

# 初期曲率・ねじれ率を有する薄肉空間曲線 部材の有限変位理論

## FINITE DISPLACEMENT THEORY OF NATURALLY CURVED AND TWISTED THIN-WALLED MEMBERS

平 嶋 政 治\*・井 浦 雅 司\*\*・依 田 照 彦\*\*\*

By Masaharu HIRASHIMA, Masashi IURA and Teruhiko YODA

### 1. ま え が き

近年、構造物の大型化・軽量化に伴い、薄肉構造部材が多く使われるようになってきた。薄肉構造部材の形状は、大別すると直線部材あるいは円弧部材で特徴づけられる薄肉平面曲線部材と、初期曲率のみならず初期ねじれ率を有する薄肉空間曲線部材とに分けられる。一方、それらの解析方法に注目すると、薄肉構造部材の解析はひずみ・変位ともに微小であると仮定する微小変位理論と、ひずみは微小と考えるが変位については二次以上の微小項まで考慮する有限変位理論とに分けられる。

薄肉平面曲線部材の微小変位理論のうち、薄肉直線部材の微小変位理論に関しては、Vlasov<sup>1)</sup>、KollbrunnerとHajdin<sup>2)</sup>の研究があり、ほぼ完成された感がある。また、薄肉円弧部材の微小変位理論としては、わが国では小西と小松<sup>3)</sup>、倉西<sup>4)</sup>、深沢<sup>5)</sup>、西野と深沢<sup>6)</sup>の研究があり、外国ではDabrowski<sup>7)</sup>、Becker<sup>8)</sup>の研究がある。それらの位置づけについては西野と深沢の文献6)に詳述されている。さらに、薄肉空間曲線部材の微小変位理論としては、初期曲率と初期ねじれ率が一定であるらせんはりに対する研究に築地<sup>9)</sup>、平嶋と恵谷<sup>10)</sup>の研究があり、初期曲率と初期ねじれ率が一定でない場合の研究にHirashimaとIura<sup>11)</sup>の研究がある。薄肉断面部材ではないが、初期曲率と初期ねじれ率が一定でない空間曲線部材の研究にWashizu<sup>12)</sup>、Schröter<sup>13)</sup>、Weißgerber<sup>14)</sup>の研究がある。

他方、薄肉断面部材の有限変位理論に注目すると、薄肉直線部材については西野・倉方・長谷川・奥村<sup>15)</sup>の研究があり、そり変位を無視した特別な場合の有限変位理論に前田と林<sup>16)</sup>、西野・倉方・後藤<sup>17)</sup>の研究がある。ま

た、薄肉平面曲線部材の有限変位理論については、Naito<sup>18)</sup>、遠田<sup>19)</sup>、倉方<sup>20)</sup>、薄木<sup>21)</sup>、事口・久保・中井<sup>22)</sup>の研究がある。しかるに、薄肉空間曲線部材の有限変位理論に関しては、Schroeder<sup>23)</sup>、高島<sup>24)</sup>の研究がある程度で、まだ議論すべき問題点が残されていると思われる。特に、薄肉閉断面を有する空間曲線部材の有限変位理論に関する研究は著者らの知る限りでは見当たらない。

本報告の目的は、初期曲率と初期ねじれ率をもち、その横断面形状が開断面あるいは閉断面である、薄肉空間曲線部材の一次元有限変位理論を展開することにある。

変位法に基づく解析においては変位場の設定が重要な役割を果たすことがすでに指摘されている<sup>9),15)</sup>。このため、まず、薄肉直線部材の有限変位理論で使用されている仮定<sup>15)</sup>を基礎に、変位を平面的な変位とそりに伴う変位に分けて考察し、薄肉空間曲線部材の有限変位場を誘導した。有限変位場の誘導に関する記述はSchroederの論文<sup>23)</sup>に類似しているが、おもな相違点は、そり変位をそり関数とねじれ率との積で表現し、そり関数として微小変位理論による初期曲率と初期ねじれ率を有する薄肉空間曲線部材のそり関数を用い、ねじれ率として変形による部材軸のねじれ率を利用して、そり変位を求めた点、および、開断面のみでなく閉断面を有する薄肉空間曲線部材に対しても同様の手法で有限変位場を求めた点にある。

次に、得られた有限変位場を用いて、仮想仕事の原理より薄肉空間曲線部材のつり合い式と境界条件を求め、従来の研究との比較を行い、既往の有限変位理論におけるつり合い式は、高次の微小項の影響を無視すれば、本文中で導かれるつり合い式に含まれることを示した。

最後に、本報告の有限変位理論の妥当性を確かめるため、有限変位問題の一部である座屈問題を扱った。さらに、座屈の支配方程式の応用例として、曲率面内に等曲げを受け、両端で単純支持されている薄肉二軸対称断面

\* 正会員 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科

\*\* 学生会員 工修 早稲田大学大学院博士課程

\*\*\* 正会員 工博 早稲田大学助手 理工学部土木工学科

円弧アーチの横倒れ座屈問題を解き、横断面の寸法が曲率半径に比べて十分小さいと仮定した場合には、既往のつり合い法により求まる座屈値<sup>25)</sup>と一致することを確かめた。なお、本報告では記述法として Lagrange の記述法を採用した<sup>26)</sup>。添字については Einstein の総和規約を用い、特に断わらない限り、ラテン文字は 1, 2, 3 をとるものとする。

## 2. 仮定・座標系・変形前の幾何量

薄肉空間曲線部材を一次元理論で扱うために次の5つの仮定を設ける。

- (i) ひずみは1に比べて微小であるが、変位成分の二次の微小項は必ずしも無視しえない。
- (ii) 変形に際して、横断面形状は不変である。
- (iii) 薄板要素の板厚中心面に垂直な面内でのせん断ひずみは小さく、無視し得る。
- (iv) 板厚中心面内のせん断ひずみのうち、直応力や分布外力とつり合い状態にあるせん断応力によるせん断ひずみは小さく、無視し得る。
- (v) 横断面は部材軸方向に一定であり、かつ横断面の輪郭線は折れ線よりなる。

図-1 に示すような、変形前において初期曲率と初期ねじれ率を有する、薄肉空間曲線部材を考える。いま、部材軸としてその空間曲線の法平面が部材の横断面と一致するように選ぶ<sup>13)</sup>。部材軸と横断面の交点を S とすれば、S 点における部材軸の接線と横断面の主軸が互いに直交する局所デカルト座標系  $(y_1, y_2, y_3)$  が選べる。このとき、 $y_1$  軸は部材軸の接線方向を向いているものとする。

さらに、部材内の任意点の位置を記述するために、二

つの座標系を導入する。その一つは局所デカルト座標系  $(z_1, z_2, z_3)$  であり、 $z_1$  の方向は  $y_1$  の方向と一致している。他の一つは曲線座標系  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  である。ここに、 $\theta^1$  は部材軸に沿ってとった座標、 $\theta^2$  は横断面の板厚中心線に沿ってとった座標、 $\theta^3$  は横断面内において  $\theta^2$  座標に垂直な座標である。なお、本報告では座標系はすべて右手系とする。

部材軸の変位ベクトルは次のようにかける。

$$\dot{x} = \dot{x}(\theta^1) = x_m(\theta^1) i_m \dots\dots\dots(1)$$

部材軸の接線方向の変位基底ベクトルを  $\dot{e}_1$  とすれば、 $\dot{e}_1$  は変位ベクトル  $\dot{x}$  を  $\theta^1$  で微分することにより求まる。さらに、横断面内の主軸  $y_2, y_3$  方向の単位基底ベクトルとして、 $\dot{e}_2$  と  $\dot{e}_3$  を導入する。このとき、Frenet-Serret の公式より、次の関係式が成立する<sup>23)</sup>。

$$\begin{Bmatrix} \dot{e}_{1,1} \\ \dot{e}_{2,1} \\ \dot{e}_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_2 & -\kappa_3 \\ -\kappa_2 & 0 & \kappa_1 \\ \kappa_3 & -\kappa_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $(\cdot)_{,1}$  は  $\theta^1$  に関する微分を示し、 $\kappa_2, \kappa_3$  は初期曲率であり、 $\kappa_1$  は初期ねじれ率である。一般に、これらの初期曲率と初期ねじれ率は一定でなく、 $\theta^1$  の関数であるとする。

板厚中央面上の位置ベクトルは、図-1 より、

$$\dot{r}(\theta^1, \theta^2) = \dot{x}(\theta^1) + \dot{s}(\theta^1, \theta^2) \dots\dots\dots(3)$$

と表わせる。ここに、

$$\dot{s} = \dot{y}_2 \dot{e}_2 + \dot{y}_3 \dot{e}_3 \dots\dots\dots(4)$$

であり、 $(\cdot)$  は板厚中央面上の値を示す。位置ベクトル  $\dot{r}$  を  $\theta^1$  と  $\theta^2$  で微分すれば、変形前の中央面上の基底ベクトル

$$\dot{a}_1 = \dot{r}_{,1} = \sqrt{g} \dot{e}_1 - \kappa_1 \dot{y}_3 \dot{e}_2 + \kappa_1 \dot{y}_2 \dot{e}_3 \dots\dots\dots(5.a)$$

$$\dot{a}_2 = \dot{r}_{,2} = \dot{y}_{2,2} \dot{e}_2 + \dot{y}_{3,2} \dot{e}_3 \dots\dots\dots(5.b)$$

が求まる。ここに、 $(\cdot)_{,2}$  は  $\theta^2$  に関する微分を示し、

$$\sqrt{g} = 1 + \kappa_2 \dot{y}_3 - \kappa_3 \dot{y}_2 \dots\dots\dots(6)$$

である。

部材軸の法平面すなわち横断面内にあり、 $\dot{a}_2$  に対して直交する単位基底ベクトルを  $\dot{a}_3$  とすれば、 $\dot{a}_3$  は、

$$\dot{a}_3 = -\dot{y}_{3,2} \dot{e}_2 + \dot{y}_{2,2} \dot{e}_3 \dots\dots\dots(7)$$

とかける。

式 (7) より、部材内の任意点の位置ベクトルは、

$$r = \dot{r} + \dot{a}_3 \theta^3 \dots\dots\dots(8)$$

と表わせる。したがって、仮定 (v) より、任意点における基底ベクトルは、

$$a_1 = r_{,1} = \sqrt{g} \dot{e}_1 - \kappa_1 y_3 \dot{e}_2 + \kappa_1 y_2 \dot{e}_3 \dots\dots\dots(9.a)$$

$$a_2 = r_{,2} = \dot{y}_{2,2} \dot{e}_2 + \dot{y}_{3,2} \dot{e}_3 \dots\dots\dots(9.b)$$

$$a_3 = r_{,3} = -\dot{y}_{3,2} \dot{e}_2 + \dot{y}_{2,2} \dot{e}_3 \dots\dots\dots(9.c)$$

となる。ここに、 $(\cdot)_{,3}$  は  $\theta^3$  に関する微分を表わし、

$$\sqrt{g} = 1 + \kappa_2 y_3 - \kappa_3 y_2 \dots\dots\dots(10.a)$$

$$y_2 = \dot{y}_2 - \dot{y}_{3,2} \theta^3 \dots\dots\dots(10.b)$$

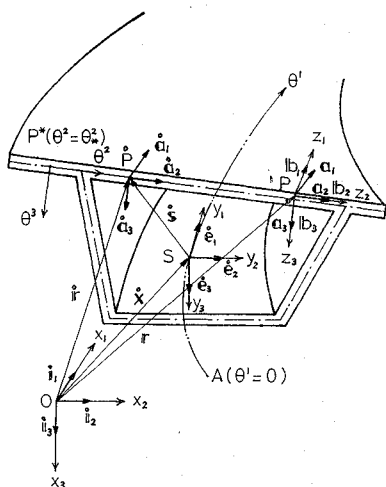


図-1 座標系と基底ベクトル

$$y_3 = \hat{y}_3 + \hat{y}_{2,2}\theta^2 \dots \dots \dots (10 \cdot c)$$

である。

また、共変計量テンソル  $a_{ij}$ , 反変計量テンソル  $a^{ij}$ , 反変基底ベクトル  $\mathbf{a}^i$  は次式で与えられる。

$$a_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \dots \dots \dots (11 \cdot a)$$

$$a^{im} a_{mj} = \delta_j^i \dots \dots \dots (11 \cdot b)$$

$$\mathbf{a}^i = a^{ij} \mathbf{a}_j \dots \dots \dots (11 \cdot c)$$

ここに、 $\delta_j^i$  は Kronecker のデルタである。なお、計量テンソル  $a_{ij}$ ,  $a^{ij}$  の内容は 付録 1 に示してある。

### 3. 有限変位場

部材が変形した後の任意点 P の位置ベクトル  $\hat{\mathbf{r}}$  は、全変位ベクトルを  $\mathbf{V}$  とすれば、

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{V} \dots \dots \dots (12)$$

と表わされる。したがって、変形後の基底ベクトルはそれぞれ、

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \hat{\mathbf{r}}_{,1} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{V}_{,1} \dots \dots \dots (13 \cdot a)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_2 = \hat{\mathbf{r}}_{,2} = \mathbf{a}_2 + \mathbf{V}_{,2} \dots \dots \dots (13 \cdot b)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_3 = \hat{\mathbf{r}}_{,3} = \mathbf{a}_3 + \mathbf{V}_{,3} \dots \dots \dots (13 \cdot c)$$

と表わせる。

全変位ベクトル  $\mathbf{V}$  を基準状態である変形前の基底ベクトルの成分に分けて考えると、

$$\mathbf{V} = w\hat{\mathbf{e}}_1 + u\hat{\mathbf{e}}_2 + v\hat{\mathbf{e}}_3 \dots \dots \dots (14)$$

とおける。通常、一次元棒理論においては、この変形前の基底ベクトル方向の変位成分を部材軸の変位とねじれ角で表現している。このような観点から、本報告では、文献 23) と同様に、横断面内の任意点の全変位を、平面保持則に従う変位、部材軸回りのねじれによる変位、そりに伴う変位に分けて考察する。すなわち、任意点 P の全変位ベクトル  $\mathbf{V}$  は次のようにかける。

