

掃流過程に対する確率モデルとその一般化

ON GENERALIZED STOCHASTIC MODEL FOR BED LOAD TRANSPORT AND SEDIMENT DISPERSION

中川 博次*・辻本 哲郎**

By Hiroji NAKAGAWA and Tetsuro TSUJIMOTO

1. 概 説

河床砂礫の掃流現象は loose な境界との間断ない接触および河床近傍の砂礫に及ぼす流体力の変動等に基づく確率的あるいは間歇的な砂粒運動のアンサンブル集合として特徴づけられる。このため掃流砂の問題を確率過程として扱うことは実際現象に忠実であり、またこうした stochastic なアプローチでは現象に及ぼす諸要素についての情報が若干不足していても可能である。さらに将来情報が付け加わるにつれて逐次モデルを改良してゆける柔軟性をもっている点でも優れている。

掃流砂礫の移動を確率過程として扱った最初の研究は1937年の Einstein¹⁾ によるもので、流砂運動において河床での長い休止時間、比較的短い運動時間に着目し、これを Galton 図表上に抽象化したいわゆる zig-zag モデルが提案された。図-1 に示されるように時間軸と距離軸に投影された砂の軌跡に rest period, step length の2つの確率変数を考え、これらに対する確率問題として扱いたいいわゆる複合 Poisson 過程としての取り扱いの基礎を示した。

その後、1960年代になって Hubbell と Sayre²⁾、矢野・土屋・道上³⁾ は掃流砂運動の複合 Poisson 過程としての特性を明らかにし、特にトレーサー実験をもとに砂粒群の分散過程の性質を調べた。さらに掃流層厚の概念を用いて流砂量推定を行い、これらの研究によって掃流過程に対する stochastic model がある程度体系づけられたといえる。これらの研究では rest period, step length のいずれも指数分布に従うとしたモデルを扱っており、いわゆる均質場での Poisson 過程としての取り扱いである。

次に Yang と Sayre⁴⁾ は畳み込みの手法を用いて分散

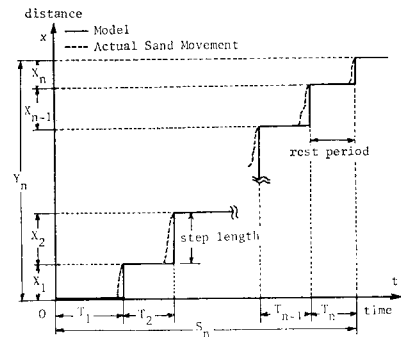


図-1 Einstein による掃流砂移動のモデル

過程のモデルの一般化を示し、step length, rest period の分布を規定しない場合の砂の分散過程の記述を試みた。さらに step length が gamma 分布、rest period が指数分布としたモデルを提案し（以下 G.E.M. と呼ぶ）、これは Yang と Sayre⁴⁾、Grigg⁵⁾ の dunes の形成された河床でのトレーサー実験によって検証された。なお Yang と Sayre⁴⁾ のモデルは Sayre と Conover⁶⁾ が誘導した2次元モデルの特別例となっている。

さらにその後 Shen と Todorovic⁷⁾ は非均質場の Poisson 過程の考え方を導入した general model を提示した。これは、Yang ら⁴⁾ の general model が分散過程の表記法の一般化であるのに対し、rest period, step length の分布についての一般化を図ったものといえる。すなわち、平均 rest period, 平均 step length の逆数である単位時間当りおよび単位長さ当りの step の生起確率密度がそれぞれ時間 t 、距離 x の関数としたものである。なお Shen ら^{8), 9)} はその後も stochastic model について継続して研究を進めており、特に Hung と Shen⁹⁾ によって hazard function model が提示され、step length および rest period の分布に対して指数分布をもとにした一般化が論じられている。

以上述べたように均質場での Poisson 過程としての掃流過程のモデルが確立された後は、stochastic model の

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学教室

一般化に意が注がれてきたようである。すなわち、実際現象では必然的に統計的非均質場となる場合が多く、step length および rest period が指数分布に従わなくなり、こうした状況での砂粒群の分散過程を記述するモデルおよびこのような非均質場での step length や rest period の分布形を誘導するモデルが必要となるわけである。前者については先に述べた Sayre ら^{4),6)}の general model が提示されているが、モデルの誘導が若干冗長でありまた実際の砂の動きとの対応が明確にされていない。現実には G.E.M. 以外への適用は難しく実用面での一般的表示とはいえないように思われる。そこで著者らは本論文でも実験結果と対照して述べるように rest period 等が Poisson モデルや G.E.M. で説明し得ない場合でも、掃流過程における平均分散距離およびその高次モーメントが比較的容易に得られるところまで stochastic model を一般化して発展させた。

