

多次元圧密における固有値問題とその応用

EIGENVALUE PROBLEMS OF MULTI-DIMENSIONAL
CONSOLIDATION AND THEIR APPLICATIONS

田 村 武*
By Takeshi TAMURA

1. 概 説

Terzaghi の一次元圧密の方程式については、変数分離法を用いて任意の初期条件に対し周知の級数解を得ることができる。一様な初期隙水圧分布を仮定すれば、図-1 の実線のような圧密度-時間係数曲線を得る。一方、破線はそのときの級数解のうち第1項だけを取り出したものである。この図からわかつることは、時間係数にして 0.1 付近から以後で第2項以下がほとんど無視できることである。いいかえると圧密の後半部だけを注目する場合、たとえば圧密の完了の速さを調べる場合などは完全な解を求める必要はなく、級数解の第1項すなわち第1固有値とその固有関数のみを算定すればよいことを示している。以上の考え方を Biot の方程式に支配される多次元圧密にまで拡張することが本論文の目的である。

多次元圧密における固有値問題は、Biot¹⁾自身にその端を発するごとく広く研究が行われており、Biot の方程式の解析解²⁾の多くに応用されている。とりわけ Mandel³⁾の先駆的な業績は高く評価される。しかるに、それらの方法は Biot の方程式を直接用いるため、固有値問題の形式をきわめて複雑なままにしている。そこで本研究では、Biot の方程式から変位を消去して間隙水圧のみで表わした圧密の方程式⁴⁾に固有値問題を適用す

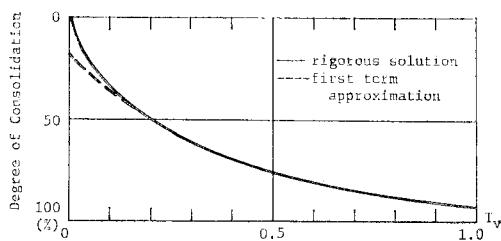


図-1 一次元圧密における圧密度-時間係数曲線

* 正会員 工修 京都大学助手 工学部交通土木工学科

る。この方法によれば、固有値あるいは固有関数の意味が自然に解釈できるばかりでなく、その理論構成が著しく簡単になる。以下、2. では固有値問題に適した圧密の方程式を概述し、3. では一般的な形で圧密の固有値問題を詳しく説明する。そのあと 4. では固有値の容易に求まる球や円の場合に適用し、また 5. では実際的な応用としてサンドドレン工法の圧密促進効果について固有値の数値解析による評価を行う。

近年、圧密現象の解析が盛んに行われているが、計算値と現場実測値との対応づけにはまだ未解決の問題が多い。こうした中で統計学的手法を駆使した沈下予測⁵⁾がかなりの成果をあげている。これは、実測沈下量より1つあるいはいくつかの固有値を抽出しようとするものと考えられるが、本研究は、力学的な立場にたって圧密機構そのものより固有値を算定し、圧密進行の速さや卓越する間隙水圧分布の予測をめざしたものである。とりわけ、第1固有値（最小固有値）のもつ工学的意味について著者の考え方を強調する。

2. 間隙水圧で表現した圧密の方程式⁴⁾

間隙水の流れが Darcy の法則に従うような飽和粘土の圧密現象は、次の Biot の方程式により支配される。

$$\left\{ \sum_j \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \dots \dots \dots (1) \right.$$

$$\left. \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{1}{r_w} \sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (p + r_w \varrho) \dots \dots \dots (2) \right.$$

ここに、

σ'_{ij} : 有効応力テンソル, p : 間隙水圧

f_i : 物体力, c : 体積ひずみ

r_w : 間隙水の単位体積重量

k_{ij} : 透水係数テンソル, ϱ : 位置水頭

x_i : 直交座標, t : 時間

であり、応力、ひずみについては圧縮を正としておく。

また、総和記号 Σ の変数 i, j は 1 から 3 まで変化するがその範囲は明示しない。

方程式 (1), (2) には、次の境界条件が付随している。

$$\left\{ \begin{array}{l} (B_u) : \text{変位に関する境界条件} \\ \quad u_i = \bar{u}_i \ (i=1, 2, 3) \text{ on } S_u \\ (B_\sigma) : \text{(全) 応力に関する境界条件} \\ \quad T_i = \bar{T}_i \ (i=1, 2, 3) \text{ on } S_\sigma \\ (B_D) : \text{間隙水の排水に関する境界条件} \\ \quad p = \bar{p} \text{ on } S_D, \sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (p + \tau_w \varrho) n_j = 0 \text{ on } S_{UD} \end{array} \right.$$

ここに、

S_u : 変位境界, S_σ : 応力境界

S_D : 排水境界, S_{UD} : 非排水境界

u_i : ($-x_i$ 方向の) 変位

\bar{u}_i : S_u 上の与えられた変位

T_i : 表面応力, \bar{T}_i : S_σ 上の与えられた表面応力

\bar{p} : S_D 上の与えられた間隙水圧

n_i : 境界上の単位法線ベクトル

である。

時間が十分たつと圧密現象は定常状態に達する。もし、考えている飽和粘土の構造骨格が線形弾性体、すなわち ϵ_{ij} をひずみテンソルとして、

$$\sigma'_{ij} = \sum_{k,l} D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (3)$$

と仮定しうる場合には、この定常状態(圧密の最終状態)での変位、応力をそれらの基準にとることができる。定常状態における σ'_{ij} , p , e および u_i の値をそれぞれ σ'_{fij} , p_f , e_f および u_{fi} として、新しい変数を

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau'_{ij} = \sigma'_{ij} - \sigma'_{fij} \ (i, j=1, 2, 3) \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = p - p_f \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = e - e_f \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_i = u_i - u_{fi} \ (i=1, 2, 3) \end{array} \right. \quad (7)$$

と定義しておく。すると Biot の方程式 (1), (2) は、

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \ (i=1, 2, 3) \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_w} \sum k_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \end{array} \right. \quad (9)$$

となり、境界条件 (B_u) , (B_σ) および (B_D) は、 $\bar{u}_i \equiv 0$, $\bar{T}_i \equiv 0$, $\bar{p} \equiv 0$ とした齊次境界条件 (B_{u0}) , $(B_{\sigma0})$ および (B_{D0}) にそれぞれ変化する。このとき、つりあい式 (8) から変位 v_i と(過剰)間隙水圧 u との線形関係:

$$v_i(x) = \int_V U_i(x, X) u(X) dV_X \quad (10)$$

が導かれる。ここで $U_i(x, X)$ は、領域 V 内の点 X に単位の間隙水圧があるとき、点 x に生じる変位である。 dV_X の X は積分変数を意味する。なお、領域 V 内の点を表わす x, X とそれらの座標を表わす x_i, X_i を区別せずに用いる。式 (10) の両辺の発散をとって、

