

はりおよび薄板の非線形振動の Galerkin 法による 解析の収束性および安定性について*

ON CONVERGENCE AND STABILITY OF NONLINEAR VIBRATION OF
BEAMS AND THIN PLATES BY A GALERKIN METHOD

高橋和雄**・河原清勝***・山辺輝久****

By Kazuo TAKAHASHI, Kiyokatsu KAWAHARA

and Teruhisa YAMABE

1. 緒 言

細長比の大きいはり部材および薄板の振動問題においては振幅の大きさがその厚さと同程度もしくはそれ以上となるために微小振動理論は適用し得ない。この場合には部材中心軸(面)の伸縮の影響を考慮する必要があるために、これらの部材の運動方程式は非線形偏微分方程式で与えられる。したがって、振動の様相は微小振動の場合に比較してはるかに複雑である。すなわち、振動系の固有振動数および振動形は振幅によって変化する。また、非線形問題では解の唯一性が成立しないために周期荷重が作用する場合の振幅は複数個存在することが可能で、各種の不安定現象が生ずることになる。無限自由度系であるはりおよび薄板の非線形振動問題に関して 1950 年代中葉から数多くの研究が行われている^{1)~10)}。連続体の非線形振動の厳密解を得ることはほとんど不可能であるから、近似解法によらざるを得ない。のためにこれらの研究は、いざれも振幅の大きさに無関係な座標関数を用いて振動形を基準座標に関する 1 自由度系に近似しているために、非線形項の大きな領域の解析に適用することには無理がある¹¹⁾。最近ようやく Bennett ら¹²⁾、Busby¹³⁾、八巻ら¹⁴⁾および斎藤ら¹⁵⁾によって連続体を複数個の座標関数と基準座標の積からなる級数の形に仮定して Galerkin 法を用いて基準座標に関する多自由度系に変換する解法が取扱われだした段階にある注)。

置換された多自由度系の非線形常微分方程式の解法には漸近法¹³⁾、平均法および摂動法などの微小パラメータ法と調和バランス法^{12), 14), 15)}の 2 つが挙げられるが、

これらの手法のうち非線形項が大きくなても有効性を失わない唯一の解法は調和バランス法である。したがって、調和バランス法を用いれば、非線形項が大きな領域を含む連続体の非線形振動を本格的に取扱うことが可能である。このように連続体の非線形振動の多自由度系としての解法が提案されているが、実際の解析においては調和バランス法の 1 項もしくは 2 項近似解を用いた定性的な評価が行われているのみで、解の収束性および安定性の確認は行われていない。そこで、本論文は連続体の非線形振動を Galerkin 法を用いて多自由度系として解析する場合の解の収束性および精度の検討と振幅の安定判別法の確立を目的とするものである。

非線形偏微分方程式は Galerkin 法によって非線形連立常微分方程式に変換され、さらには調和バランス法によって数値解析可能な非線形連立代数方程式に変換される。ここで問題となるのは無限自由度系である連続体の非線形振動の解を予測するのに必要な自由度数と調和バランス法の項数である。後者の調和バランス法の収束の数学的基礎が最近占部¹⁶⁾によって与えられた。しかし前者については多自由度系の非線形振動特有の自由度間の連成現象によって異なるものと考えられる。そこで本論文は両端で軸方向変位が拘束されたはりおよび薄板である軸対称円板の非線形振動を対象として解の収束性および精度の検討を加えている。

非線形問題では得られた解がすべて実現するとは限らないために、振幅の安定性を吟味する必要がある。多自由度系として取扱い、かつ調和バランス法を用いて得られた振幅の安定性を確かめるための第 1 変分方程式は連

注) 連続体を多自由度系に置換する方法はこのほかに有限要素法や差分法などが考えられる。大振幅振動が問題となるのは低次の振動形であること及び非線形連立代数方程式を解くためには自由度数を最小限に押さえる必要があることを考慮すると、座標関数として線形振動の基準関数を閉じた形で用いて解析することができる Galerkin 法の方が有利である。したがって、解の収束性および数値解析の両面から有限要素法や差分法の適用は本題に対して適切ではない。

* 本研究の一部は土木学会第 31 回年次学術講演会において発表済¹¹⁾である。

** 正会員 工修 長崎大学助教授 工学部土木工学科

*** (株)八木建築設計事務所

**** 正会員 日本鉄塔工業(株)(研究当時 長崎大学大学院修士課程学生)

立の Hill の方程式になる。この方程式の安定判別の簡潔でかつ数値解析の容易な解法は著者の知る限り見当らない。そこで著者らはこれらの変分方程式の解を振動の周期性を保証する Fourier 級数の項と収束、発散を表現する未定定数を含む指数関数との項との積の形に仮定のうえ、行列の固有値問題に変換するような解法を提案するものである。算出された複素固有値から振幅の安定性が Liapunov の安定性の定理¹⁷⁾から直接明らかにされる。以上のような観点から引き続き本論文は一般的な変分方程式の解法の展開のうち、すでに安定判別の確立されている Mathieu の方程式を対象に提案した安定判別法の妥当性およびその精度を検討するとともに非線形振動の振幅の安定判別に応用して、本安定判別法の有用性を確認した結果を報告するものである。

2. 基 础 式

(1) は り

端部で軸方向変位が拘束された細長いはりに、一様分布周期荷重が作用した場合の運動方程式¹⁸⁾は、

$$P = -\frac{EA}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1)$$

$$L(y) = EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} + P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$-p_0 \cos \vartheta t = 0 \quad (2)$$

ここに、 l ：はりの長さ、 A ：断面積、 I ：断面 2 次モーメント、 y ：たわみ、 x ：支点からの距離、 E ：ヤング率、 ρ ：単位体積質量、 c ：粘性減衰抵抗係数、 P ：たわみによって生ずる軸力、 p_0 ：外力の荷重強度、 ϑ ：荷重の円振動数、 t ：時間。

上記の運動方程式において非線形項は振幅によって生ずる軸力 P である。なお、はりの軸方向変位 u は端部で拘束されているという条件より消去されている。

(2) 軸対称円板⁵⁾

軸対称円板の有限変形に関する Kármán の式にたわみによる慣性力および減衰力を加えれば本題の運動方程式が次のように与えられる。

$$\nabla^4 F = -\frac{E}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (3)$$

$$L(w, F) = D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$-\frac{h}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) - p_0 \cos \vartheta t = 0 \quad (4)$$

ここに、 h ：板厚、 r ：半径方向の座標、 w ：たわみ、 F ：Airy の応力関数、 $D = Eh^3 / \{12(1-\nu^2)\}$ 、 ν ：ポアソン比、 ∇^4 ：ラップラシアン算子。

$$\text{シルビウス積分} \nabla^4 F = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \right\} \right]$$

円板の板厚中央面の応力成分を σ_r, σ_θ とすれば、応力関数 F は次式により定義される¹⁸⁾。

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad (5)$$

軸対称円板の有限変形に関するひずみ-変位関係および Hooke の法則を用いて応力関数と変位との関係を求めれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \nu \frac{u}{r} \right\} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、 u ：面内変位。

上式からたわみ w の項を消去すれば、面内変位 u が応力関数 F を用いて次のように表わされる。

$$u = \frac{r}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \quad (7)$$

板の境界条件が曲げに対して単純支持または固定とすれば、それらの境界条件は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} S(\text{単純支持}) : w &= 0, M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ C(\text{固定}) : w &= 0, \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

また、板の面内方向の変位および応力に関する境界条件として、周辺で面内変位が拘束される場合と自由の場合を考えれば、式 (5) および式 (7) より次のように得られる。

$$\begin{aligned} (a) \quad (\text{面内変位拘束}) : u &= -\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \\ (b) \quad (\text{面内変位自由}) : \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

3. 非線形偏微分方程式の解法

(1) Galerkin 法による時間に関する非線形常微分方程式の誘導

多自由度系の非線形振動において Rosenberg^{19)~20)}は、

- (a) すべての質点が同じ周期で振動すること。
- (b) すべての質点が同じ時刻に平衡点を通過すること。
- (c) 任意の時刻においてある質点の位置が与えられたとき、残りの質点の位置がただ一つ決まること。

この条件を満足するとき、基準関数が存在することを述べ

ている。これらの条件を連続体に拡張して考えると (a) ~ (c) の条件を満足する十分条件は空間関数と時間関数の変数分離が可能なことである²¹⁾。後述のように両端ヒンジばかりでは線形振動の基準関数が変数分離の条件を満足するが、他の境界条件のはりおよび円板では振幅によって基準関数が変化するためにこれを振幅に無関係な 1 つの関数で表示することは困難である。したがって、一般に連続体を振幅に無関係な 1 つの基準関数を用いる解法は、場合によっては実情に沿わない厳しい仮定を含むために、実際との検証が必要となることはすでに Lin の成書¹¹⁾に指摘されているとおりである。しかし、多自由度系で取扱う場合には、各自由度の線形振動の基準関数を重ね合せて非線形振動の基準関数を作ることが可能となるもので、より実情に即した解析検討ができる点で 1 自由度系で取扱う場合よりも優れている。

いま、はりおよび円板のたわみ y, w を次のような変数分離形に仮定する。

$$y = r \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) \quad (\text{はりの場合}) \cdots (10 \cdot a)$$

$$w = h \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cdot T_n(t) \quad (\text{円板の場合}) \cdots (10 \cdot b)$$