一方、step length および rest period の一般化においても、前述の Shen ら⁷⁾による general model では分散過程を記述する式の展開のみにとどまり、移動確率の関数形を決定し得ないために適用性に乏しいものとなっている。しかし、非均質場といえども平衡状態では、これらの関数は定常確率過程で与えられるものと考えられ、しかもこれらの自己相関の代表スケール以上での粗視化されたレベルではその静的確率分布を考えるだけで十分である。本研究ではこの点に着目して特に砂礫の離脱過程に対する実験的考察と確率論的手法による理論的考察とから rest period についてより一般性のある分布形を与えるモデルを提案している。なおこのモデルは立場および表現は異なるものの形式上は Hung ら⁸⁾のモデルと共通点を有している。

ところで著者らは、掃流過程およびそれに付随する移動床現象の記述は、その系の構成要素である砂粒の挙動を知り、その組み立てによって合理的になされるものとの立場をとっている。移動床においては砂粒子の確率的挙動が素過程となって出現する現象自体が確率的あるいは統計的なものとなり、しかもこれらのばらつきそのものの推定が工学的に重要な課題（砂粒群の分散状況、混合砂礫床の粗粒化、河床変形等）となる。これらは素過程の確率的状況に強く影響されることが多い。このためにも、素過程である個々の砂礫の確率的挙動を表わす step length, rest period の分布形を与えるより一般的な確率モデルが必要である。

本論文ではまず 2. で上述した素過程の確率的挙動を明らかにし、3. ではこれらを総合して砂粒群の分散過程を記述する一般化された stochastic model について論じている。さらに 4. では single tracer 法による実験を行ってこうしたモデルを細部にわたって検証し、また一

般化されたモデルの具体的な適用について検討している。

なお、本研究の対象は主として平衡平坦河床あるいはそれからわずかにずれた程度の非平衡状態であるが、個々の流砂挙動と河床形状との関係を明らかにすることによって河床波の形成された河床にも適用が可能である。

2. 個々の砂礫の挙動の確率的特性

本章では掃流過程の構成単位である rest period, step length の確率的特性についての考察・検討を行う。なお以下では砂粒の運動を一次元的 (unidirectional) に扱い、平衡平坦河床、すなわち場所的にも時間的にも均質に近い場を対象とする。ただし、非平衡状態でも平衡状態からわずかにずれた状況ならば、系の構成粒子の挙動の特性は保存されるのでここに得られる知識は非平衡状況の出現過程に対しても有効である。また、河床波の平衡状態などのように局所的には非平衡であっても、波長程度のスケールで粗視化したレベルで平衡状態である場合は、河床形状の統計的性質との関連で同様の検討を行うことができる¹⁰⁾。

(1) Rest period の確率的特性

平衡平坦河床での rest period の確率的特性を支配するものは、主として水流の乱れによる流体力の変動と砂粒の河床での落ち着き状態である。これらの確率的要素のため砂粒の河床からの離脱は、平均底面せん断応力が一定で、一定の平均離脱率 (pick-up rate: 平均 rest period の逆数) を有する場合にもランダムな様相を呈する。

ところで、砂礫に及ぼす流体力の変動は統計的に均質場を形成しているものと考えられ、砂粒の河床での落ち着き状態がすべての砂について同一であれば従来の Poisson 過程としての扱いが有効と考えられる。しかし実際には砂粒の状態は離脱角度 (angle of escape) や相対露出度で表わされ、これらが分布している。pick-up rate の推定にこうした分布を考慮した例^{11),12)}もあるが、これらの分布は rest period の平均値だけでなく分布形にも影響するものであり従来の研究ではこうした点の考慮が欠けていたと思われる。

いま、河床砂礫の離脱角度等が分布しているために生じる砂礫の離脱待ち状態の確率を考え、ある任意の待ち状態 (第 i 状態と呼ぶ、 $i=1, 2, \dots, N$; N : 考慮される待ち状態の個数) にある確率を $f_r(i)$ 、その状態での条件付 pick-up rate を $p_s(i)$ と表わす。このとき着目砂礫 n_0 個のうちの $k\Delta t$ 時間後の残存個数 $n(k\Delta t)$ は次のようになる。

$$n(k\Delta t) = n_0 \sum_{i=1}^N \hat{f}_r(i) \{1 - p_s(i)\Delta t\}^k \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $t = k\Delta t$ とおき、 $k \rightarrow \infty, \Delta t \rightarrow 0$ とすると河床砂礫の原点残留確率 $P_0(t)$ の時間的変化として次式が得られる。

$$P_0(t) = \frac{n(t)}{n_0} = \sum_{i=1}^N \hat{f}_r(i) \cdot \exp\{-p_s(i)t\} \dots\dots\dots (2)$$

