

数値ラプラス逆変換法による線形粘弾性解析

LINEAR VISCOELASTIC ANALYSIS BY USING NUMERICAL
INVERSION OF THE LAPLACE TRANSFORM

草間孝志*・三井康司**・吉田俊弥***

By Takashi KUSAMA, Yasushi MITSUI and Shun-ya YOSHIDA

1. 緒言

弾性-粘弾性の対応原理は線形粘弾性問題の解法として有力な方法である。この対応原理は Alfrey, Read, Biot, Lee などによって、次第に定式化されてきたといわれている¹⁾。Lee²⁾ は線形粘弾性体の場の方程式、構成方程式、境界条件を時間に関して Laplace 変換すると、弾性体における方程式に類似することを見出した。この Lee の対応原理によれば、粘弾性問題の応力、変位などは、対応する弾性問題の解に Laplace 逆変換を施すことによって得られることを示している。弾性問題に対しては、古くより多くの研究がなされ、ある場合には式の形で、ある場合には数値解法の形で求められている。したがって、それらの弾性解、または弾性解法を利用すると、同じ形状、境界条件をもつ線形粘弾性問題の Laplace 像空間での解が求まり、逆変換によって原空間における解が得られる。しかしながら、一般に逆変換が容易でないことが多い。たとえば、林³⁾、Hetényi⁴⁾ による弾性地盤上のはりに対する多くの線形弾性理論解は、はりの弾性係数、地盤反力係数および荷重を、それぞれ Laplace 像空間での値で置き換えることによって、粘弾性地盤上の粘弾性ばりの Laplace 像空間における解となるが、その逆変換は困難である。また、構造系が複雑な弾性問題の解を得るには、数値解法によらなくてはならない。したがって、対応する粘弾性問題の変換パラメーターと像空間における解との関係もまた数値的にしか求めることができない。このような場合、原空間の解を得るには数値 Laplace 逆変換法を用いる必要がある。

数値 Laplace 逆変換法、ならびに主としてその線形

粘弾性問題への応用に関する従来の研究には、次のようなものがある。

Papoulis^{5), 6)} は原空間における近似解を、i) 第2種の Tchebycheff 多項式、ii) Legendre 多項式、iii) Laguerre 多項式の3種類の直交関数を用いて表現する方法を研究しており、これらのうち、Legendre 多項式による方法の粘弾性問題への応用が Cost⁷⁾、三井⁸⁾ によってなされているほか、クラックの問題⁹⁾ にも利用されている。

Schapery¹⁰⁾ は厳密式の Laplace 変換と Dirichlet 級数で表わした近似式の Laplace 変換が、 n 個の Laplace 変換パラメーターの点において一致するとき、原空間での誤差平方和が最小になることを見出し、未定係数に関する連立一次方程式を解いて原空間での近似解を求める方法を提案しており、さらに、粘弾性問題の解析に適用している。この Schapery の方法は数値 Laplace 逆変換の選点法 (Collocation method) とよばれ、Cost⁷⁾、Brilla ら¹¹⁾、Tolbert¹²⁾ などによって、粘弾性問題に利用されている。また、この方法は熱伝導問題¹³⁾、湖流の問題¹⁴⁾、乱流拡散の問題¹⁵⁾ など広く応用されている。

田中¹⁶⁾ は Laplace 像空間での解を有限要素法を用いて求めることを初めて試み、Gauss の積分公式を利用した Bellman の方法¹⁷⁾ を応用して粘弾性問題を解いている。

以上の方法を比較すると次のことがいえる。直交関数を用いて近似する方法は、Laplace 変換によって未定係数に対する係数マトリックスが3角行列になるという性質から、比較的簡単に未定係数を順次決定できるという利点を有するが、用いた仮定関数の性質から多くの場合 Cost⁷⁾ が指摘しているように、時間帯によって何回か近似式を作りなおさなければならず、広い時間領域にわたって精度のよい解を得ることが困難なことがある。それは変換パラメーターを等差級数にとるため広い領域にわたってパラメーターを選択できないことに起因する。

* 正会員 工博 信州大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 信州大学助手 工学部土木工学科

*** 正会員 工博 信州大学教授 工学部土木工学科

Schapery の選点法は広い時間領域に適合する近似式を求めることが可能であるが、仮定関数に直交性がないゆえ、未定係数の決定に際して、連立方程式を解く必要がある。

Gauss の積分公式を用いる方法は解が収束するまで繰り返し計算をする必要がある。

その他の簡便な逆変換法として、Widder の方法^{7), 18)}, Alfrey の方法, ter Haar の方法⁷⁾ ならびに Schapery の直接法¹⁰⁾ などがある。これらの方法は、便利な方法であるが精度は期待できない。また、Widder の方法は微分の次数を高めれば理論的には厳密解に近づくが、数値微分によると誤差を伴うという欠点がある。

一方、数値逆変換に際して、Laplace 変換パラメータの選択は、解の精度に影響を与える重要なことであるが、従来は各研究者が変換パラメータの値を適宜選択して逆変換を行っており、はっきりした裏づけがないのが現状である。

本論文では、まず、Papoulis の方法のように仮定関数に直交関数を用いたときの利点と、近似式が広い時間領域にわたって適用できるという Schapery の選点法の利点を活かした数値 Laplace 逆変換法を示し、ついで分布関数の利用によって、Laplace 逆変換パラメータを合理的に選択する方法を論じ、線形粘弾性問題に適用して、その妥当性を検討した。

なお、数値 Laplace 逆変換の計算結果は、Cost¹⁹⁾ が指摘しているように、像空間における値の誤差に比較的敏感である。このため系が複雑な場合の計算は倍精度で行った。

2. 正規直交な指数関数系とその Laplace 変換

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ を異なる正の実数定数とし、 $g_1(t) = e^{-\tau_1 t}, g_2(t) = e^{-\tau_2 t}, \dots, g_n(t) = e^{-\tau_n t}$ からなる関数系 $\{\varphi(t)\}$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t) &= b_{11}g_1(t) \\ \varphi_2(t) &= b_{21}g_1(t) + b_{22}g_2(t) \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n(t) &= b_{n1}g_1(t) + b_{n2}g_2(t) + \dots + b_{nn}g_n(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

が、領域 $[0, \infty]$ で正規直交関数系とする。このときの定数 b_{ij} を定めるため、E. Schmidt の方法²⁰⁾

$$\begin{aligned} g_i' &= g_i - (g_i, \varphi_1)\varphi_1 - (g_i, \varphi_2)\varphi_2 - \dots \\ &\quad - (g_i, \varphi_{i-1})\varphi_{i-1} \\ \varphi_i &= \frac{g_i'}{(g_i', g_i')^{1/2}} \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

を用いる。ここに、たとえば、

$$(g_i, \varphi_{i-1}) = \int_0^\infty g_i(t)\varphi_{i-1}(t)dt$$

である。

計算の結果 b_{ij} は、

$$\begin{aligned} b_{11} &= \sqrt{2\tau_1}, \quad b_{21} = \sqrt{2\tau_2} \frac{2\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \\ b_{22} &= \sqrt{2\tau_2} \frac{\tau_2 + \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \\ b_{31} &= \sqrt{2\tau_3} \frac{2\tau_1(\tau_1 + \tau_2)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} \\ b_{32} &= \sqrt{2\tau_3} \frac{2\tau_2(\tau_2 + \tau_1)}{(\tau_2 - \tau_1)(\tau_2 - \tau_3)} \\ b_{33} &= \sqrt{2\tau_3} \frac{(\tau_3 + \tau_1)(\tau_3 + \tau_2)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)}, \dots \end{aligned}$$

と順次求まり、一般式として b_{ij} は、

$$\left. \begin{aligned} b_{i1} &= \sqrt{2\tau_i} \quad (j=i=1) \\ b_{ij} &= \sqrt{2\tau_i} \frac{2\tau_j}{\tau_i + \tau_j} \prod_{k=1}^i \frac{(\tau_j - \tau_k)}{(\tau_j - \tau_k)} \quad (1 < j \leq i) \\ b_{ij} &= 0 \quad (j > i) \quad (i, j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

となる。なお、 b_{ij} の間には次式が成立する。

$$\sum_{j=1}^i b_{ij} = \sqrt{2\tau_i} \dots\dots\dots (3)$$

次に、 $\varphi_i(t)$ の Laplace 変換を $\bar{\varphi}_i(s)$ とすると、

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_i(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\varphi_i(t)dt \\ &= \sum_{j=1}^i \frac{b_{ij}}{s + \tau_j} = \frac{R(s)}{(s + \tau_1)(s + \tau_2)\dots(s + \tau_i)} \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