ここに、 $X_n(x), R_n(r)$: 境界条件を満足する座標関数、 $T_n(t)$: 未知の時間関数、 $r = \sqrt{I/A}$: 回転半径

式 (10-a), (10-b) の座標関数として対応する線形振動の基準関数を用いることにする。

a) はりの場合

式 (2) の左辺の第 3 項以後を無視して、 $y = X_n(x) e^{i\omega_n t}$ とおけば次式が成立する。

$$\frac{d^4 X_n}{d\xi^4} - \lambda_n^4 X_n = 0 \cdots (11)$$

ここに、 $\xi = x/l$, $\lambda_n = l \sqrt{PA\omega_n^2/EI}$ (線形振動の固有値), $\omega_n : n$ 次の線形固有振動数。

上式の解として両端ヒンジばかり以外では、次式の形を本研究で用いることにする²²⁾。

$$X_n(\xi) = \{0.5(\delta_n e^{i\lambda_n \xi} + r_n e^{-i\lambda_n \xi}) + \cos \lambda_n \xi - \alpha_n \sin \lambda_n \xi\} / X_{n\max} \cdots (12)$$

ここに、 α_n : 境界条件によって決まる定数、 $\delta_n = 1 + \alpha_n$, $r_n = 1 - \alpha_n$ 。

式 (12) はその最大値が 1 となるように正規化されている。式 (1) を式 (2) に代入のうえ軸力 P を消去し、その結果に式 (10-a) を代入し、かつ式 (11) を用いれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} L(y) = & \sum_{n=1}^{\infty} r(\rho A \ddot{T}_n + \rho A \omega_n^2 T_n + c \dot{T}_n) X_n \\ & - \frac{EAr^3}{2l^4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{klm}^n T_k T_l T_m \\ & \cdot \int_0^1 \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_l}{d\xi} d\xi \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} - p_0 \cos \omega t \end{aligned} \cdots (13)$$

上式の右辺は零にならないので、Galerkin 法を用いるものとする。すなわち、

$$\int_0^1 L(y) X_q d\xi = 0 \cdots (14)$$

ここに、 $q = 1, 2, \dots$

はりの基準関数に関して直交性が成立することおよび減衰に関しても直交性が成立することを仮定すれば、次のような時間に関する 3 次の非線形項をもつ Duffing 形の非線形連立常微分方程式が得られる。

$$\ddot{T}_n + 2h_n \alpha_n \dot{T}_n + \alpha_n^2 T_n + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{klm}^n T_k T_l T_m = r_n \bar{p} \cos \bar{\omega} \tau \cdots (15)$$

ここに、

$$K_n = \int_0^1 X_n^2 d\xi, \quad h_n = \int_0^1 c_n X_n^2 d\xi / (2 K_n \alpha_n)$$

$$\alpha_n = (\lambda_n / \lambda_1)^2$$

$$\beta_{klm}^n = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dX_k}{d\xi} \frac{dX_l}{d\xi} d\xi$$

$$\cdot \int_0^1 \frac{d^2 X_m}{d\xi^2} X_n d\xi / (\lambda_1^4 K_n)$$

$$\bar{p} = p_0 l^4 / EI r, \quad r_n = \varepsilon_n / (\lambda_1^4 K_n), \quad \varepsilon_n = \int_0^1 X_n d\xi$$

$$\tau = \omega_1 t, \quad \bar{\omega} = \omega / \omega_1$$

b) 円板の場合

円板の基準関数にはべき級数表示と Bessel 関数表示の 2 通りを用いることができ、次のようにある。

$$R_n(r) = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^n \xi^{2(s-1)} \quad (\text{Appendix 参照})$$

$$\cdots (16 \cdot a)$$

$$R_n(r) = A_n \{J_0(\lambda_n \xi) - J_0(\lambda_n) I_0(\lambda_n \xi) / I_0(\lambda_n)\}$$

$$\cdots (16 \cdot b)$$

ここに、 $\alpha_s^n = 1$, $\alpha_s^n : \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s^n = 1$ の条件によって決まる定数、 $\alpha_s^n = \lambda_n^4 / \{16(s-1)^2(s-2)^2\} \alpha_{s-2}^n$ ($s \geq 3$), $\lambda_n = a \sqrt{\rho h \omega_n^2 / D}$: 次の条件によって決定される固有値。

$$\left. \begin{array}{l} S \text{ (単純支持)} : J_1(\lambda_n) / J_0(\lambda_n) + I_1(\lambda_n) / I_0(\lambda_n) \\ \quad = 2 \lambda_n / (1 - \nu) \\ C \text{ (固定)} : J_1(\lambda_n) / J_0(\lambda_n) + I_1(\lambda_n) / I_0(\lambda_n) = 0 \end{array} \right\} \cdots (17)$$

ここに、 $A_n = 1 / \{J_0(0) - J_0(\lambda_n) I_0(0) / I_0(\lambda_n)\}$, J_0, J_1, I_0 および I_1 : Bessel 関数、 $\xi = r/a$

同じ問題に対する式 (16-a) やび式 (16-b) の両基準関数の使い分けは式 (3) やび式 (4) を解くうえで、いずれが好都合であるかによる。式 (3) の式形から判断すれば特解を求めるうえで、式 (16-a) を用いることが望ましい。したがって、式 (16-a) を式 (3) の適合条件に代入すれば、 F に関して次の線形常微分方程式が得られる。

$$\nu^4 F = -4 \frac{E}{a^5} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} T_k T_l \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} a_i^k a_j^l$$

$$\cdot (i-1)(j-1)(2j-3)\xi^{2(i+j-3)} \dots \dots \dots (18)$$

上式の一般解はその斎次方程式から得られる余関数と特異解との和で求められることになる。

$$\begin{aligned} F = & c_1 \xi^2 \log \xi + c_2 \log \xi + c_3 \\ & - \frac{E}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} T_k T_l \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} a_i^k a_j^l M_{ij} \\ & \cdot \{\xi^{2(i+j-2)} - N_{ij}\xi^2\} \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

ここに、 $M_{ij} = (i-1)(2j-3)(j-1)/(i+j-2)^2(i+j-3)^2$, c_1, c_2, c_3, N_{ij} ：積分定数

式(19)の積分定数はこれらを(5)に代入して得られる σ_r および σ_g が板中央点($\xi=0$)で特異でない条件および式(9)の境界条件から次のように決定される。

$c_1=c_2=0$, c_3 ：任意,

(a) (面内変位拘束) :

$$N_{ij} = (i+j-2)(2i+2j-5-\nu)/(1-\nu) \quad \left. \right\}$$

(b) (面内変位自由) : $N_{ij} = i+j-2$

$$\dots \dots \dots (20)$$

残された問題は式(19)を式(4)に代入して時間関数 $T_n(t)$ を決定することであるが、はりの場合と同様にGalerkin法を用いることにする。すなわち、

$$\int_0^1 L(w, F) R_q \xi d\xi = 0 \dots \dots \dots (21)$$

ここに、 $R_q(\xi)$ ：ここでは式(16-a)よりも式(16-b)を用いる方が望ましく、したがって、式(16-b)で与えられるものとすれば式(15)と同じ方程式が得られる。ただし、本例の係数は次のように書き改められる。

$$\begin{aligned} K_n &= \int_0^1 R_n^2 \xi d\xi, \quad h_n = \int_0^1 c_n R_n \xi d\xi / (2K_n \alpha_n) \\ \beta^n_{klm} &= \frac{6(1-\nu^2)}{K_n \lambda_1^4} \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} a_i^k a_j^l M_{ij} \\ &\cdot (O_{ij} R_{ij}^{mn} - P_{ij} S_{ij}^{mn} - N_{ij} W^{mn}) \\ R_{ij}^{mn} &= \int_0^1 \xi^{2(i+j-3)} \frac{dR_m}{d\xi} R_n d\xi \\ S_{ij}^{mn} &= \int_0^1 \xi^{2(i+j-3)} \frac{d^2 R_m}{d\xi^2} R_n \xi d\xi \\ W^{mn} &= \int_0^1 \left(\frac{dR_m}{d\xi} + \xi \frac{d^2 R_m}{d\xi^2} \right) R_n d\xi \end{aligned}$$

$$O_{ij} = (i+j-2)(i+j-3), \quad P_{ij} = i+j-2$$

$$\tau_n = 12(1-\nu^2)\varepsilon_n / (\lambda_1^4 K_n)$$

$$\epsilon_n = \int_0^1 R_n \xi d\xi, \quad p = p_0 a^4 / Eh^4$$

(2) 非線形連立常微分方程式の解法

多自由度系の非線形振動の定常応答解析にはFourier級数解析法に基づく調和バランス法を用いる。

式(15)の非線形復元力がすべて3次式であることを考慮すれば周期振動において \cos および \sin の奇数次の調波成分が卓越するから、式(15)の解は次のように仮定される²³⁾。

$$T_n = \sum_{i=1,3}^{\infty} (a_n^i \cos i\bar{\omega}\tau + b_n^i \sin i\bar{\omega}\tau) \dots \dots \dots (22)$$

ここに、 a_n^i, b_n^i ：未定定数

なお、式(15)の形の微分方程式には $1/3$ 次の分数調波共振が存在することが知られており、これを求めるために T_n を式(22)に変えて、次のように仮定する。

$$T_n = \sum_{i=1,3}^{\infty} (a_n^i \cos i\bar{\omega}/3 + b_n^i \sin i\bar{\omega}/3) \dots \dots \dots (23)$$

いま、系を4自由度系と仮定のうえ、5倍の高調波まで採用すれば、

$$T_n = \sum_{i=1,3}^5 (a_n^i \cos i\bar{\omega}\tau + b_n^i \sin i\bar{\omega}\tau) \dots \dots \dots (24)$$