体積ひずみ θ と間隙水圧 u との線形関係:

$$\theta(x) = \int_V \theta(x, X) u(X) dV_X \quad (11)$$

が求まる。ここに、

$$\theta(x, X) = \sum_i \frac{\partial U_i(x, X)}{\partial x_i} \quad (12)$$

であり、点 X に単位の間隙水圧があるとき、点 x に生じる体積ひずみを表わす。 $\theta(x, X)$ が、圧密現象とは無関係に時間に対し不変であることを考慮して、式 (11) を連続方程式 (9) に代入すると、次のような圧密の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \int_V \theta(x, X) \frac{\partial u}{\partial t}(X, t) dV_X \\ &= -\frac{1}{\tau_w} \sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) \end{aligned} \quad (13)$$

あるいは式 (11) の逆関係式:

$$u(x) = \int_V \phi(x, X) \theta(X) dV_X \quad (14)$$

を定義して、式 (9) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -\frac{1}{\tau_w} \int_V \phi(x, X) \sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \\ &\cdot (X, t) dV_X \end{aligned} \quad (15)$$

のように間隙水圧 u の時間変化率を陽に表わした圧密の方程式も得られる。ここに $\phi(x, X)$ は点 X のみに単位の体積ひずみを与えたとき、点 x に生じる間隙水圧である。式 (13) および (15) はともに間隙水圧 u のみで表現した圧密の方程式であり、本質的には等価なものである。熱伝導型の Terzaghi の方程式と比較しながら Biot の方程式の構造を調べるには式 (15) の形が有用であるが、以下で述べる固有値問題には式 (13) の形が適している。

特に構造骨格が等方弾性で、かつ V が無限領域とすると、 $\theta(x, X)$, $\phi(x, X)$ はそれぞれ

$$\theta(x, X) = -\frac{1}{\lambda+2\mu} \delta(x, X) \quad (16)$$

$$\phi(x, X) = -(\lambda+2\mu) \delta(x, X) \quad (17)$$

となり、さらに透水係数の等方性:

$$k_{ij} = k \delta_{ij} \quad (18)$$

をも仮定すれば、式 (13) および (15) はともに、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(\lambda+2\mu)k}{\tau_w} \nabla^2 u \quad (19)$$

となる。ここに、

$\delta(x, X)$: Dirac の delta 関数

δ_{ij} : Kronecker の delta

λ, μ : Lamé の定数

∇^2 : Laplacian

k : 透水係数

である。このとき、もし領域が有限な場合には、 $\theta(x, X)$, $\phi(x, X)$ を

$$\theta(x, X) = -\frac{1}{\lambda+2\mu} \delta(x, X) + A(x, X) \dots (20)$$

$$\phi(x, X) = -(\lambda+2\mu)\delta(x, X) + \Gamma(x, X) \dots (21)$$

のように分割すると、式 (13) および (15) はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda+2\mu) \int_V A(x, X) \frac{\partial u}{\partial t}(X, t) dV_X \\ = -\frac{(\lambda+2\mu)k}{r_w} \nabla^2 u \dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(\lambda+2\mu)k}{r_w} \nabla^2 u \\ - \frac{k}{r_w} \int_V \Gamma(x, X) \nabla^2 u(X, t) dV_X \dots (23) \end{aligned}$$

となる。ここに $A(x, X)$ および $\Gamma(x, X)$ は有限の境界が存在するために生じる体積ひずみおよび間隙水圧である。 $\Gamma(x, X)$ の場合⁴⁾ と同様にして、 $A(x, X)$ を次のように求めることができる。すなわち、有限な境界が存在しないとしたとき、単位の間隙水圧 $u=\delta(x, X)$ によって、

$$U_i(x, X) = \frac{1}{4\pi(\lambda+2\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (i=1, 2, 3; \text{三次元の場合}) \dots (24)$$

$$U_i(x, X) = \frac{1}{2\pi(\lambda+2\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \quad (i=1, 2; \text{二次元の場合}) \dots (25)$$

なる変位が生じるが、これらによる境界上の変位 $\tilde{u}_i(S_u \text{ 上})$ および表面応力 $\tilde{T}_i(S_s \text{ 上})$ を打ち消すような境界条件 (\tilde{B}) :

$$\begin{aligned} (\tilde{B}) \quad u_i &= -\tilde{u}_i \quad (i=1, 2, 3) \text{ on } S_u \\ T_i &= -\tilde{T}_i \quad (i=1, 2, 3) \text{ on } S_s \end{aligned}$$

のもとで通常の弾性問題（式 (1) で $p=0, f_i=0$ おいたもの）を解きその体積ひずみを求めてやれば、それが $A(x, X)$ となる。ここに $r=|x-X|$ (点 x と X の間の距離) である。また、 $\Gamma(x, X)$ の場合と同様に、

$$\nabla^2 A(x, X) = 0 \dots (26)$$

$$A(x, X) = A(X, x) \dots (27)$$

であることもわかる。

さらに式 (22), (23) を比較して、

$$\int_V \left\{ A(x, X) \frac{\partial u}{\partial t}(X, t) - \frac{k}{r_w(\lambda+2\mu)} \right. \\ \left. - \Gamma(x, X) \nabla^2 u(X, t) \right\} dV_X = 0 \dots (28)$$

が成立する。

3. 圧密現象における固有値問題

ふたたび一般的な場合にもどる。

式 (13) および (15) はいずれも圧密の方程式であるが、先にも述べたように、固有値問題には式 (13) の方が適している。ここでは、式 (13) を基礎にして圧密現

象における固有値および固有関数について考察する。

(1) 固有方程式

間隙水圧を

$$u(x, t) = u_\alpha(x) e^{-\lambda_\alpha t} \quad (\alpha=1, 2, \dots) \dots (29)$$

のように位置だけの関数 $u_\alpha(x)$ と時間の指數関数 $e^{-\lambda_\alpha t}$ とに分離して式 (13) に代入すると、

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha \int_V \theta(x, X) u_\alpha(X) dV_X \\ = \frac{1}{r_w} \sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial^2 u_\alpha(x)}{\partial x_i \partial x_j} \dots (30) \end{aligned}$$

を得る。排水に関する齊次境界条件 B_{D_0} のもとで、式 (30) を満足する恒等的に零でない解 $u_\alpha(x)$ を圧密の固有関数、またそのときの λ_α を固有値とよぶことにする。つまり式 (29) の固有関数 $u_\alpha(x)$ とは、時間の進行とともにその形状を変えないような間隙水圧分布のことであり、またその大きさを変える時間的速さを決めるものが固有値 λ_α である。容易にわかるように、大きな λ_α に対応する固有関数は速く減衰し、小さい λ_α に対応する固有関数は減衰が遅い。以下で式 (30) を固有方程式とよぶことにする。

(2) 固有値、固有関数の性質

a) 正値性 ($\lambda_\alpha > 0$ であること)

固有方程式 (30) の両辺に $u_\alpha(x)$ を乗じて積分するとき次の式を得る。

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha \int \int_V \theta(x, X) u_\alpha(x) u_\alpha(X) dV_x dV_X \\ = \frac{1}{r_w} \int_V \left(\sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial^2 u_\alpha(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right) u_\alpha(x) dV_X \dots (31) \end{aligned}$$