上式の $R(s)$ は s に関する $i-1$ 次以下の多項式である。

$i=1$ の場合には明らかに、

$$\bar{\varphi}_1(s) = \frac{\sqrt{2\tau_1}}{s + \tau_1}$$

である。 $i > 1$ とすると、直交性 $(\varphi_m, \varphi_n) = 0, (m \neq n)$ より、

$$(\varphi_1, \varphi_i) = b_{11} \int_0^\infty e^{-\tau_1 t} \varphi_i(t) dt = b_{11} \bar{\varphi}_i(\tau_1) = 0 \quad (i > 1)$$

よって、 $\varphi_i(t)$ の Laplace 変換は $s = \tau_1$ で 0 となる。

$i > 2$ とすると、

$$(\varphi_2, \varphi_i) = b_{21} \bar{\varphi}_i(\tau_1) + b_{22} \bar{\varphi}_i(\tau_2) = 0$$

ゆえに、

$$\bar{\varphi}_i(\tau_2) = 0 \quad (i > 2)$$

同様にして $i > j$ に対しては、

$$\bar{\varphi}_i(\tau_j) = 0 \quad (i > j)$$

これより $\varphi_i(t)$ の Laplace 変換は

$$s = \tau_j \quad (j=1, 2, \dots, i-1)$$

に置いて 0 となる。したがって式 (4) の $R(s)$ は、

$$R(s) = A(s - \tau_1)(s - \tau_2)\dots(s - \tau_{i-1})$$

と置くことができる。上式の定数 A は初期値定理より

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \bar{\varphi}_i(s) = A = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi_i(t) = \sum_{j=1}^i b_{ij} = \sqrt{2\tau_i}$$

ゆえに, $A = \sqrt{2\tau_i}$, よって $\varphi_i(t)$ の Laplace 変換は次式によって与えられる.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_1(s) &= \frac{\sqrt{2\tau_1}}{s+\tau_1} \quad (i=1) \\ \bar{\varphi}_i(s) &= \frac{\sqrt{2\tau_i}(s-\tau_1)(s-\tau_2)\cdots(s-\tau_{i-1})}{(s+\tau_1)(s+\tau_2)\cdots(s+\tau_i)} \quad (i>1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

3. Laplace 逆変換に関する選点法の改良^{21), 22)}

Schapery¹⁰⁾ は非可逆的な熱力学の研究から, Laplace 変換が適用できる問題は, ステップ関数で表わされる刺激が $t=0$ で作用する場合, 時間に依存する次の解で表わされるとした.

$$y(t) = a_1 + a_2 t + f(t) \dots\dots\dots (6)$$

ここに, a_1, a_2 は初期条件または最終条件より決定できる定数であり, $f(t)$ は分布関数 $F(\alpha)$ を用いて, 次式で表わされる過渡応答成分である.

$$f(t) = \int_0^\infty F(\alpha) e^{-t\alpha} d\alpha \dots\dots\dots (7)$$

もし, $F(\alpha)$ が Dirac の δ 関数の和であるならば,

$$F(\alpha) = \sum_k h_k \delta(\alpha - \alpha_k)$$

$$f(t) = \sum_k h_k e^{-t\alpha_k}$$

となる. このことは, $f(t)$ が近似的に Dirichlet 級数

$$f(t) = \sum_{k=1}^n B_k e^{-\tau_k t} \dots\dots\dots (8)$$

で表わされることを示している. ここに, τ_k は指定した正の実数である.

さらに, Schapery は厳密式の Laplace 変換と近似式の Laplace 変換が n 個の変換パラメーター

$$s = \tau_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

の点において一致するとき, 実空間での誤差平方和が最小になることを見出し, 式 (8) の B_k に関する連立一次方程式を解いて $f(t)$ の近似式を求める方法を提案している.

ここでの目的は, さきに求めた正規直交関数系 $\{\varphi(t)\}$ を利用することによって, 連立方程式を解く操作をせずに $f(t)$ の近似式を求めることである.

いま, ある点 i ($i=1, 2, \dots, m$) の過渡応答成分を $f_i(t)$ とし,

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j(t) \dots\dots\dots (9)$$

と置くと, 式 (9) の Laplace 変換は式 (5) より,

$$\begin{aligned} \bar{f}_i(s) &= c_{i1} \frac{\sqrt{2\tau_1}}{s+\tau_1} + c_{i2} \frac{\sqrt{2\tau_2}(s-\tau_1)}{(s+\tau_1)(s+\tau_2)} \\ &+ c_{i3} \frac{\sqrt{2\tau_3}(s-\tau_1)(s-\tau_2)}{(s+\tau_1)(s+\tau_2)(s+\tau_3)} + \dots \\ &+ c_{in} \frac{\sqrt{2\tau_n}(s-\tau_1)(s-\tau_2)\cdots(s-\tau_{n-1})}{(s+\tau_1)(s+\tau_2)(s+\tau_3)\cdots(s+\tau_n)} \end{aligned}$$

となる. よって, $s = \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ と置いて, 順次 c_{ij} を求めると,

$$\begin{aligned} c_{i1} &= \sqrt{2\tau_1} \bar{f}_i(\tau_1) = b_{11} \bar{f}_i(\tau_1) \\ c_{i2} &= \sqrt{2\tau_2} \left[\frac{2\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \bar{f}_i(\tau_1) + \frac{\tau_2 + \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \bar{f}_i(\tau_2) \right] \\ &= b_{21} \bar{f}_i(\tau_1) + b_{22} \bar{f}_i(\tau_2) \\ c_{i3} &= \sqrt{2\tau_3} \left[\frac{2\tau_1(\tau_1 + \tau_2)}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} \bar{f}_i(\tau_1) \right. \\ &+ \frac{2\tau_2(\tau_2 + \tau_1)}{(\tau_2 - \tau_1)(\tau_2 - \tau_3)} \bar{f}_i(\tau_2) \\ &+ \left. \frac{(\tau_3 + \tau_1)(\tau_3 + \tau_2)}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} \bar{f}_i(\tau_3) \right] \\ &= b_{31} \bar{f}_i(\tau_1) + b_{32} \bar{f}_i(\tau_2) + b_{33} \bar{f}_i(\tau_3) \end{aligned}$$

以下同様にして,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^j b_{jk} \bar{f}_i(\tau_k) \quad \left(\begin{matrix} i=1, 2, \dots, m \\ j=1, 2, \dots, n \end{matrix} \right) \dots\dots\dots (10)$$

が成立することがわかる.

式 (1), (9), (10) をマトリックス表示すると,

$$\{\varphi(t)\} = [b] \{\exp(-\tau t)\} \dots\dots\dots (11)$$

$$\{f(t)\} = [c] \{\varphi(t)\} \dots\dots\dots (12)$$

$$[c] = [\bar{f}(\tau)] [b]^T \dots\dots\dots (13)$$

ここに,

$$\{\varphi(t)\} = [\varphi_1(t) \quad \varphi_2(t) \cdots \varphi_n(t)]^T \dots\dots\dots (14)$$

$$\{\exp(-\tau t)\} = [e^{-\tau_1 t} \quad e^{-\tau_2 t} \cdots e^{-\tau_n t}]^T \dots\dots\dots (15)$$

$$\{f(t)\} = [f_1(t) \quad f_2(t) \cdots f_m(t)]^T \dots\dots\dots (16)$$

$$[b] = \begin{bmatrix} b_{11} & & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots b_{nn} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots c_{mn} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

$$[\bar{f}(\tau)] = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(\tau_1) & \bar{f}_1(\tau_2) & \cdots \bar{f}_1(\tau_n) \\ \bar{f}_2(\tau_1) & \bar{f}_2(\tau_2) & \cdots \bar{f}_2(\tau_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{f}_m(\tau_1) & \bar{f}_m(\tau_2) & \cdots \bar{f}_m(\tau_n) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

で, T は転置を表す. $[\bar{f}(\tau)]$ の要素 $\bar{f}_i(\tau_k)$ は $s = \tau_k$ と置いたときの i 点の過渡応答成分の Laplace 像空間での値であり, 対応原理によって $\bar{y}_i(\tau_k)$ が求めれば, 式 (6) の Laplace 変換

$$\bar{f}_i(\tau_k) = \bar{y}_i(\tau_k) - \frac{a_{i1}}{\tau_k} - \frac{a_{i2}}{\tau_k^2}$$

を用いて求めることができる. なお, a_{i1}, a_{i2} の決定に関しては 付録 A を参照されたい.