式(15)の非線形項 $T_i T_j T_k$ に上式を代入して、 \cos および \sin 関数の積を加法定理を用いて分解する。仮定した調波成分に含まれない $\cos 7\bar{\omega}\tau, \sin 7\bar{\omega}\tau$ 以上の高調波成分を無視のうえ、 $T_i T_j T_k$ に含まれる $\cos \bar{\omega}\tau, \cos 3\bar{\omega}\tau, \cos 5\bar{\omega}\tau, \sin \bar{\omega}\tau, \sin 3\bar{\omega}\tau, \sin 5\bar{\omega}\tau$ の各係数を等置すれば次のとおりである。

$$\begin{aligned} f_{ijk} = & 0.25 \{0.5 u(a_i^1, a_j^1, a_k^1) + 0.5 u(a_i^1, a_j^1, a_k^3) \\ & + u(a_i^1, a_j^3, a_k^1) + 0.5 u(a_i^3, a_j^3, a_k^1) \\ & + u(a_i^1, a_j^5, a_k^5) + u(a_i^1, a_j^3, a_k^5) \\ & + 0.5 u(a_i^1, a_j^1, b_k^1) - 0.5 u(b_i^1, b_j^1, b_k^1) \\ & + u(a_i^1, b_j^3, b_k^3) - 0.5 u(a_i^5, b_j^3, b_k^3) \\ & + u(a_i^1, b_j^5, b_k^5) + u(a_i^1, b_j^1, b_k^5) \\ & + u(a_i^3, b_j^3, b_k^5) - u(a_i^5, b_j^1, b_k^3) \\ & + u(a_i^3, b_j^1, b_k^3) + u(a_i^1, b_j^3, b_k^5)\} \dots \dots \dots (25 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{ijk} = & 0.25 \{u(a_i^1, a_j^1, a_k^1)/6 + 0.5 u(a_i^3, a_j^3, a_k^3) \\ & + u(a_i^1, a_j^1, a_k^3) + 0.5 u(a_i^1, a_j^1, a_k^5) \\ & - 0.5 u(a_i^1, b_j^1, b_k^1) + 0.5 u(a_i^3, b_j^3, b_k^3) \\ & + u(a_i^3, b_j^1, b_k^1) + u(a_i^3, b_j^5, b_k^5) \\ & - 0.5 u(a_i^5, b_j^1, b_k^1) + u(b_i^1, b_j^3, b_k^5) \\ & - u(a_i^3, b_j^1, b_k^5) + u(a_i^1, b_j^3, b_k^5) \\ & + u(a_i^1, a_j^3, a_k^5) + u(a_i^1, b_j^1, b_k^5)\} \dots \dots \dots (25 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{ijk} = & 0.25 \{0.5 u(a_i^5, a_j^5, a_k^5) + 0.5 u(a_i^1, a_j^1, a_k^3) \\ & + u(a_i^1, a_j^1, a_k^5) + u(a_i^1, a_j^3, a_k^3) \\ & + 0.5 u(a_i^3, a_j^3, a_k^5) + 0.5 u(a_i^5, b_j^3, b_k^5) \\ & - 0.5 u(a_i^3, b_j^1, b_k^1) + u(a_i^5, b_j^1, b_k^1) \\ & - 0.5 u(a_i^1, b_j^3, b_k^3) + u(a_i^5, b_j^3, b_k^3) \\ & - u(a_i^1, b_j^1, b_k^3) + u(a_i^3, a_j^3, a_k^1)\} \dots \dots \dots (25 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{ijk} = & 0.25 \{0.5 u(b_i^1, b_j^1, b_k^1) - 0.5 u(b_i^1, b_j^1, b_k^3) \\ & + u(b_i^1, b_j^3, b_k^3) + 0.5 u(b_i^3, b_j^3, b_k^5) \\ & + u(b_i^1, b_j^5, b_k^5) + u(b_i^1, a_j^5, b_k^5) \\ & - u(a_i^3, a_j^3, a_k^5) + u(b_i^3, a_j^3, b_k^1) \\ & + 0.5 u(a_i^1, a_j^1, b_k^3) + 0.5 u(a_i^1, a_j^1, b_k^1) \\ & - u(b_i^1, b_j^3, b_k^5) - u(a_i^3, b_j^1, b_k^3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -u(a_i^1, a_j^5, b_k^3) + u(a_i^1, a_j^3, b_k^5) \\
 & -u(a_i^1, a_j^3, b_k^1) + u(a_i^1, a_j^5, b_k^3) \\
 & \dots \dots \dots \quad (25 \cdot d) \\
 q_{ijk} = & 0.25 \{-u(b_i^1, b_j^1, b_k^1)/6 + 0.5 u(b_i^3, b_j^3, b_k^3) \\
 & + u(b_i^1, b_j^1, b_k^3) - 0.5 u(b_i^1, b_j^1, b_k^5) \\
 & + u(b_i^3, b_j^5, b_k^5) - 0.5 u(a_i^1, b_j^1, b_k^1) \\
 & + u(a_i^1, a_j^1, b_k^5) + 0.5 u(a_i^1, a_j^1, b_k^5) \\
 & -u(a_i^1, a_j^3, b_k^3) + 0.5 u(a_i^3, b_j^3, b_k^3) \\
 & + u(b_i^1, b_j^3, b_k^5) - u(a_i^1, a_j^5, b_k^1) \\
 & + u(a_i^3, a_j^5, b_k^1) - u(a_i^1, a_j^3, a_k^5) \\
 & + u(a_i^1, a_j^3, b_k^5)\} \dots \dots \dots \quad (25 \cdot e) \\
 r_{ijk} = & 0.25 \{0.5 u(b_i^3, b_j^3, b_k^3) + 0.5 u(b_i^1, b_j^3, b_k^3) \\
 & + u(b_i^1, b_j^1, b_k^5) - u(b_i^1, b_j^1, b_k^3) \\
 & + u(b_i^3, b_j^3, b_k^5) + 0.5 u(a_i^5, a_j^5, b_k^3) \\
 & + u(a_i^3, a_j^3, b_k^5) - 0.5 u(a_i^3, b_j^3, a_k^1) \\
 & + u(a_i^1, a_j^1, b_k^5) + 0.5 u(a_i^1, a_j^1, b_k^5) \\
 & + u(a_i^1, a_j^3, b_k^1) + u(a_i^1, a_j^3, b_k^3)\} \\
 & \dots \dots \dots \quad (25 \cdot f)
 \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
 u(v_i^q, w_j^r, w_k^s) = & v_i^q w_j^r w_k^s + v_i^q w_j^s w_k^r \\
 & + w_i^r v_j^q w_k^s + w_i^r w_j^s v_k^q + w_i^s v_j^q w_k^r \\
 & - w_i^s w_j^r v_k^q
 \end{aligned}$$

上記結果を用いれば、式(15)の非線形連立常微分方程式は、次のような非線形連立代数方程式となる。

$$\left. \begin{aligned}
 & (\alpha_n^2 - i^2 \bar{\omega}^2) a_n^i + 2i h_n \bar{\omega} b_n^i \\
 & + \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \beta^n_{klm} f^i_{klm} = \gamma_n^i \delta_{i,1} \bar{p} \\
 & (\alpha_n^2 - i^2 \bar{\omega}^2) b_n^i - 2i h_n \bar{\omega} a_n^i \\
 & + \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sum_{m=1}^4 \beta^n_{klm} g^i_{klm} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (26)$$

ここに、 $i=1, 3, 5$ 、 $\delta_{i,1}$: Kronecker のデルタ関数。

上式に Newton-Raphson 法を適用し、適当な初期値のもとに解けば、各自由度の調波成分が求められる。

(3) 振幅の定義

はりおよび薄板の幾何学的非線形問題では非線形性の大きさはたわみをその厚さで割った無次元たわみによって支配されるが、非線形振動問題では振幅比 ($y/r, w/h$) に支配される。多自由度系としての解析では振動の時間的変動は空間座標の位置によって著しく異なる。このために振幅の大きさを簡単に決定することは無理である。本論の振幅の定義として非減衰振動の場合には基本波の絶対値が最大となる時刻 ($\bar{\omega}\tau=n\pi, n=0, 1, 2, \dots$) のはりおよび円板の中央点の無次元振幅を用いれば次のように得られる。

$$A = |\sum_i a_n^i| \dots \dots \dots \quad (27)$$

次に、各調波間に位相遅れが存在する減衰のある場合には、本論の振幅としてはりまたは円板中央点に生ずる任

意時刻の最大変位を採用する。

4. Galerkin 法による解の収束性および精度

(1) はりの場合

a) 両端ヒンジばり

非減衰の両端ヒンジばりの非線形対称振動を 4 自由度系と仮定すれば、式(15)は次のように書き改められる。

$$\begin{aligned}
 \ddot{T}_n + n^2 T_n + \frac{n^2}{4} (T_1^2 T_n + 9 T_n T_3^2 + 25 T_n T_5^2) \\
 + 49 T_n T_7^2 = \frac{4}{\pi^5} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \bar{p} \cos \bar{\omega}\tau \dots \dots \dots \quad (28)
 \end{aligned}$$

ここに、 $n=1, 3, 5, 7, \dots$

$\bar{p}=0$ の自由振動の場合は、ある自由度の運動方程式の非線形項に他の自由度の 3 乗の項が含まれていないために、次のように各自由度ごとに分離することができる。

$$\ddot{T}_n + n^2 T_n + \frac{n^4}{4} T_n^3 = 0 \dots \dots \dots \quad (29)$$

ここに、 $n=1, 3, 5, 7, \dots$

すなわち、両端ヒンジばりの自由振動では線形振動の基準関数 $X_n(\xi) = \sin n\pi\xi$ を用いて変数分離することができる。この理由は、両端ヒンジばりでは非線形振動時の振動形が振幅によって生ずる軸力の大きさに無関係に正弦波で与えられることを意味するものである。したがって本例では 1 自由度系としての取扱いが本質的で、式(29)を解けば厳密解を得ることができる。

