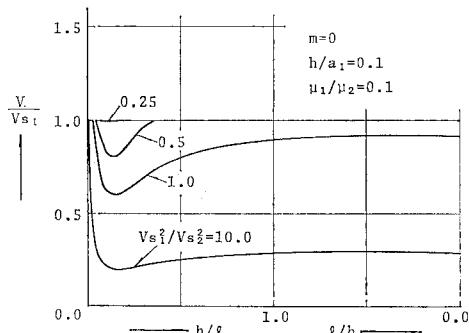


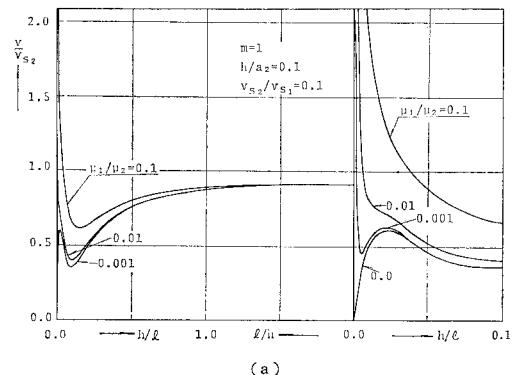
図-7 密度比を変化させた場合の軸対称波動の位相速度分散曲線 (Case-I)

位を示し、半径の増加に従い急激に減少している。また、波長の長いところでは、弾性媒体の変位はかなり小さくなっている。

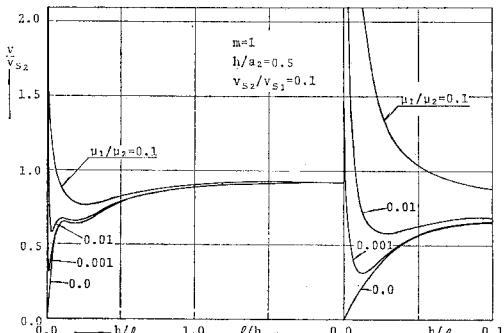
図-7 には、 $\nu_1=\nu_2=0.25$, $\mu_1/\mu_2=0.1$ で、 $\rho_1/\rho_2=0.1, 0.2$, および 0.4 , すなわち $V_{s1}/V_{s2}=1, 0, 0.5, 0.25$ の Case-I のものの計算結果を、上で求めた $V_{s1}/V_{s2}=10.0$ の結果とともに示した。図は縦軸に位相速度と弾性媒体のせん断波の速度との比をとっている。 ρ_1/ρ_2 が大きくなるに従い位相速度は大きくなり、弾性媒体のせん断波の速度に近づき、分散性を示さなくなる。実際のパイプライン等を考えるときパイプを取りまく弾性体は質量をもつが、無限弾性体ではないので図-7 に示した状態は実際には存在しないであろう。

(2) 曲げ波動

軸対称波動と同じ条件で解析した結果を示す。図-8 は図-3 と同様 Case-I に対応するものである。 $\mu_1=0$ すなわち円筒だけの場合には波長無限大で速度は零となり、波長零で円筒の Rayleigh 波の速度となる。さらに、 h/l が大きくなるに従い速度は増加し、 h/l のある



(a)



(b)

図-8 曲げ波動の位相速度分散曲線 (Case-I)

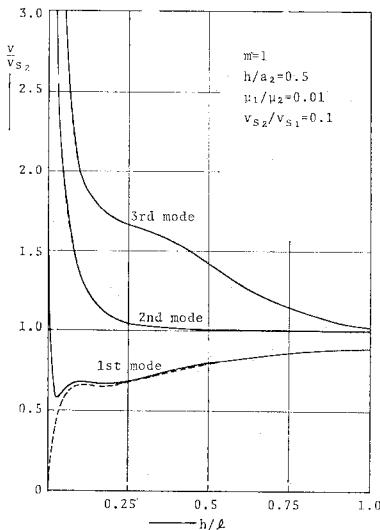


図-9 曲げ波動の高次の位相速度分散曲線 (Case-I)

値で一時極値を示し、いくぶん減少したのち再び増加し Rayleigh 波に近づく。この変化は h/a_2 の大きなものほど緩やかとなり円柱の場合に近くなる。 $\mu_1 \neq 0$ の場合には波長無限大で速度は零とならず、波長の短いところで極値を示し、さらに波長が短くなれば速度は急激に大きくなる。波長零では軸対称の場合と同様円筒の Rayleigh 波の速度と同じ値となる。任意の波長に対する変化は h/a_2 の小さなもの、 μ_1/μ_2 の小さなものほど複雑である。

図-9 は $h/a_2=0.5$, $\mu_1/\mu_2=0.01$ の場合の 3 次までの分散曲線を示した。図中点線は円筒のものである。この場合も 1 次の曲線に差が認められるほか 2, 3 次の曲線は両者ほぼ一致している。