式 (11)~(13) より,

$$\{f(t)\} = [\bar{f}(\tau)] [b]^* \{\exp(-\tau t)\} \dots\dots\dots (20)$$

を得る. ここに,

$$[b]^* = [b]^T [b] \dots\dots\dots (21)$$

である.

式 (20) が求める $\bar{f}(s)$ の Laplace 逆変換式であり、像空間での値がわかれば、マトリックスの積によって逆変換が実行できることを示しており、得られる式形が Dirichlet 級数となるゆえ、連立方程式を解いて未定係数を決定するという Schapery の選点法と同じ解が得られる。

$$\{f(t)\} \text{ が求まれば式 (6) をもとに,} \\ \{y(t)\} = \{a_1\} + \{a_2\}t + \{f(t)\} \dots\dots\dots(22)$$

より $\{y(t)\}$ を得ることができる。

4. Laplace 逆変換パラメーターの選択

式 (20) の右辺より明らかなように、 $f(t)$ の精度は r_k の値に支配される。よって、数値逆変換に際しては Laplace 変換パラメーター s に、どのような値 (r_k) を与えたらよいかが重要である。

初期値定理、最終値定理によると、

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s\bar{f}(s), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\bar{f}(s)$$

が成立する。したがって、 $f(t)$ の変化が大きい t の範囲は、 $s\bar{f}(s)$ の変化が大きい s の範囲に対応すると考えられる。そのため、従来、 $s\bar{f}(s)$ が変化する範囲内での s の値を適宜 n 個採用し、 $s=r_k (k=1, 2, \dots, n)$ と置いて数値逆変換を行っている。

たとえば、Schapery¹⁰⁾ は内圧を受ける厚肉円筒の粘弾性解析に、 $r_k=10^3, 10^4, \dots, 10^7$ の 5 個の値をもとに逆変換を行っており、丹羽、小林、中島¹¹⁾ は熱伝導問題の過渡応答解析に $r_k=0.01, 0.02, 0.04, \dots, 5242.88$ の 20 個の値を用い、Young, Liggett¹²⁾ は潮流の解析に $r_k=2 \times 10^{-5}, 2 \times 10^{-4}, \dots, 2 \times 10^2$ の 8 個の値を用いて逆変換している。この例のように、変換パラメーターの値の選択は対象とする問題ならびに研究者によってかなり異なり、Tolbert¹²⁾ の言葉を借りるならば、 r_k の値は通常工学的判断 (engineering judgement) に基づいて定められている。このように、従来は変換パラメーターの値の選択に明確な根拠がなかったといえよう。なお、 r_k の値を等比級数に選んだ場合、 r_k の個数を多くとっても必ずしも精度はよくなるようである¹⁰⁾。

一方、赤木²³⁾ は静的クリープ試験によって材料のレオロジー定数を定めるのに、遅延スペクトルが卓越する点での遅延時間を求めて、粘弾性定数を決定する方法を示している。この方法はクリープ関数に指数関数を仮定する場合、合理的な方法である。

$f(t)$ が Dirichlet 級数で表現される本文の場合には、Laplace 像空間の解から r の分布を求め、変換パラメーターにその卓越する近傍での値を用いれば、 $f(t)$ は卓越する近傍に線スペクトルをもつ指数関数となるゆえ、精度のよい逆変換が実行できるものと考えられる。

いま、式 (7) の代りに、

$$f(t) = \beta \int_0^\infty F(\alpha) e^{-t^\alpha} d\alpha \dots\dots\dots(23)$$

を用いる。ここに、規格化因子 β は、

$$\int_0^\infty F(\alpha) d\alpha = 1 \\ \text{になるように決定されるもので,} \\ \beta = f(0) = y(0) - a_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} s\bar{y}(s) - a_1 \dots\dots\dots(24)$$

によって与えられる定数である。

$\alpha=1/\tau, F(\alpha)=\tau^2 N(\tau)$ とおくと式 (23) は、

$$f(t) = \beta \int_0^\infty N(\tau) e^{-t^\alpha} d\tau \dots\dots\dots(25)$$

となり、上式を Laplace 変換すると、

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \beta \int_0^\infty \frac{N(\tau)}{s+\tau} d\tau$$

を得る。すなわち、 $f(s)$ は $N(\tau)$ の Stieltjes 変換として与えられ、 $f(s)$ より分布関数 $N(\tau)$ を求める操作は動的弾性率より緩和スペクトルを求める手法²⁴⁾と類似の関係が成立する。

Stieltjes 逆変換公式²⁵⁾

$$N(\tau) = \frac{1}{\beta} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!(\nu+1)!} \frac{d^{\nu+1}}{ds^{\nu+1}} \\ \cdot \left\{ s^{2\nu+1} \frac{d^\nu \bar{f}(s)}{ds^\nu} \right\} \Big|_{s=\tau} \dots\dots\dots(26)$$

において、 ν を有限値としたときの近似値 $N_\nu(\tau)$ を

$$N_\nu(\tau) = \frac{1}{\beta} \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!(\nu+1)!} \frac{d^{\nu+1}}{ds^{\nu+1}} \\ \cdot \left\{ s^{2\nu+1} \frac{d^\nu \bar{f}(s)}{ds^\nu} \right\} \Big|_{s=\tau} \dots\dots\dots(27 \cdot a)$$

とする。

いま、 $z = \ln s, \bar{F}(s) = s\bar{f}(s)$ と置き、微分演算子 D を

$$D = \frac{d}{dz} = \frac{d}{d(\ln s)} \dots\dots\dots(28)$$

とおくと、

$$s^{2\nu+1} \frac{d^\nu \bar{f}(s)}{ds^\nu} = (-1)^\nu e^{\nu z} (1-D)(2-D) \\ \cdot (3-D) \dots (\nu-D) \bar{F}(s)$$

より、

$$\frac{d^{\nu+1}}{ds^{\nu+1}} \left\{ s^{2\nu+1} \frac{d^\nu \bar{f}(s)}{ds^\nu} \right\} = \frac{(-1)^\nu}{s} D(1^2 - D^2) \\ \cdot (2^2 - D^2)(3^2 - D^2) \dots (\nu^2 - D^2) \bar{F}(s)$$

が得られ、したがって、式 (27・a) は、次のように表現することもできる。

$$N_\nu(\tau) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{(\nu-1)!(\nu+1)!} \frac{1}{\tau} \\ \cdot [D(1^2 - D^2)(2^2 - D^2)(3^2 - D^2) \dots \\ \cdot (\nu^2 - D^2) \{s\bar{f}(s)\}]_{s=\tau} \dots\dots\dots(27 \cdot b)$$

上式において、 $\nu=1, 2, \dots$ と置き、さらに、

$$H_\nu(\tau) = \tau N_\nu(\tau) \dots\dots\dots(29)$$

表-1

ν	D	D^3	D^5	D^7	D^9
1	1	-1	-	-	-
2	4	-5	1	-	-
3	36	-49	14	-1	-
4	576	-820	273	-30	1

と置くとき、

$$H_1(r) = \frac{1}{2\beta} \left[\frac{ds\bar{f}(s)}{d(\ln s)} - \frac{d^3s\bar{f}(s)}{d(\ln s)^3} \right]_{s=\gamma} \dots\dots\dots(30 \cdot a)$$

$$H_2(r) = \frac{1}{6\beta} \left[4 \frac{ds\bar{f}(s)}{d(\ln s)} - 5 \frac{d^3s\bar{f}(s)}{d(\ln s)^3} + \frac{d^5s\bar{f}(s)}{d(\ln s)^5} \right]_{s=\gamma} \dots\dots\dots(30 \cdot b)$$

などが得られる。

表-1 は式 (27・b) をもとに、式 (30) の [] 内の各次数の微分係数にかかる定数と ν の値との関係を示したものである。理論的には、 ν を大きくとるに従って $H(r)$ の精度は高まるが、一方、式 (27) または 表-1 より明らかなように、 ν を大きくすると高次の微分係数が介入する。Laplace 像空間での解が数値的にしか求められない場合には、微分もまた数値計算によらなくてはならないが、一般に、高次の数値微分は誤差を伴う。このため、 $\nu=2$ とした式 (30・b) を用いるのが適当と考えられる。