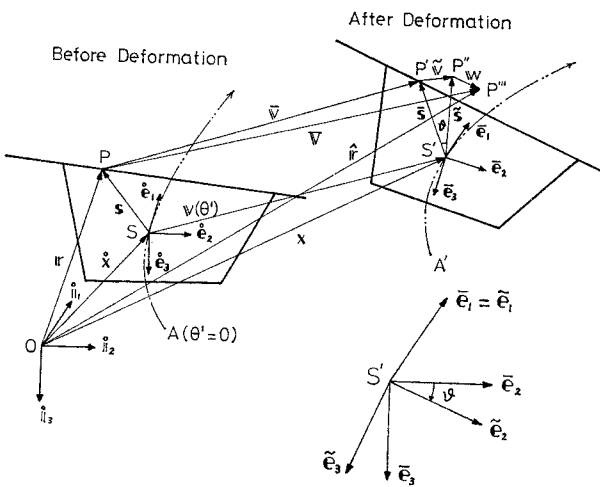


図-2 変位ベクトル

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{w} \dots \dots \dots (15)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{w}$  はそれぞれ、平面保持則に従う変位ベクトル、部材軸回りのねじれによる変位ベクトル、そりに伴う変位ベクトルである。図-2 に示すように、 $\bar{\mathbf{v}}$  により点 S は  $S'$  に移動し、変形前の単位基底ベクトル  $\mathbf{e}_i$  は単位基底ベクトル  $\bar{\mathbf{e}}_i$  となる。さらに、 $\bar{\mathbf{v}}$  により  $\bar{\mathbf{e}}_i$  は単位基底ベクトル  $\hat{\mathbf{e}}_i$  となる。したがって、 $\bar{\mathbf{e}}_i$  から  $\hat{\mathbf{e}}_i$  への変換行列、 $\bar{\mathbf{e}}_i$  から  $\bar{\mathbf{e}}_i$  への変換行列、 $\hat{\mathbf{e}}_i$  から  $\bar{\mathbf{e}}_i$  への変換行列はそれぞれ次のように定義できる<sup>23)</sup>。

$$\bar{\mathbf{e}}_i = \phi_{im} \hat{\mathbf{e}}_m \dots \dots \dots (16 \cdot a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \psi_{im} \bar{\mathbf{e}}_m \dots \dots \dots (16 \cdot b)$$

$$\bar{\mathbf{e}}_i = D_{im} \hat{\mathbf{e}}_m \dots \dots \dots (16 \cdot c)$$

ここに、 $\phi_{im}, \psi_{im}, D_{im}$  はそれぞれ、

$$\phi_{im} = e_i e_m + (\delta_{im} - e_i e_m) \cos \alpha + e_{imk} e_k \sin \alpha \dots \dots \dots (17 \cdot a)$$

$$\psi_{im} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \dots \dots \dots (17 \cdot b)$$

$$D_{im} = \psi_{ik} \phi_{km} \dots \dots \dots (17 \cdot c)$$

とかける。ここに、 $e_i$  : 回転ベクトルの成分、 $\delta_{im}$  : Kronecker のデルタ、 $\alpha$  : 回転角、 $e_{imk}$  : 交代記号 (Permutation symbol)、 $\vartheta$  : ねじれ角である。

一方、そり変位は近似的に  $\bar{\mathbf{e}}_1 (= \bar{\mathbf{e}}_1)$  方向へ生ずるものと仮定すれば、

$$\mathbf{w} = w_p \bar{\mathbf{e}}_1 \dots \dots \dots (18)$$

と置く。したがって、部材軸の変位ベクトルを  $\mathbf{v}$  と置けば、図-2 より、任意点 P の全変位ベクトルは、

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s} + \bar{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}} + w_p \bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{v} - \mathbf{s} + \bar{\mathbf{s}} + w_p \bar{\mathbf{e}}_1 \dots \dots \dots (19)$$

と表わせる。ここに、

$$\mathbf{v}(\theta^1) = v^i(\theta^1) \hat{\mathbf{e}}_i \dots \dots \dots (20 \cdot a)$$

$$\mathbf{s} = y_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + y_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \dots \dots \dots (20 \cdot b)$$

$$\bar{\mathbf{s}} = y_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + y_3 \bar{\mathbf{e}}_3 \dots \dots \dots (20 \cdot c)$$

$$\bar{\mathbf{s}} = y_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + y_3 \bar{\mathbf{e}}_3 \dots \dots \dots (20 \cdot d)$$

である。ゆえに、全変位ベクトル  $\mathbf{V}$  は次式で表わされる。

$$\mathbf{V} = v^i \hat{\mathbf{e}}_i - (y_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + y_3 \hat{\mathbf{e}}_3) + (y_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + y_3 \bar{\mathbf{e}}_3) + w_p \bar{\mathbf{e}}_1$$

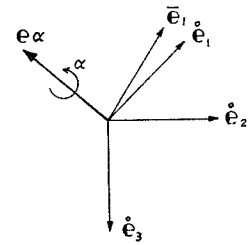


図-3 回転ベクトル

$$\begin{aligned}
 &= v^i \hat{e}_i - (y_2 \hat{e}_2 + y_3 \hat{e}_3) + (y_2 D_{2m} \hat{e}_m + y_3 D_{3k} \hat{e}_k) \\
 &\quad + w_p D_{1n} \hat{e}_n \\
 &= [v^1 + y_2 D_{21} + y_3 D_{31} + w_p D_{11}] \hat{e}_1 \\
 &\quad + [v^2 - y_2(1 - D_{22}) + y_3 D_{32} + w_p D_{12}] \hat{e}_2 \\
 &\quad + [v^3 + y_2 D_{23} - y_3(1 - D_{33}) + w_p D_{13}] \hat{e}_3 \\
 &\quad \dots \dots \dots (21)
 \end{aligned}$$

次に、部材軸に関する変位成分  $v^i$  とねじれ角  $\vartheta$  を用いて、 $D_{im}$  を表わす。変形後の部材軸の変位ベクトルを  $\mathbf{x}$  とすれば、 $\mathbf{x}$  は、

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \dots \dots \dots (22)$$

とかける。したがって、平面保持則に従う変形後の単位基底ベクトル  $\bar{\mathbf{e}}_1$  は、

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \frac{\mathbf{x}_{,1}}{|\mathbf{x}_{,1}|} \dots \dots \dots (23)$$

と置ける。式 (16・a) より、

$$\phi_{1m} = \frac{\delta_{1m} + v^m |_1}{\sqrt{(1 + v^1 |_1)^2 + (v^2 |_1)^2 + (v^3 |_1)^2}} \dots \dots \dots (24)$$

を得る。ここで、 $( )|_1$  は  $\theta^1$  に関する共変微分を示す<sup>23)</sup>。よって、式 (24) と (17・a) を用いることにより、次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned}
 e_1 &= 0, \quad e_2 = \frac{-v^3 |_1}{\sqrt{(v^2 |_1)^2 + (v^3 |_1)^2}} \\
 e_3 &= \frac{v^2 |_1}{\sqrt{(v^2 |_1)^2 + (v^3 |_1)^2}}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots (25 \cdot a \sim c)$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{(v^2 |_1)^2 + (v^3 |_1)^2}}{\sqrt{(1 + v^1 |_1)^2 + (v^2 |_1)^2 + (v^3 |_1)^2}} \dots (25 \cdot d)$$

部材軸に関する変位成分を用いてそり変位を表わすため、 $w_p$  をそり関数  $\omega$  と変形によるねじれ率  $\bar{\Gamma}_\vartheta$  との積の形で次のように表現する。

$$w_p = -\omega \bar{\Gamma}_\vartheta \dots \dots \dots (26)$$

ここに、 $\omega$  は微小変位理論より求める初期曲率と初期ねじれ率を有する薄肉空間曲線部材のそり関数であり、閉区間の場合には、

$$\omega = \frac{h_s}{\sqrt{g}} \theta^3 + \sqrt{g} \int_{\theta_*}^{\theta^2} \frac{h_n}{g} d\theta^2 \dots \dots (27 \cdot a)$$

とかけ、閉区間の場合には、

$$\begin{aligned}
 \omega &= \frac{h_s}{\sqrt{g}} \theta^3 + \sqrt{g} \int_{\theta_*}^{\theta^2} \left\{ \frac{h_n}{g} - \frac{\oint \frac{h_n}{g} d\theta^2}{\oint \frac{1}{g\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{t} d\theta^2} \cdot \frac{1}{g\sqrt{g}t} \right\} d\theta^2 \\
 &\dots \dots \dots (27 \cdot b)
 \end{aligned}$$

とかける。ここに、

$$h_s = \hat{y}_2 \hat{y}_{2,2} + \hat{y}_3 \hat{y}_{3,2} \dots \dots \dots (28 \cdot a)$$

$$h_n = \hat{y}_2 \hat{y}_{3,2} - \hat{y}_3 \hat{y}_{2,2} \dots \dots \dots (28 \cdot b)$$

$t$  は板厚であり、 $( )_*$  は積分始点上の値を示す。なお、そり関数の決定方法は仮定 (iii), (iv) によるが、詳細は付録 2 に示してある。

さらに、 $\bar{\Gamma}_\vartheta$  を変位ベクトル  $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\boldsymbol{\theta}}$  が生じた後の部材軸のねじれ率とすると、ねじれ率の定義<sup>27)</sup>より、

$$\bar{\Gamma}_\vartheta = \frac{\bar{\mathbf{e}}_{2,1}}{|\mathbf{x}_{,1}|} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}}^3 = \frac{\bar{\mathbf{e}}_{2,1}}{|\mathbf{x}_{,1}|} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}}_3 \dots \dots \dots (29)$$

と置ける。したがって、式 (16・c), (17), (22) を用いると、変形による部材軸のねじれ率  $\bar{\Gamma}_\vartheta$  は、

$$\bar{\Gamma}_\vartheta = \bar{\Gamma}_\vartheta - \kappa_1 \dots \dots \dots (30 \cdot a)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{|\mathbf{x}_{,1}|} [D_{31} D_{21,1} + D_{32} D_{22,1} + D_{33} D_{23,1} \\
 &\quad + \kappa_1 (D_{22} D_{33} - D_{23} D_{32}) + \kappa_2 (D_{23} D_{31} - D_{21} D_{33}) \\
 &\quad + \kappa_3 (D_{21} D_{32} - D_{31} D_{22})] - \kappa_1 \dots \dots \dots (30 \cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{|\mathbf{x}_{,1}|} [\vartheta_{,1} + \phi_{31} \phi_{21,1} + \phi_{32} \phi_{22,1} + \phi_{33} \phi_{23,1} \\
 &\quad + \kappa_1 (\phi_{22} \phi_{33} - \phi_{23} \phi_{32}) + \kappa_2 (\phi_{23} \phi_{31} - \phi_{21} \phi_{33}) \\
 &\quad + \kappa_3 (\phi_{21} \phi_{32} - \phi_{31} \phi_{22})] - \kappa_1 \dots \dots \dots (30 \cdot c)
 \end{aligned}$$

と表わされる。変位成分  $v^i$  とねじれ角  $\vartheta$  を用いて表現したねじれ率  $\bar{\Gamma}_\vartheta$  は、付録 3 に示してある。

ゆえに、式 (21) における  $D_{im}$  について、ねじれ角  $\vartheta$  を除いた変位成分  $v^i$  に対し、三次以上の高次微小項を無視すれば、全変位ベクトルは次のようにかける。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} &= w \hat{\mathbf{e}}_1 + u \hat{\mathbf{e}}_2 + v \hat{\mathbf{e}}_3 \\
 &= \left\{ \begin{aligned}
 &v^1 - y_2 [\cos \vartheta v^2 |_1 (1 - v^4 |_1) + \sin \vartheta v^3 |_1 (1 - v^4 |_1)] \\
 &\quad - y_3 [\cos \vartheta v^3 |_1 (1 - v^4 |_1) - \sin \vartheta v^2 |_1 (1 - v^4 |_1)] \\
 &\quad - \omega \left[ \vartheta_{,1} (1 - v^4 |_1) + \frac{1}{2} (v^2 |_1)_{,1} v^3 |_1 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (v^3 |_1)_{,1} v^2 |_1 - \frac{1}{2} \kappa_1 ((v^2 |_1)^2 + (v^3 |_1)^2) \right. \\
 &\quad \left. + \kappa_2 v^2 |_1 (1 - v^4 |_1) + \kappa_3 v^3 |_1 (1 - v^4 |_1) \right] \} \hat{\mathbf{e}}_1 \\
 &+ \left\{ \begin{aligned}
 &v^2 - y_2 \left[ 1 - \cos \vartheta \left( 1 - \frac{1}{2} (v^2 |_1)^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sin \vartheta v^2 |_1 v^3 |_1 \right] + y_3 \left[ -\frac{1}{2} \cos \vartheta v^2 |_1 v^3 |_1 \right. \\
 &\quad \left. - \sin \vartheta \left( 1 - \frac{1}{2} (v^2 |_1)^2 \right) \right] \\
 &\quad - \omega \left[ \vartheta_{,1} v^2 |_1 + \kappa_2 (v^2 |_1)^2 + \kappa_3 v^2 |_1 v^3 |_1 \right] \} \hat{\mathbf{e}}_2 \\
 &+ \left\{ \begin{aligned}
 &v^3 + y_2 \left[ -\frac{1}{2} \cos \vartheta v^2 |_1 v^3 |_1 + \sin \vartheta \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} (v^3 |_1)^2 \right) \right] - y_3 \left[ 1 - \cos \vartheta \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} (v^3 |_1)^2 \right) - \frac{1}{2} \sin \vartheta v^2 |_1 v^3 |_1 \right] \\
 &\quad \left. - \omega \left[ \vartheta_{,1} v^3 |_1 + \kappa_2 v^2 |_1 v^3 |_1 + \kappa_3 (v^3 |_1)^2 \right] \right\} \hat{\mathbf{e}}_3
 \end{aligned} \right. \\
 &\dots \dots \dots (31)
 \end{aligned}$$