まず左辺の重積分の意味を考える。

$$\begin{aligned} \int \int_V \theta(x, X) u_\alpha(x) u_\alpha(X) dV_x dV_X \\ = \int_V \theta_\alpha(x) u_\alpha(x) dV_x = \int_V \sum_i \frac{\partial v_{\alpha i}(x)}{\partial x_i} u_\alpha(x) dV_x \\ = \int_{S_u + S_s} \left(\sum_i v_{\alpha i} n_i \right) u_\alpha dS - \int_V \sum_i v_{\alpha i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} dV_X \\ = \int_{S_u + S_s} \left(\sum_i v_{\alpha i} n_i \right) u_\alpha dS + \int_V \sum_{i,j} v_{\alpha i} \frac{\partial \tau'_{\alpha ij}}{\partial x_j} dV_x \\ = \int_{S_u + S_s} \sum_{i,j} (\tau'_{\alpha ij} + u_\alpha \delta_{ij}) n_j v_{\alpha i} dS \\ - \int_V \sum_{i,j} \frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial x_j} \tau'_{\alpha ij} dV_x \\ = -2 \int_V \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j} \tau'_{\alpha ij} \eta_{\alpha ij} \right) dV_x = -2 E_\alpha \dots (32) \end{aligned}$$

ここで、第1式から第2式へは $\theta(x, X)$ の定義 (式 (11))、第3式へは $\theta_\alpha(x)$ の定義、第4式へは部分積分、第5式へはつりあい式 (8)、第6式へは再び部分積分、第7式へは齊次境界条件 (B_{u0})、(B_{s0}) およびひずみの定義、そして第8式へはひずみエネルギーの定義を

それぞれ用いた。なお、 θ_α 、 $v_{\alpha i}$ 、 $\tau'_{\alpha ij}$ 、 $\eta_{\alpha ij}$ および E_α はそれぞれ、齊次境界条件のもとで間隙水圧 u_α があるときに生じる体積ひずみ、変位、有効応力テンソル、ひずみテンソルおよびひずみエネルギーである。上の結果からわかるように式(31)の左辺の積分は常に負値である。また、以下の説明を簡潔にするため、この左辺の積分を利用して排水に関する齊次境界条件 (B_{D0}) を満たす間隙水圧分布の集合の中に次のような内積を定義しておく。

$$[u_\alpha, u_\beta] = -\frac{1}{2} \iint_V \Theta(x, X) u_\alpha(x) u_\beta(X) dV_x dV_X \quad \dots \quad (33)$$

一方、式(31)の右辺は、部分積分をしたのち排水に関する齊次境界条件 (B_{D0}) を考慮すると、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_w} \int_V \left(\sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \right) u_\alpha dV_x \\ &= -\frac{1}{r_w} \int_V \sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} dV_x \dots \end{aligned} \quad (34)$$

となるが、これは浸透によるエネルギー損失の時間的割合に負号をつけたもので、常に負の量である。以上より、式(31)の固有値 λ_α は正値であることが理解される。また、式(31)を書きなおして、

$$2\lambda_\alpha = \frac{\frac{1}{r_w} \int_V \sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} dV_x}{[u_\alpha, u_\alpha]} \quad \dots \quad (35)$$

とすると、固有関数 u_α に等しい間隙水圧分布がもたらすひずみエネルギー ($[u_\alpha, u_\alpha]$) の中で、浸透により単位時間に失われていくエネルギーの割合が固有値 λ_α の 2 倍であると解釈できる。なお、固有値の存在を保証するために、ここでは考える領域を有限としておく⁶⁾。

b) 固有関数の直交性

2 つの固有値 λ_α 、 λ_β に対応する固有関数を u_α 、 u_β とする。すなわち、

$$\lambda_\alpha \int_V \Theta(x, X) u_\alpha(X) dV_X = \frac{1}{r_w} \sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \dots \quad (36)$$

$$\lambda_\beta \int_V \Theta(x, X) u_\beta(X) dV_X = \frac{1}{r_w} \sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_i \partial x_j} \dots \quad (37)$$

とし、それぞれの両辺に $-\frac{1}{2} u_\beta(x)$ 、 $-\frac{1}{2} u_\alpha(x)$ を乗じて変数 x について積分する。そして両者の差をとり、式(33)で定義した内積と Green の積分公式を考慮すると、

$$\begin{aligned} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) [u_\alpha, u_\beta] &= -\frac{1}{2 r_w} \int_V \left\{ \left(\sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \right) u_\beta \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial x_i \partial x_j} \right) u_\alpha \right\} dV_x \\ &= -\frac{1}{2 r_w} \int_{S_D + S_{UD}} \left\{ \left(\sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} n_j \right) u_\beta \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_i} n_j \right) u_\alpha \right\} dS \end{aligned}$$

$$- \left(\sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_i} n_j \right) u_\alpha \} dS \dots \quad (38)$$

となるが、排水に関する齊次境界条件 (B_{D0}) より、第 3 式は零であって、 $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ とすれば、

$$[u_\alpha, u_\beta] = 0 \dots \quad (39)$$

が結論される。つまり異なる固有値に対する固有関数は、内積 $[,]$ の意味で直交している。このことは、 $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ のとき u_α なる間隙水圧によって生じている応力状態に対しては、 u_β なる間隙水圧によって生じるひずみが作用しても仕事をしないことを意味している。

なお、固有関数の大きさは内積 $[,]$ について正規化しておく。つまり、

$$[u_\alpha, u_\alpha] = -\frac{1}{2} \iint_V \Theta(x, X) u_\alpha(x) u_\alpha(X) dV_x dV_X = 1 \dots \quad (40)$$

であり、固有関数 u_α によるひずみエネルギーは単位の大きさとする。また、同一の固有値に対して 2 つ以上の固有関数がある場合には Schmidt の方法により直交化しておく。以上のことにより一般性を失うことなく、任意の 2 つの固有関数 u_α 、 u_β には、

$$[u_\alpha, u_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \dots \quad (41)$$

が成立し、固有関数の集合は正規直交系をなす。

c) 固有関数による解の表現

個々の関数 $u_\alpha(x) e^{-\lambda_\alpha t}$ ($\alpha=1, 2, \dots$) は、定義より方程式(13)と排水に関する齊次境界条件 (B_{D0}) を満たす解であるが、任意の初期条件を満たすには、それらの解を重ね合わせなければならない。その解を

$$u(x, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha u_\alpha(x) e^{-\lambda_\alpha t} \dots \quad (42)$$

とおき、通常の方法で係数 a_α を決定する。圧密過程の初期条件を表わす間隙水圧分布 $u_0(x)$ は、非排水条件 $e \equiv 0$ のもとで解いた間隙水圧 p と圧密の最終状態における間隙水圧 p_f との差 ($p - p_f$) として求められるものであるが注¹⁾、ここではすでに $u_0(x)$ が与えられたものとする。式(42)で $t=0$ とおくと、

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha u_\alpha(x) \dots \quad (43)$$

となるが、これを満たすように a_α を求める。それには固有関数の正規直交条件(式(41))を用いればよい。実際、式(43)の第 2、3 式に $u_\beta(x)$ との内積をとると、

$$[u_0, u_\beta] = \left[\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha u_\alpha, u_\beta \right] = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \delta_{\alpha\beta} = a_\beta \dots \quad (44)$$