図-1 に 1 次振動の振幅比 $A=4$ および 6 に対する調和バランス法の収束状況を示す。図に示すように単調な収束状況を示しほぼ 3 項で収束する。表-1 (a)～(d) は各種の解法に基づく非線形振動数を線形 1 次振動数で無次元化した振動数比 $\bar{\omega}$ と振幅比 A との関係をまとめたものである。表において (a) は調和バランス法による解、(b) は梢円積分による厳密解¹⁾、(c) は変位法

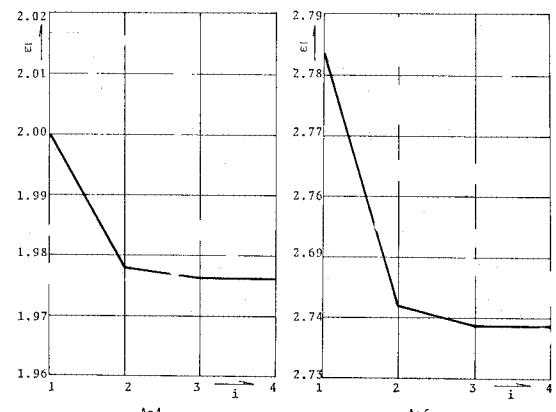
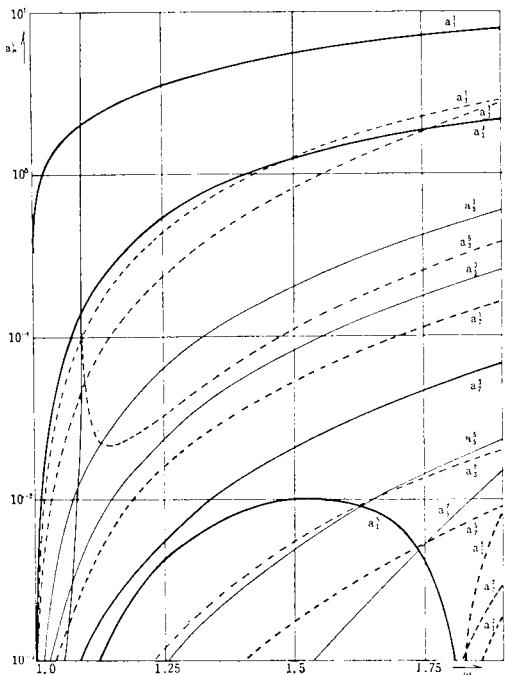


図-1 調和バランス法の収束状況（両端ヒンジばり）

表-1 両端ヒンジばりの振動数比

A	(a)	(b)	(c)	(d)
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	1.0892	1.0892	1.0889	1.0897
2	1.3178	1.3178	1.3183	1.3320
3	1.6257	1.6257	1.6260	1.6370
4	1.9761	1.9760	1.9715	2.0000
5	2.3502	2.3501	2.3341	2.3850

図-2 1次固有振動数近傍の振動数比と振幅成分の関係
(両端固定ばり)

による解²⁴⁾, (d) は Ritz-Galerkin 法による解²⁵⁾である。1自由度系で取扱うことのできる場合には調和バランス法の項数は3項で厳密解と合致する。なお、文献25)の Ritz-Galerkin 法による解は本法第1項近似解に対応するものである。

b) 両端固定ばり

両端固定ばりでは両端ヒンジばりとは異なってすべて自由度が連成するために自由振動の場合においても固定ばりの線形振動の基準関数を用いて変数分離することが不可能である。すなわち振幅とともに振動形が変化するので多自由度系としての取扱いが必要である。図-2 は非減衰振動 ($h=0.0$) の1次固有振動数近傍の振動数比 $\bar{\omega}$ と振幅成分 $|a_nj|$ の絶対値との関係を片対数グラフにプロットしたものである。図中の実線は1次振動の基本波の振幅成分 a_1^1 を正としたとき

の同位相の振幅成分を、点線は逆位相の振幅成分をそれぞれ示したものである。振動数比 $\bar{\omega}$ が増大すると1次振動の基本波の振幅成分 a_1^1 をはじめとしてすべての自由度の振幅成分 a_n^j が連成する。 a_3^5 すなわち3次対称振動の5倍の高調波成分が $\bar{\omega}=a_3/5=1.09$ 付近で非線形連成項を通じて内部共振を生ずる。すなわち、式(25)の非線形連立代数方程式の第3式において、非線形項に a_1^1 の3乗の項が含まれるが、この項が荷重として作用するために5倍の高調波共振が生ずることになる。また、 a_1^5 すなわち1次振動の5倍の高調波成分は振動数比の増加とともに単調に増加しない結果となっている。これらの諸現象は1自由度系の非線形振動では見受けられないもので、多自由度系固有の自由度間の連成現象によるものである。

図-3 は振幅比 $A=6$ および 8 に対する本法の収束状況を横軸に調和バランス法の項数 i 、縦軸に振動数比 $\bar{\omega}$ をとり、自由度の数 n をパラメーターとしてプロットしたものである。図-1 の1自由度系の場合に比較して収束状況ははるかに複雑となる。図より調和バランス法の項数 i は、3項程度で十分収束するが、自由度の数 n は調和バランス法の項数より多く採用する必要がある。

表-2(a) はこのようにして得られた振幅比 A と振動数比 $\bar{\omega}$ との関係を示したものである。また、(b) 欄ははりの線形振動の基準関数を用いて1自由度系と仮定のうえ、積円積分によって求めた結果である⁹⁾。(c) 欄は

表-2 両端固定ばりの振動数比

A	(a)	(b)	(c)	(d)
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.000
1	1.0222	1.0222	1.0229	1.022
2	1.0854	1.0857	1.0889	1.085
3	1.1824	1.1831	1.1900	1.182
4	1.3049	1.3064	1.3175	1.305
5	1.4468	1.4488	1.4644	1.447
6	1.6046	1.6051	1.6220	1.599
7	1.7771	1.7717	1.7966	1.774
8	1.9672	1.9459	1.9756	—

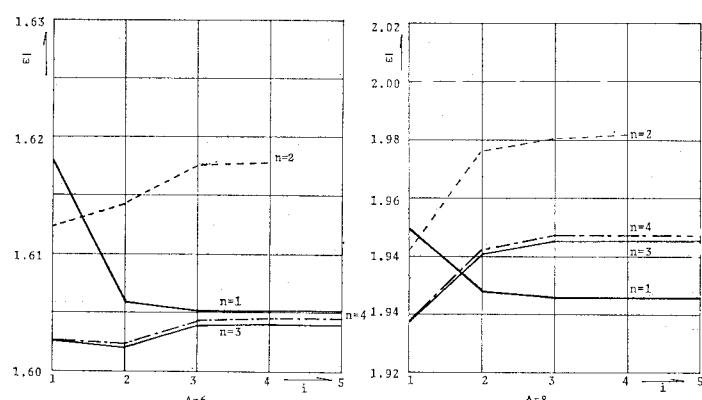


図-3 調和バランス法の収束状況(両端固定ばり)

同じくはりの座屈波形を用いた 1 自由度系の結果を示す²⁾。また、(d) 欄は運動方程式 (1) および (2) を差分法の陽公式を用いて離散化し、任意の軸力 P_0 を加えたはりの線形振動の基準関数を初期条件として、非線形振動の振動数および振動形を求めた結果である²⁶⁾。すなわち、最初の仮定に基づく振動形と計算結果に基づく振動形に差がないような定常的な振動が確認されれば、そのときの振動は Rosenberg の与えた (a)～(c) の条件を満足するから非線形振動時の振動形とみなすことができ、その場合の振動数が非線形振動数を与えているものと考えられる。

次に Galerkin 法による多自由度系の解とこれらの諸解法による結果を比較すると、(b) のはりの基準関数を用いた 1 自由度系の解と (a) の多自由度系の解との差は小さい。しかし、表-3 (a) の振幅比による振動形の変化から明らかなように振動形は振幅比の増大とともに膨らんだ形に変化し、両端ヒンジばかりのそれに近づいている。したがって、多自由度系の解 (a) と 1 自由度系の解 (b) とは振動形が異なるにもかかわらず、本論で定義した振幅比のもとでは振動数比がほぼ一致する結果となっている。このために、両者が必ずしも合致するものではない。(c) の座屈波形を用いた結果は本法よりも大

表-3 両端固定ばかりの振動形
(a) present solution, (b) finite-difference solution

$\xi \backslash A$	0	1	2	3	4	5	6	7
(a)	0.1	0.1191	0.1203	0.1238	0.1306	0.1387	0.1487	0.1605
	0.2	0.3900	0.3924	0.3986	0.4116	0.4256	0.4432	0.4638
	0.3	0.6901	0.6919	0.6967	0.7065	0.7175	0.7307	0.7460
	0.4	0.9164	0.9171	0.9187	0.9220	0.9258	0.9304	0.9357
	0.5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
(b)	0.1	0.119	0.121	0.124	0.132	0.140	0.152	0.164
	0.2	0.390	0.393	0.399	0.413	0.426	0.444	0.462
	0.3	0.610	0.692	0.697	0.707	0.717	0.730	0.741
	0.4	0.916	0.917	0.919	0.922	0.925	0.929	0.933
	0.5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