実際の構造部材においては、ひずみは十分小さく、仮定 (i) が成り立つものと考えられ、 $v^i |_1 \ll 1$  と置けるので<sup>注 1)</sup>、変位成分  $w, u, v$  はそれぞれ、

注 1) 式 (10・a), (37・a), (39・a) より軸方向ひずみ  $\epsilon_{11}$  と  $v^1 |_1$  は同じディメンションをもつことがわかり、さらに、一般的な構造物では  $\sqrt{g} = 1$  とおけるので、微小ひずみの仮定より、 $\epsilon_{11} \ll 1$  とおけば、 $v^1 |_1 \ll 1$  が導かれる。

$$w = v^1 - y_2 \Gamma_2 - y_3 \Gamma_3 - \omega \Gamma_\theta \quad \dots\dots\dots (32 \cdot a)$$

$$u = v^2 - y_2 A_2 - y_3 A_3 - \omega A_\theta \quad \dots\dots\dots (32 \cdot b)$$

$$v = v^3 + y_2 B_2 - y_3 B_3 - \omega B_\theta \quad \dots\dots\dots (32 \cdot c)$$

とかける。ここに、

$$\Gamma_2 = \cos \vartheta v^1|_1 + \sin \vartheta v^3|_1 \quad \dots\dots\dots (33 \cdot a)$$

$$\Gamma_3 = \cos \vartheta v^3|_1 - \sin \vartheta v^1|_1 \quad \dots\dots\dots (33 \cdot b)$$

$$\Gamma_\theta = \vartheta_{,1} + \frac{1}{2} (v^2|_1)_{,1} v^3|_1 - \frac{1}{2} (v^3|_1)_{,1} v^2|_1 - \frac{1}{2} \kappa_1 [(v^2|_1)^2 + (v^3|_1)^2] + \kappa_2 v^2|_1 + \kappa_3 v^3|_1 \quad \dots\dots\dots (33 \cdot c)$$

$$A_2 = 1 - \cos \vartheta + \frac{1}{2} v^2|_1 \Gamma_2 \quad \dots\dots\dots (33 \cdot d)$$

$$A_3 = \sin \vartheta + \frac{1}{2} v^2|_1 \Gamma_3 \quad \dots\dots\dots (33 \cdot e)$$

$$A_\theta = v^2|_1 \Gamma_\theta \quad \dots\dots\dots (33 \cdot f)$$

$$B_2 = \sin \vartheta - \frac{1}{2} v^3|_1 \Gamma_2 \quad \dots\dots\dots (33 \cdot g)$$

$$B_3 = 1 - \cos \vartheta + \frac{1}{2} v^3|_1 \Gamma_3 \quad \dots\dots\dots (33 \cdot h)$$

$$B_\theta = v^3|_1 \Gamma_\theta \quad \dots\dots\dots (33 \cdot i)$$

である。

#### 4. ひずみ場・応力場

有限変位理論によるひずみ-変位の関係式を求めるために、Green のひずみテンソルを導入する。

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{a}_i \cdot \hat{a}_j - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) \quad \dots\dots\dots (34)$$

あるいは、式 (13) を用いて、

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{V}_{,j} + \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{V}_{,i} + \mathbf{V}_{,i} \cdot \mathbf{V}_{,j}) \quad \dots\dots\dots (35)$$

と表わせる。式 (35) に式 (9), (14), (32) を代入したのち、三次以上の高次の微小項を無視し、一次元棒理論であることを考慮すれば、ひずみ-変位の関係式として、

$$\tau_{11} = \sqrt{g} \left( \Gamma_w - y_2 \mathcal{Q}_u - y_3 \mathcal{Q}_v - \omega \mathcal{Q}_\theta + H \Gamma_\theta + R \frac{(\Gamma_\theta)^2}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (36 \cdot a)$$

$$2\tau_{12} = -\frac{\theta}{\sqrt{g}} \Gamma_\theta \quad \dots\dots\dots (36 \cdot b)$$

$$\tau_{13} = \tau_{22} = \tau_{23} = \tau_{33} = 0 \quad \dots\dots\dots (36 \cdot c \sim f)$$

が得られる。ここに、

$$\Gamma_w = v^1|_1 + \frac{1}{2} (v^2|_1)^2 + \frac{1}{2} (v^3|_1)^2 \quad \dots\dots\dots (37 \cdot a)$$

$$\mathcal{Q}_u = \Gamma_{2,1} - \Gamma_3 \Gamma_\theta - \kappa_2 \sin \vartheta - \kappa_3 (1 - \cos \vartheta) - \kappa_1 \Gamma_3 \quad \dots\dots\dots (37 \cdot b)$$

$$\mathcal{Q}_v = \Gamma_{3,1} + \Gamma_2 \Gamma_\theta - \kappa_3 \sin \vartheta + \kappa_2 (1 - \cos \vartheta) + \kappa_1 \Gamma_2 \quad \dots\dots\dots (37 \cdot c)$$

$$\mathcal{Q}_\theta = \Gamma_{\theta,1} \quad \dots\dots\dots (37 \cdot d)$$

$$H = \frac{\kappa_1}{\sqrt{g}} [(y_2)^2 + (y_3)^2 + \kappa_2 y_2 \omega + \kappa_3 y_3 \omega] - \omega_{,1} \quad \dots\dots\dots (37 \cdot e)$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{g}} [(y_2 + \kappa_2 \omega)^2 + (y_3 + \kappa_3 \omega)^2] \quad \dots\dots\dots (37 \cdot f)$$

$$\theta = \begin{cases} \theta^2 \left( 2 + \frac{\kappa_2 \dot{y}_{2,2} + \kappa_3 \dot{y}_{3,2}}{\sqrt{g}} \cdot \theta^3 \right) & \text{(开区間)} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots (37 \cdot g) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta^3 \left( 2 + \frac{\kappa_2 \dot{y}_{2,2} + \kappa_3 \dot{y}_{3,2}}{\sqrt{g}} \cdot \theta^3 \right) \\ - \frac{\int \frac{h_n}{g} d\theta^2}{\int \frac{1}{g} \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{t} d\theta^2} \cdot \frac{g}{g} \cdot \frac{1}{t} & \text{(开区間)} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots (37 \cdot h) \end{cases}$$

である。

ひずみテンソル  $\tau_{ij}$  は曲線座標系のひずみテンソルであるので、のちの便のため局所デカルト座標系におけるひずみテンソル  $\varepsilon_{ij}$  を導入する<sup>12)</sup>。ひずみテンソル  $\tau_{ij}$  と  $\varepsilon_{ij}$  は、座標変換により次のように関係づけられる。なお、座標変換式の内容は 付録 4 に示してある。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \theta^m}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial \theta^n}{\partial z^j} \tau_{mn} \quad \dots\dots\dots (38)$$

したがって、局所デカルト座標系におけるひずみテンソルは、

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \Gamma_w - y_2 \mathcal{Q}_u - y_3 \mathcal{Q}_v - \omega \mathcal{Q}_\theta + H^* \Gamma_\theta + R \frac{(\Gamma_\theta)^2}{2} \right) \quad \dots\dots\dots (39 \cdot a)$$

$$2\varepsilon_{12} = -\frac{\theta}{\sqrt{g} \sqrt{g}} \Gamma_\theta, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad \dots\dots\dots (39 \cdot b \sim f)$$

と書き直せる。ここに、

$$H^* = H + \frac{\kappa_1 \theta}{\sqrt{g} \sqrt{g}} (y_2 \dot{y}_{3,2} - y_3 \dot{y}_{2,2}) \quad \dots\dots\dots (40)$$

である。

微小ひずみの場合の曲線座標系における応力テンソル  $\tau^{ij}$  とひずみテンソル  $\tau_{kl}$  の関係は、

$$\tau^{ij} = G \left( a^{ik} a^{jl} + a^{il} a^{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} a^{ij} a^{kl} \right) \tau_{kl} \quad \dots\dots\dots (41)$$

と表わされる<sup>28)</sup>。さらに、局所デカルト座標系  $(z_1, z_2, z_3)$  における応力テンソル  $\sigma^{ij}$  を用いた場合には、Hooke 則は、

$$\sigma^{ij} = G \left( \delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta^{ij} \delta^{kl} \right) \varepsilon_{kl} \quad \dots\dots\dots (42)$$

となり、式 (39) より、

$$\sigma^{11} = \frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2} E \varepsilon_{11} \quad \dots\dots\dots (43 \cdot a)$$

$$\sigma^{12} = 2G \varepsilon_{12} \quad \dots\dots\dots (43 \cdot b)$$

が得られる。ここに、

$$E=2(1+\nu)G \quad \dots\dots\dots(44)$$

であり、 $E$  は Young 率、 $G$  はせん断弾性係数、 $\nu$  は Poisson 比である。

しかるに、通常の一次元棒理論においては、

$$\sigma^{11}=E\varepsilon_{11} \quad \dots\dots\dots(45)$$

が成立すると考えられるので注2)、本報告においても部材軸方向の応力-ひずみの関係として式(45)を採用する<sup>17),20)</sup>。

## 5. つり合い式と境界条件

部材両端における外力の  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  方向の成分を  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$  とし、分布外力の  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  方向の成分を  $p_1, p_2, p_3$  とすれば、仮想仕事の原理は次のように書き表わされる<sup>30)</sup>。

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\sigma^{11}\delta\varepsilon_{11} + 2\sigma^{12}\delta\varepsilon_{12}) \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ & - \iiint_V (p_1\delta w + p_2\delta u + p_3\delta v) \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ & - \left[ \iint_A (\bar{p}_1\delta w + \bar{p}_2\delta u + \bar{p}_3\delta v) d\theta^2 d\theta^3 \right]_{\theta^1=\theta^1_*}^{\theta^1=\theta^1_{**}} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(46)$$

ここに、 $V$  は部材の体積、 $A$  は横断面の面積であり、 $\theta^1_*$  と  $\theta^1_{**}$  は部材両端における  $\theta^1$  の値を示す。

したがって、変分原理より、つり合い式として、

$$\begin{aligned} \delta v^1 : & \underline{N}_{,1} - N(\kappa_3 v^2|_1 - \kappa_2 v^3|_1) \\ & + (M_{3,1} + \kappa_1 M_2 + M_2 \Gamma_\vartheta)(\kappa_3 \cos \vartheta - \kappa_2 \sin \vartheta) \\ & + (M_{2,1} - \kappa_1 M_3 - M_3 \Gamma_\vartheta)(\kappa_2 \cos \vartheta + \kappa_3 \sin \vartheta) \\ & + \frac{1}{2} \kappa_3 [M_1 v^3|_1]_{,1} + \frac{1}{2} \kappa_3 M_1 (v^3|_1)_{,1} \\ & + \frac{1}{2} \kappa_2 [M_1 v^2|_1]_{,1} + \frac{1}{2} \kappa_2 M_1 (v^2|_1)_{,1} \\ & + \kappa_1 M_1 (\kappa_3 v^2|_1 - \kappa_2 v^3|_1) \\ & + \underline{N}^* + M_3^* (\kappa_3 \cos \vartheta - \kappa_2 \sin \vartheta) \\ & + \underline{M}_2^* (\kappa_2 \cos \vartheta + \kappa_3 \sin \vartheta) = 0 \dots\dots\dots(47 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta v^2 : & -\kappa_3 \underline{N} - [\underline{N} v^2|_1]_{,1} + \kappa_1 N v^3|_1 \\ & + [\underline{M}_3 \cos \vartheta + M_2 \sin \vartheta]_{,1} \\ & + [\kappa_1 (\underline{M}_2 \cos \vartheta - M_3 \sin \vartheta)]_{,1} \\ & + \kappa_1 [\underline{M}_2 \cos \vartheta - M_3 \sin \vartheta]_{,1} \\ & - (\kappa_1)^2 (M_3 \cos \vartheta + M_2 \sin \vartheta) \\ & + [\kappa_2 (M_2 \Gamma_2 + M_3 \Gamma_3)]_{,1} \\ & - \kappa_1 \kappa_3 (M_2 \Gamma_2 + M_3 \Gamma_3) - [\kappa_2 M_1]_{,1} + \kappa_1 \kappa_3 M_1 \end{aligned}$$

注 2) 一次元棒理論では断面不変の仮定が出发点とされており<sup>1)</sup>、断面不変の仮定の解釈に2つの立場があることがすでに指摘されている<sup>29)</sup>。普通、断面がひずまない(断面剛)という仮定が採用されているが、断面内無応力の仮定を採用すれば、Hooke 則から式(45)が直接導かれる。