となる。つまり(Fourier)係数 a_α は、

$$\begin{aligned} a_\alpha &= [u_0, u_\alpha] \\ &= -\frac{1}{2} \iint_V \Theta(x, X) u_0(x) u_\alpha(X) dV_x dV_X \end{aligned} \dots \quad (45)$$

注 1) あるいは最終状態における体積ひずみ e_f に対して、
 $\theta = -e_f$ なる拘束条件のもとで式(8)を解いてもよい。

のように求めることができ、解を

$$u(x, t) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} [u_0, u_{\alpha}] u_{\alpha}(x) e^{-\lambda_{\alpha} t} \quad \dots \dots \dots \quad (46)$$

と表現することができる。

以上のことにより、初期間隙水圧が既知の場合、圧密問題を解くことは固有値と固有関数を求めるために帰着する。

d) (Fourier) 係数 a_{α} のもつ意味

式 (46) で表わす解 $u(x, t)$ より内積 $[u, u]$ を計算すると、

$$\begin{aligned} [u, u] &= \left[\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\alpha} u_{\alpha}(x) e^{-\lambda_{\alpha} t}, \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\alpha} u_{\alpha}(x) e^{-\lambda_{\alpha} t} \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\alpha}^2 [u_0, u_{\alpha}] e^{-2\lambda_{\alpha} t} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{\alpha}^2 e^{-2\lambda_{\alpha} t} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (47)$$

なる式 (Parseval の等式) を得るが、これは、時刻 t において系に残存しているひずみエネルギー $[u, u]$ が個々の固有関数のもつひずみエネルギーの和として表現され、また、それらの減衰の速さが $e^{-2\lambda_{\alpha} t}$ であることを示している。

一次元圧密では、残留間隙水圧と初期間隙水圧のそれぞれの代数和の比により圧密度を定義しているが、多次元圧密に対しては明確な圧密度の定義はない。しかし、残留しているひずみエネルギー E と初期におけるひずみエネルギー E_0 との比を用いて圧密度 $U(t)$ を定義しようとすれば次のようになる。

$$U(t) = 1 - \sqrt{\frac{E}{E_0}} = 1 - \sqrt{\frac{\sum [u_0, u_{\alpha}]^2 e^{-2\lambda_{\alpha} t}}{[u_0, u_0]}} \quad \dots \dots \dots \quad (48)$$

ここで、 t を大きくとると近似的に、

$$U(t) \approx 1 - \frac{[u_0, u_1]}{\sqrt{E_0}} e^{-\lambda_1 t} \quad \dots \dots \dots \quad (49)$$

と書ける。すなわち、圧密の後半部における圧密度は最小固有値 λ_1 とともに、初期のひずみエネルギーのうち第1固有関数のうけもつ成分の相対的大きさによって決定される。

4. 球および円の圧密への適用

2. および 3. で述べた解法を具体的に等方性の球あるいは円の圧密に適用する。これらの問題についてすでに Cryer⁷⁾、大槻⁸⁾などが Laplace 変換を用いて解いているが、ここでは固有値問題の立場に沿った解法を考える。

(1) 球の圧密

球(半径 R)の圧密を支配する方程式を式 (23) の形で表現すると、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k(\lambda+2\mu)}{r_w} \nabla^2 u - \frac{4k\mu}{r_w} \frac{1}{R^3} \int_0^R s^2 \nabla^2 u(s) ds \quad \dots \dots \dots \quad (50)$$

となるが⁴⁾、式 (22) の形をしたものも次のようにして求めることができる。半径が無限大であるとすると、半径 $s (\leq R)$ の球面上のみに存在する間隙水圧 $u = \delta(r, s)$ によって、体積ひずみ:

$$\theta = -\frac{1}{\lambda+2\mu} \delta(r, s) \quad \dots \dots \dots \quad (51)$$

のほか、半径方向の変位:

$$U_r(r, s) = -\frac{1}{\lambda+2\mu} \frac{s^2}{r^2} H(r, s) \quad \dots \dots \dots \quad (52)$$

が生じる。これは、式 (24) の変位を球面 $r=s$ 上で積分したものである。ここで、 $H(r, s)$ は Heaviside の階段関数を表わす。変位 $U_r(r, s)$ のため、境界 $r=R$ 上には境界応力 $\tilde{T}_r = \frac{4\mu}{\lambda+2\mu} \frac{s^2}{R^3}$ が生じる。よって境界条件 (\tilde{B}) は、

$$(\tilde{B}) \quad T_r = -\tilde{T}_r = -\frac{4\mu}{\lambda+2\mu} \frac{s^2}{R^3}$$

となり^{注2)}、これによって生じる体積ひずみとして、

$$A(r, s) = -\frac{12\mu}{(3\lambda+2\mu)(\lambda+2\mu)} \frac{s^2}{R^3} \quad \dots \dots \dots \quad (53)$$

を得る。これを式 (22) に代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{12\mu}{3\lambda+2\mu} \frac{1}{R^3} \int_0^R s^2 \frac{\partial u}{\partial t}(s) ds \\ = \frac{k(\lambda+2\mu)}{r_w} \nabla^2 u \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (54)$$

のように式 (50) とは異なった球の圧密の方程式が誘導される。なお、両者を比較すれば式 (28) に相当する関係:

$$\int_0^R s^2 \left[\frac{\partial u}{\partial t} - c_3 \nabla^2 u \right] ds = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (55)$$

が導かれる。ここに、

$$c_3 = \frac{3\lambda+2\mu}{3} \frac{k}{r_w} \quad \dots \dots \dots \quad (56)$$

である。式 (55) の [] の中を零とおいたものは、Davis ら⁹⁾のいうように平均全応力 σ_m が時間的に一定とする場合に成立する圧密の方程式である。 σ_m が不变であることは一般にありえない仮定であるが、球の圧密の場合には領域内の平均的な意味でそれが成立することを式 (55) は示している。

さて、式 (54) に固有値問題を適用するのであるが、計算を容易にするため、次のような無次元化をしておく。

注 2) 一般的の間隙水圧分布 $u(r)$ に対して、

$$\int_0^R \tilde{T}_r(r, s) u(s) ds$$

が境界応力となるので \tilde{T}_r の次元は [1/長さ]。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{12\mu}{3\lambda+2\mu} \rightarrow c, \quad \frac{k(\lambda+2\mu)}{r_w} \rightarrow t \text{ (時間係数)} \\ \frac{r}{R} \rightarrow r, \quad \frac{s}{R} \rightarrow s \end{array} \right.$$

すると、式(54)は、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \int_0^1 s^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds = F^2 u \quad \dots \dots \dots (57)$$

と簡潔になる。ここで固有値 $\lambda_\alpha = \eta_\alpha^2$ とおき、

$$u(r, t) = u_\alpha(r) e^{-\eta_\alpha^2 t} \quad \dots \dots \dots (58)$$

を代入して、

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_\alpha}{dr} + \eta_\alpha^2 [u_\alpha + cI_\alpha] = 0 \quad \dots \dots \dots (59)$$