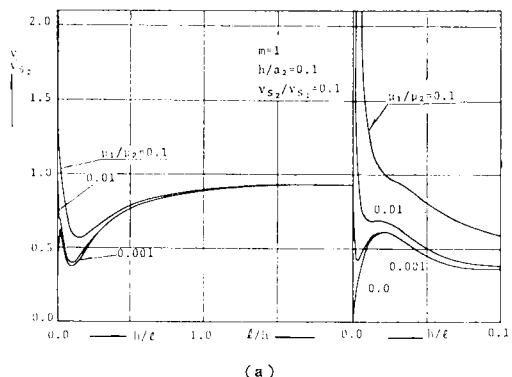
接触面にせん断応力が存在しない場合の曲げ波動の分散曲線を図-10 に示す。全体としての傾向は図-8 とほとんど同じであるが、一様にわずかばかり小さくなっている。この場合の高次の分散曲線は示していないが図-9 と同様、同じ条件では円筒のみの位相速度分散曲線にかなりよく一致していた。

図-11 に $h/a_2=0.5$, $\mu_1/\mu_2=0.01$ の 1 次の位相速度に対する w と σ_z のモード分布を示した。この図では曲げ波動であるので、無次元化のために分母に $u_r=a_z$ を用いている。円筒部においては Case-I と Case-II の間にあまり差はない、波長の大きさに無関係に曲げを受けていることが明ら

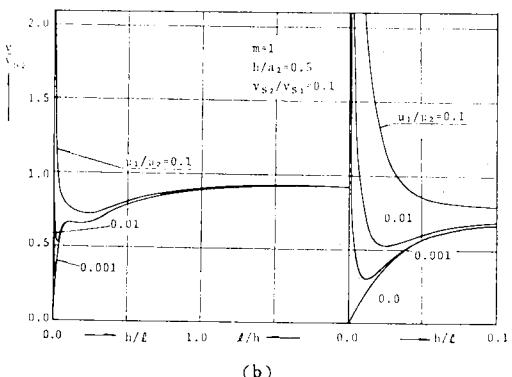
かである。波長が短くなるに従い軸方向の局部的な曲げが大きくなり、軸対称波動と同様になっている。弾性媒体の変位も軸対称の場合と同様に、半径の増加とともに急激に減少し、Case-II のとき接触面に変位のずれが生じ、円筒と弾性媒体では逆向きの変位を生じている。

(3) 弾性ばねで支えられたシェルとした場合との比較

上で解析した 3 次元理論値と比較するため弾性媒体中



(a)



(b)

図-10 曲げ波動の位相速度分散曲線 (Case-II)

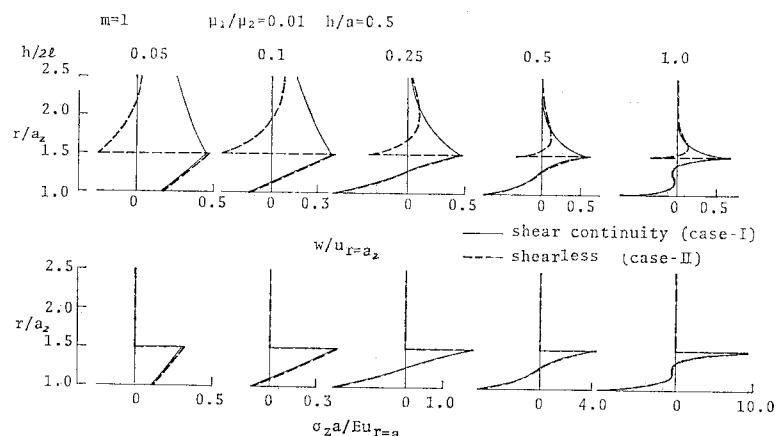


図-11 曲げ波動モード

の厚肉円筒を、円筒の外周面に垂直な弾性ばねで支えられたシェルと考えた簡易理論によって解析した。シェル理論は Herrmann ら⁴⁾が導いた Timoshenko 型の理論を用い、3次元理論との比較は曲げ波動について行ったが、シェルのせん断係数は波長零のとき3次元解析によって得られる曲げ波動の位相速度の値と一致するよう定めた。シェル理論による解析に用いた数値は、ボアン比 0.25, $h/a_2=0.1$, $ka_2/E_2=0, 0.001, 0.01, 0.1$ である。ただし、ここで a_2 はシェルの内径, k はばね定数, E_2 はシェルの弾性係数である。

解析した結果は図-12 に示した。図は $h/l=0.1$ までの値を示しており、実線は3次元理論の Case-II の値であり、点線は簡易理論による値である。図-12 から明らかなように、この解析例では、 $k=0$ の場合3次元解析とほとんど一致している。これはシェルのせん断係数を波長零で3次元理論と一致するよう定めたためである。

が、Herrmann らのように $\pi/\sqrt{12}$ とした場合でも $h/l < 0.1$ ではほとんど一致していた。ばねを考慮した場合には、ここでは3次元理論の μ_1/μ_2 に対応するものとして ka_2/E_2 をとって比較してみたが、 $\mu_1/\mu_2=0.001$ に対しては $h/l > 0.006$ ではばねの影響が少ないので、3次元理論と簡易理論は一致し、 $\mu_1/\mu_2=0.1$ に対しては $h/l < 0.02$ で比較的一致するが $0.1 > h/l > 0.02$ ではかなり異なっている。 $\mu_1/\mu_2=0.01$ に対しては、上の 2 つの場合の中間的な結果で全体としてますます一致している。図-10 に示したように波長の短いものは、3次元理論では弾性媒体の弾性係数に関係なく、円筒のものに急激に近づいている。この傾向はシェル理論の場合も同様であり、したがって図には示していないが、波長の短い場合 ($h/l > 1.0$ 位) には両者が一致するようになるのは当然である。