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} [M_1 v^2|_1]_{,1} + \frac{1}{2} [M_1 (v^2|_1)_{,1}]_{,1} \\ & + [\kappa_1 M_1 v^2|_1]_{,1} + \frac{1}{2} \kappa_1 [M_1 v^2|_1]_{,1} \\ & + \frac{1}{2} \kappa_1 M_1 (v^2|_1)_{,1} + (\kappa_1)^2 M_1 v^2|_1 \\ & + [\underline{M}_3^* \cos \vartheta + M_2^* \sin \vartheta]_{,1} \\ & + \kappa_1 (M_2^* \cos \vartheta - M_3^* \sin \vartheta) \\ & - [\kappa_2 H_\omega^*]_{,1} + \kappa_1 \kappa_3 H_\omega^* - \underline{Q}_2^* = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(47 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} \delta v^3 : & \kappa_2 \underline{N} - \kappa_1 N v^2|_1 - [\underline{N} v^3|_1]_{,1} \\ & - [\underline{M}_2 \cos \vartheta - M_3 \sin \vartheta]_{,1} \\ & + [\kappa_1 (M_3 \cos \vartheta + M_2 \sin \vartheta)]_{,1} \\ & + \kappa_1 [M_3 \cos \vartheta + M_2 \sin \vartheta]_{,1} \\ & + (\kappa_1)^2 (M_3 \cos \vartheta - M_2 \sin \vartheta) \\ & + [\kappa_3 (M_2 \Gamma_2 + M_3 \Gamma_3)]_{,1} \\ & + \kappa_1 \kappa_2 (M_2 \Gamma_2 + M_3 \Gamma_3) - [\kappa_3 M_1]_{,1} - \kappa_1 \kappa_2 M_1 \\ & - \frac{1}{2} [M_1 v^2|_1]_{,1} - \frac{1}{2} [M_1 (v^2|_1)_{,1}]_{,1} \\ & + [\kappa_1 M_1 v^3|_1]_{,1} + \frac{1}{2} \kappa_1 [M_1 v^3|_1]_{,1} \\ & + \frac{1}{2} \kappa_1 M_1 (v^3|_1)_{,1} - (\kappa_1)^2 M_1 v^3|_1 \\ & - [\underline{M}_2^* \cos \vartheta - M_3^* \sin \vartheta]_{,1} \\ & + \kappa_1 (M_3^* \cos \vartheta + M_2^* \sin \vartheta) \\ & - [\kappa_3 H_\omega^*]_{,1} - \kappa_1 \kappa_2 H_\omega^* - \underline{Q}_3^* = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(47 \cdot c)$$

$$\begin{aligned} \delta \vartheta : & -\underline{M}_3 (\kappa_2 \cos \vartheta + \kappa_3 \sin \vartheta) \\ & + \underline{M}_2 (\kappa_3 \cos \vartheta - \kappa_2 \sin \vartheta) \\ & - \underline{M}_{1,1} + M_3 \{ (v^2|_1)_{,1} \cos \vartheta - (v^2|_1)_{,1} \sin \vartheta \} \\ & + \underline{M}_2 \{ (v^2|_1)_{,1} \cos \vartheta + (v^3|_1)_{,1} \sin \vartheta \} \\ & + \kappa_1 (M_3 \Gamma_2 - M_2 \Gamma_3) - \underline{H}_{\omega,1}^* \\ & - \underline{M}_3^* (v^2|_1 \cos \vartheta - v^2|_1 \sin \vartheta) \\ & - \underline{M}_2^* (v^2|_1 \cos \vartheta + v^3|_1 \sin \vartheta) - \underline{m}_\vartheta^* = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(47 \cdot d)$$

が得られる。ここに、

$$M_1 = H_{\omega,1} + Z + T + M_\rho \Gamma_\vartheta \quad \dots\dots\dots(48)$$

であり、断面力は、

$$N = \iint_A \sigma^{11} d\theta^2 d\theta^3, \quad M_2 = \iint_A \sigma^{11} y_3 d\theta^2 d\theta^3 \quad \dots\dots\dots(49 \cdot a, b)$$

$$M_3 = - \iint_A \sigma^{11} y_2 d\theta^2 d\theta^3, \quad H_\omega = \iint_A \sigma^{11} \omega d\theta^2 d\theta^3 \quad \dots\dots\dots(49 \cdot c, d)$$

$$Z = \iint_A \sigma^{11} H^* d\theta^2 d\theta^3, \quad M_\rho = \iint_A \sigma^{11} R d\theta^2 d\theta^3 \quad \dots\dots\dots(49 \cdot e, f)$$

$$T = - \iint_A \sigma^{12} \frac{\theta}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \quad \dots\dots\dots(49 \cdot g)$$

$$N^* = \iint_A p_1 \sqrt{g} d\theta^2 d\theta^3 \quad \dots\dots\dots(49 \cdot h)$$

$$M_2^* = \iint_A p_1 y_3 \sqrt{g} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (49 \cdot i)$$

$$M_3^* = - \iint_A p_1 y_2 \sqrt{g} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (49 \cdot j)$$

$$H_\omega^* = \iint_A p_1 \omega \sqrt{g} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (49 \cdot k)$$

$$Q_2^* = \iint_A p_2 \sqrt{g} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (49 \cdot l)$$

$$Q_3^* = \iint_A p_3 \sqrt{g} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (49 \cdot m)$$

$$m_g^* = - \iint_A (p_2 y_2 \sin \vartheta + p_2 y_3 \cos \vartheta - p_3 y_2 \cos \vartheta + p_3 y_3 \sin \vartheta) \sqrt{g} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (49 \cdot n)$$

と表わされる。

さらに、部材両端における境界条件は、

$$v^1 = \bar{v}^1 \text{ または } N - \bar{N}^* = 0 \dots\dots\dots (50 \cdot a)$$

$$v^2 = \bar{v}^2 \text{ または } \frac{Nv^2|_1 - [M_2 \cos \vartheta + M_2 \sin \vartheta]_{,1}}{-\kappa_1 (M_2 \cos \vartheta - M_3 \sin \vartheta) - \kappa_2 (M_2 \Gamma_2 + M_3 \Gamma_3) + \kappa_2 M_1 - \frac{1}{2} [M_1 v^2|_1]_{,1} - \frac{1}{2} M_1 (v^2|_1)_{,1} - \kappa_1 M_1 v^2|_1 - (M_3^* \cos \vartheta + M_2^* \sin \vartheta) + \kappa_2 H_\omega^* - \bar{Q}_2^* = 0 \dots\dots\dots (50 \cdot b)$$

$$v^3 = \bar{v}^3 \text{ または } \frac{Nv^3|_1 + [M_2 \cos \vartheta - M_3 \sin \vartheta]_{,1}}{-\kappa_1 (M_3 \cos \vartheta + M_2 \sin \vartheta) - \kappa_3 (M_2 \Gamma_2 + M_3 \Gamma_3) - \kappa_3 M_1 + \frac{1}{2} [M_1 v^3|_1]_{,1} + \frac{1}{2} M_1 (v^3|_1)_{,1} - \kappa_1 M_1 v^3|_1 + (M_2^* \cos \vartheta - M_3^* \sin \vartheta) + \kappa_3 H_\omega^* - \bar{Q}_3^* = 0 \dots\dots\dots (50 \cdot c)$$

$$\Gamma_2 = \bar{\Gamma}_2 \text{ または } \underline{M}_3 - \bar{M}_3^* = 0 \dots\dots\dots (50 \cdot d)$$

$$\Gamma_3 = \bar{\Gamma}_3 \text{ または } \underline{M}_2 - \bar{M}_2^* = 0 \dots\dots\dots (50 \cdot e)$$

$$\vartheta = \bar{\vartheta} \text{ または } \underline{M}_1 - M_3 \Gamma_3 - M_2 \Gamma_2 + H_\omega^* - \bar{m}_g^* = 0 \dots\dots\dots (50 \cdot f)$$

$$\Gamma_\vartheta = \bar{\Gamma}_\vartheta \text{ または } \underline{H}_\omega - \bar{H}_\omega^* = 0 \dots\dots\dots (50 \cdot g)$$

と表わされる。ここに、 $\bar{v}^1 \sim \bar{\Gamma}_\vartheta$  は境界で規定されている変位であり、

$$\bar{N}^* = \iint_A \bar{p}_1 d\theta^2 d\theta^3, \bar{M}_2^* = \iint_A \bar{p}_1 y_3 d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (51 \cdot a, b)$$

$$\bar{M}_3^* = - \iint_A \bar{p}_1 y_2 d\theta^2 d\theta^3, \bar{H}_\omega^* = \iint_A \bar{p}_1 \omega d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (51 \cdot c, d)$$

$$\bar{Q}_2^* = \iint_A \bar{p}_2 d\theta^2 d\theta^3, \bar{Q}_3^* = \iint_A \bar{p}_3 d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (51 \cdot e, f)$$

$$\bar{m}_g^* = - \iint_A (\bar{p}_2 y_2 \sin \vartheta + \bar{p}_2 y_3 \cos \vartheta - \bar{p}_3 y_2 \cos \vartheta + \bar{p}_3 y_3 \sin \vartheta) d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (51 \cdot g)$$

である。

## 6. 断面力と変位の関係

断面力と変位の関係は、式(49・a~g)に式(39)、(43・b)、(45)を代入することにより次式のようになる。

$$N = EF\Gamma_\omega - EF_2 Q_u - EF_3 Q_v - EF_\omega Q_\vartheta + EF_H \Gamma_\vartheta + EF_R \frac{(\Gamma_\vartheta)^2}{2} \dots\dots\dots (52 \cdot a)$$

$$M_2 = EF_3 \Gamma_\omega - EI_{23} Q_u - EI_{33} Q_v - EI_{\omega 3} Q_\vartheta + EI_{H3} \Gamma_\vartheta + EI_{R3} \frac{(\Gamma_\vartheta)^2}{2} \dots\dots\dots (52 \cdot b)$$

$$M_3 = -EF_2 \Gamma_\omega + EI_{22} Q_u + EI_{23} Q_v + EI_{\omega 2} Q_\vartheta - EI_{H2} \Gamma_\vartheta - EI_{R2} \frac{(\Gamma_\vartheta)^2}{2} \dots\dots\dots (52 \cdot c)$$

$$H_\omega = EF_\omega \Gamma_\omega - EI_{\omega 2} Q_u - EI_{\omega 3} Q_v - EI_{\omega \omega} Q_\vartheta + EI_{H\omega} \Gamma_\vartheta + EI_{R\omega} \frac{(\Gamma_\vartheta)^2}{2} \dots\dots\dots (52 \cdot d)$$

$$Z = EF_H \Gamma_\omega - EI_{H2} Q_u - EI_{H3} Q_v - EI_{H\omega} Q_\vartheta + EI_{HH} \Gamma_\vartheta + EI_{RH} \frac{(\Gamma_\vartheta)^2}{2} \dots\dots\dots (52 \cdot e)$$

$$M_\rho = EF_R \Gamma_\omega - EI_{R2} Q_u - EI_{R3} Q_v - EI_{R\omega} Q_\vartheta + EI_{RH} \Gamma_\vartheta + EI_{RR} \frac{(\Gamma_\vartheta)^2}{2} \dots\dots\dots (52 \cdot f)$$

$$T = GJ_t \Gamma_\vartheta \dots\dots\dots (52 \cdot g)$$

ここに、

$$F = \iint_A \frac{1}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, F_2 = \iint_A \frac{y_2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (53 \cdot a, b)$$

$$F_3 = \iint_A \frac{y_3}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, F_\omega = \iint_A \frac{\omega}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (53 \cdot c, d)$$

$$F_H = \iint_A \frac{H^*}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, F_R = \iint_A \frac{R}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (53 \cdot e, f)$$

$$I_{22} = \iint_A \frac{(y_2)^2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, I_{23} = \iint_A \frac{y_2 y_3}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (53 \cdot g, h)$$

$$I_{33} = \iint_A \frac{(y_3)^2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, I_{\omega\omega} = \iint_A \frac{\omega^2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (53 \cdot i, j)$$

$$I_{\omega 3} = \iint_A \frac{\omega y_3}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, I_{\omega\omega} = \iint_A \frac{(\omega)^2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (53 \cdot k, l)$$

$$I_{H2} = \iint_A \frac{H^* y_2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, I_{H3} = \iint_A \frac{H^* y_3}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (53 \cdot m, n)$$

$$I_{H\omega} = \iint_A \frac{H^* \omega}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, I_{HH} = \iint_A \frac{(H^*)^2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (53 \cdot o, p)$$

$$I_{R2} = \iint_A \frac{R y_2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, I_{R3} = \iint_A \frac{R y_3}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3 \dots\dots\dots (53 \cdot q, r)$$

$$I_{R\omega} = \iint_A \frac{R\omega}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad I_{RH} = \iint_A \frac{RH^*}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3$$

.....(53・s, t)

$$I_{RR} = \iint_A \frac{(R)^2}{\sqrt{g}} d\theta^2 d\theta^3, \quad J_t = \iint_A \frac{(\Theta)^2}{\sqrt{g} \hat{g}} d\theta^2 d\theta^3$$

.....(53・u, v)

である。

## 7. 座屈問題

本章では有限変位問題の一部である分岐形安定問題(座屈)に対する一般的な支配方程式を求める。

安定限界である中立のつり合い状態においては、同一の荷重条件・境界条件のもとで、つり合い系の近傍に少なくとも一つの異なるつり合い系が存在する。このため近傍のつり合い系に対しても仮想仕事の原理が成り立つ。

いま、つり合い系からの増分量に対しすべて  $\Delta$  を付して表わすと、近傍のつり合い系に対する仮想仕事の原理は、

$$\begin{aligned} & \iiint_V \{(\sigma^{11} + \Delta\sigma^{11})\delta(\varepsilon_{11} + \Delta\varepsilon_{11}) \\ & + 2(\sigma^{12} + \Delta\sigma^{12})\delta(\varepsilon_{12} + \Delta\varepsilon_{12})\} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ & - \iiint_V \{p_1\delta(w + \Delta w) + p_2\delta(u + \Delta u) \\ & + p_3\delta(v + \Delta v)\} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \\ & - \left[ \iint_A \{\bar{p}_1\delta(w + \Delta w) + \bar{p}_2\delta(u + \Delta u) \right. \\ & \left. + \bar{p}_3\delta(v + \Delta v)\} d\theta^2 d\theta^3 \right]_{\theta^1 = \theta^1_*}^{\theta^1 = \theta^1_{**}} = 0 \dots\dots\dots(54) \end{aligned}$$