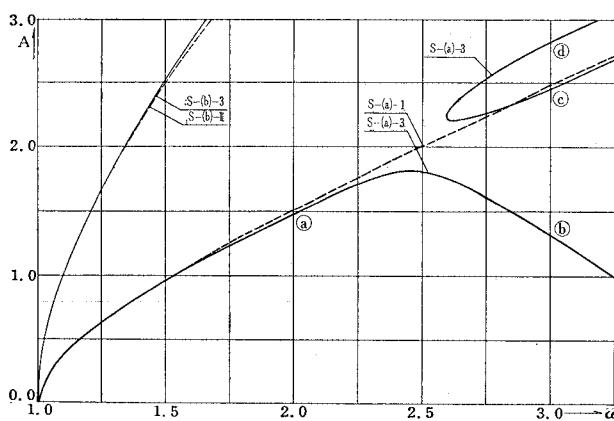


図-4 振動数比と振幅との関係（単純支持円板）

きな振動数比 $\bar{\omega}$ を示し、振幅比 A の増大とともにその割合は大きくなる。この原因是座屈波形が圧縮軸力による波形で、振幅による引張力を受ける本題の振動形との差異が大きくなることに起因するものと考えられる。(d) の差分法による結果は多自由度系の結果 (a) と振動数比が合致し、また、表-3 (a) の多自由度系の振動形および (b) に示した差分法による振動形の比較から明らかのように振動形も一致している。座標および時間関数に対してなんらの仮定も設けていない差分法による解ははりの非線形振動の解を与えてるものと考えられるから Galerkin 法による多自由度系としての収束解は連続体の非線形振動の解を振動数および振動形について精度よく与えていることが確かめられる。

(2) 円 板

表-4 単純支持円板の固有値 λ_n および定数 a_2^n

ポアソン比 $\nu=0.3$ なる

単純支持円板の固有値および定数 a_2^n を求めれば表-4 に示すように得られる。

表-4 の諸値を用いて式 (15) の各係数を求めるこ

とができる。1 次線形振動数近傍の非減衰振動数比 $\bar{\omega}$

と振幅比 A との関係を図-4 に示す。図において

(a) を付した振幅は面内変位自由の場合を示し、

(b) は面内変位拘束の場合を示すものである。比較、対照のために各ケースの 1 自由度系の解を付記すれば図中の点線で示すとおりである。面内変位が自由な円板の振動数比に関しては多自由度系と 1 自由度系の結果の間にはほとんど差がないが、2 次振動の基本波の振幅成分 a_2^1 と高調波の振幅成分 a_2^3 はかなり大きい。したがって、振動形が 1 自由度系の結果とは異なっており、両端固定ばかりの場合と同様に両者が必ずしも同じ結果を与えるものではない。次に面内変位が拘束される

場合には、図-4 に示すように振幅比が 1.5 までは多自由度系と 1 自由度系との解の間にはわずかな差が見受けられるのみである。しかし、さらに振動数比が増加して 1 次振動の基本波成分 a_1^1 が増大するにつれて、2 次振動の 3 倍の高調波成分 a_2^3 が内部共振を起こすために振動数比 $\bar{\omega}$ と振幅比 A との関係は 1 自由度の場合に比較してはるかに複雑となる。すなわち、正の符号をもつ振幅成分 a_1^1 が増大するにつれて、負の符号をもつ振幅成分 a_2^3 が係数的に励振されて内部共振状態になり、その値が急激に増大する。これに伴って、円板の中央で定義される振幅比 $A = |\sum_i a_n^i|$ は減少することになり図に示すような振幅比 A と振

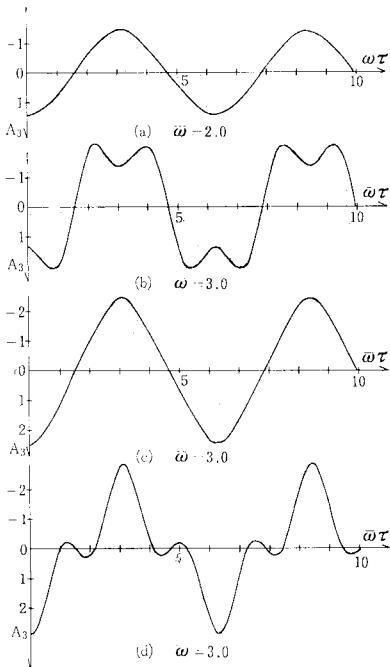


図-5 円板中央の時間的変動

動数比 $\bar{\omega}$ との関係が上側に凸な曲線となる。また、 a_2^3 には a_1^1 と同位相の振幅成分をもつ共振が存在するために、図-4 の右上部に示すような不連続な離れ島状の曲線が得られる。図-4 の振幅上の記号 ④～⑦ および ⑧ における円板の中心のたわみの時間的変動を図-5 に示す。図において、④ および ⑦ は 1 次振動の基本波が卓越する振動で、1 自由度系の場合と相似した時間的変動を示す。これに対して ⑤ の場合には 1 次の基本波振幅成分 a_1^1 と 2 次振動の高調波振幅成分 a_2^3 が逆位相で重なり合った振動を示す。図のように最大振幅は一般に基本波が最大となる時刻では生じない。このために、式(27)で定義した振幅は最大振幅を意味するものではない。④ は 1 次振動の基本波成分 a_1^1 と同位相の 2 次振動の高調波振幅成分 a_2^3 が卓越する振動である。図-6 に面内変位自由の場合および拘束される場合の振幅比 $A=2.5$ に対する多自由度系の解の収束状況を示す。なお、面内変位拘束の場合の振幅は 1 自由度系の解に近い場合を採用した。図に示すように単調な収束を示し、4 自由度 3 項程度で十分に収束する。以上の結果により、多自由度系の解の収束はきわめて速く、自由度の数については 4、調和バランス法の項数については 3 で十分であることが確認される。

5. 振幅安定判別法

式(15)の解の無限小安定性を確かめるために、周期解 T_n に微小な擾乱 $\delta_n(t)$ を与えたときの動的応答を吟味する。周期解 T_n に微小擾乱 $\delta_n(t)$ を与えることによって生ずる運動を $\bar{T} = T_n + \delta_n$ とすると、初期条件がわずかに異なるけれども式(15)を満足しなければならない。よって、

$$\begin{aligned} \ddot{T}_n + \ddot{\delta}_n + 2h_n\alpha_n(\dot{T}_n + \dot{\delta}_n) + \alpha_n^2(T_n + \delta_n) \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{klm}^n (T_k + \delta_k)(T_l + \delta_l) \\ \cdot (T_m + \delta_m) = r_n \bar{p} \cos \bar{\omega} \tau \quad \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

δ_n は微小量であるから、2 次以上の高次の項を無視すれば、

$$\begin{aligned} \bar{T}_k \bar{T}_l \bar{T}_m = T_k T_l T_m + T_k T_l \delta_m + T_k T_m \delta_l \\ + T_l T_m \delta_k \quad \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

T_n が式(15)の周期解であることを考慮すると、次のような線形連立常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_n + 2h_n\alpha_n\delta_n + \alpha_n^2\delta_n + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{klm}^n \\ \cdot (T_k T_l \delta_m + T_k T_m \delta_l + T_l T_m \delta_k) = 0 \quad \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

上式の時間関数として、式(22)を用いるものとして、 \cos および \sin の積を加法定理を用いて分解すれば次のような連立の Hill の方程式に書き改められる。

$$\begin{aligned} \ddot{E}\delta + 2H\dot{\delta} + A\delta + \sum_{k=1}^{\infty} (B_k \cos 2k\bar{\omega}\tau \\ + C_k \sin 2k\bar{\omega}\tau)\delta = 0 \quad \dots \dots \dots (33) \end{aligned}$$

ここに、 E : 単位行列、 H : 減衰行列、 A : 剛性行列、 B_k , C_k : 非線形形ばね定数と振幅成分の 2 次の項との積からなる行列。

減衰行列 H は直交性の仮定に基づいて対角化されてい

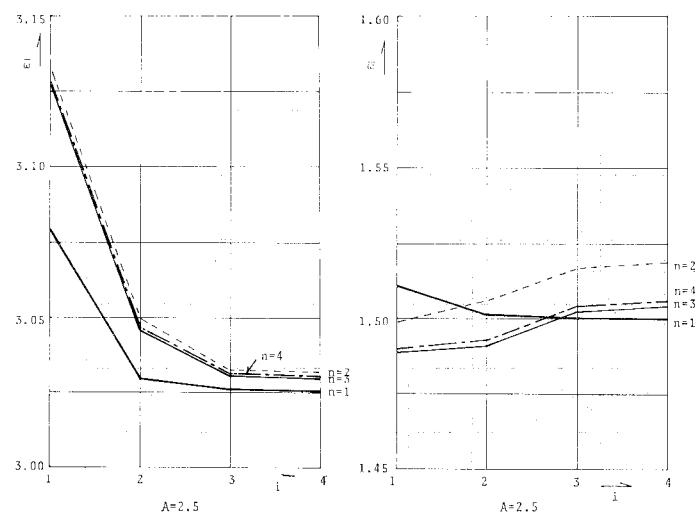


図-6 調和バランス法の収束状況（円板）

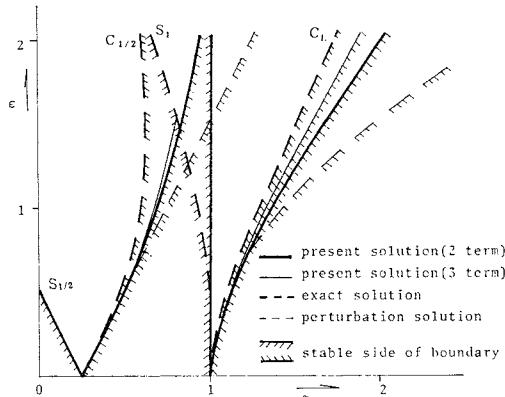


図-7 非減衰の Mathieu の方程式の安定判別曲線

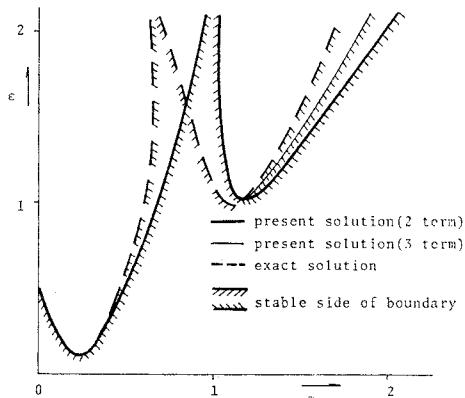


図-8 減衰の Mathieu の方程式の安定判別曲線

界線に // を付した領域が安定な領域に対応し, // のない領域が不安定な領域にそれぞれ対応するものである。図中の肉太の実線は 2 項近似解 (b_0, a_1, b_1) を, 細い実線は 3 項近似解 $(b_0, a_1, b_1, a_2, b_2)$ をそれぞれ示す。また、肉太の破線は Floquet の理論から安定、不安定の境界線が 2π および 4π の周期をもつ条件から求めたものである²⁹⁾。すなわち、周期 2π の場合には、

$$\delta = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\tau + a_n \sin n\tau) \quad \dots \dots \dots (47)$$