ν のとり方による $H(r)$ への影響を知るため、一例として、 $\bar{f}(s)=1/(s+a)$ ($f(t)=\exp(-at)$) について計算した結果を図-1 に示す。 ν を大きくとると、 $H(r)$ は $r=a$ におけるスパイクに近づく。 $\nu=2$ とした場合、 $H(r)$ はおおよそ $-1 < \log_{10}(r/a) < 1$ の範囲で値をもつが、 $r=a$ で卓越することが認められ、 $\log_{10}(r/a)$ が 0 と ± 1 に対する $H(r)$ の比は 0.04 であり、分布関数は急激に減少している。これは、逆に図示のような $r-H(r)$ であれば、 $f(t)$ は $\exp(-at)$ か、または、その近傍の指数関数で表わし得ることを示している。

式 (25), (29) において、 r を $1/\tau$ (τ は緩和時間) と置き、 $H(r)$ を $H(\tau)$ で置き換えると、 $f(t)$, $H(\tau)$ はそれぞれ物質の粘弾性特性を示す緩和関数、緩和スペクトルとよばれるものに相当するが、ここでは、材料特性のみならず、荷重

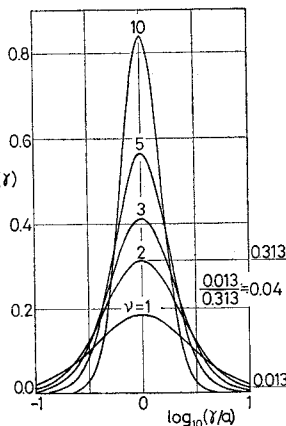


図-1 $H(r)$ の精度

状態ならびに境界条件などにも支配され、さらに種々な性質の材料から構成される構造物の場合には、それらの相互作用による結果として、得られるもので、与えられた問題に対して固有なものである。

Laplace 変換パラメーター s の値を等比級数にとって種々変えると、 $\ln s$ は等間隔になるゆえ、刻み ($d \ln s$) が等しい数値微分法を用いて式 (30) を計算すると、 r の分布を知ることができる。しかし、式 (30) は近似式であるから、得られた $H(r)$ が卓越する点での r の値のみならず、その近傍での r の値も採用して数値逆変換を施せばよい。

このように、式 (30) は逆変換パラメーター (r_k) の選択のめやすに用いるものであるから、 $H(r)$ は相対的な値でよい。したがって、規格化因子 β は $\beta=1$ としてもよい。 $\beta=1$ とした場合、 $r-H(r)$ 関係は対象とする物理量 (応力、変位など) ならびに位置によって異なるが、 β を考慮すると、すべて同程度の値で得られるのみならず、ときにはまったく同じ $r-H(r)$ 関係が描かれるという利点がある。

筆者の経験によると、 $r-H(r)$ 関係の計算はすべての点について求める必要はなく、若干の特定な点* について求めれば十分である。

式 (30) の $s\bar{f}(s)$ の値は、与えられた s に対する $\bar{y}(s)$ より

$$s\bar{f}(s) = s\bar{y}(s) - a_1 - \frac{a_2}{s}$$

を用いて求めるのであるが、この段階では、逆変換に採用する r_k の値が未定であるから、付録 A に示すように $a_2 \neq 0$ の場合には a_1 を決定することができない。したがって、式 (24) の規格化因子 β も正しく求めることができない。このような場合には、とりあえず $a_1=0$ として β を求めるか、または、 $\beta=1$ として、 $H(r)$ を計算し、 $r-H(r)$ 関係を求めても、 r_k の選択には支障がない。

なお、応力、変位などは荷重状態によって、正負異なるゆえ、計算例に示した $H(r)$ の図はその絶対値を図示したものである。

5. 計算例

以下の 4 例を示す。初めの 2 例題は厳密解が明らかなもので、本法の妥当性を検照するために行ったものであり、残りの 2 例題は、さらに複雑な問題へのアプローチとして取り上げた例題である。いずれの例題も荷重はす

* たとえば、変位、応力などの大きいと思われる点、あるいは、数種の材料から構成されている構造物の場合には、それぞれの材料内の点、またはその境界点など。

べて $t=0$ で一定なステップ荷重を受けるものとしたが、荷重が時間とともに変化する場合には Boltzmann の重ね合せの定理によって表わすことができる。なお、いずれも慣性項を無視した準静的問題である。

(1) 鋼管で補強された内圧を受ける線形粘弾性円筒

Lee et al.²⁶⁾ は 図-2 に示す粘弾性円筒を、せん断変形に対しては Maxwell 体、体積変形に対しては弾性体として応力の厳密解を得ている。用いられた材料定数 (p.s.i. 単位) は次のとおりである。

$$G(t) = \frac{3}{8} \times 10^5 e^{-t}, \quad K(t) = 10^5$$

$$E_R = 3 \times 10^7, \quad \nu_R = 1/\sqrt{11}$$

ここに、 $G(t)$ 、 $K(t)$ は粘弾性円筒のせん断と体積変形の緩和弾性率であり、 E_R 、 ν_R は補強鋼管の弾性係数、ポアソン比である。なお、内圧は一定荷重 p_0 とする。

粘弾性部分の Laplace 像空間における弾性係数 (E_s) とポアソン比 (ν_s) は 付録 (B-4) より、

$$E_s = s\bar{E}(s) = 9 \times 10^5 \frac{s}{8+9s}$$

$$\nu_s = s\bar{\nu}(s) = \frac{4+3s}{8+9s}$$

となる。また、像空間での荷重は $\bar{p}(s) = p_0/s$ となる。 s に数値を与えれば、弾性計算によって与えられた s に対する像空間における変位と応力を得ることができる。弾性解法には、図-2 に示すような要素分割* した有限要素法を用いた。

この計算例の場合粘弾性円筒は Maxwell 体であるが、外周を鋼管で補強された軸対称問題であることから、応力は

もとより変位も有限値となるゆえ、式 (6) の a_2 は明らかに 0 となる。また a_1 は式 (A-3) より求まる。

図-3 は式 (30) を用いて $\bar{u}(r)$ 、 $\bar{\sigma}_r(r)$ 、 $\bar{\sigma}_\theta(r)$ に対する $r-H(r)$ 関係を求めたもので、変位、応力、位置に関係なく図示のように得られた。図より r の値は 0.01 ~ 10.0 の間にあり、 $r=0.35$ で $H(r)$ が卓越していることがわかる。この値を重視して、図の上部に印した 7 個の r_k の値を採用して数値逆変換を行った。

図-4、5 は式 (20)、(22) を用いて求めた σ_θ 、 σ_r の

* step by step 法を用いて Zienkiewicz et al.²⁷⁾ が解析したときの要素分割を引用した。

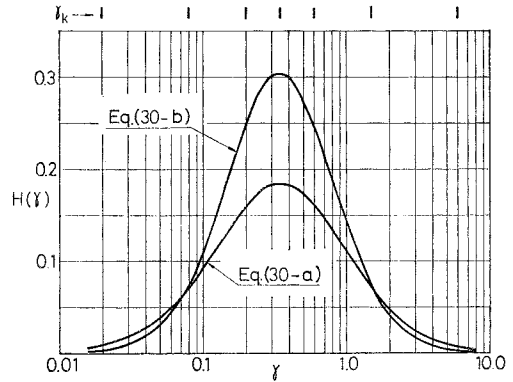


図-3 内圧円筒の $r-H$ 関係と逆変換に用いた r_k の値

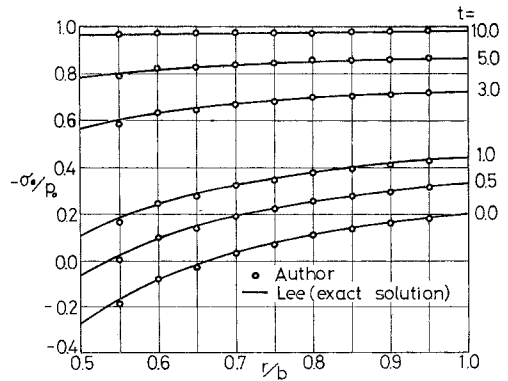


図-4 内圧円筒の σ_θ 分布

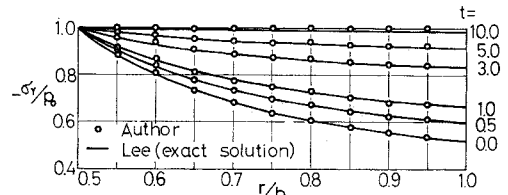


図-5 内圧円筒の σ_r 分布

計算結果と厳密解を示したもので、本法による結果は厳密解によく一致している。

この計算例の厳密解は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta \\ \sigma_r \end{aligned} \right\} = -p_0 \left[\left\{ 0.3616 + \frac{0.005298}{0.9849} (1 - e^{-0.9849t}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{0.2233}{0.3528} (1 - e^{-0.3528t}) \right\} \right. \\ \left. \mp \frac{b^2}{r^2} \left\{ 0.1596 - \frac{0.01320}{0.9849} (1 - e^{-0.9849t}) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{0.05583}{0.3528} (1 - e^{-0.3528t}) \right\} \right]$$