とかける。

式(47)を考慮し、 $\Delta$  を付した微小項の二次項を省略すると、中立のつり合い状態(安定限界)に対するつり合い式として次式が得られる。

$$\begin{aligned} \delta(\Delta v^1) : & \Delta N_{,1} - \Delta N(\kappa_3 \Delta v^2|_1 - \kappa_2 v^2|_1) - N(\kappa_3 \Delta v^2|_1 - \kappa_2 \Delta v^2|_1) \\ & + (\Delta M_{3,1} + M_{2,1} \Delta \vartheta - \kappa_1 M_3 \Delta \vartheta + \kappa_1 \Delta M_2 - M_3 \Gamma_2 \Delta \vartheta + \Delta M_2 \Gamma_2 + M_2 \Delta \Gamma_2)(\kappa_3 \cos \vartheta - \kappa_2 \sin \vartheta) \\ & + (\Delta M_{2,1} - M_{3,1} \Delta \vartheta - \kappa_1 \Delta M_3 - \kappa_1 M_2 \Delta \vartheta - \Delta M_2 \Gamma_2 - M_3 \Delta \Gamma_2 - M_2 \Gamma_2 \Delta \vartheta)(\kappa_2 \cos \vartheta + \kappa_3 \sin \vartheta) \\ & + \frac{1}{2} \kappa_3 [M_1 \Delta v^3|_1 + \Delta M_1 v^3|_1]_{,1} + \frac{1}{2} \kappa_3 [M_1 \Delta (v^3|_1)_{,1} + \Delta M_1 (v^3|_1)_{,1}] \\ & + \frac{1}{2} \kappa_2 [M_1 \Delta v^2|_1 + \Delta M_1 v^2|_1]_{,1} + \frac{1}{2} \kappa_2 [M_1 \Delta (v^2|_1)_{,1} + \Delta M_1 (v^2|_1)_{,1}] \\ & + \kappa_1 \Delta M_1 (\kappa_3 v^2|_1 - \kappa_2 v^2|_1) - \kappa_1 M_1 (\kappa_3 \Delta v^2|_1 - \kappa_2 \Delta v^2|_1) - M_3^* (\kappa_2 \cos \vartheta + \kappa_3 \sin \vartheta) \Delta \vartheta \\ & + M_2^* (\kappa_3 \cos \vartheta - \kappa_2 \sin \vartheta) \Delta \vartheta = 0 \dots\dots\dots(55 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(\Delta v^2) : & -\kappa_3 \Delta N - [\Delta N v^2|_1 + N \Delta v^2|_1]_{,1} + \kappa_1 (\Delta N v^3|_1 + N \Delta v^3|_1) + [(\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) \cos \vartheta + (\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta) \sin \vartheta]_{,1} \\ & + [\kappa_1 (\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta) \cos \vartheta - \kappa_1 (\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) \sin \vartheta]_{,1} + \kappa_1 [(\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta) \cos \vartheta - (\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) \sin \vartheta]_{,1} \\ & - (\kappa_1)^2 [(\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) \cos \vartheta + (\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta) \sin \vartheta] + [\kappa_3 (\Delta M_2 \Gamma_2 + M_2 \Delta \Gamma_2 + \Delta M_3 \Gamma_3 + M_3 \Delta \Gamma_3)]_{,1} \\ & - \kappa_1 \kappa_3 (\Delta M_2 \Gamma_2 + M_2 \Delta \Gamma_2 + \Delta M_3 \Gamma_3 + M_3 \Delta \Gamma_3) - [\kappa_2 \Delta M_1]_{,1} + \kappa_1 \kappa_3 \Delta M_1 + \frac{1}{2} [\Delta M_1 v^3|_1 + M_1 \Delta v^3|_1]_{,1} \\ & + \frac{1}{2} [\Delta M_1 (v^3|_1)_{,1} + M_1 \Delta (v^3|_1)_{,1}] + [\kappa_1 (M_1 \Delta v^2|_1 + \Delta M_1 v^2|_1)]_{,1} + \frac{1}{2} \kappa_1 [M_1 \Delta v^2|_1 + \Delta M_1 v^2|_1]_{,1} \\ & + \frac{1}{2} \kappa_1 [M_1 \Delta (v^2|_1)_{,1} + \Delta M_1 (v^2|_1)_{,1}] + (\kappa_1)^2 (M_1 \Delta v^3|_1 + \Delta M_1 v^3|_1) \\ & + [(\Delta M_2^* \cos \vartheta - \Delta M_3^* \sin \vartheta) \Delta \vartheta]_{,1} - \kappa_1 (M_3^* \cos \vartheta + M_2^* \sin \vartheta) \Delta \vartheta = 0 \dots\dots\dots(55 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(\Delta v^3) : & \kappa_2 \Delta N - \kappa_1 (\Delta N v^2|_1 + N \Delta v^2|_1) - [\Delta N v^3|_1 + N \Delta v^3|_1]_{,1} - [(\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta) \cos \vartheta - (\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) \sin \vartheta]_{,1} \\ & + [\kappa_1 (\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) \cos \vartheta + \kappa_1 (\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta) \sin \vartheta]_{,1} + \kappa_1 [(\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) \cos \vartheta + (\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta) \sin \vartheta]_{,1} \\ & + (\kappa_1)^2 [(\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta) \cos \vartheta - (\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) \sin \vartheta] + [\kappa_3 (\Delta M_2 \Gamma_2 + M_2 \Delta \Gamma_2 + \Delta M_3 \Gamma_3 + M_3 \Delta \Gamma_3)]_{,1} \\ & + \kappa_1 \kappa_3 (\Delta M_2 \Gamma_2 + M_2 \Delta \Gamma_2 + \Delta M_3 \Gamma_3 + M_3 \Delta \Gamma_3) - [\kappa_3 \Delta M_1]_{,1} - \kappa_1 \kappa_3 \Delta M_1 - \frac{1}{2} [\Delta M_1 v^3|_1 + M_1 \Delta v^3|_1]_{,1} \\ & - \frac{1}{2} [\Delta M_1 (v^3|_1)_{,1} + M_1 \Delta (v^3|_1)_{,1}] + [\kappa_1 (M_1 \Delta v^2|_1 + \Delta M_1 v^2|_1)]_{,1} + \frac{1}{2} \kappa_1 [M_1 \Delta v^2|_1 + \Delta M_1 v^2|_1]_{,1} \\ & + \frac{1}{2} \kappa_1 [M_1 \Delta (v^2|_1)_{,1} + \Delta M_1 (v^2|_1)_{,1}] - (\kappa_1)^2 (M_1 \Delta v^2|_1 - \Delta M_1 v^2|_1) + [(\Delta M_2^* \cos \vartheta + \Delta M_3^* \sin \vartheta) \Delta \vartheta]_{,1} \\ & + \kappa_1 (M_2^* \cos \vartheta - M_3^* \sin \vartheta) \Delta \vartheta = 0 \dots\dots\dots(55 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \vartheta) : & -(\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta)(\kappa_2 \cos \vartheta + \kappa_3 \sin \vartheta) + (\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta)(\kappa_3 \cos \vartheta - \kappa_2 \sin \vartheta) - \Delta M_{1,1} \\ & + (\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta)[(v^3|_1)_{,1} \cos \vartheta - (v^2|_1)_{,1} \sin \vartheta] + (\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta)[(v^2|_1)_{,1} \cos \vartheta + (v^3|_1)_{,1} \sin \vartheta] \\ & + M_3 [\Delta (v^3|_1)_{,1} \cos \vartheta - \Delta (v^2|_1)_{,1} \sin \vartheta] + M_2 [\Delta (v^2|_1)_{,1} \cos \vartheta + \Delta (v^3|_1)_{,1} \sin \vartheta] \\ & + \kappa_1 (\Delta M_3 \Gamma_2 + M_3 \Delta \Gamma_2 - \Delta M_2 \Gamma_3 - M_2 \Delta \Gamma_3) - M_3^* [(\Delta v^3|_1 \cos \vartheta - \Delta v^2|_1 \sin \vartheta) - (v^2|_1 \cos \vartheta + v^3|_1 \sin \vartheta) \Delta \vartheta] \\ & - M_2^* [(\Delta v^2|_1 \cos \vartheta + \Delta v^3|_1 \sin \vartheta) + (v^3|_1 \cos \vartheta - v^2|_1 \sin \vartheta) \Delta \vartheta] = 0 \dots\dots\dots(55 \cdot d) \end{aligned}$$



また、中立のつり合い状態に対する部材両端での境界条件は次のようになる。

$$4v^1=0 \text{ または } 4N=0 \dots\dots\dots(56 \cdot a)$$

$$4v^2=0 \text{ または}$$

$$\begin{aligned} & 4Nv^2|_1 + N4v^2|_1 \\ & - [(\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) \cos \vartheta + (\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta) \sin \vartheta]_{,1} \\ & - \kappa_1 [(\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta) \cos \vartheta - (\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) \sin \vartheta] \\ & - \kappa_2 (\Delta M_2 \Gamma_2 + M_2 \Delta \Gamma_2 + \Delta M_3 \Gamma_3 + M_3 \Delta \Gamma_3) \\ & + \kappa_2 \Delta M_1 - \frac{1}{2} [\Delta M_1 v^3|_1 + M_1 4v^3|_1]_{,1} \\ & - \frac{1}{2} [\Delta M_1 (v^3|_1)_{,1} + M_1 d(v^3|_1)_{,1}] \\ & - \kappa_1 (\Delta M_1 v^2|_1 + M_1 4v^2|_1) \\ & - (M_2^* \cos \vartheta - M_3^* \sin \vartheta) \Delta \vartheta = 0 \dots\dots\dots(56 \cdot b) \end{aligned}$$

$$4v^3=0 \text{ または}$$

$$\begin{aligned} & 4Nv^3|_1 + N4v^3|_1 \\ & + [(\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta) \cos \vartheta - (\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) \sin \vartheta]_{,1} \\ & - \kappa_1 [(\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta) \cos \vartheta + (\Delta M_2 - M_3 \Delta \vartheta) \sin \vartheta] \\ & + \kappa_3 (\Delta M_2 \Gamma_2 + M_2 \Delta \Gamma_2 + \Delta M_3 \Gamma_3 + M_3 \Delta \Gamma_3) \\ & + \kappa_3 \Delta M_1 + \frac{1}{2} [\Delta M_1 v^2|_1 + M_1 4v^2|_1]_{,1} \\ & + \frac{1}{2} [\Delta M_1 (v^2|_1)_{,1} + M_1 d(v^2|_1)_{,1}] \\ & - \kappa_1 (\Delta M_1 v^3|_1 + M_1 4v^3|_1) \\ & - (M_3^* \cos \vartheta + M_2^* \sin \vartheta) \Delta \vartheta = 0 \dots\dots\dots(56 \cdot c) \end{aligned}$$

$$4\Gamma_2=0 \text{ または } 4M_3=0 \dots\dots\dots(56 \cdot d)$$

$$4\Gamma_3=0 \text{ または } 4M_2=0 \dots\dots\dots(56 \cdot e)$$

$$4\vartheta=0 \text{ または}$$

$$\begin{aligned} & \Delta M_1 - \Delta M_3 \Gamma_3 - M_3 \Delta \Gamma_3 - \Delta M_2 \Gamma_2 - M_2 \Delta \Gamma_2 = 0 \\ & \dots\dots\dots(56 \cdot f) \end{aligned}$$

$$4\Gamma_\vartheta=0 \text{ または } 4H_\omega=0 \dots\dots\dots(56 \cdot g)$$

さらに、安定限界における断面力の変化分は、断面力の定義に  $d$  を付すことにより式 (49) に対応した形で求まる。

また、式 (55) と (56) において、点線を引いた項のみを考慮すれば、薄肉直線部材 ( $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$ ) の座屈の支配方程式および境界条件<sup>19)</sup> と一致する。

次に、特別な場合の座屈の支配方程式を求める。

(1) 円弧アーチの横倒れ座屈

$$(\kappa_1 = \kappa_3 = 0; \kappa_2 = \text{const.})$$

曲率面内 ( $y_1, y_3$  面内) の荷重を受け、その面内へのみ変位する部材を考える。すなわち、部材軸に沿って分布する荷重  $N^*$ ,  $M_2^*$ ,  $Q_3^*$  を受け、部材の両端で  $\bar{N}^*$ ,  $\bar{Q}_3^*$ ,  $\bar{M}_2^*$  を受け、座屈前の変位として  $v^1$  と  $v^3$  のみが生ずる場合について考える。さらに、断面を二軸対称断面とすれば、式 (53) より、円弧アーチの部材軸として、

$$F_2 = F_3 = I_{23} = F_\omega = I_{\omega\omega} = 0 \dots\dots\dots(57 \cdot a \sim e)$$

を満たす部材軸が選べる<sup>20)</sup>。この条件のもとに、座屈前のつり合い式 (47) と境界条件式 (50) を満たす解として、

$$v^2 = \vartheta = 0, v^1 \neq 0, v^3 \neq 0 \dots\dots\dots(58 \cdot a \sim d)$$

$$M_3 = H_\omega = Z = T = M_1 = 0 \dots\dots\dots(58 \cdot e \sim i)$$

$$N \neq 0, M_2 \neq 0, M_\rho \neq 0 \dots\dots\dots(58 \cdot j \sim l)$$

が求まる<sup>注3)</sup>。したがって、式 (55・b), (55・d) より座屈の支配方程式は、

$$\begin{aligned} & - [N4v^2|_1]_{,1} + [\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta]_{,1,1} \\ & + [\kappa_2 (M_2 \Delta \Gamma_2 + \Delta M_3 \Gamma_3)]_{,1} - [\kappa_2 \Delta M_1]_{,1,1} \\ & + \frac{1}{2} [\Delta M_1 v^3|_1]_{,1,1} + \frac{1}{2} [\Delta M_1 (v^3|_1)_{,1}]_{,1,1} \\ & + [M_2^* \Delta \vartheta]_{,1} = 0 \dots\dots\dots(59 \cdot a) \\ & - \Delta M_{1,1} - [\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta] [\kappa_2 - (v^3|_1)_{,1}] \\ & + M_2 d(v^2|_1)_{,1} - M_2^* (4v^2|_1 + v^3|_1 \Delta \vartheta) = 0 \\ & \dots\dots\dots(59 \cdot b) \end{aligned}$$