を得る。ここに、

$$I_\alpha = \int_0^1 s^2 u_\alpha(s) ds \quad \dots \dots \dots (60)$$

とおいた。方程式(59)に課せられる境界条件は、

$$(B_{D0}) \quad u_\alpha(r=0) : \text{有界}, \quad u_\alpha(r=1) = 0$$

である。これを満たす式(59)の解が存在するように η_α を決める。そのために、まず式(59)の一般解を求めるのであるが、 cI_α が定数であることに注意して、

$$\frac{\sin \eta_\alpha r}{\eta_\alpha r} - cI_\alpha, \quad \frac{\cos \eta_\alpha r}{\eta_\alpha r} - cI_\alpha$$

の両者が一般解を構成することがわかる。しかし、 $u_\alpha(r=0) = 0$ が有界になるためには前者でなければならぬ。そこで仮に係数を 1 として、式(59)の解を

$$u_\alpha(r) = \frac{\sin \eta_\alpha r}{\eta_\alpha r} - cI_\alpha \quad \dots \dots \dots (61)$$

と書く。ここで η_α と I_α は未知数であるが、これらは $r=1$ における境界条件 ($u_\alpha(r=1) = 0$) および式(60)を満足させることにより決定することができる。すなはち、前者より、

$$cI_\alpha = \frac{\sin \eta_\alpha}{\eta_\alpha} \quad \dots \dots \dots (62)$$

となって、式(61)より I_α を消去した形：

$$u_\alpha(r) = \frac{\sin \eta_\alpha r}{\eta_\alpha r} - \frac{\sin \eta_\alpha}{\eta_\alpha} \quad \dots \dots \dots (63)$$

が求まる。これを式(60)に代入して定積分を行えば、

$$\tan \eta_\alpha = \frac{\eta_\alpha}{1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{c} \right) \eta_\alpha^2} \quad \left(= \frac{\eta_\alpha}{1 - \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)} \eta_\alpha^2} \right) \quad \dots \dots \dots (64)$$

なる η_α に関する方程式を得る。ここで ν は Poisson 比である。いいかえると、上式を満たすような η_α に対して、式(63)で定義される間隙水圧分布 $u_\alpha(r)$ (固有関数) を式(58)に代入すると、 $u(r, t)$ は齊次境界条件 (B_{D0}) を満足する圧密の方程式(57)の解となる。なお η_α を決定する方程式(64)は Cryer が別の方針²⁷⁾で求めたものと一致している。次に、いくつかの Poisson 比 ($\nu=0, 1/3, 1/2$) に対して具体的に η_α の値を調べてみる。それには 図-2 のように式(64)の両辺を表わす

グラフ

$$\xi = \tan \eta \text{ および } \xi = \frac{\eta}{1 - \frac{1-\nu}{2(1-\nu)} \eta^2}$$

を作ればよい。特に $\nu=1/2$ ($c=0$) は Terzaghi 型の方程式が成立する場合であるが、このときの固有値は、

$$\lambda_\alpha = \eta_\alpha^2 = (\alpha\pi)^2 \quad (\alpha=1, 2, \dots) \quad \dots \dots \dots (65)$$

となる。また、Poisson 比の小さい場合ほど固有値は小さくなるが、高次 (大きい α) の固有値は Poisson 比の大きさにかかわらず Terzaghi 型の方程式の固有値 (したがって固有関数も) に漸近していくことがわかる。表-1 には $\alpha=1, 2, \dots, 5$ に対する固有値 λ_α を示す。

さて、こうして定めた λ_α に対し式(63)の $u_\alpha(r)$ は固有関数となり、3. で述べたように式(39)の意味で直交関係を満足する。なお球の圧密の場合、式(20)および(53)を考慮すれば式(33)で定義される内積は次のようになる。

$$[u_\alpha, u_\beta] = \frac{1}{2} \int_0^1 r^2 u_\alpha(r) \left\{ u_\beta(r) + c \int_0^1 s^2 u_\beta(s) ds \right\} dr = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 r^2 u_\alpha(r) u_\beta(r) dr + c I_\alpha I_\beta \right\} \dots \dots \dots (66)$$

さらに式(41)が成立するようにするには、個々の固有関数に対し $u_\alpha(r)/\sqrt{[u_\alpha, u_\alpha]}$ のように正規化しておく必要がある。正規化した固有関数を改めて $u_\alpha(r)$ と書くと、

$$u_\alpha(r) = \frac{\frac{\sin \eta_\alpha r}{\eta_\alpha r} - \frac{\sin \eta_\alpha}{\eta_\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{4\eta_\alpha^2} + \frac{\cos \eta_\alpha \sin \eta_\alpha}{4\eta_\alpha^3} - \frac{\sin^2 \eta_\alpha}{2\eta_\alpha^4}}} \dots \dots \dots (67)$$

となる。図-3 には $\alpha=1, 2$ に対する正規化された固有関数を示す。また、図-4 には一様な初期隙水圧分布を仮定した場合の解 (式(46)の形) より求めた圧密度-時間係数曲線を示す。ただし、実線は従来の圧密度に、破線は式(48)で定義したひずみエネルギーによる圧密度に対応している。後者はやや小さめの圧密度になるが、ほぼ従来のものと同じ傾向をもち、多次元圧密の圧密の進行度を表わす 1 つの指標になると考えられる。

なお、時間係数 $t \geq 0.1$ 程度の範囲では、高次の固有

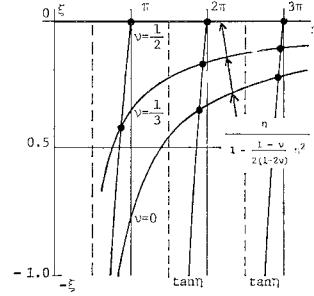


図-2 球の圧密における固有値

表-1 球の圧密における固有値 $\lambda_\alpha(\eta_\alpha^2)$

α	$\nu=0$	$\nu=0.33$	$\nu=0.5$
1	4.333	7.528	9.870
2	35.288	37.415	39.478
3	84.747	86.799	88.826
4	153.870	155.899	157.914
5	242.713	244.731	246.740

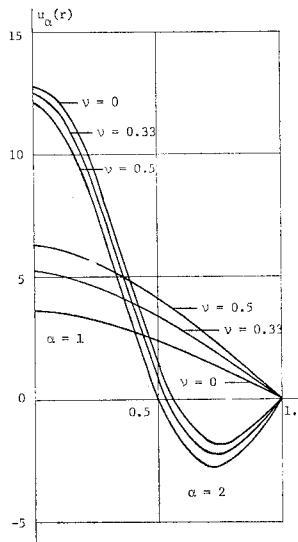


図-3 球の圧密における正規化された固有関数

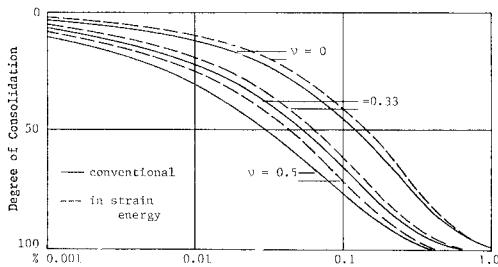


図-4 球の圧密における圧密度-時間係数曲線

関数はほとんど減衰しており、第1固有関数だけを用いて、たとえば次式のように解が近似できる。

$$u(r, t) \approx 2.56 \left\{ \frac{\sin 2.74 r}{2.74 r} - 0.141 \right\} e^{-7.53 t} \quad [\nu=1/3 \text{ の場合}] \quad (68)$$