弾性体中の円柱の曲げ波動の位相速度分散曲線では、これをばねで支えられた Timoshenko ばかりとした簡易理論と3次元厳密理論では、波長の長い場合にもかなりよく一致したが⁸⁾、円筒の場合には、波長の長いところでは μ_1/μ_2 と ka_2/E_2 を単純に同一視したものとは円柱の場合のようには一致しない。

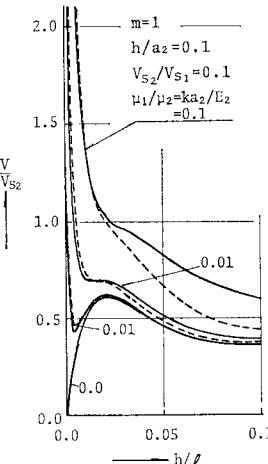


図-12 簡易理論との比較

5. む す び

弾性波動を調和波動と仮定し、その進行方向を円筒軸方向とした場合の円筒の波動伝播の基本式を Hankel 変換を用いて求めた結果を示し、これを用いて無限弾性体中にある円筒を伝わる弾性波の問題を取り扱った。具体的には弾性体と円筒の境界面の条件で与えられる境界条件式からなる固有値方程式を導き、これの固有値から軸対称波動および曲げ波動の位相速度を求め波長に対する分散性を検討した。種々の条件で数値計算を行ったが、その結果、

i) 無限弾性媒体の弾性係数が大きいほど、位相速度は大きくなる。

ii) 弹性体間の接触面における状態に対しては、変位が連続なものが、せん断応力が存在しないものより、わずかに位相速度は大きい。

iii) 高次の位相速度分散曲線は、弾性媒体の存在による影響が第1次のものよりも少ない。

iv) 肉厚が小さいほど、分散曲線においては極大・極小の変化が大きくなり、肉厚が大きくなれば、位相速度分散曲線は棒の値に近づく。

v) 軸対称波動のとき、波長がきわめて長い場合には接触面にせん断応力が存在しなければ bar velocity にある程度漸近はするが、さらに長くなると急激に大きくなる。

vi) 曲げ波動では、波長がきわめて長いときは、接触面にせん断応力が存在する場合も存在しない場合も、位相速度は急激に大きくなる。

vii) 波長がきわめて短いときは、中実の円柱の場合は異なり円筒のように内部に自由表面があれば Rayleigh 波の速度となる。

viii) 円筒の外周面を垂直な弾性ばねで支えられたシェルと考えた簡易理論と厳密理論は、ここでの計算結果 ($h/a_2=0.1$) では波長の長いところであまりよく一致しない。

なお、燃料輸送用のパイプラインなどにこの種の問題を適用する場合には、円筒内に液体を考慮しなければならないがこの場合には、液体の波動方程式の解をさらに組合せてやることによって解析することができる。

本論文は、昭和 51 年度文部省科学研究費(一般研究)の補助を受けて行った研究の一部である。また、数値計算は北海道大学大型計算機センターの FACOM-230-75 で行ったものである。

参 考 文 献

- Baron, M.L. and H.H. Bleich : Tables for Frequencies and Modes of Free Vibration of Infinitely Long Thin

- Cylindrical Shells, J. Appl. Mech., Vol. 24, p. 278, 1954.
- 2) Naghdi, P.M. and R.M. Cooper : Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Shells Including the Effects of Transverse Shear and Rotatory Inertia, J.A.S.A., Vol. 28, No. 1, p. 56, 1956.
- 3) Lin, T.C. and G.W. Morgan : A Study of Axisymmetric Vibrations of Cylindrical Shells as Affected by Rotatory Inertia and Transverse Shear, J. Appl. Mech., Vol. 23, No. 2, p. 255, 1956.
- 4) Mirsky, I. and G. Herrmann : Nonaxially Symmetric Motions of Cylindrical Shells, J.A.S.A., Vol. 29, No. 10, p. 1116, 1957.
- 5) Gazis, D.C. : Three-Dimensional Investigation of Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinder, J.A.S.A., Vol. 31, No. 5, p. 568, 1959.
- 6) Greenspon, J.E. : Vibrations of a Thick-Walled Cylindrical Shell—Comparison of the Exact Theory with Approximate Theories, J.A.S.A., Vol. 32, No. 5, p. 571, 1960.
- 7) Matsuoka, K.G. and S.G. Nomachi : On Stress Wave of a Cylinder Embedded in an Elastic Medium, THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, Vol. 24, p. 399, 1976.
- 8) 松岡健一・能町純雄：弾性媒体中にある円柱を伝わる曲げ波動の伝播速度について，土木学会論文報告集，第258号，p. 13, 1977.

(1977.12.28・受付)