とかける。このときの境界条件は、式 (56) より、

$$4v^2=0 \text{ または}$$

$$\begin{aligned} & N4v^2|_1 - [\Delta M_3 + M_2 \Delta \vartheta]_{,1} - \kappa_2 (M_2 \Delta \Gamma_2 + \Delta M_3 \Gamma_3) \\ & + \kappa_2 \Delta M_1 - \frac{1}{2} [\Delta M_1 v^3|_1]_{,1} - \frac{1}{2} \Delta M_1 (v^3|_1)_{,1} \\ & - M_2^* \Delta \vartheta = 0 \dots\dots\dots(60 \cdot a) \end{aligned}$$

$$4\Gamma_2=0 \text{ または } 4M_3=0 \dots\dots\dots(60 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} & 4\vartheta=0 \text{ または } \Delta M_1 - \Delta M_3 \Gamma_3 - M_2 \Delta \Gamma_2 = 0 \\ & \dots\dots\dots(60 \cdot c) \end{aligned}$$

$$4\Gamma_\vartheta=0 \text{ または } 4H_\omega=0 \dots\dots\dots(60 \cdot d)$$

となる。さらに、座屈前の断面力と座屈時の断面力の増分量は、式 (48), (52), (53), (57), (58) を用いて、

$$N = EFF_\omega \dots\dots\dots(61 \cdot a)$$

$$M_2 = -EI_{33} \Delta \vartheta \dots\dots\dots(61 \cdot b)$$

$$M_\rho = EF_R \Gamma_\omega - EI_{R3} \Delta \vartheta \dots\dots\dots(61 \cdot c)$$

$$\Delta N = EF \Delta \Gamma_\omega \dots\dots\dots(61 \cdot d)$$

$$\Delta M_2 = -EI_{33} \Delta \vartheta \dots\dots\dots(61 \cdot e)$$

$$\Delta M_3 = EI_{22} \Delta \vartheta_u + EI_{\omega 2} \Delta \vartheta_\vartheta \dots\dots\dots(61 \cdot f)$$

$$\Delta H_\omega = -EI_{\omega 2} \Delta \vartheta_u - EI_{\omega \omega} \Delta \vartheta_\vartheta \dots\dots\dots(61 \cdot g)$$

$$\begin{aligned} & \Delta M_\rho = EF_R \Delta \Gamma_\omega - EI_{R2} \Delta \vartheta_u \\ & - EI_{R3} \Delta \vartheta_\vartheta - EI_{R\omega} \Delta \vartheta_\vartheta \dots\dots\dots(61 \cdot h) \end{aligned}$$

$$\Delta T = GJ_t \Delta \Gamma_\vartheta \dots\dots\dots(61 \cdot i)$$

$$\begin{aligned} & \Delta M_1 = -EI_{\omega 2} \Delta \vartheta_{u,1} - EI_{\omega \omega} \Delta \vartheta_{\vartheta,1} \\ & + GJ_t \Delta \Gamma_\vartheta + M_\rho \Delta \Gamma_\vartheta \dots\dots\dots(61 \cdot j) \end{aligned}$$

と表わせる。

ゆえに、式 (61) を式 (59) に代入すれば、変位表示の座屈の支配方程式として、

注 3) 一定の曲率  $\kappa_2$  を有する円弧アーチでは、式 (40) の  $H^*$  は零となるので、式 (53) の  $H^*$  を含む積分項は零となる。すなわち、 $F_H = I_{H2} = I_{H3} = I_{H\omega} = I_{HR} = I_{HH} = 0$  が成り立つ。このため、断面力  $Z$  は恒等的に零となる。

$$\begin{aligned}
 & -[N\Delta v^2]_{,1} + [EI_{22}\Delta\Omega_u + EI_{\omega 2}\Delta\Omega_\vartheta + M_2\Delta\vartheta]_{,11} \\
 & + [\kappa_2\{M_2\Delta\Gamma_2 + \Gamma_3(EI_{22}\Delta\Omega_u + EI_{\omega 2}\Delta\Omega_\vartheta)\}]_{,1} \\
 & - \left[ \kappa_2 \left\{ EI_{\omega\omega}\Delta\Omega_{\vartheta,1} - GJ_t\Delta\Gamma_\vartheta \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left( \frac{F_R}{F}N + \frac{I_{R3}}{I_{33}}M_2 \right) \Delta\Gamma_\vartheta \right\} \right]_{,1} \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \left\{ EI_{\omega\omega}\Delta\Omega_{\vartheta,1} - GJ_t\Delta\Gamma_\vartheta + EI_{\omega 2}\Delta\Omega_{u,1} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left( \frac{F_R}{F}N + \frac{I_{R3}}{I_{33}}M_2 \right) \Delta\Gamma_\vartheta \right\} v^3 \right]_{,11} \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \left\{ EI_{\omega\omega}\Delta\Omega_{\vartheta,1} - GJ_t\Delta\Gamma_\vartheta + EI_{\omega 2}\Delta\Omega_{u,1} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left( \frac{F_R}{F}N + \frac{I_{R3}}{I_{33}}M_2 \right) \Delta\Gamma_\vartheta \right\} (v^3)_{,1} \right]_{,1} \\
 & + [M_2\Delta\vartheta]_{,1} = 0 \dots\dots\dots (62 \cdot a) \\
 & \left[ EI_{\omega\omega}\Delta\Omega_{\vartheta,1} - GJ_t\Delta\Gamma_\vartheta + EI_{\omega 2}\Delta\Omega_{u,1} \right. \\
 & \left. - \left( \frac{F_R}{F}N + \frac{I_{R3}}{I_{33}}M_2 \right) \Delta\Gamma_\vartheta \right]_{,1} \\
 & - [EI_{22}\Delta\Omega_u + EI_{\omega 2}\Delta\Omega_\vartheta + M_2\Delta\vartheta] [\kappa_2 - (v^3)_{,1}]_{,1} \\
 & + M_2\Delta(v^3)_{,1} - M_2^*(\Delta v^2)_{,1} + v^3]_{,1}\Delta\vartheta = 0 \\
 & \dots\dots\dots (62 \cdot b)
 \end{aligned}$$

が得られる。

8. 考 察

(1) 有限変位場

従来の研究においては、断面は変形しないとする仮定と拡張された Bernoulli-Euler の仮定を一次元棒理論の基礎としているが、変位場の誘導方法に差異がみられ、得られた変位場は同一のものとはなっていない。変位場の誘導方法は大きく分けて、上記の仮定をひずみ場に適用し直接積分を行い変位場を誘導する方法と、幾何学的考察に基づき変位場を誘導する方法とに分けられる。この方法には一長一短があり、いずれの誘導方法がすぐれているかは断言できない。有限変位問題を例にとると、積分演算による方法では特別な問題（一軸曲げの問題）の場合以外には非線形ひずみ-変位関係の偏微分方程式の解が求まらない欠点があり、幾何学的考察による方法では、変位に関する二次以上の高次微小項を含めると、横断面内のひずみ成分が必ずしも零にならない欠点がある。本報告も含め既往の研究において、そり変位の影響を受ける項および二次以上の高次微小項に差異が生じているのは、上記のことに起因するものと思われる。

すでに指摘されているように、変位法に基づく解析では、変位場の設定が重要であるので、本報告で得られた変位場の妥当性を確かめるべく、既往の研究との比較を表一に示した。そり変位の影響を受ける項に既往の研

究と若干の差異が生じており、必ずしも有限変位場として厳密とはいえないが、従来の研究を薄肉空間曲線部材に拡張したという意味で、本報告の式(31)は一般性のある有限変位場になっていると考えられる。ただし、研究者により使用しているパラメーターが異なるので、表一では本報告のパラメーターに直して比較している。

(2) 変形による部材軸の曲率の定義

Lagrange の記述法に従う変形による部材軸のねじれ率は式(30)で表現できた。本節では、変形による部材軸の曲率  $\bar{\kappa}_2$  を求める ( $\bar{\kappa}_3$  についても同様の手法で求める)。  $\bar{\kappa}_2$  を変位ベクトル  $\bar{v}$ ,  $\bar{v}$  が生じた後の部材軸の曲率とすると、

$$\bar{\kappa}_2 = \frac{\bar{e}_{3,1}}{|\mathbf{x}_{,1}|} \cdot \bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_{3,1}}{|\mathbf{x}_{,1}|} \cdot \bar{e}_1 \dots\dots\dots (63)$$

と置けるので<sup>27)</sup>、曲率  $\bar{\kappa}_2$  は、

$$\bar{\kappa}_2 = \bar{\kappa}_2 - \kappa_2 \dots\dots\dots (64)$$

と表わせる。したがって、式(16・c)より、

$$\begin{aligned}
 \bar{\kappa}_2 &= \frac{1}{|\mathbf{x}_{,1}|} [D_{3m,1}\bar{e}_m + D_{3m}\bar{e}_{m,1}] \cdot D_{1n}\bar{e}_n - \kappa_2 \\
 &= \frac{1}{|\mathbf{x}_{,1}|} [D_{31,1}D_{13} + D_{32,1}D_{12} + D_{33,1}D_{13} \\
 &\quad + \kappa_1(D_{32}D_{13} - D_{33}D_{12}) + \kappa_2(D_{33}D_{11} - D_{31}D_{13}) \\
 &\quad + \kappa_3(D_{13}D_{12} - D_{32}D_{11})] - \kappa_2 \dots\dots\dots (65)
 \end{aligned}$$

を得る。この式は Lagrange の記述法における薄肉空間曲線部材の曲率の厳密な表現となっている。一例として、式(65)を直線部材 ( $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$ ) に適用すると、西野ら<sup>17)</sup>による一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論の曲率と同一のものが得られる。

(3) つり合い式

薄肉空間曲線部材の有限変位理論に関する研究は、これまで少なく、本報告で得られた薄肉空間曲線部材のつり合い式の妥当性を直接比較・検討できる既往のつり合い式が見当たらないのが現状である。そこで、従来の研究のうちそれぞれの分野で比較的厳密と思われるつり合い式を選び、個々の場合について比較した。すなわち、5. のつり合い式(47)において、下線を引いた項のみを考慮すれば、微小変位理論による薄肉空間曲線部材のつり合い式<sup>11)</sup>と一致する。また、特別な場合として、式(47)において  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$  とおけば、有限変位理論による薄肉直線部材のつり合い式<sup>15)</sup> (点線を引いた項のみを考慮) と一致する。ただし、文献15)ではねじれ率に近似化がなされており、 $\bar{F}_\vartheta = \vartheta_{,1}$  としている。さらに  $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$ ,  $\kappa_2 \neq \text{const.}$  とおいたときの平面曲線部材のつり合い式は文献20)の有限変位理論によるつり合い式と高次の微小項を除き一致することも確かめた。

表-1 変位場の比較

分類	対象部材	初期曲率	初期ねじれ率	研究者	本文との関係
微小変位場	平面曲線部材	曲率=0	ねじれ率=0	Vlasov <sup>1)</sup> Kollbrunner <sup>2)</sup> Hajdin	式(31)において $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=0$ とし、変位成分について線形項のみをとると本文の結果と完全に一致する。
		曲率=const.	ねじれ率=0	西野文雄 <sup>6)</sup> 深沢泰晴	式(31)において $\kappa_1=\kappa_2=0; \kappa_3=const.$ と置き、変位成分の線形項のみを考慮すれば、本文の結果と一致する。ただし、文献9)とは変位を規定する軸を部材軸にとった場合で比較した。
	空間曲線部材	曲率=const.	ねじれ率=const.	築地恒夫 <sup>9)</sup>	式(31)において $\kappa_1=const.; \kappa_2=const.; \kappa_3=const.$ とし、変位成分の線形項のみをとると本文の結果と一致する。ただし、文献9)ではそり関数を求める際に $g=\hat{g}$ と近似している。
				平嶋政治 <sup>10)</sup> 恵谷舜吾	式(31)において $\kappa_1=const.; \kappa_2=const.; \kappa_3=const.$ とし、変位成分の線形項のみをとると本文の結果と一致する。
		曲率 $\neq$ const.	ねじれ率 $\neq$ const.	Washizu, K. <sup>12)</sup>	文献12)ではせん断変形を考慮した変位場を用いているが、そり関数に初期曲率・初期ねじれ率の影響が含まれておらず、ねじれ率として新しい変数 $\alpha$ が導入されている。
				Hirashima, M. <sup>11)</sup> Iura, M.	式(31)において変位成分の線形項のみをとれば、本文の結果と完全に一致する。
有限変位場	平面曲線部材	曲率=0	ねじれ率=0	西野文雄 <sup>14)</sup> 倉方慶夫 長谷川彰夫 奥村敏恵	式(31)において $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=0$ と置き、ねじれ角 $\theta$ を除く変位成分について二次以上の高次微小項を省略すれば本文の結果と一致する。
				前田幸雄 <sup>16)</sup> 林正	$\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=0$ と置き、式(21)においてそりの項を無視し、 $D_{im}=\phi_{im}$ とすれば本文の結果と完全に一致する。ただし、文献16)では、 $\phi_{im}=r_{im}$ , $e_1=\phi X=\theta X/\alpha$ , $e_2=\phi Y=\theta Y/\alpha$ , $e_3=\phi Z=\theta Z/\alpha$ と置いている。
				西野文雄 <sup>17)</sup> 倉方慶夫 後藤芳彌	$\kappa_1=\kappa_2=\kappa_3=0$ と置き、式(21)のそりの項を無視し、式(21)の $D_{im}$ を計算する際、 $e_1=0$ , $e_2=1$ , $e_3=0$ , $\theta=0$ と置けば、本文の結果と完全に一致する。
	空間曲線部材	曲率 $\neq$ const.	ねじれ率=0	薄木征三 <sup>21)</sup>	式(31)において $\kappa_1=\kappa_2=0; \kappa_3=const.$ と置き、ねじれ角を除く変位成分に関し二次以上の高次微小項を無視すると、そり変位の項を除き一致する。ただし、文献21)ではねじれ率を求める際、 $D_{22}=D_{33}=1; D_{23}=D_{32}=0$ としている。
				事口寿男 <sup>22)</sup> 久保元生 中井博	式(31)において $\kappa_1=\kappa_2=0; \kappa_3=const.$ と置き、変位成分に関し三次以上の高次微小項を無視すると、本文の結果と一致する。ただし、文献22)とはねじれ率の項の係数に差異がある。
				倉方慶夫 <sup>20)</sup>	式(21)から式(31)を導く際、 $\kappa_1=\kappa_2=0; \kappa_3=const.$ と置き、 $\cos \alpha=1-(1/2)\sin^2 \alpha$ と近似すれば、面内変位のみ含まれているねじれ率の二乗を含む項を除き本文の結果と一致する。
空間曲線部材	曲率 $\neq$ const.	ねじれ率 $\neq$ const.	Schroeder <sup>23)</sup>	式(31)において、平面的な変位は一致するが、そり変位の項に差がある。すなわち、文献23)ではねじれ率として微小変位理論に基づく直線部材のねじれ率 $\theta_{,1}$ を用いている。	
			高島秀雄 <sup>24)</sup>	本文のねじれ率に対応するものとして新しい変数を導入し、そり関数として微小変位理論による直線部材の St. Venant ねじりのそり関数を代用している点に差異がある。	