待ち状態を連続分布したものと考え、その確率密度関数を $f_r(\alpha)$ (α : 実数で待ち状態を表わす何らかの変数) で表わすと、

$$P_0(t) = \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} f_r(\alpha) \exp\{-p_s(\alpha)t\} d\alpha \dots (3)$$

であり、これより rest period $\{T\}$ の確率密度関数 $f_T(t)$ は次式となる。

$$f_T(t) = -\frac{d}{dt} P_0(t) = \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} p_s(\alpha) \exp\{-p_s(\alpha)t\} f_r(\alpha) d\alpha \dots (4)$$

この式によると、各待ち状態の条件付で見ると rest period の分布は、指数分布に従うが全体としての分布は指数分布から若干ずれることが予想される。いま着目砂礫を河床上の典型的な粒子に限る(たとえば、離脱角度が一定のもの)など離脱待ち状態を同等とすると上記の結果は均質場 Poisson 過程としての従来の結果と一致する。従来の実験では、トレーサーを河床に植えつけこれの原点残留確率が調べられ、このような場合均質場の Poisson 過程が出現している⁹⁾。なお上述の考え方は hazard rate を考えた Hung と Shen⁹⁾ によるモデルと基本的には同一のものともみなせる。

(2) Step length の確率的特性

平衡平坦河床での均一砂の step length については、河床面の凹凸、流体力変動とも均質な確率場となり、運動中砂礫についての条件はほぼ均質となるので次に示すような指数分布によく合致するものと考えられる。

$$f_X(\xi) = \frac{1}{A} \exp(-\xi/A) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 A は平均 step length、 $f_X(\xi)$ は step length $\{X\}$ の確率密度関数である。すなわち、rest period のように河床内に数粒径程度分でも埋没がある場合、この効果が、分布に影響するのに対し、step length の場合は対象が運動中砂礫に限られるため、平均 step length のばらつきで分布形が偏倚することはほとんどない。しかし河床形状の影響は強く、河床形状が顕著になった場合はその波長分布との関係で分布形が偏倚することが予想される。実際、step length の分布は平坦河床の場合従来の実験でも指数分布によく合致している^{3), 13)}

のに対し、dunes などの形成された場合には分布形が偏倚する^{4), 9), 10)}。

3. 砂粒群の分散過程に関する stochastic model の一般化

掃流砂礫の運動の瞬間的な挙動は、step length, rest period の分布によって表わされ、これらは個々の砂礫の運動機構の解析との関連で決定されるべきものである。しかし、個々の砂礫の運動によって構成される平均的挙動(必ずしも一次モーメントの意味の平均だけではない)を知る場合、これら step length $\{X\}$, rest period $\{T\}$ の継続したものの特性を知ることが必要であり、特に $\{X\}$, $\{T\}$ の組み合わせの確率過程としての表示が掃流砂移動に対する stochastic model の中枢をなす(図-1 参照)。

(1) 継続した step length および rest period の特性

まず step length, rest period の継続特性を検討する。これを表わすのは距離 x を移動するまでに出現した step 数 $\{N(x)\}$ および時間 t 内の生起 step 数 $\{N(t)\}$ であり、次の確率が議論される。

$$\left. \begin{aligned} P_n(x) &= \text{prob}[N(x) = n] \\ P_n(t) &= \text{prob}[N(t) = n] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

step length, rest period については、それぞれ空間または時間の場での問題で、いまだちも独立にかつ同等に議論できるものとする。

さて個々の砂礫の運動機構との関連から砂の挙動の確率的特性を決めようとする著者らの立場では、単一の step の性状である $f_T(\tau)$ (あるいは $f_X(\xi)$) が先に決定される。また、stochastic model の構成要素である rest period, step length の特性を実験的に把握する場合も $P_n(t)$ または $P_n(x)$ を調べるより、 $f_T(\tau)$ または $f_X(\xi)$ を対象とした方が、測定時間、測定区間長さの面からみて有利である。したがって、このような場合 $f_T(\tau)$ または $f_X(\xi)$ から、 $P_n(t)$ または $P_n(x)$ を求める方法を確立しておく必要がある。