(2) 円（無限に長い円筒）の圧密

円（半径 R ）の圧密を支配する方程式を式(23)の形で書くと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k(\lambda+2\mu)}{r_w} \nabla^2 u - \frac{2k\mu}{r_w} \frac{1}{R^2} \int_0^R s \nabla^2 u(s) ds \quad (69)$$

となる⁴⁾。一方、球の場合と同様にして式(22)の形を導くと、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{R^2} \int_0^R s \frac{\partial u}{\partial t}(s) ds = \frac{k(\lambda+2\mu)}{r_w} \nabla^2 u \quad (70)$$

のようになる。両者を比較して式(28)に相当する関係：

$$\int_0^R s \left[\frac{\partial u}{\partial t} - c_2 \nabla^2 u \right] ds = 0 \quad (71)$$

を得る。ここに、

$$c_2 = (\lambda + \mu) \frac{k}{r_w} \quad (72)$$

である。〔〕の中を零とおいたものは、二次元の意味における平均全応力 σ_m が一定であるという仮定のもとでの圧密の方程式であり、やはり、それが領域内で平均をとれば成立することを式(71)は示している。

以下、(1)と同様な無次元化を行い、 $\sin \eta_\alpha r / \eta_\alpha r$ と書いたところを $J_0(\eta_\alpha r)$ におきかえると、固有値 $\lambda_\alpha (= \eta_\alpha^2)$ の決定方程式：

$$\frac{J_0(\eta_\alpha)}{J_1(\eta_\alpha)} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\eta_\alpha} \quad (73)$$

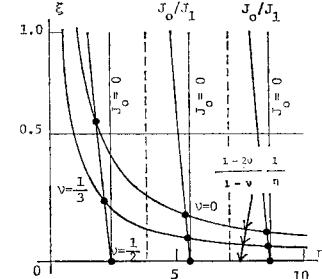
および正規化された固有関数：

$$u_\alpha(r) = \sqrt{\frac{J_0(\eta_\alpha r) - J_0(\eta_\alpha)}{\frac{J_0^2(\eta_\alpha)}{4} + \frac{J_1^2(\eta_\alpha)}{4} - \frac{1}{2\eta_\alpha} J_0(\eta_\alpha) J_1(\eta_\alpha)}} \quad (74)$$

を得る。ここに、 $J_0(\eta_\alpha r)$, $J_1(\eta_\alpha r)$ はそれぞれ0次、1次のBessel関数である。なお、式(73)は大槻⁸⁾が別的方法で求めたものと一致している。図-5には式(73)の両辺の表わすグラフ：

$$\xi = \frac{J_0(\eta)}{J_1(\eta)} \quad \text{および} \quad \xi = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\eta}$$

を、表-2には $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ に対する



固有値 λ_α を、図-6には $\alpha=1, 2$ に対する正規化された固有関数を、そして図-7には一様な初期間隙水圧分布を仮定した場合の圧密度-時間係数曲線をそれぞれ示す。ただし図-7においても、実線は従来の圧密度を破線は式(48)で定義した圧密度を表わしている。また時間係数 $t > 0.2$ 程度の範囲では、次式で解が近似される。

$$u(r, t) \approx 1.96 \{ J_0(2.17 r) - 0.129 \} e^{-4.69 t} \quad [\nu=1/3 \text{ の場合}] \quad (75)$$

5. 固有値の数値計算

一般的な領域での圧密現象の固有値を解析的に求める

表-2 円の圧密における固有値

α	$\nu=0$	$\nu=0.33$	$\nu=0.5$
1	3.390	4.691	5.783
2	28.424	29.457	30.472
3	72.868	73.881	74.887
4	137.030	138.037	139.039
5	220.927	221.930	222.932

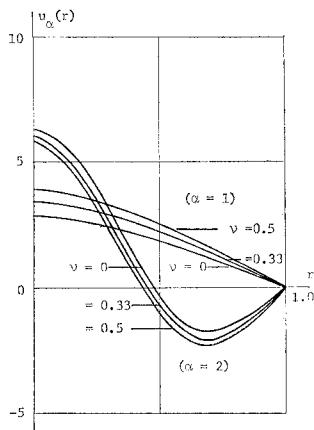


図-6 円の圧密における正規化された固有関数

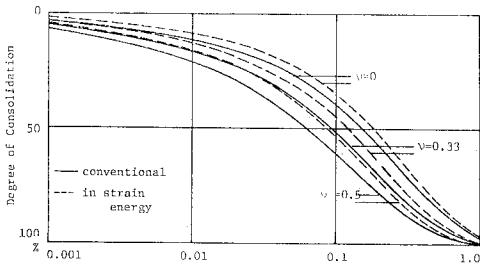


図-7 円の圧密における圧密度-時間係数曲線

ことは非常に困難であり、実用上は数値計算にたよらざるを得ない。2. および 3. で述べたことがらを、ここでは有限要素法による固有値の数値計算法にあてはめながら、サンドドレーンによる圧密現象に対して具体的に適用した結果を述べる。

(1) 有限要素法による固有値の計算¹⁰⁾

圧密の最終状態を基準にとった Biot の方程式 (8), (9) を Christian ら¹¹⁾の方法を用いて数値化すると、

$$\begin{cases} Kv + Lw = 0 \\ (d/dt)V = -Yw \end{cases} \quad (76)$$

$$(d/dt)V = -Yw \quad (77)$$

となる。ここに、

K ：剛性行列

v ：全節点変位からなるベクトル

w ：全要素の間隙水圧からなるベクトル

V ：全要素の体積変化量からなるベクトル

L : w から等価節点力への変換行列

Y : w によって生じる間隙水の流れから全要素の体積変化量を対応させる行列、すなわち

$$\left(\frac{1}{\tau_w} \sum_{i,j} k_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

を数値化したもの

であって、境界条件と材料定数を与えるべくすべて求めることができる。式 (76) を v について解き、

$$V = L^T v \quad (78)$$

を考慮すると、

$$V = -(L^T K^{-1} L) w \quad (79)$$

となる。さらに、これを式 (77) に代入して、

$$A \frac{dw}{dt} = -Yw \quad (80)$$

を得る。ここに、 T は行列の転置を表わし、

$$A = -L^T K^{-1} L \quad (81)$$

とおいた行列は、ある 1 つの要素に単位の間隙水圧が存在するときに全要素に生じる体積変化量を列ベクトルにもつ。容易にわかるように式 (79), (80) はそれぞれ式 (11), (13) を数値化したものである。

$$w(t) = w_a e^{-\lambda_a t} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m) \quad (82)$$