であるから、正確には r は 0.9849 と 0.3528 に離散的に分布するはずであるが $\exp(-0.9849t)$ の係数は $\exp(-0.3528t)$ の係数の約 1/120 であることと、式 (30) が近似式であるために、図-3 では $r=0.35$ の点のみ

$H(\tau)$ が卓越した。

このように、図-3 は変位と応力の解が $\exp(-0.35t)$ または、その近傍の指数

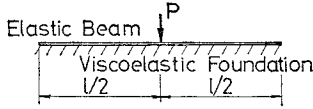


図-6 粘弾性地盤上のはり

関数で表現できることを示している。

なお、以後の計算例では、 $H(\tau)$ の計算には式 (30-b) のみを用いる。

(2) 線形粘弾性地盤上の有限長はり

園田・小林・石尾²⁸⁾は、種々な端条件と荷重状態について、固有関数を用いて線形粘弾性ばね地盤上の単一弾性はりを、Standard Solid 地盤、Kelvin 地盤、Maxwell 地盤の場合について解析している。Flügge²⁹⁾は両端が単純支持され、中央点に集中荷重が作用する場合について、Maxwell 地盤上の弾性はりと弾性地盤上の Maxwell はりに対する解を級数の形で表わしている。

これらの問題の像空間における解は Winkler 地盤上の弾性はりの解に相当し、多くの例が文献 3), 4) に示されている。この場合、原空間への逆変換は困難であるが、数値逆変換法を利用することによって解決される。

弾性地盤上の弾性はり (接地幅 B) に対する特性値を $\lambda(\equiv \sqrt{Bk_0/4EI})$ とし、 $\beta = \lambda l$ とすると、粘弾性地盤上の粘弾性はりの場合、Laplace 像空間では、はりと地盤の緩和弾性率の Laplace 変換 $\bar{E}(s)$ 、 $\bar{k}_0(s)$ を用いて、

$$\beta_s = \sqrt[4]{\frac{B s \bar{k}_0(s)}{4 I s \bar{E}(s)}} \quad l = \beta_0 \psi(s)$$

の形で置くことができる。前述の園田ほか²⁸⁾が行った計算例の場合には $\beta_0 = \sqrt[4]{250}$ で、 $\psi(s)$ は次のようになる。

- a) Standard Solid 地盤 $\psi(s) = \sqrt[4]{\frac{2+2\tau s}{2+\tau s}}$
- b) Kelvin 地盤 $\psi(s) = \sqrt[4]{1+\tau s}$
- c) Maxwell 地盤 $\psi(s) = \sqrt[4]{\frac{\tau s}{1+\tau s}}$

ここに、 τ は時間の次元をもつ定数である。

図-6 の荷重状態について荷重点のたわみ $w(t/\tau)$ と曲げモーメント $M(t/\tau)$ を計算の対象にすると、像空間における解は弾性解³⁰⁾より、

$$\frac{EI}{P\beta^3} \bar{w}(\tau s) = \frac{\cosh \beta_s + \cos \beta_s + 2}{8 \beta_s^3 (\sinh \beta_s + \sin \beta_s) \tau s}$$

$$\frac{\bar{M}(\tau s)}{Pl} = \frac{\cosh \beta_s - \cos \beta_s}{4 \beta_s (\sinh \beta_s + \sin \beta_s) \tau s}$$

となる。いま、 EIw/Pl^3 、 M/Pl をそれぞれ

$$y\left(\frac{t}{\tau}\right) = a_1 + a_2 \frac{t}{\tau} + f\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

の形で表わすと、Maxwell 地盤上のはりのたわみに関する a_2 のみ、 $a_2 = \lim_{\tau s \rightarrow 0} (\tau s)^2 \bar{y}(\tau s) = 0.001$ となり、その他の a_2 は 0 となる。したがって、付録 A に示すよう

に、Maxwell 地盤上のはりのたわみに関する a_1 の値は逆変換に採用する τ_k の値に支配されるゆえ、 $H(\tau)$ の計算に際しては、とりあえず 0 と置く。その他の a_1 は $a_1 = \lim_{\tau s \rightarrow 0} \tau s \bar{y}(\tau s)$ より求まる。

図-7~9 は各地盤上のはりの荷重点のたわみと曲げモーメントに対する $\tau\gamma$ - H 関係を図示したものである。図-8 より明らかなように、Kelvin 地盤の場合には、 $\tau\gamma$ が広い範囲にわたって分布している。したがって、Kelvin 地盤の場合にはたわみ、モーメントとも共通に $\tau\gamma_k = 0.07, 0.3, 0.7, 1.2, 1.5, 3.0, 7.0, 15.0, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ の 14 個の値を用いて逆変

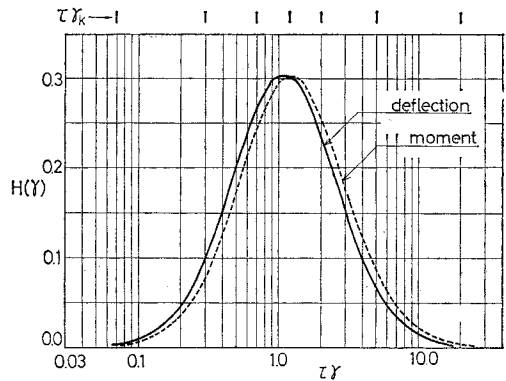


図-7 Standard Solid 地盤上のはりの $\tau\gamma$ - H 関係と逆変換に用いた $\tau\gamma_k$ の値

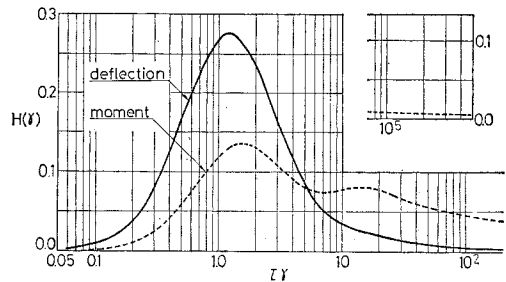


図-8 Kelvin 地盤上のはりの $\tau\gamma$ - H 関係

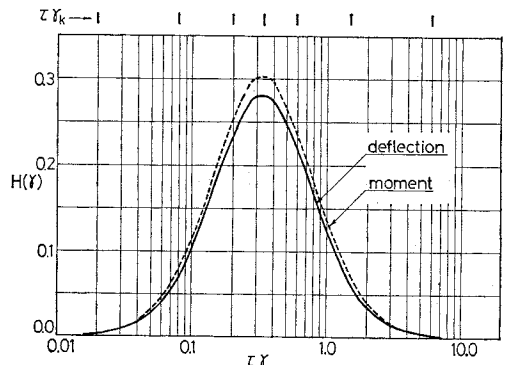


図-9 Maxwell 地盤上のはりの $\tau\gamma$ - H 関係と逆変換に用いた $\tau\gamma_k$ の値

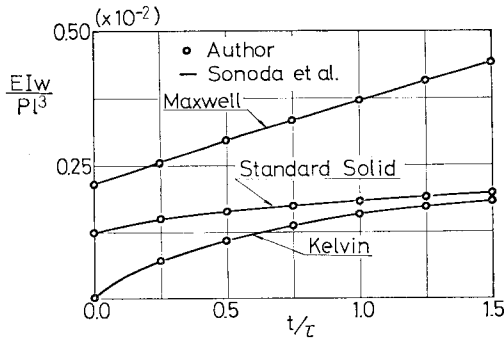


図-10 荷重点のたわみの経時変化

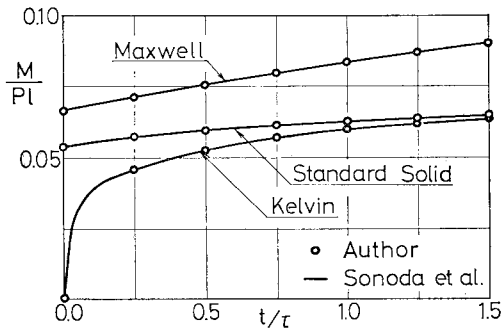


図-11 荷重点のモーメントの経時変化

換を行い、その他の地盤の場合には図の上部に印した7個の τr_k を用いて逆変換を行った。なお、Maxwell 地盤上のはりのたわみについては付録 A の初期値を一致させる方法を用いた。図-10, 11 は計算結果で、固有関数による解と比較すると少ない項数で精度のよい解が得られ、さらに $\psi(s)$ を変えるのみで他の線形粘弾性地盤および線形粘弾性はりに拡張することができる。