(4) 横倒れ座屈 ( $\kappa_1=\kappa_3=0; \kappa_2=const.$ )

横倒れ座屈の支配方程式(62)の妥当性を確かめるため、部材両端で等曲げモーメント  $\bar{M}_2^*$  のみを受け、両端で単純支持されている二軸対称断面円弧アーチを考える。この条件のもとでは、式(62)の支配方程式において、

$$M_2 = \bar{M}_2^* = const., N=0 \dots\dots\dots(66 \cdot a \sim c)$$

とおける。したがって、式(37), (62), (66)を用い、変位の増分量の二次以上の微小項を無視すれば、横倒れ座屈の支配方程式として、

$$\left\{ EI_{22} + EI_{\omega 2} \left[ \kappa_2 + \frac{\bar{M}_2^*}{EI_{33}} \right] \right\} \Delta \Omega_{u,1} + \left\{ EI_{\omega 2} + EI_{\omega \omega} \left[ \kappa_2 + \frac{\bar{M}_2^*}{EI_{33}} \right] \right\} \Delta \Gamma_{\theta,111} - \left\{ \bar{M}_2^* - \left[ \kappa_2 + \frac{\bar{M}_2^*}{EI_{33}} \right] \left[ GJ_t + \frac{I_{R3}}{I_{33}} \bar{M}_2^* \right] \right\} \cdot \Delta \Gamma_{\theta} = 0 \dots\dots\dots(67 \cdot a)$$

$$EI_{\omega 2} \Delta \Omega_{u,11} - \left[ EI_{22} \left( \kappa_2 + \frac{\bar{M}_2^*}{EI_{33}} \right) - \bar{M}_2^* \right] \cdot \Delta \Omega_u + EI_{\omega \omega} \Delta \Gamma_{\theta,111} - \left[ EI_{\omega 2} \left( \kappa_2 + \frac{\bar{M}_2^*}{EI_{33}} \right) GJ_t + \frac{I_{R3}}{I_{33}} \bar{M}_2^* \right] \cdot \Delta \Gamma_{\theta,1} = 0 \dots\dots\dots(67 \cdot b)$$

が得られる。式 (67・a), (67・b) より  $4Q_u$  を消去すれば,  $\Delta\Gamma_g$  に関する微分方程式が得られ, この式の固有値として横倒れ座屈モーメントが求まる。なお, 文献 20) においても, 式 (67) と同一の支配方程式が誘導されている。

しかるに, 式 (67) より求まる横倒れ座屈モーメントは, かなり煩雑な式となるので, 従来の研究との比較を

$$EI_{\omega\omega}\Delta\Gamma_{g,1111} - GJ_t\Delta\Gamma_{g,111} + \left[ \kappa_2 + \frac{\bar{M}_2^*}{EI_{33}} - \frac{\bar{M}_2^*}{EI_{22}} \right] \left[ \bar{M}_2^*\Delta\Gamma_g + \left( \kappa_2 + \frac{\bar{M}_2^*}{EI_{33}} \right) (EI_{\omega\omega}\Delta\Gamma_{g,11} - GJ_t\Delta\Gamma_g) \right] = 0 \quad (70)$$

が得られる。ゆえに, 横倒れ座屈モーメントは,

$$\bar{M}_2^* = \frac{\kappa_2 EI_{22} \left( 1 + \frac{\beta}{EI_{22}} - \frac{2\beta}{EI_{33}} \right) \pm \sqrt{(\kappa_2 EI_{22})^2 \left( 1 + \frac{\beta}{EI_{22}} - \frac{2\beta}{EI_{33}} \right)^2 + 4\beta EI_{22} [\lambda^2 - (\kappa_2)^2] \left( 1 - \frac{\beta}{EI_{33}} \right) \left( 1 - \frac{I_{22}}{I_{33}} \right)}}{2 \left( 1 - \frac{\beta}{EI_{33}} \right) \left( 1 - \frac{I_{22}}{I_{33}} \right)} \quad (71)$$

となる。ここに,

$$\beta = EI_{\omega\omega}\lambda^2 + GJ_t \quad (72 \cdot a)$$

$$\lambda = n\pi/l \quad (n: \text{正の整数}, l: \text{部材軸長}) \quad (72 \cdot b)$$

である。

式 (71) は文献 25) のつり合い法による座屈値と一致している。付言するならば, 文献 25) では  $\kappa_2 y_3 \ll 1$  とし直線部材と同じ断面定数を用いてはいるものの, 座屈前変位の影響は考慮されている。

### 9. 結 語

薄肉空間曲線部材の有限変位理論においては, 有限変位場の設定が重要であることに鑑み, 現時点で最良と思われる方法によって有限変位場を誘導した。すなわち, 有限変位場を決定する際, 薄肉断面部材に固有のそり変位をそり関数とねじれ率との積で表現し, そり関数として微小変位理論による初期曲率と初期ねじれ率の影響を考慮したそり関数を用い, ねじれ率として変形による部材軸のねじれ率を利用した。得られた有限変位場は, 従来の薄肉断面部材の研究成果を含むものであり, 薄肉空間曲線部材の一次元棒理論の有限変位場として, 妥当な変位場であると考えられる。

有限変位場を用い, 仮想仕事の原理より有限変位のつり合い式を求めた。得られたつり合い式は, 微小ひずみ・有限変位のつり合い式として, 従来のつり合い式に比べ精度の高いものになっていると考えられる。その一例を, 等曲げを受ける平面円弧アーチの横倒れ座屈問題にみる事ができる。すなわち, 本報告より求まる横倒れ座屈モーメントは, 横断面の寸法に比べ曲率半径が十分大きいとした場合には, つり合い法により求まる固有

考え, 一次元棒理論が適用できる円弧アーチでは,

$$\kappa_2 y_3 \ll 1 \text{ i.e. } \sqrt{g} = 1 \quad (68)$$

という条件が近似的に成立するものとする。直線部材のときの断面定数が使用でき, 断面の対称性から, 式 (67) において,

$$I_{\omega\omega} = I_{R3} = 0 \quad (69 \cdot a, b)$$

と置き, 横倒れ座屈の支配方程式として,

値と完全に一致する。

以上のことより, 本報告で示した薄肉空間曲線部材の有限変位理論は, 微小ひずみの範囲における有限変位理論として, 必ずしも厳密なものではないが, 変位に関する二次の微小項をすべて考慮したという意味で, 工学的に精度の高いものとなっていると考えられる。

### 付録 1 共変計量テンソル $a_{ij}$ と反変計量テンソル $a^{ij}$

式 (9), (11) を用いると,

$$a_{11} = g + (\kappa_1)^2 [(y_2)^2 + (y_3)^2] \quad (1-1 \cdot a)$$

$$a_{12} = \kappa_1 (y_2 \hat{y}_{3,2} - y_3 \hat{y}_{2,2}) \quad (1-1 \cdot b)$$

$$a_{13} = \kappa_1 (y_2 \hat{y}_{2,2} + y_3 \hat{y}_{3,2}) \quad (1-1 \cdot c)$$

$$a_{21} = a_{12}, a_{22} = 1, a_{23} = 0 \quad (1-1 \cdot d \sim f)$$

$$a_{31} = a_{13}, a_{32} = 0, a_{33} = 1 \quad (1-1 \cdot g \sim i)$$

$$a^{11} = \frac{1}{g}, a^{12} = -\frac{a_{12}}{g}, a^{13} = -\frac{a_{13}}{g} \quad (1-2 \cdot a \sim c)$$

$$a^{21} = a^{12}, a^{22} = \frac{[a_{11} - (a_{13})^2]}{g}, a^{23} = \frac{a_{12} a_{13}}{g} \quad (1-2 \cdot d \sim f)$$

$$a^{31} = a^{13}, a^{32} = a^{23}, a^{33} = \frac{[a_{11} - (a_{12})^2]}{g} \quad (1-2 \cdot g \sim i)$$

が得られる。

### 付録 2 そり関数 $\omega$ の決定

薄肉断面部材の開閉両区間について, 微小変位理論に基づくそり関数  $\omega$  を求める。

Green のひずみテンソルは次のように表わせる。

$$r_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{a}}_i \cdot \hat{\mathbf{a}}_j - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j) \dots\dots\dots(2-1)$$

したがって、式 (35) より、微小変位理論におけるひずみテンソルは、

$$r_{ij}^L = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{V}_{,j} + \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{V}_{,i}) \dots\dots\dots(2-2)$$

とかける。なお、添字  $L$  は微小変位理論による値を示す。

仮定 (iii) より、

$$2r_{13}^L = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{V}_{,3} + \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{V}_{,1} = 0 \dots\dots\dots(2-3)$$

を得る。この式に式 (9) と線形項のみを考慮した全変位ベクトルを代入すると、

$$g \frac{\partial}{\partial \theta^3} \left( \frac{w}{\sqrt{g}} \right) + (v^3_{,1} + \kappa_1 v^2) \dot{y}_{3,2} - (v^2_{,1} - \kappa_1 v^3) \dot{y}_{3,2} + h_s \vartheta_{,1} = 0 \dots\dots\dots(2-4)$$

式 (2-4) を  $\theta^3$  について積分すれば、

$$\frac{w}{\sqrt{g}} = \frac{\{(v^3_{,1} + \kappa_1 v^2) \dot{y}_{3,2} - (v^2_{,1} - \kappa_1 v^3) \dot{y}_{3,2} + h_s \vartheta_{,1}\}}{(\kappa_2 \dot{y}_{2,2} + \kappa_3 \dot{y}_{3,2})} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \right\} + \frac{\hat{w}}{\sqrt{\hat{g}}} \dots\dots\dots(2-5)$$

が得られる。ここに、 $\hat{w}$  は板厚中央面上の部材軸方向変位である。

次に、板厚中央面上の部材軸方向変位  $\hat{w}$  を求める。局所デカルト座標系における微小変位理論によるつり合い式は、応力テンソル  $\sigma_L^{ij}$  を用いて、

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial \sigma_L^{11}}{\partial \theta^1} - \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^2} (a_{12} \sigma_L^{11}) - \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^3} (a_{13} \sigma_L^{11}) + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^2} (g \sigma_L^{12}) + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^3} (g \sigma_L^{13}) + F = 0 \dots\dots\dots(2-6)$$

と表わされる<sup>11)</sup>。ここに、 $F$  は  $x_1$  方向の物体力の物理成分を示す。

仮定 (iv) より、板厚中央面上で、

$$\frac{\partial(\hat{g} \hat{\sigma}_L^{12t})}{\partial \theta^2} = 0 \dots\dots\dots(2-7)$$

が成り立つ。この式を  $\theta^2$  について積分すると、

$$\frac{\hat{w}}{\sqrt{g}} = - \int_{\theta^2_*}^{\theta^2} \left\{ (v^2_{,1} - \kappa_1 v^3) \dot{y}_{3,2} + (v^3_{,1} + \kappa_1 v^2) \dot{y}_{3,2} + h_n \vartheta_{,1} \right\} d\theta^2 + \frac{q_0}{G} \int_{\theta^2_*}^{\theta^2} \frac{1}{\hat{g} \sqrt{\hat{g}}} \cdot \frac{1}{t} d\theta^2 + \frac{\hat{w}_*}{\sqrt{\hat{g}_*}} \dots\dots\dots(2-17)$$

が得られる。ここに、 $( )_*$  は点  $P^*$  における値を示す。

ゆえに、式 (2-5) と (2-17) より、部材軸方向変位  $w$  は、

$$w = - \frac{\{(v^3_{,1} + \kappa_1 v^2) \dot{y}_{3,2} - (v^2_{,1} - \kappa_1 v^3) \dot{y}_{3,2} + h_s \vartheta_{,1}\}}{\sqrt{\hat{g}}} \theta^3 - \sqrt{g} \int_{\theta^2_*}^{\theta^2} \left\{ (v^3_{,1} + \kappa_1 v^2) \dot{y}_{3,2} + (v^2_{,1} - \kappa_1 v^3) \dot{y}_{3,2} + h_n \vartheta_{,1} \right\} d\theta^2 + \sqrt{g} \frac{q_0}{G} \int_{\theta^2_*}^{\theta^2} \frac{1}{\hat{g} \sqrt{\hat{g}}} \cdot \frac{1}{t} d\theta^2 + \sqrt{g} \frac{\hat{w}_*}{\sqrt{\hat{g}_*}} \dots\dots\dots(2-18)$$

と表わされる。

ここで、そり変位の項にのみ注目すると、

$$w_p = -\omega \Gamma_\theta^L \dots\dots\dots(2-19)$$

と置くことができ、そり関数  $\omega$  は、

$$\hat{g} \hat{\sigma}_L^{12} = \frac{q_0(\theta^1)}{t} \dots\dots\dots(2-8)$$

を得る。ここに、 $q_0$  は積分定数である。Hooke の法則より、

$$2 \hat{\varepsilon}_{12}^L = \frac{q_0}{\hat{g} G t} \dots\dots\dots(2-9)$$

また、式 (38) より、局所デカルト座標系のひずみテンソルと曲線座標系のひずみテンソルは次のように関係づけられる。

$$2 \hat{\varepsilon}_{12}^L = \frac{2 \hat{r}_{12}^L}{\sqrt{\hat{g}}} \dots\dots\dots(2-10)$$

したがって、式 (2-9) と (2-10) より、

$$2 \hat{r}_{12}^L = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \cdot \frac{q_0}{G t} \dots\dots\dots(2-11)$$

すなわち、

$$2 \hat{r}_{12}^L = \hat{\mathbf{a}}_1 \cdot \hat{\mathbf{V}}_{,2} + \hat{\mathbf{a}}_2 \cdot \hat{\mathbf{V}}_{,1} = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \cdot \frac{q_0}{G t} \dots\dots\dots(2-12)$$