を式 (80) に代入して、

$$\lambda_a A w_a = Y w_a \quad (83)$$

なる固有方程式を得る。ここに m は全要素数である。この方程式が恒等的に零でない解をもつとき、 λ_a を圧密の固有値、また、その解 w_a を固有ベクトルとよぶことにする。行列 A , Y はともに対称であるばかりでなく、負定値であることが 3. と同様にして証明される。よって固有値 λ_a は正值であり、内積：

$$[w_a, w_\beta] = -\frac{1}{2} w_a^T \cdot A \cdot w_\beta \quad (84)$$

に対して固有ベクトルが正規直交系：

$$[w_a, w_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \quad (85)$$

をなすようにできる。すると任意の初期間隙水圧分布 w_0 に対して解 $w(t)$ を、

$$w(t) = \sum_{\alpha=1}^m [w_0, w_\alpha] w_\alpha e^{-\lambda_a t} \quad (86)$$

と表現することができる。また、係数 $[w_0, w_\alpha]$ のもつ意味も 3. で述べたとおりである。

(2) サンドドレーンによる圧密現象への適用

軟弱粘土地盤処理工法の代表的なものとしてサンドドレーンが広く用いられている。その目的は、間隙水の排水距離を短くして圧密を促進し、短期間のうちに所定の強度を得ることにある。その解析には従来、Terzaghi 型の方程式に基づく Barron の方法¹²⁾が一般的であり、室内実験でもある程度その方法が評価されている¹³⁾。また、砂ぐいの透水係数¹⁴⁾やその圧縮性などについて論じた研究¹⁵⁾もあるが、それらを Biot の方程式に従って解析した例は少ない。すでに述べてきたように、圧密の後半部では第 1

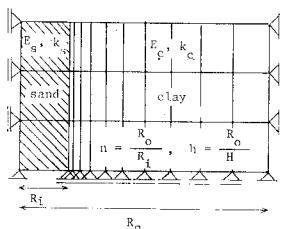


図-8 サンドドレーンモデルの要素分割と境界条件

固有値とその固有関数が支配的であることを考えると、砂ぐいの透水係数や剛性を含めてサンドドレーの効果を評価するには、第1固有値の大小の比較によるのが妥当と思われる。そこでここでは図-8に示すような軸対称領域の要素分割を用いて各種条件のもとでの第1固有値を算定してみた。なお、間隙水の排水は上端のみで行われるとし、その他の境界条件は同図のとおりである。粘土領域のYoung率、透水係数を E_c 、 k_c 、砂ぐいのそれらを E_s 、 k_s とし、Poisson比は全領域で $1/3$ とする。領域の深さを H 、外径を R_o 、砂ぐいの径を R_i とし、パラメーター n および h を、

$$n = \frac{R_o}{R_i} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (87)$$

$$h = \frac{R_o}{H} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (88)$$

と定義しておく。また、結果の表示は粘土領域に対する一次元圧密の通常の時間係数

$$T_v \left(= \frac{k_c}{r_w} \frac{(1-\nu)E_c}{(1-2\nu)(1+\nu)} \frac{t}{H^2} \right)$$

により無次元化されている。計算にさきだち、厳密な値の既知な Barron の方法（軸対称の領域に対する Terzaghi 型の方程式）の第1固有値との比較により数値解法の精度を検討したが、その誤差は十分無視しうるものであった。図-9 には、 $h=0.05$ 、 0.1 、 0.2 および 0.5 のとき、 n あるいは E_s/E_c によって第1固有値がどのように変化するかを示している。ここで、実線は $k_s/k_c = \infty$ 、破線は $k_s/k_c = 10^3$ の場合を表わす。各図の下方にある一点鎖線は無処理の場合の第1固有値 ($\lambda_1 \approx 2.47$) を、上方にある数値は Barron の方法による値 (Terzaghi 型の方程式に基づき有限要素法で計算した値) をそれぞれ示している。図-10 には、一様な上載荷重が作用したとき、圧密完了後の時点において粘土領域に生じる体積ひずみの平均値 $\bar{\epsilon}$ 、つまり強度増加に対応するものが、図-9 の各場合について示されている。なお、ここで無処理のときの体積ひずみを e_0 としたときの比 $\bar{\epsilon}/e_0$ により表示してある。これらの図から次のようなことがわかる。

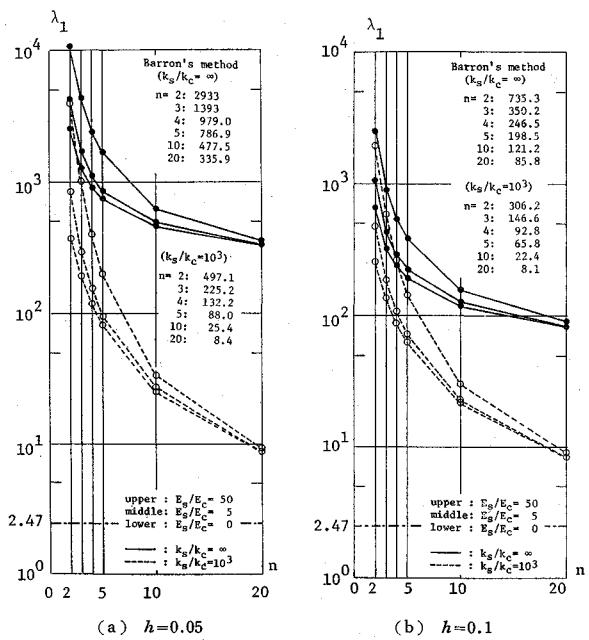
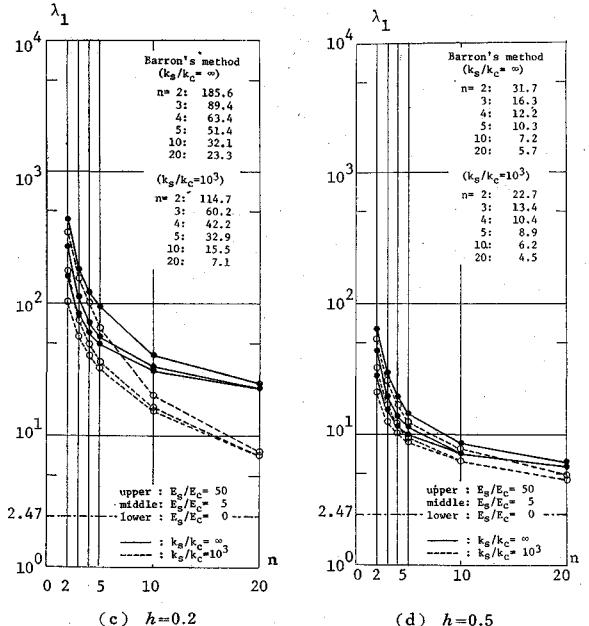
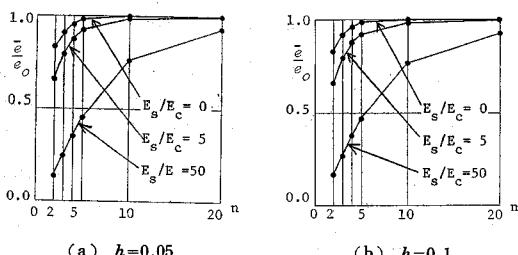
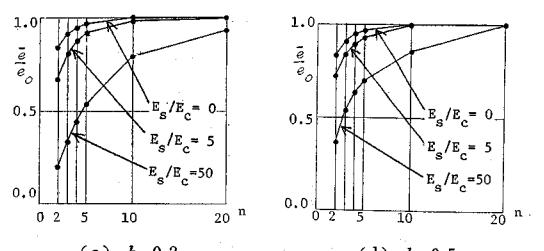
(a) $h=0.05$ (b) $h=0.1$ (c) $h=0.2$ (d) $h=0.5$ 図-9 サンドドレーンの圧密における第1固有値 λ_1 