以上、3種類の地盤のモデルに対する計算結果のうち、最も精度が悪いものは、Kelvin 地盤のときの曲げモーメントである。それは、 τr の分布が広いことによる τr_k の選点の難しさに起因する。選点の仕方によって、どの程度結果が異なるかを表-2の4種類について計算した。Case 1 は前述の選点であり、Case 2 は図-8のモーメントに対する分布をもとに、7点を選点したものである。Case 3, 4 は従来の選点法で、図-12に示すように、 $s\bar{f}(s)$ がほぼ一定になる s の範囲が $0.01 \sim 10^6$ 程度であることから、 $s(=\tau r_k)$ を等比級数に14点と7点選点したものである。計算結果を表-3に示す。固有関数による解と比較すると、 τr の分布をもとに選点した Case 1, 2 は、 $t/\tau \neq 0$ 近傍を除いて、よく一致している。

選点の仕方は種々考えられるが、図-8のモーメントに対する $\tau r-H$ 関係を例にとりて、 τr_k の選点のめやすを述べると、次のとおりである。

図より $\tau r = 1.5, 15$ の2点で H は卓越している。し

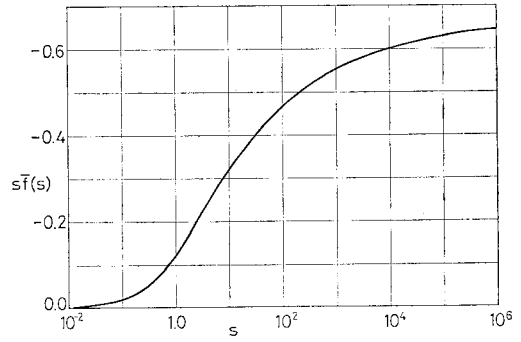


図-12 Kelvin 地盤上のはりのモーメントに対する $s-s\bar{f}(s)$ 関係

表-2 逆変換に用いた τr_k

Case	選点数	τr_k
1	14	0.07, 0.3, 0.7, 1.2, 1.5, 3.0, 7.0, 15.0, $10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$
2	7	0.1, 0.7, 1.5, 6.0, 15.0, $10^2, 10^5$
3	14	0.01, $0.01 \times 4, 0.01 \times 4^2, \dots, 0.01 \times 4^{13}$
4	7	0.4, $0.4 \times 10, 0.4 \times 10^2, \dots, 0.4 \times 10^6$

表-3 選点による比較 (Kelvin 地盤上のはりのモーメント)

t/τ	$M/Pl \times 10^2$				
	Sonoda et al.*)	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
0.0	0.0	0.037	-0.519	0.348	0.613
0.0001	0.693	0.687	1.237	0.672	0.692
0.001	1.233	1.235	1.350	1.131	0.959
0.1	3.832	3.831	3.830	3.849	3.532
0.2	4.434	4.435	4.432	4.338	4.383
0.5	5.275	5.274	5.275	5.318	5.626
1.0	5.993	5.993	5.993	6.042	6.156
2.0	6.491	6.491	6.491	6.448	6.358
5.0	6.633	6.633	6.633	6.642	6.552
10.0	6.634	6.634	6.634	6.646	6.623

* 固有関数による解は曲げモーメントに対して収束が悪いため、ここでは、奇数項のみ 7500 項まで計算した。

たがって、この点を含み、この近傍に重点を置いて、まず選点する。次に、 $\tau r < 1.5$ の部分に注目する。もし、 $\tau r = 0.15$ と 1.5 における H の比が 0.04 以下 (図-1) であれば、 $\tau r < 0.15$ を選点の対象にする必要はない。次に、 $\tau r > 15$ に注目すると、 H は急激に減少せず、緩慢に低下している。これは τr の大きい部分からも選点しなければならないことを示している。Case 1 は上記のことから考慮して選点したものである。

なお、従来の選点法は、 τr または r の分布に限られた領域で一定となり、他の領域で0となるような、いわゆる箱型分布の場合により結果を与えるようである。

(3) 線形粘弾性地盤上の連続フーチング基礎

粘弾性地盤上のはりの少し複雑な例として、図-13

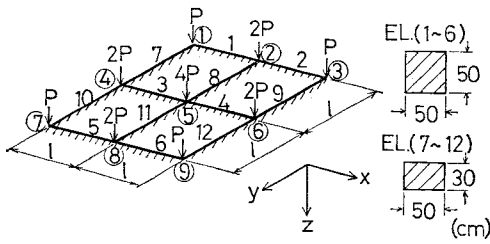


図-13 粘弾性地盤上の連続フーチング基礎

に示すような格子状に組まれた連続フーチング基礎を考える。

計算例として、地盤反力係数 $k_0(t)$ が

$$k_0(t) = \frac{k_0}{2} \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right\}$$

で表わされる地盤とすると、像空間では、

$$s\bar{k}_0(s) = \frac{k_0(1+\tau s)}{2+\tau s}$$

となり、像空間における部材の曲げとねじりの特性値 $\lambda_s, \mu_s^{31)}$ は、

$$\lambda_s = \sqrt{\frac{k_0 B}{4EI}} \psi_1(s), \quad \mu_s = \sqrt{\frac{k_0 B^3}{12GJ}} \psi_2(s)$$

ここに、 GJ は部材のねじり抵抗係数、 B は部材の接地幅、

$$\psi_1(s) = \sqrt{\frac{1+\tau s}{2+\tau s}}, \quad \psi_2(s) = \sqrt{\frac{1+\tau s}{2+\tau s}}$$

である。

いま、部材は弾性で、 $E=2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $G=0.9 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, 長さ $l=5 \text{ m}$, 図示の部材断面とし、 $k_0=5 \text{ kg/cm}^3$ とする。なお図示の荷重が $t=0$ で作用したものとす。

この場合の像空間における解は、弾性地盤上の格子の解法³¹⁾によって求められる。図-14 は節点 5 のたわみ w_5 と要素 3 の節点 5 における曲げモーメント M_{y5} に関する $\tau\gamma$ - H 関係を図示したものである。この 2 個の曲線から図の上部に印した 8 個の $\tau\gamma_k$ の値を採用して数値逆変換を行うことにした(この程度の判定でも、従来

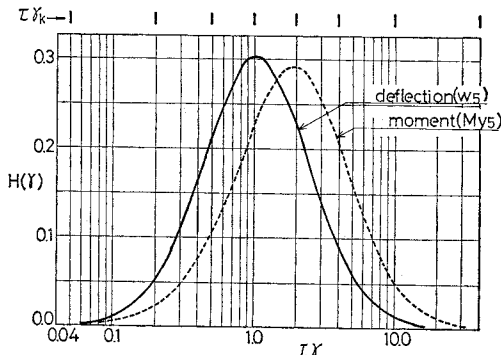


図-14 粘弾性地盤上の連続フーチング基礎の $\tau\gamma$ - H 関係と逆変換に用いた $\tau\gamma_k$ の値

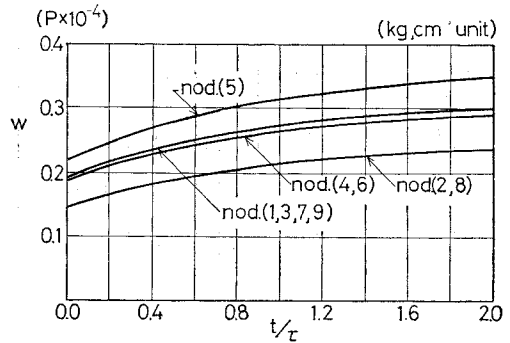


図-15 粘弾性地盤上の連続フーチングの節点変位の経時変化

の方法よりは精度のよい結果が得られるものと判断される)。

図-15 は節点のたわみの経時変化を示したものである。この計算例では式 (A-3) の最終値定理を用いて a_1 を決定したゆえ、初期値には誤差がある。正解値と比較すると、初期値の最大誤差は w_0 に生ずるが、その値は 0.04% にすぎない。

(4) 線形粘弾性斜面

図-16 に示すような粘弾性特性の異なる 2 層よりなる傾斜角 45° 、高さ L の斜面の肩に $t=0$ で等分布荷重 q が載荷された場合の荷重による斜面の変形を平面ひずみ状態として解析する*。地盤は等方で緩和弾性率は、