と仮定のうえ、式 (43) に代入して調和バランス法を適用すれば未定定数 b_0, b_n, a_n を求めるための同次方程式が得られる。本題の未定定数が零以外の解をもつためには、その係数行列式の値が零でなければならないことから、任意の α に対する ϵ の値を 2 分の 1 法またははさみ打ち法を用いて求めることができる。これより図中の S_1 および C_1 で示した第 2 不安定領域の境界線が得られる。なお、周期 4π なる周期解に対する解の仮定を

$$\delta = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\tau/2 + a_n \sin n\tau/2) \quad \dots \dots \dots (48)$$

とおけば、図中の $S_{1/2}$ および $C_{1/2}$ で示した第 1 不安定領域の境界線が得られる。Floquet の理論より求めた結

果は収束値で、これを本安定判別法の精度を検討する際の厳密解として採用する。また、非減衰の Mathieu の方程式の安定判別に通常使用される摂動法の 1 項近似解を比較、対照のために示せば次のとおりである。

$$\begin{aligned} S_{1/2} \text{ 曲線: } \epsilon &= 1 - 2\alpha, & C_{1/2} \text{ 曲線: } \epsilon &= 1 + 2\alpha \\ S_1 \text{ 曲線: } \epsilon &= 1 - \alpha^2/12, & C_1 \text{ 曲線: } \epsilon &= 1 + 5\alpha^2/12 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (49)$$

これらは 図-7 に細い破線を用いてプロットされている。

図-7 から明らかなように非減衰の場合には本安定判別法の 2 項近似解と 3 項近似解との間には ϵ が小さい場合には差異がほとんどない。 ϵ が大きくなると若干差異が生じてくるが、4 項以上採用しても 3 項との差異はなく、ほぼ 3 項で収束する。なお、 $\alpha=1$ から生ずる S_1 の境界線の 2 項近似解は ϵ の大きさに無関係に $\alpha=1$ である。3 項近似解は厳密解と合致し、図では肉太の破線に一致するために省略されている。次に、本安定判別法による解と厳密解と比較すると、 $S_{1/2}$ と S_1 は ϵ が大きくなると若干差異が生じ、本安定判別法は不安定領域を多めに評価している。しかし、通常の非線形振動の安定判別に使用されている摂動法の 1 項近似解よりも精度のよい結果となっている。

また、図-8 の減衰のある場合 ($h=0.1$) については、減衰の影響は ϵ が小さい領域では不安定領域を安定領域に変え、特に安定領域の幅の狭い第 2 不安定領域において顕著である。 $C_{1/2}$ に対応する境界線は Fourier 級数の 2 項近似解と 3 項近似解との差ではなく項数の影響を受けないが、他の境界線については非減衰の場合と同程度の精度の解が得られているものと考えられる。

以上によって本安定判別法が 1 自由度系の Mathieu の方程式の安定判別に使用できることが数値的に立証された。Floquet の理論からは安定、不安定の境界点が直接求められるが、本法では α, ϵ の各値に対して安定判別を行って境界点を検出するために、境界線を得るためにかなりの計算ステップが必要である。しかしながら、本安定判別法は連立の Hill の方程式に適用できるように配慮されている点に既往の方法に比較して汎用性があるものと考えられる。

7. 非線形振動に対する適用例

(1) 1 自由度系の非線形振動

a) 振幅安定判別の基礎式

周期荷重を受ける両端ヒンジばかりの非線形振動の振幅安定判別に本安定判別法を適用する。いま、系を 1 自由

度系と仮定すれば次式となる.

ここに, $\beta_{111}=1/4$, $r=4/\pi^5$

上式の周期解 T に微小変分 δ を加えたときの変分方程式において、周期解 T を次のように仮定する。

$$T = a \cos \bar{\omega} \tau + b \cos 3 \bar{\omega} \tau + c \cos 5 \bar{\omega} \tau + d \sin \bar{\omega} \tau + e \sin 3 \bar{\omega} \tau + f \sin 5 \bar{\omega} \tau \dots \dots \dots \quad (51)$$

したがって、本例の変分方程式の標準形は次のような Hill の方程式に書き改められる。

$$\ddot{\bar{\delta}} + \left\{ q_0 + \sum_{k=2,4}^{10} (q_{ck} \cos k\bar{\omega}\tau + q_{sk} \sin k\bar{\omega}\tau) \right\} \bar{\delta} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (52)$$

八

$$\begin{aligned}
q_{00} &= 1.5 \beta_{111}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) + 1 - h^2 \\
q_{c2} &= 1.5 \beta_{111}(a^2 - d^2 + 2ab + 2bc + 2dc + 2ef) \\
q_{c4} &= 3 \beta_{111}(ab + ac - de + df) \\
q_{c6} &= 1.5 \beta_{111}(b^2 - e^2 + 2ac - 2df) \\
q_{c8} &= 3 \beta_{111}(bc - ef), \quad q_{c10} = 1.5 \beta_{111}(c^2 - f^2) \\
q_{s2} &= 3 \beta_{111}(ad - bd - ce + ae + bf) \\
q_{s4} &= 3 \beta_{111}(af + ae + bd - cd) \\
q_{s6} &= 3 \beta_{111}(cd + be + af) \\
q_{s8} &= 3 \beta_{111}(ce + bf) \\
q_{s10} &= 3 \beta_{111}cf
\end{aligned}$$

式(44)のように解を仮定のうえ、調和バランス法を適用すれば、非線形振動の振幅安定判別を直接行うことができる。

b) 非減衰振動

両端ヒンジばかりについて 1 自由度 2 項近似解の応答曲線を算定したのが 図-9 である。図-9において横軸は周期荷重の円振動数 ω を線形 1 次固有円振動数 ω_1 で割った振動数比 $\bar{\omega}$ を、縦軸は、はり中央の振幅の絶対値 $|A|$ を示した。図中の実線は荷重と同位相の振幅に、点線は荷重と逆位相の振幅にそれぞれ対応するものである。肉太の実線は荷重強度 $\bar{P}=70$ 、細い実線は $\bar{P}=30$ にそれぞれ対応するものである。また、応答曲線上に○印を付した振幅は安定、×印を付した振幅は不安定であることを示す。 $\bar{\omega}=1.0$ 附近に生ずる共振は主共振を、また、 $\bar{\omega}=0.3$ 附近に生ずる共振は荷重の周波数の 3 倍の周波数の振幅成分

b が卓越する 3 倍の高調波共振を示す。主共振の逆位相の振幅が鉛直直接線をもつ点 ($\bar{p}=70$ で $\bar{\omega}=1.42$, $\bar{p}=30$ で $\bar{\omega}=1.28$) で負の振幅は安定から不安定に移る結果となっている。応答曲線図において、鉛直直接線の軌跡と自由振動の背骨曲線に囲まれる領域は Mathieu の方程式の第 1 不安定領域に対応することがすでに確認されている。この領域においては荷重が増大すれば逆に振幅が減少するという物理的に矛盾する結果となるために実現し得ない部分である。 $\bar{\omega}=0.3$ 付近の高調波共振は連続的に生ずる共振で、加振周波数 $\bar{\omega}$ を零から徐々に上げていくと荷重と逆位相の安定な振幅をもつ共振が生ずる。これに対して加振周波数を下げていくと荷重と同位相の振幅をもつ共振が生ずるが、図に示すように同じく鉛直直接線をもつ点で振幅が不安定となる。非線形振動問題では解の唯一性が成立しないために主共振および高調波共振に見受けられるように同一の周波数に対して 3 個解が算出されているが、すべてが安定であるとは限らない。不安定な振幅は実現し得ないために、安定な振幅から不安定な振幅に移る点で他の安定な振幅に飛び移るいわゆる振幅の跳躍現象が生ずることになる。