図-10 サンドドレーンを用いたときの平均体積ひずみ



① Barron の方法による固有値は、ほとんどの場合 $E_s/E_c=0 \sim 5$ のときの値の中間にある。

② n が 10 以上では、砂ぐいの剛性は圧密の速さあるいは圧縮量に大きな影響を与えない。しかし、 n が 5 以下のときには、 E_s/E_c の大きさについて第 1 固有値が大きくなるため圧密度が促進される一方、圧縮量も小さくなつてサンドパイプとしての効果がでてくる。

③ h が小さいとき、砂ぐいの透水係数の大きさは、圧密の速さに重大な影響を与える。

④ h が 0.5 程度に大きくなると、間隙水が砂ぐいに達するまでの排水距離が大きくなつて、その部分の圧密に要する時間が支配的となるため、砂ぐいの剛性、透水係数ともに大きな影響を与えない。

6. 結 論

間隙水圧のみで表現した圧密方程式の固有値問題とその応用に関し、次のような結論が得られた。

(1) 多次元圧密現象においても、一次元圧密の場合とまったく同様の固有値、固有関数が存在する。すなわち、固有値 λ_α はすべて正の実数であり、固有関数は式(33)で定義した内積について正規直交系を構成する。

(2) 固有値の大きさは、固有関数に等しい間隙水圧分布が単位時間に消散していくひずみエネルギーに比例している。

(3) 圧密過程の最初の部分を除いた大半の段階では、第 1 固有関数と同じ形状の間隙水圧分布が卓越しており、圧密の遅速は第 1 固有値の大きさで決まる。

(4) 多次元圧密における圧密進行の指標として、式(48)で定義したようにひずみエネルギーによる圧密度を用いることもできる。

(5) (等方性の) 球および円の圧密において、全領域の平均をとれば平均全応力一定の仮定のもとでの圧密の方程式が成立する。

(6) 有限要素法を用いれば、サンドドレーンモデルのような複合地盤の固有値でも容易に数値計算できる。

最後に、本研究の遂行にあたって暖かいご指導と有意義なご助言を賜った京都大学工学部 赤井浩一教授に心より感謝します。また、5. の数値計算についてご援助いただいた同 河野健二助手にもあわせて謝意を表します。

【おもな記号】

a_n : Fourier 級数

(\tilde{B}) : $u=\delta(x, X)$ により生じた境界での変位あるいは応力を打ち消すような境界条件

- e : 体積ひずみ
 E_0 : 初期ひずみエネルギー
 f_i : 物体力
 J_0, J_1 : 0 次および 1 次の Bessel 関数
 k, k_{ij} : 透水係数
 n_i : 単位法線ベクトル
 p : 間隙水圧
 r, s : 半径方向の座標
 T_i : 応力ベクトル
 u : (過剰) 間隙水圧
 u_α : 固有関数
 u_i : 変位
 u_0 : 初期 (過剰) 間隙水圧
 $U(t)$: 圧密度
 $U_i(x, X)$: $u=\delta(x, X)$ による変位
 v_i : 最終状態よりみた変位
 w : 間隙水圧ベクトル
 w_α : 固有ベクトル
 x, x_i : 領域内の点とその座標
 X, X_i : 外力の作用点とその座標
 r_w : 間隙水の単位体積重量
 $\Gamma(x, X)$: $\theta=\delta(x, X)$ をえたとき、境界の存在により発生する間隙水圧
 $\delta(x, X)$: δ -関数
 θ : 最終状態よりみた体積ひずみ
 $\Theta(x, X)$: $u=\delta(x, X)$ を作用したときに発生する体積ひずみ
 λ, μ : Lamé の定数
 λ_α : 固有値
 $A(x, X)$: $u=\delta(x, X)$ を作用したとき、境界の存在により発生する体積ひずみ
 σ'_{ij} : 有効応力
 σ_m, σ'_m : 平均全応力および平均有効応力
 τ'_{ij} : 最終状態よりみた有効応力
 $\phi(x, X)$: $\theta=\delta(x, X)$ をえたときに生じる間隙水圧

参 考 文 献

- 1) Biot, M.A. : General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material, Journ. Appl. Mech., Trans. ASME, Vol. 78, pp. 91~96, 1956.
- 2) Yamaguchi, H. and Y. Murakami : Plane Strain Consolidation of a Clay Layer with Finite Thickness, Soils and Foundations, Vol. 16, No. 3, pp. 67~79, 1976.
- 3) Mandel, J. : Consolidation des Sols (Etudé Mathématique), Géotech., Vol. 3, pp. 287~299, 1953.
- 4) 田村 武 : Biot の圧密方程式に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第 274 号, pp. 57~67, 1978.
- 5) Asaoka, A. : Observational Procedure of Settlement

- Prediction, Soils and Foundations, Vol. 18, No. 4, pp. 87~101, 1978.
- 6) 溝畑 茂 : 偏微分方程式論, 岩波書店, 1965.
- 7) Gibson, R.E., K. Knight and P.W. Taylor : A Critical Experiment to Examine Theories of Three-dimensional Consolidation, Proc. Europ. Conf. Soil Mech., pp. 69~76, 1963.
- 8) 大槻正紀 : 粘土の 3 次元圧密に関する一考察, 京都大学防災研究所年報, 第 14 号 B, pp. 585~602, 1971.
- 9) Davis, E.H. and H.G. Paulos : Rate of Settlement of Two- and Three-dimensional Conditions, Géotech., Vol. 22, No. 1, pp. 95~114, 1972.
- 10) 宮武 修・加藤祐輔 : 固有値問題, 横書店, 1971.
- 11) Christian, J.T. and J.W. Boehmer : Plane Strain Consolidation by Finite Element, Proc. ASCE, SM 4, July, pp. 1435~1457, 1970.
- 12) Barron, R.A. : Consolidation of Fine-grained Soils by Drain Wells, Trans. ASCE, Vol. 113, pp. 811~835, 1948.
- 13) 赤井浩一・大西有三・安川郁夫 : パーチカルドレーンによる圧密機構の考察, 京都大学防災研究所年報, 第 21 号 B-2, pp. 19~35, 1978.
- 14) 吉国 洋 : 多次元圧密理論とその軸対称問題への適用, 東京工業大学学位論文, 1973.
- 15) 赤井浩一 : パーチカルドレーンの圧密機構について, 土木学会論文報告集, 第 277 号, pp. 137~140, 1978.

(1979.1.18・受付)