I 層:

$$E(t) = E_0 \{ 1 + 0.5 \exp(-t/5) + 0.2 \exp(-t/50) \}$$

II 層:

$$E(t) = 5 E_0 \{ 1 + 0.3 \exp(-t/15) + 0.1 \exp(-t/150) \}$$

とする。なお、 t は分単位で、ポアソン比は両層とも $\nu = 0.35$ とする。

節点の水平、垂直変位に対する r - H 関係を求めると、曲線は層によってほぼ 2 つの形状に分けられ、特に図-16 に示す節点について図示したものが図-17 で

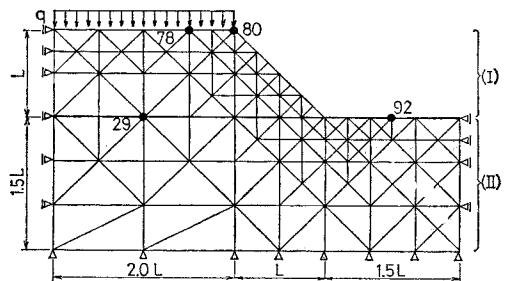


図-16 定数の異なる二層よりなる粘弾性斜面

* 形状ならびに要素分割は文献 32) を引用した。

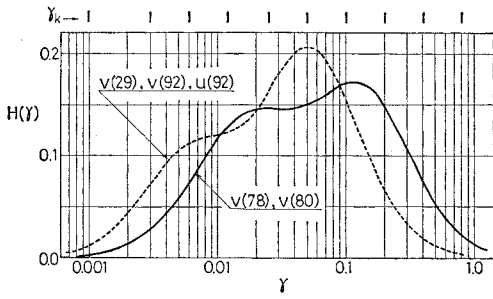


図-17 粘弾性斜面の γ - H 関係と逆変換に用いた τ_k の値

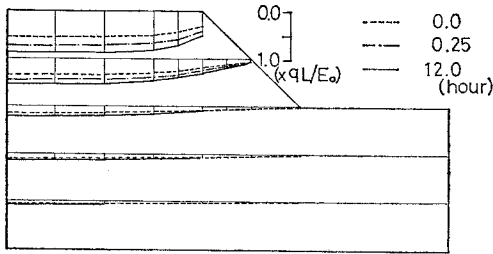


図-18 粘弾性斜面の垂直変位の経時変化

ある。これより図の上部に印した 10 個の τ_k の値を採用して逆変換を行った。

図-18 は各節点の $t=0, 0.25, 12$ 時間後の垂直変位である。この計算例では約 7 時間後に一定値となった。

6. 結 言

本研究は、線形粘弾性問題の対応原理による解法を対象として、従来用いられている Schapery の選点法による数値 Laplace 逆変換法の改良と、選点法による逆変換を精度よく行うための変換パラメーターの選択について論じ、計算例によってその妥当性を検照したものである。本研究により得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) ステップ関数で表わされる刺激が $t=0$ で作用するときの変位、応力などの過渡応答成分は、式 (20) に示すように、Laplace 像空間における解のマトリックスと、変換パラメーターによって作られるマトリックスとの積によって、比較的簡単に求めることができる。

(2) 逆変換に際し、従来、各研究者が変換パラメーターを適宜選択していたが、分布関数を利用して変換パラメーターを選択すれば、精度のよい逆変換を行うことができる。

本論文では一定な外力が $t=0$ で作用するものとしたが、解は t の関数として求まるゆえ、重ね合せの定理によって、他の外力に対しても求めることができる。なお動的問題への適用に関しては今後の課題としたい。

計算は信州大学計算機センターを通して東京大学大型計算機センター (HITAC 8800/8700) を利用して行ったことを付記する。

付録 A a_{i1}, a_{i2} の決定

(1) a_{i2} の決定

$t \rightarrow \infty$ で $f(t) \rightarrow 0$ となるゆえ、 t が大きいと式 (6) は、

$$y_i(t) = a_{i1} + a_{i2}t$$

とおくことができる。よって、

$$a_{i2} = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \bar{y}_i(s) \dots \dots \dots (A-1)$$

(2) a_{i1} の決定

a) $a_{i2}=0$ の場合

$$y_i(t) = a_{i1} + f_i(t) \dots \dots \dots (A-2)$$

より a_{i1} は定常解に相当する。最終値定理より、

$$a_{i1} = y_i(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \bar{y}_i(s) \dots \dots \dots (A-3)$$

を得る。粘弾性固体の解は、この場合となるほか、多くの過渡応答現象がこの型に属する。なおこの場合にも次の b) より a_{i1} を求めてもよい。

b) 初期値を一致させる場合

$$y_i(t) = a_{i1} + a_{i2}t + f_i(t)$$

に置いて a_{i2} は式 (A-1) より定まる既知量であるが、もし $a_{i2} \neq 0$ の場合には a_{i1} は最終値定理からは求めることができない。それゆえ、初期値 $y_i(0)$ をもとに決定することを考える。 $t=0$ と置くと、

$$y_i(0) = a_{i1} + f_i(0)$$

しかるに、 $f_i(t)$ は逆変換に際して採用する τ_k の値に支配されるゆえ、 a_{i1} も τ_k の値に依存することになり、この場合には a_{i1} の決定が少し面倒になる。

いま、

$$\psi_i(t) = y_i(t) - a_{i2}t$$

と置くと、

$$\psi_i(t) = a_{i1} + f_i(t) = a_{i1} + \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_j(t) \dots \dots \dots (A-4)$$

上式に Laplace 変換を施し、 $s = r_1, r_2, \dots, r_n$ と置くと、3. と同様な操作によって、

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^j b_{jk} \bar{\psi}_i(r_k) + (-1)^j \sqrt{\frac{2}{r_j}} a_{i1}$$

を得る。式 (13) にならって、上式をマトリックス表示すると、

$$[c] = [\bar{\psi}(r)][b]^T + \{a_1\} \left[\sqrt{\frac{2}{r}} \right] \dots \dots \dots (A-5)$$

ここに、 $[\bar{\psi}(r)]$ は式 (19) の $\bar{f}(r_k)$ の代りに $\bar{\psi}(r_k)$ で置き換えたときのマトリックスであり、

$$\{a_i\} = [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ \dots \ a_{m1}]^T$$

$$\left[\sqrt{\frac{2}{r}} \right] = \left[-\sqrt{\frac{2}{r_1}} \ \sqrt{\frac{2}{r_2}} \ -\sqrt{\frac{2}{r_3}} \ \dots \ (-1)^n \sqrt{\frac{2}{r_n}} \right]$$

である。式 (A-4) は式 (11) を用いると、

$$\{\psi(t)\} = \{a_i\} + [c][b]\{\exp(-rt)\}$$

一方、 $t=0$ では $\psi_i(0) = y_i(0)$ となり、また式 (3) より、

$$[b][1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]^T = \{\sqrt{2r}\}$$

が成立する。ここに、

$$\{\sqrt{2r}\} = [\sqrt{2r_1} \ \sqrt{2r_2} \ \sqrt{2r_3} \ \dots \ \sqrt{2r_n}]^T$$

よって、

$$\{y(0)\} = \{a_i\} + [c]\{\sqrt{2r}\}$$

上式へ式 (A-5) を代入すると、

$$\begin{aligned} \{y(0)\} &= \{a_i\} + [\bar{\psi}(r)][b]^T \{\sqrt{2r}\} \\ &\quad + \{a_i\} \left[\sqrt{\frac{2}{r}} \right] \{\sqrt{2r}\} \dots \dots \dots (A-6) \end{aligned}$$

しかるに、

$$\begin{aligned} \left[\sqrt{\frac{2}{r}} \right] \{\sqrt{2r}\} &= \left[-\sqrt{\frac{2}{r_1}} \ \sqrt{\frac{2}{r_2}} \ -\sqrt{\frac{2}{r_3}} \ \dots \right] \\ &\quad \cdot [\sqrt{2r_1} \ \sqrt{2r_2} \ \sqrt{2r_3} \ \dots]^T \\ &= -2+2-2+2-\dots + (-1)^n 2 = \begin{cases} -2 & (n : \text{奇数}) \\ 0 & (n : \text{偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$

ゆえに、式 (A-6) より、

$$\begin{aligned} \{a_i\} &= (-1)^n \{y(0)\} - [\bar{\psi}(r)][b]^T \{\sqrt{2r}\} \\ &\quad \dots \dots \dots (A-7) \end{aligned}$$