いま、個々の step length $\{X\}$ が、統計的に独立で同一の確率母集団から出現したものと考え、確率変数 $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ の密度関数は $\{X\}$ のその n 重畳み込みとなる。一方 $P_n(x)$ は次のように理解される。

$$P_n(x) = \text{prob}[Y_n \leq x < Y_{n+1}] \dots\dots\dots (7)$$

このとき、
 $A = \{Y_n | Y_n \leq x\}$, $B = \{Y_{n+1} | Y_{n+1} > x\}$
 なる2つの集合を考えると、

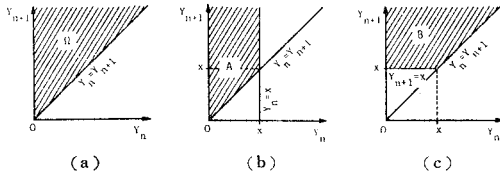


図-2 説明図

$$P_n(x) = \text{prob}[A \cap B] \dots\dots\dots (8)$$

となる．ところで $Y_{n+1} \geq Y_n$ は明らかであるため，対象とする全集合 Ω は 図-2 の (a) の斜線部分となる．一方，集合 A, B は 図-2 の (b), (c) に示される斜線部分となり，

$$A \cap B = A \cup B - \Omega$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \text{prob}[A] + \text{prob}[B] - \text{prob}[\Omega] \\ &= \int_0^x f_X^{(n)*}(\xi) d\xi + \int_x^\infty f_X^{(n+1)*}(\xi) d\xi - 1 \\ &= \int_0^x \{f_X^{(n)*}(\xi) - f_X^{(n+1)*}(\xi)\} d\xi \end{aligned} \dots\dots\dots (9)$$

となる．ここに， $f_X^{(n)*}$ は f_X の n 重畳み込みを表わす．式 (9) は Yang ら⁴⁾ によっても導かれているが，ここに示した方法の方がその誘導が簡明で現象理解にも役立つものと思われる．各 step length $\{X\}$ が互いに独立ならば， $\{Y_n\}$ のモーメントはキュムラントを導入して容易に得られ，特にその 1 次，2 次のモーメントを示すと次のようである．

$$\left. \begin{aligned} E[Y_n] &= nE[X] \\ E[Y_n^2] &= n\text{Var}[X] + n^2\{E[X]\}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここに， $E[\cdot]$ ， $\text{Var}[\cdot]$ はそれぞれ期待値および分散を示す．同様の議論は rest period についても成り立ち次式が得られる．

$$P_n(t) = \int_0^t \{f_T^{(n)*}(\tau) - f_T^{(n+1)*}(\tau)\} d\tau \dots\dots\dots (11)$$

$$\left. \begin{aligned} E[S_n] &= nE[T] \\ E[S_n^2] &= n\text{Var}[T] + n^2\{E[T]\}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ただし， $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ である．

(2) 分散過程に対する generalized stochastic model

さて，時刻 $t=0$ に位置 $x=0$ にある一つの砂粒が掃流されて時刻 t に $(x, x+dx)$ に存在する確率 $f_t(x) dx$ を考える． $f_t(x)$ については，移動に要した step 数は任意でよいから， 図-3 を参考に次のように $f_t(x)$ を求めることができる．すなわち， $N(t)=n$ の場合の条件付確率が $f_X^{(n)*}(x) dx$ であり， $N(t)=n$ である確率は， $P_n(t)$ であるから，

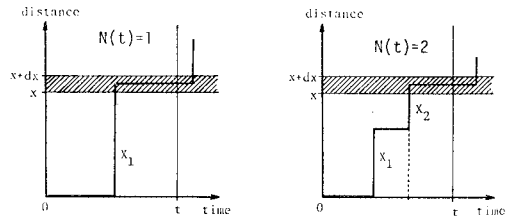


図-3 説明図 ($f_t(x)$)

$$f_t(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_X^{(n)*}(x) P_n(t) \dots\dots\dots (13)$$

である．上式は Yang ら⁴⁾ によっても得られているが，ここでは上述のように 図-3 を参考にして簡潔に誘導された．ところで実際問題としては式 (13) に与えられるような確率密度関数そのものより，むしろそのモーメント $E[\{x(t)\}^k]$ (k : 非負の整数) を知ることが有用でこれは次の積分で与えられる．

$$E[\{x(t)\}^k] = \int_0^{\infty} x^k f_t(x) dx \dots\dots\dots (14)$$

式 (13) を代入し，積分と期待値操作の順序を交換することから次式が得られる．

$$E[\{x(t)\}^k] = \sum_{n=1}^{\infty} \{E[Y_n^k] \cdot P_n(t)\} \dots\dots\dots (15)$$