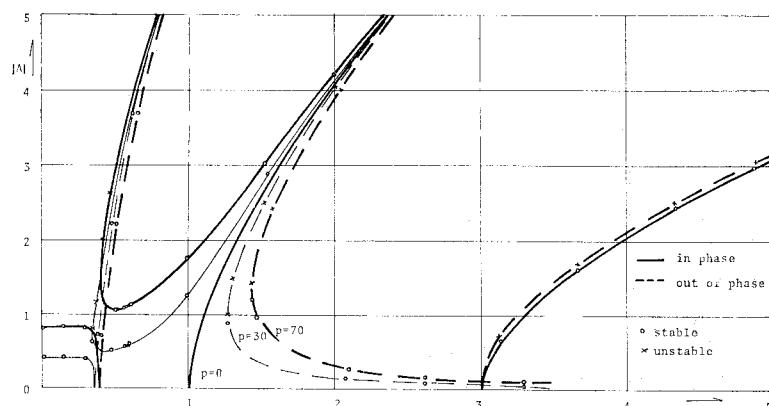


図-9 両端ヒンジばりの応答曲線（1自由度系、非減衰の場合）

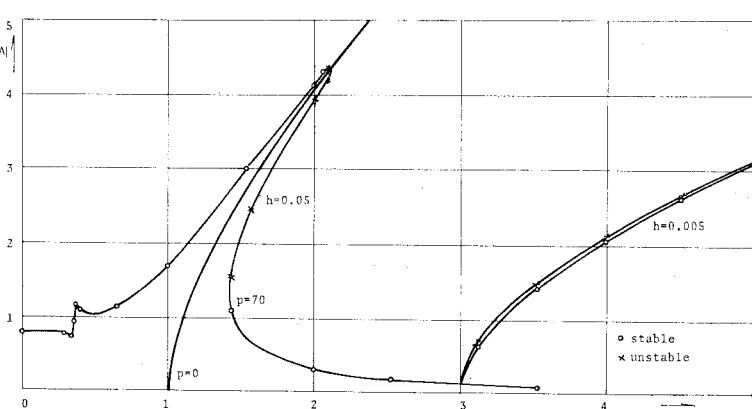


図-10 両端ヒンジばりの応答曲線（1自由度系、減衰の場合）

$\bar{\omega}=0.6$ 付近で振幅が局部的に不安定となるものは Mathieu の方程式の第2不安定領域に対応するものである。しかしながら、その領域はきわめて狭いので減衰のある場合には安定となるものと考えられる。

$\bar{\omega}=3.0$ 付近に分岐的に生ずる共振は 1/3 次の分数調波共振を示す。すなわち、式(51)の代りに、

$$T = a \cos \bar{\omega}t/3 + b \cos \bar{\omega}t + c \sin \bar{\omega}t/3 + d \sin \bar{\omega}t \quad \dots \dots \dots (53)$$

のように仮定して得られた結果である。 a が $\bar{\omega} \geq 3.0$ において生じ、逆位相の振幅は不安定で、同位相の振幅は安定である。以上の考察によって本安定判別法が非減衰の高調波または分数調波を含む非線形振動の振幅安定判別に使用できるものと予想される。

c) 減衰振動

両端ヒンジばりの減衰振動について 1 自由度 2 項近似の応答曲線を図-10 に示す。主共振および高調波共振の算定には減衰定数 $h=0.05$ を、また、応答曲線の幅の狭い分数調波共振には $h=0.005$ を用いた。主共振の振幅は $A=4.3$ 付近で極値をもつ。すなわち、この点で \cos の振幅成分 a が零になり、 \sin の振幅成分 d のみが存在し、周期荷重とはりの動的応答の位相差が 90° となる点に合致する。自由振動の背骨曲線が右に傾くために応答曲線が極値をもつ付近で鉛直直接線が存在する。この上側の鉛直直接線の位置で応答曲線は不安定となることが予想されるが、本法による安定判別では安定、不安定の境界点は上側の鉛直直接線の位置に完全に合致しない結果となっている。安定判別に用いる変分方程式の精度を上げるために、振幅成分を求めるための調和バランス法の項数を増加させても精度の改良はさほどなされない。この原因是図-8 に示した減衰の Mathieu の方程式の境界線 $C_{1/2}$ に対応する解が 3 項以上を採用しても精度が上がらないことによるものである。分数調波共振の振幅の下側および上側が閉じる。これより分数調波共振の生ずる区間がかなり限定される。

(2) 2 自由度系の非線形振動

a) 振幅安定判別の基礎式

両端ヒンジばりの対称振動形をもつ 2 自由度系の運動方程式は式(28)において T_1 および T_3 を採用したものである。式(32)を用いて本例の変分方程式は次のように書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned} & \ddot{\delta}_1 + 2h\dot{\delta}_1 + \delta_1 + 0.75(T_1^2\delta_1 + 6T_1T_3\delta_3 \\ & + 3T_3^2\delta_3) = 0 \\ & \ddot{\delta}_3 + 2h\dot{\delta}_3 + 81\delta_3 + 2.25(T_1^2\delta_3 + 2T_1T_3\delta_1 \\ & + 27T_3^2\delta_3) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (54)$$

いま、 T_1 および T_3 の周期解を次のように仮定する。

高橋・河原・山辺：

$$T_i = a_i \cos \bar{\omega}t + b_i \sin \bar{\omega}t, \quad i=1, 2, \dots \dots \dots (55)$$

したがって、式(55)は次のような連立の Hill の方程式に書き改められる。

$$\begin{aligned} E \ddot{\boldsymbol{\delta}} + 2H \dot{\boldsymbol{\delta}} + A \boldsymbol{\delta} + (B + C \cos 2\bar{\omega}t \\ + D \sin 2\bar{\omega}t) \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (56)$$

ここに、

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 81 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} q_1 & q_4 \\ q_4 & q_7 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} q_2 & q_5 \\ q_5 & q_8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$q_0 = 0.375(a_1^2 + b_1^2 + 3(a_3^2 + b_3^2))$$

$$q_1 = 0.375(a_1^2 - b_1^2 + 3(a_3^2 - b_3^2))$$

$$q_2 = 0.75(a_1b_1 + 3a_3b_3), \quad q_3 = 2.25(a_1a_3 + b_1b_3)$$

$$q_4 = 2.25(a_1b_3 - b_1b_3), \quad q_5 = 2.25(a_1a_3 - b_1b_3)$$

$$q_6 = 1.125(a_1^2 + b_1^2 + 27(a_3^2 + b_3^2))$$

$$q_7 = 1.125(a_1^2 - b_1^2 + 27(a_3^2 - b_3^2))$$

$$q_8 = 1.125(a_1b_1 + 27a_3b_3)$$

b) 両端ヒンジばりの主共振

両端ヒンジばりの非減衰 ($h=0.0$)、減衰 ($h=0.1$) の 1 次、2 次固有振動数近傍の応答曲線を図-11 に示す。非減衰の場合の 1 次、2 次振動の振幅はともに下側鉛直直接線の位置において安定から不安定に移っている。また減衰のある場合についても 1 自由度系の場合と同様の解が得られている。以上によって本安定判別法が多自由度系の場合にも容易に適用でき、かつ 1 自由度系の場合と

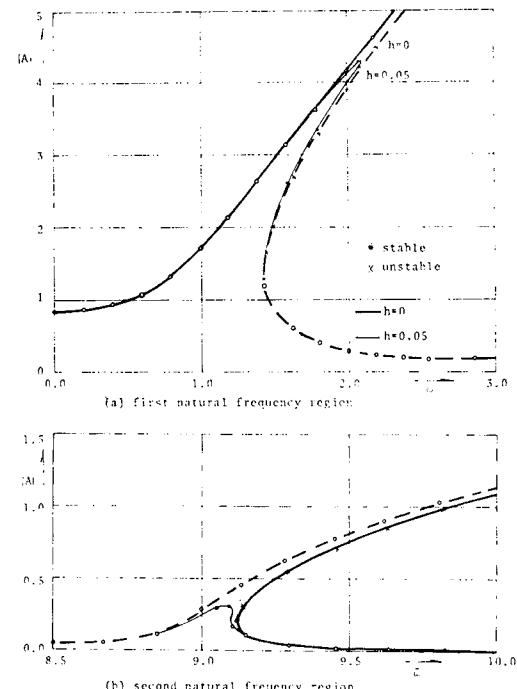


図-11 両端ヒンジばりの応答曲線（2自由度系、非減衰および減衰の場合）

同様に取扱えることが確認される。

8. 結 語

本論文は、はりおよび薄板の幾何学的非線形振動問題の Galerkin 法による多自由度系としての解析の収束性および精度の検討と振幅の安定判別法として開発した手法について報告したものである。得られた結果を要約すると、

(1) 両端ヒンジばかりの非線形自由振動は線形振動の基準関数を用いて変数分離することが可能で、1 自由度系として取扱うことができる。調和バランス法の収束はきわめて速く、3 項近似解は厳密解と合致する。

(2) 両端固定ばかりの非線形自由振動は振幅とともに振動形が変化するために線形振動の基準関数を用いて変数分離することが不可能で、多自由度系としての取扱いが本質的である。多自由度系としての解析の収束性は良好で、採用する自由度数は 4、調和バランス法の項数は 3 で十分である。

(3) 両端固定ばかりの非線形自由振動を対象に多自由度系の解と各種の仮定に基づく 1 自由度系としての解析および差分法による digital simulation 解析との比較を行った。振動数と振幅の関係については多自由度系の解と線形振動の基準関数を用いた 1 自由度系による解の差は小さいが、振動形については両者の間にかなりの差が見受けられた。また、空間および時間関数に特別な仮定を設けない差分法による結果と多自由度系の解の結果は振動数および振動形ともに両者が合致した。したがって、多自由度系の解ははりの非線形振動の解を与えるものと考えられる。

(4) はりよりも非線形性の強い薄板の構造部材である円板においても、多自由度系としての解析の収束性は良好で、はりと同程度の自由度数・項数で十分であることが判明した。

以上 (1)～(4) に示したように連続体を Galerkin 法を用いて多自由度系に置換して取扱う解析の収束性は良好であることが立証された。さらに、調和バランス法を用いた多自由度系としての解法は非線形項が大きくなつても有効性を失わないことおよび物理的意味が明白であることなどから現在のところ最も汎用性に富む解法であると考えられる。