を得る。なお式 (A-7) の $[\bar{\psi}(r)]$ の要素は、

$$\bar{\psi}_i(r_k) = \bar{y}_i(r_k) - \frac{a_{i2}}{r_k^2} \dots \dots \dots (A-8)$$

より求まる。

式 (A-1), (A-3) および式 (24) の計算に際して用いる s は r の分布から得られる r_k の値に対して、十分小さい (または大きい) s の値を採用すればよい。本文の計算例では $s=10^{-10}$, $s=10^{10}$ とした。

付録 B 弾性-粘弾性の対応原理

線形粘弾性材料の構成方程式は、応力、ひずみの偏差成分、垂直成分を $\sigma'(t)$, $\sigma_m(t)$, $\varepsilon'(t)$, $\varepsilon_m(t)$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma'(t) &= 2 \int_0^t G(t-\xi) \dot{\varepsilon}'(\xi) d\xi \\ \sigma_m(t) &= 3 \int_0^t K(t-\xi) \dot{\varepsilon}_m(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B-1)$$

が成立する。ここに $G(t)$, $K(t)$ はせん断と体積変形の緩和弾性率である。

式 (B-1) に Laplace 変換を施すと、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}'(s) &= 2 s \bar{G}(s) \bar{\varepsilon}'(s) \\ \bar{\sigma}_m(s) &= 3 s \bar{K}(s) \bar{\varepsilon}_m(s) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B-2)$$

を得る。すなわち、Laplace 像空間における構成方程式は $s\bar{G}(s)$, $s\bar{K}(s)$ をせん断弾性係数、体積弾性係数とす

る線形弾性材料の構成方程式に一致する。

また、そのほか、つり合い式、運動関係式、境界条件などが Laplace 像空間において弾性の場合と同様に成立する。

なお、 $C_G(t)$, $C_K(t)$ をせん断と体積変形のクリープコンプライアンスとすると、

$$s\bar{C}_G(s) = \frac{1}{s\bar{G}(s)}, \quad s\bar{C}_K(s) = \frac{1}{s\bar{K}(s)} \dots \dots \dots (B-3)$$

が成立し、さらに、

$$\left. \begin{aligned} s\bar{E}(s) &= \frac{9 s \bar{K}(s) \cdot s \bar{G}(s)}{3 s \bar{K}(s) + s \bar{G}(s)} \\ s\bar{\nu}(s) &= \frac{1}{2} \frac{3 s \bar{K}(s) - 2 s \bar{G}(s)}{3 s \bar{K}(s) + s \bar{G}(s)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (B-4)$$

が成り立つことが知られている。ここに $E(t)$, $\nu(t)$ は単軸引張り緩和弾性率を表わし、 $\nu(t)$ はポアソン比に相当するものである。式 (B-4) も弾性材料に対する場合と類似の関係であることがわかる。

参考文献

- 1) Flügge, W. : Viscoelasticity 2nd ed., Springer-Verlag, p. 186, 1975.
- 2) Lee, E.H. : Stress analysis in visco-elastic bodies, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 13, No. 2, pp. 183~190, 1955.
- 3) Hayashi, K. : Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage und ihre Anwendung auf den Tiefbau, Verlag von Julius Springer, 1921.
- 4) Hetényi, M. : Beams on Elastic Foundation, Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1946.
- 5) Papoulis, A. : A new method of inversion of the Laplace transform, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 14, No. 4, pp. 405~414, 1957.
- 6) 近藤次郎 : ラプラス変換とその応用, 培風館, pp. 55~58, 1977.
- 7) Cost, T.L. : Approximate Laplace transform inversions in viscoelastic stress analysis, AIAA Journal, Vol. 2, No. 12, pp. 2157~2166, 1964.
- 8) 三井康司 : Legendre 多項式を用いた線形粘弾性体の近似解析, 信州大学工学部紀要, No. 43, pp. 27~48, 1977.
- 9) Chen, E.P. and G.C. Sih : Transient response of cracks to impact loads, in Sih, G.C. (ed.), Mechanics of Fracture, Vol. 4, Noordhoff International Publishing, Leyden, Chapter 1, 1977.
- 10) Schapery, R.A. : Approximate methods of transform inversion for viscoelastic stress analysis, Proceeding of the Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics, pp. 1075~1085, 1961.
- 11) Brilla, J., S. Lichardus and A. Nemethy : The generalization of the finite element method for the solution of visco-elastic two-dimensional problems, IUTAM Symposium on the Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies, Gothenburg 1974, Springer-Verlag, pp. 229~241, 1975.
- 12) Tolbert, R.N. : A viscoelastic characterization of polymer concrete and its application in a steel-polymer concrete composite beam, Ph.D. Dissertation, Vanderbilt University, Nashville, Tennessee, 1975.
- 13) 丹羽義次・小林昭一・福井卓雄・中島 信 : 数値ラプラ

- ス変換を用いた過渡応答の解析, 土木学会関西支部講演概要集, p. I-2, 1976.
- 14) Young, F.D.L. and J.A. Liggett: Transient finite element shallow lake circulation, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 103, No. HY 2, pp. 109~121, 1977.
- 15) 小林三男・荒木正夫・富所五郎: 数値ラプラス変換を用いた非定常拡散解析, 第25回海岸工学講演会論文集, pp. 504~507, 1978.
- 16) 田中豊喜: 有限要素法による線形粘弾性体の応力解析, マトリックス構造解析講演論文集, 日本鋼構造協会, pp. 422~429, 1969.
- 17) Bellman, R., R.E. Kalaba and J.A. Lockett: Numerical Inversion of the Laplace Transform, Elsevier Publishing Co., New York, 1966.
- 18) 泉 信一: フーリエ解析概論, 共立全書, pp. 123~125, 1951.
- 19) Cost, T.L. and E.B. Becker: A multidata method of approximate Laplace transform inversion, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, pp. 207~219, 1970.
- 20) 河田龍夫: 応用数学概論, 岩波全書 110, p. 48, 1952.
- 21) 草間孝志: 数値ラプラス逆変換法に関する一試みと粘弾性問題への応用, 建築学会北陸支部研究報告集, 第21号, p. 13, 1978.
- 22) 三井康司・草間孝志・吉田俊弥: 数値ラプラス逆変換法の粘弾性問題への応用, 土木学会第33回年次講演, p. I-37, 1978.
- 23) 赤木知之: レオロジーモデル定数の一決定法, 土と基礎, Vol. 25, No. 3 (Ser., No. 229), pp. 47~52, 1977.
- 24) 山本三三三: 物体の変形学, 誠文堂新光社, p. 202, 1972.
- 25) 河田龍夫: Fourier変換とLaplace変換, 岩波講座, 現代応用数学, A. 12, 岩波書店, p. 169, 1957.
- 26) Lee, E.H., J.R.M. Radok and W.B. Woodward: Stress analysis for Linear viscoelastic materials, Transactions of the Society of Rheology 3, pp. 41~59, 1959.
- 27) Zienkiewicz, O.C., M. Watson and I.P. King: A numerical method of visco-elastic stress analysis, International Journal of Mechanical Science, Vol. 10, pp. 807~827, 1968.
- 28) 園田恵一郎・小林治俊・石尾年光: 線形粘弾性基礎上のはりの解析, 土木学会論文報告集, 第247号, pp. 1~8, 1976.
- 29) 1) の pp. 80~83.
- 30) 4) の pp. 53~54.
- 31) 草間孝志: Winkler 地盤上の格子と直交異方性板の解法——格子基礎とマット基礎の設計への寄与——, 土木学会論文集, 第152号, pp. 26~33, 1968.
- 32) 川本眺万・林正夫: 地盤工学における有限要素解析, 培風館, p. 118, 1978.

本文は数値 Laplace 逆変換法の粘弾性解析への適用について述べたものであり, 有限要素法に関する文献は割愛した。なお本文の全般にわたって以下の文献を参考にした。

- 33) Bland, D.R.: The Theory of Linear Viscoelasticity, Pergamon, 1960.
- 34) 小野木重治: レオロジー要論, 4版, 積書店, 1962.
- 35) Lee, E.H.: Viscoelasticity, in Flügge, W. (ed.), Handbook of Engineering Mechanics, New York, McGraw-Hill, Chapter 53, 1962.
- 36) 山田嘉昭: 塑性・粘弾性, コンピュータによる構造工学講座 II-2-A, 日本鋼構造協会編, 培風館, 1972.

(1979.1.12・受付)