を得る。

式 (2-12) に式 (5) と線形項のみを考慮した全変位ベクトルを代入すると、

$$\hat{g} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \left( \frac{\hat{w}}{\sqrt{\hat{g}}} \right) + (v^2_{,1} - \kappa_1 v^3) \dot{y}_{2,2} + (v^3_{,1} + \kappa_1 v^2) \dot{y}_{3,2} + h_n \vartheta_{,1} = \frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \cdot \frac{q_0}{G t} \dots\dots\dots(2-13)$$

が得られる。

閉区間の場合、 $q_0$  は変位  $\hat{w}$  の連続条件

$$\oint \frac{\partial}{\partial \theta^2} \left( \frac{\hat{w}}{\sqrt{\hat{g}}} \right) d\theta^2 = 0 \dots\dots\dots(2-14)$$

より求まり、

$$q_0 = \frac{G \oint \frac{h_n}{\hat{g}} d\theta^2}{\oint \frac{1}{\hat{g} \sqrt{\hat{g}}} \cdot \frac{1}{t} d\theta^2} \cdot \Gamma_\theta^L \dots\dots\dots(2-15)$$

を得る。ここに、 $\Gamma_\theta^L = \vartheta_{,1} + \kappa_2 v^2|_1 + \kappa_3 v^3|_1$  である。また、开区間の場合には、自由縁での条件より、

$$q_0 = 0 \dots\dots\dots(2-16)$$

となる。したがって、式 (2-13) を  $\theta^2$  について積分すると、

$$\omega = \begin{cases} \frac{h_s}{\sqrt{\bar{g}}} \theta^3 + \sqrt{\bar{g}} \int_{\theta^2_*}^{\theta^2} \frac{h_n}{\bar{g}} d\theta^2 & \text{(開区間)} \dots\dots\dots(2-20 \cdot a) \\ \left. \frac{h_s}{\sqrt{\bar{g}}} \theta^3 + \sqrt{\bar{g}} \int_{\theta^2_*}^{\theta^2} \left\{ \frac{h_n}{\bar{g}} - \frac{\oint \frac{h_n}{\bar{g}} d\theta^2}{\oint \frac{1}{\bar{g} \sqrt{\bar{g}}} \cdot \frac{1}{t} d\theta^2} \cdot \frac{1}{\bar{g} \sqrt{\bar{g}} t} \right\} d\theta^2 \right. & \text{(閉区間)} \dots\dots\dots(2-20 \cdot b) \end{cases}$$

と表わせる。

$$\frac{1}{|\mathbf{x}_{,1}|} = 1 - v^1|_1 + (v^1|_1)^2 - \frac{1}{2}(v^2|_1)^2 - \frac{1}{2}(v^3|_1)^2 \dots\dots\dots(3-3)$$

**付録 3** ねじれ率  $\bar{\Gamma}_\vartheta$  の変位成分表示

変形による部材軸のねじれ率  $\bar{\Gamma}_\vartheta$  は、 $D_{im}$  あるいは  $\phi_{im}$  を用いて、式 (30・b)、(30・c) のように表わせる。いま、ねじれ角  $\vartheta$  を除き、変位成分に関し二次の微小項まで考慮すれば、 $\phi_{im}$ 、 $D_{im}$ 、 $1/|\mathbf{x}_{,1}|$  は次のようにかける。

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= 1 - \frac{1}{2}(v^2|_1)^2 - \frac{1}{2}(v^3|_1)^2 \dots\dots\dots(3-1 \cdot a) \\ \phi_{12} &= v^2|_1(1 - v^1|_1) \dots\dots\dots(3-1 \cdot b) \\ \phi_{13} &= v^3|_1(1 - v^1|_1) \dots\dots\dots(3-1 \cdot c) \\ \phi_{21} &= -v^2|_1(1 - v^1|_1) \dots\dots\dots(3-1 \cdot d) \\ \phi_{22} &= 1 - \frac{1}{2}(v^2|_1)^2 \dots\dots\dots(3-1 \cdot e) \\ \phi_{23} &= -\frac{1}{2} v^2|_1 v^3|_1 \dots\dots\dots(3-1 \cdot f) \\ \phi_{31} &= -v^3|_1(1 - v^1|_1) \dots\dots\dots(3-1 \cdot g) \\ \phi_{32} &= -\frac{1}{2} v^2|_1 v^3|_1 \dots\dots\dots(3-1 \cdot h) \\ \phi_{33} &= 1 - \frac{1}{2}(v^3|_1)^2 \dots\dots\dots(3-1 \cdot i) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} D_{11} &= 1 - \frac{1}{2}(v^2|_1)^2 - \frac{1}{2}(v^3|_1)^2 \dots\dots\dots(3-2 \cdot a) \\ D_{12} &= v^2|_1(1 - v^1|_1) \dots\dots\dots(3-2 \cdot b) \\ D_{13} &= v^3|_1(1 - v^1|_1) \dots\dots\dots(3-2 \cdot c) \\ D_{21} &= -v^2|_1(1 - v^1|_1) \cos \vartheta - v^3|_1(1 - v^1|_1) \sin \vartheta \dots\dots\dots(3-2 \cdot d) \\ D_{22} &= \left[ 1 - \frac{1}{2}(v^2|_1)^2 \right] \cos \vartheta - \frac{1}{2} v^2|_1 v^3|_1 \sin \vartheta \dots\dots\dots(3-2 \cdot e) \\ D_{23} &= -\frac{1}{2} v^2|_1 v^3|_1 \cos \vartheta + \left[ 1 - \frac{1}{2}(v^3|_1)^2 \right] \sin \vartheta \dots\dots\dots(3-2 \cdot f) \\ D_{31} &= -v^3|_1(1 - v^1|_1) \cos \vartheta + v^2|_1(1 - v^1|_1) \sin \vartheta \dots\dots\dots(3-2 \cdot g) \\ D_{32} &= -\frac{1}{2} v^2|_1 v^3|_1 \cos \vartheta - \left[ 1 - \frac{1}{2}(v^2|_1)^2 \right] \sin \vartheta \dots\dots\dots(3-2 \cdot h) \\ D_{33} &= \left[ 1 - \frac{1}{2}(v^3|_1)^2 \right] \cos \vartheta + \frac{1}{2} v^2|_1 v^3|_1 \sin \vartheta \dots\dots\dots(3-2 \cdot i) \end{aligned}$$

さらに、

したがって、変位成分に関し二次の微小項まで考慮したときのねじれ率  $\bar{\Gamma}_\vartheta$  は、式 (30) より、

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_\vartheta &= \vartheta_{,1}(1 - v^1|_1) + \frac{1}{2}(v^2|_1)_{,1} v^3|_1 - \frac{1}{2}(v^3|_1)_{,1} v^2|_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \kappa_1 [(v^2|_1)^2 + (v^3|_1)^2] + \kappa_2 v^2|_1(1 - v^1|_1) \\ &\quad + \kappa_3 v^3|_1(1 - v^1|_1) \dots\dots\dots(3-4) \end{aligned}$$

となる。さらに、 $v^i|_1 \ll 1$  と仮定したときのねじれ率を  $\Gamma_\vartheta$  とすれば、

$$\begin{aligned} \Gamma_\vartheta &= \vartheta_{,1} + \frac{1}{2}(v^2|_1)_{,1} v^3|_1 - \frac{1}{2}(v^3|_1)_{,1} v^2|_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \kappa_1 [(v^2|_1)^2 + (v^3|_1)^2] + \kappa_2 v^2|_1 + \kappa_3 v^3|_1 \dots\dots\dots(3-5) \end{aligned}$$

を得る。このねじれ率  $\Gamma_\vartheta$  を用い、有限変位場としてねじれ角  $\vartheta$  を除いた変位成分  $v^i$  に対し二次の微小項まで考慮したものが式 (32) である。

**付録 4**  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$  系から  $(z_1, z_2, z_3)$  系への座標変換式

図-1 より、

$$\frac{\partial \theta^m}{\partial z_i} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}^m \dots\dots\dots(4-1)$$

が成り立つ<sup>12)</sup>。ここに、 $\mathbf{b}_i$  は局所デカルト座標系  $(z_1, z_2, z_3)$  における基底ベクトルである。したがって、式 (9)、(11) を用いれば、

$$\frac{\partial \theta^1}{\partial z_1} = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \frac{\partial \theta^2}{\partial z_1} = -\frac{a_{12}}{\sqrt{g}}, \quad \frac{\partial \theta^3}{\partial z_1} = -\frac{a_{13}}{\sqrt{g}} \dots\dots\dots(4-2 \cdot a \sim c)$$

$$\frac{\partial \theta^1}{\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial \theta^2}{\partial z_2} = 1, \quad \frac{\partial \theta^3}{\partial z_2} = 0 \dots\dots\dots(4-2 \cdot d \sim f)$$

$$\frac{\partial \theta^1}{\partial z_3} = 0, \quad \frac{\partial \theta^2}{\partial z_3} = 0, \quad \frac{\partial \theta^3}{\partial z_3} = 1 \dots\dots\dots(4-2 \cdot g \sim i)$$

が得られる。

**参 考 文 献**

- 1) Vlasov, V.Z.: 薄肉弾性ばりの理論, 奥村他共訳, 技報堂, 1967.
- 2) Kollbrunner, C.F. und N. Hajdin: Dünnwandige Stäbe, Band 1, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- 3) 小西一郎・小松定夫: 薄肉曲線桁の基礎理論, 土木学会論文誌, No. 87, pp. 35~46, 1962年11月.
- 4) 倉西 茂: 一般薄肉断面の曲りばりの解析, 土木学会論

- 文集, No. 108, pp. 7~12, 1964年8月.
- 5) 深沢泰晴: 薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No. 110, pp. 30~51, 1964年10月.
  - 6) 西野文雄・深沢泰晴: ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の定式化, 土木学会論文報告集, No. 247, pp. 9~19, 1976年3月.
  - 7) Dabrowski, R.: Wölbkrafttorsion von gekrümmten Kastenträgern mit nichtverformbarem Profile, Der Stahlbau, 34. Jahrgang, Heft 5, S. 135~141, Mai, 1965.
  - 8) Becker, G.: Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, Der Stahlbau, 34. Jahrgang, Heft 11, S. 334~346, November, 1965; Heft 12, S. 368~377, Dezember, 1965.
  - 9) 築地恒夫: 初期曲率, ねじれ率を有する薄肉断面曲線はりの基礎方程式, 土木学会論文報告集, No. 230, pp. 11~22, 1974年10月.
  - 10) 平嶋政治・恵谷舜吾: 開断面薄肉らせんはりの基礎理論, 土木学会論文報告集, No. 281, pp. 1~9, 1979年1月.
  - 11) Hirashima, M. and M. Iura: On the Derivation of Fundamental Equations of Curved and Twisted Thin-Walled Open Section Members, 早稲田大学理工学研究報告, No. 79, pp. 37~49, 1977年12月.
  - 12) Washizu, K.: Some Considerations on a Naturally Curved and Twisted Slender Beam, Journal of Mathematics and Physics, Vol. 43, No. 2, pp. 111~116, June, 1964.
  - 13) Schröter, H.-J.: Anwendung einer Theorie räumlich stark gekrümmter Stäbe auf beliebig geformte, gestützte und belastete freitragende Wendelschalen, Der Stahlbau, 42. Jahrgang, Heft 11, S. 338~345, November, 1973; Heft 12, S. 362~367, Dezember, 1973.
  - 14) Weißgerber, V.: Schnittkraft-Verformungs-Beziehungen des räumlich stark gekrümmten Stabes, Der Stahlbau, Heft 11, S. 348~385, November, 1974.
  - 15) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵: 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, No. 225, pp. 1~15, 1974年5月.
  - 16) 前田幸雄・林 正: 立体骨組構造物の有限変位解析, 土木学会論文報告集, No. 253, pp. 13~27, 1976年9月.
  - 17) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕: 一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論, 土木学会論文報告集, No. 237, pp. 11~26, 1975年5月.
  - 18) Namita, Y.: Die Theorie II. Ordnung von krummen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers, 土木学会論文集, No. 155, pp. 32~41, 1968年7月.
  - 19) 遠田良喜: 伝達マトリックス法による薄肉断面曲線はりの有限変位理論の解析, 土木学会論文報告集, No. 199, pp. 11~20, 1972年3月.
  - 20) 倉方慶夫: 薄肉開断面をもつ曲線部材の有限変位理論, 東京大学工学系研究科博士論文, 1976年3月.
  - 21) 薄木征三: 変形を考慮した薄肉断面円弧アーチの曲げねじれ座屈, 土木学会論文報告集, No. 263, pp. 35~48, 1977年7月.
  - 22) 事口寿男・久保元生・中井 博: 薄肉曲線はりの幾何学的非線形挙動と横倒れ座屈解析への応用, 第24回構造工学シンポジウム, 構造の非線形問題, pp. 69~76, 1978年2月10日.
  - 23) Schroeder, F.H.: Allgemeine Stabtheorie des dünnwandigen räumlich vorgekrümmten und vorgewundenen Träger mit großen Verformungen, Ingenieur-Archiv, 39. Band, S. 87~103, 1970.
  - 24) 高島秀雄: 空間曲線をもつ薄肉開断面材の解析, 日本建築学会論文報告集, No. 267, pp. 69~81, 1978年5月.
  - 25) Vacharajittiphan, P. and N.S. Trahair: Flexural-Torsional Buckling of Curved Members, Proc. of A.S.C.E., Vol. 101, No. ST 6, pp. 1223~1238, June, 1975.
  - 26) Flügge, W.: Tensor Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, New York, 1972.
  - 27) 鬼頭史城: 微分幾何, ダイヤモンド社, 1972.
  - 28) 西村敏雄: テンソルとシェル理論, 彰国社, 1977.
  - 29) 川井忠彦・藤谷義信: 梁の理論の精密化に関する二, 三の試み(その1), 生産研究, 25巻6号, pp. 221~220, 1973年6月.
  - 30) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, London, 1975.
  - 31) 依田照彦・平嶋政治・井浦雅司: 薄肉空間曲線部材の有限変位場に関する一考察, 第33回土木学会年次学術講演会講演概要集, 第I部, pp. 97~98, 1978年9月19日.

(1978.12.15・受付)