(5) 多自由度系の高調波を含む非線形振動の振幅安定判別法として、微小変分方程式の解を運動の周期性を保証する Fourier 級数の項と収束・発散を表現する指數関数の項との積の形に仮定のうえ、非対称行列の固有値問題に変換する解法を提案した。既に安定判別が確立されている Mathieu の方程式を対象に提案した安定判

別法の有用性および精度を検討したところ、本安定判別法は Mathieu の方程式の安定判別を精度よく行いうることが確認され、安定判別法として有用であることが示された。

(6) 提案した安定判別法を非線形振動の振幅の安定判別に適用したところ、主共振、高調波共振および分数調波共振の安定判別を容易に行うことができ、かつ多自由度系の場合にも 1 自由度系の場合と同様に適用できることが確認された。

本論文は連続体の非線形振動の基本的な取扱い法のみを述べたが、具体的な構造部材に関する非線形振動の解析および実験による現象の確認については稿を改めて報告する予定である。

謝 辞：本研究を行うにあたり、東北大学 八巻 昇教授、同 佐藤謙蔵助手、熊本大学 三好哲彦講師、東京大学 小林繁夫教授、元京都大学 林 千博教授、金沢大学 佐藤秀紀助教授、日本大学 戸川隼人教授より貴重な文献およびご助言と批判をいただいた。また、本稿をまとめるにあたって九州大学 樽木 武助教授に多くの貴重なご助言をいただいた。ここに記して謝意を表するものである。なお本研究の一部は、昭和 46, 47 および 51 年度の文部省科研費によった。最後に本研究の数値計算には九州大学大型計算機センターの FACOM 230-60, 75 を使用したことと付記する。

Appendix

式 (4) の非線形項、荷重および減衰力を無視のうえ、微小振動のたわみ w を $R(r)e^{i\omega t}$ とおいて、微分記号を展開すれば、次のような常微分方程式を得る。

$$\frac{d^4 R}{d\xi^4} + \frac{1}{\xi} \frac{d^3 R}{d\xi^3} - \frac{1}{\xi^2} \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi^3} \frac{dR}{d\xi} - \lambda^4 R = 0 \quad \dots \quad (A-1)$$

上式の解を次のようにべき級数の形に仮定する³⁰⁾。

$$R = \sum_{s=1}^{\infty} a_s \xi^{(s+c)} \quad \dots \quad (A-2)$$

ここに、 a_s, c ：任意定数。

式 (A-2) を式 (A-1) に代入して、係数比較を行えば、 c に関して次式が得られる。

$$(c+1)^2(c-1)^2 = 0 \text{ すなわち } c = \pm 1 \dots \quad (A-3)$$

c の値は 2 個存在するが、式 (A-2) に代入して得られる円板のたわみが中央点 ($\xi=0$) で零でないことから $c = -1$ のみが物理的意味をもつ。式 (A-2) を式 (A-1) に代入すると、定数 a_s に対して次の諸条件を得る。

$$\left. \begin{aligned} a_1, a_3 &: \text{任意}, \quad a_2 = a_4 = 0 \\ a_{s+4} &= a_s \lambda^4 / \{(s+3)^2(s+1)^2\} \quad (s \geq 1) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (A-4)$$

式 (A-4) から、 s の偶数番目の係数が零となることか

ら、式 (A-2) は次のように書き改められる。

$$R(\xi) = \sum_{s=1,2}^{\infty} a_s \xi^{2(s-1)} \dots \quad (A-5)$$

ここに、 a_1, a_2 ：任意、 $a_s = \lambda^4 a_{s-2} / \{16(s-1)^2(s-2)^2\}$
($s \geq 3$)

式 (A-5) における未知数は a_1, a_2, λ の 3 個であるから、次にこれらを決定しなければならない。 λ については本文の式 (17) で示した Bessel 関数で示される固有値方程式から決定される。また、 a_1 は円板の中心点の基準関数の値を示すから、本研究では各自由度の最大振幅を 1 に正規化するために、これを 1 とおくことができる。したがって、式 (A-5) の未知数は a のみであるが、これは円板の境界条件の 1 つから決められる。円板の境界条件を単純支持もしくは固定とすれば、板のたわみが零であるから a_2 が決められることになる。すなわち、

$$R(1) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s = 0 \quad (A-6)$$

参考文献

- 1) Burgreen, D. : Free Vibrations of a Pin Ended Column with Constant Distance Between Ends, *J. Appl. Mech.*, Vol. 18, pp. 135~139, 1951.
- 2) Eringen, A.C. : On the Nonlinear Vibration of Elastic Bars, *Quart. Appl. Math.*, Vol. 9, pp. 351~369, 1952.
- 3) Herrmann, G. : Influence of Large Amplitudes on Flexural Motions of Elastic Plates, NACA TN 3578, 1955.
- 4) Chu, H. and G. Herrmann : Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates, *J. Appl. Mech.*, Vol. 23, pp. 532~540, 1956.
- 5) Yamaki, N. : Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates, *ZAMM*, Vol. 41, pp. 501~510, 1961.
- 6) Wah, T. : Large Amplitude Flexural Vibration of Rectangular Plates, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 5, pp. 425~438, 1963.
- 7) Eiseley, J.G. : Nonlinear Vibrations of Beams and Rectangular Plates, *ZAMP*, Vol. 15, pp. 167~175, 1964.
- 8) Srinivasan, A.V. : Nonlinear Vibrations of Beams and Plates, *Int. J. Nonlinear Mech.*, Vol. 1, pp. 179~191, 1966.
- 9) 佐藤：両端固定はりおよび一端固定、他端単純支持はりの非線形自由振動、日本機械学会論文集、第 34 卷、第 259 号、pp. 418~426、昭和 43 年 3 月。
- 10) 横木・高橋：扇形板の非線形振動、土木学会論文報告集、第 204 号、pp. 1~13、昭和 47 年 8 月。
- 11) リン、Y.K. 著（森・富田・小林繁夫・佐藤・小林暎峯訳）：構造動力学の確率論的方法、培風館、pp. 243~251、昭和 47 年。
- 12) Bennett, J.A. and J.G. Eiseley : A Multiple Degree-of-Freedom Approach to Nonlinear Beam Vibrations, *AIAA J.*, Vol. 8, No. 4, pp. 734~739, 1970.
- 13) Busby, H.R. : Nonlinear Response of a Beam and Flat Plate to Periodic and Randomly Loadings, Ph.D. Thesis, University of Southern California, 1971.
- 14) 八巻・永井：一様分布周期横荷重を受ける長方形板の非線形曲げ振動、日本機械学会論文集、第 39 卷、第 327 号、pp. 3334~3341、昭和 48 年 11 月。
- 15) 斎藤・佐藤・和田：静的圧力を受けている円板の非線形曲げ振動、日本機械学会論文集、第 42 卷、第 354 号、pp. 464~472、昭和 51 年 2 月。
- 16) 占部：非線形振動の解析法（その 2）—周期解を求めるガルキン法—、電子通信学会誌、Vol. 56, No. 9, pp. 1266~1271、昭和 48 年 9 月。
- 17) ラザール、J.S. レフシェツ著（山本訳）：リヤプノフの方法による安定性理論、産業図書、pp. 24~28, 1975.
- 18) Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd Edition, McGraw-Hill Book Co., pp. 396~397, 1959.
- 19) Rosenberg, R.M. and C.P. Atkinson : On the Natural Modes and Their Stability in Nonlinear Two-Degree-of-Freedom Systems, *J. Appl. Mech.*, Vol. 26, pp. 377~385, 1959.
- 20) Rosenberg, R.M. : The Normal Modes of Nonlinear n -Degree-of-Freedom Systems, *J. Appl. Mech.*, Vol. 29, pp. 7~14, 1962.
- 21) Wah, T. : The Normal Modes of Vibration of Certain Non-linear Continuous Systems, *J. Appl. Mech.*, Vol. 31, pp. 139~140, 1964.
- 22) Chang, T.C. and R.R. Craig : Normal Modes of Uniform Beam, *Pro. of ASCE*, Vol. 95, No. EM 4, pp. 1027~1031, 1969.
- 23) 岡本：建設技術者のための振動学（第 2 版）、オーム社、pp. 158~160、昭和 51 年。
- 24) Mei, C. : Nonlinear Vibration of Beams by Matrix Displacement Method, *AIAA J.*, Vol. 10, No. 3, pp. 355~357, 1972.
- 25) Srinivasan, A.V. : Large Amplitude-Free Oscillations of Beams and Plates, *AIAA J.*, Vol. 3, No. 10, pp. 355~357, 1972.
- 26) 高橋・横木：はりの非線形振動に関する基本的考察、長崎大学工学部研究報告、第 4 号、pp. 97~105、昭和 48 年 12 月。
- 27) ボローチン著（近藤・田中訳）：弾性系の動的安定、コロナ社、pp. 182~183、昭和 47 年。
- 28) 平野・戸川・藤井・三好：計算技術および数値計算法、コンピューターによる構造工学講座 II-1-A、培風館、pp. 189~190、昭和 46 年。
- 29) Stoker, J.J. : Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems, Interscience Publishers, pp. 193~208, 1950.
- 30) Weiner, S.R. : The Effect of Constant Axial Forces on the Free Transverse Vibration of Beams and Plates, Ph.D. Thesis, Northwestern University, 1962.
- 31) 山辺・高橋・河原：弹性体の非線形振動解析法について、土木学会第 31 回年次学術講演会講演概要集、第 1 部、pp. 537~538、昭和 51 年 10 月。

(1978.1.9・受付)