なお $k=0$ の場合，上式は，

$$\int_0^{\infty} f_t(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) = 1 - P_0(t) \dots\dots\dots (16)$$

となり， $f_t(x)$ は少なくとも 1 回以上運動した砂についての確率密度であることを注意しておく必要がある．

同様に距離 x に達するのに要する時間 $\{t(x)\}$ の確率密度およびその k 次モーメントは， 図-4 を参照してそれぞれ次のようになる．

$$f_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_T^{(n+1)*}(t) P_n(x) \dots\dots\dots (17)$$

$$E[\{t(x)\}^k] = \sum_{n=0}^{\infty} \{E[S_{n+1}^k] \cdot P_n(x)\} \dots\dots\dots (18)$$

この場合は $k=0$ とすると，

$$\int_0^{\infty} f_x(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) = 1 \dots\dots\dots (19)$$

である．

式 (15) において各 step が互いに独立である場合，それらの継続したものの確率量 $\{Y_n\}$ のモーメント $E[Y_n^k]$ は，前節で述べたように n の多項式(係数は

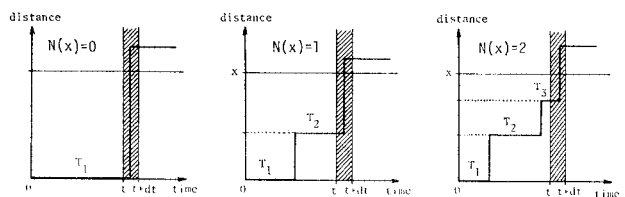


図-4 説明図 ($f_x(t)$)

{X} の特性量) となり, それゆえ $E[\{x(t)\}^k]$ は $N(t)$ の k 次以下のモーメントによって与えられる. 特に1次モーメントおよび分散は次のように求められる.

$$E[x(t)] = E[X] \cdot E[N(t)]$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[x(t)] &= \{E[X]\}^2 \\ &\cdot \{\text{Var}[N(t)] \\ &+ \alpha_X^2 E[N(t)]\} \end{aligned} \quad (20)$$

また $\{t(x)\}$ についても同様に,

$$E[t(x)] = E[T] \cdot \{E[N(x)] + 1\} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[t(x)] &= \{E[T]\}^2 \cdot \{\text{Var}[N(x)] \\ &+ \alpha_T^2 E[N(x)]\} + \text{Var}[T] \end{aligned} \quad (23)$$

となる. ここで, α_X, α_T は, それぞれ $\{X\}, \{T\}$ の変動係数で,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_X &= \sqrt{\text{Var}[X]}/E[X] \\ \alpha_T &= \sqrt{\text{Var}[T]}/E[T] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

である.

さて分散過程の stochastic model を $f_T(\tau), f_X(x)$ の任意の関数形に対して一般化するには, 上記における $N(t), N(x)$ のモーメント計算が難点となる. $N(t)$ は, 一つの再生過程 (計数過程で各事象の生起時間間隔である $\{T\}$ が, 独立かつ同一の分布に従っているもの) であり, その高次モーメントについての議論はこれまで十分ではないようである. しかし, 再生過程の不規則現象への応用は幅広く, ここに示すような計算方法は, 自然現象だけでなく, 人文・社会現象における予測の問題等にも有効であると考えられる. 特に高次モーメントの挙動は確率的現象の素過程の不規則性状 (ここでは, rest period の分布) に敏感で, 予測およびその信頼性の議論には不可欠である.

いま, $f_T(\tau)$ の Fourier 変換を $\phi_T(u)$ とすると,

$$\left. \begin{aligned} \phi_T(u) &= \mathcal{F}[f_T(\tau)] \\ f_T(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[\phi_T(u)] \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

であり, $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ はそれぞれ Fourier 変換およびその逆変換を表す. このとき $\{N(t)\}$ のモーメントは式 (11) に上式を代入し, 若干の変形によって次のように比較的簡単な形に書き換えられる.

$$E[\{N(t)\}^k] = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[(1-\phi_T) \sum_{n=0}^{\infty} n^k \phi_T^n] dt \quad (26)$$

いま, 上式中の \sum の部分は, $|\phi_T| < 1, |\phi_T| < 1$ であるから収束し, 以下のような漸化式の形式で得られる. すなわち,

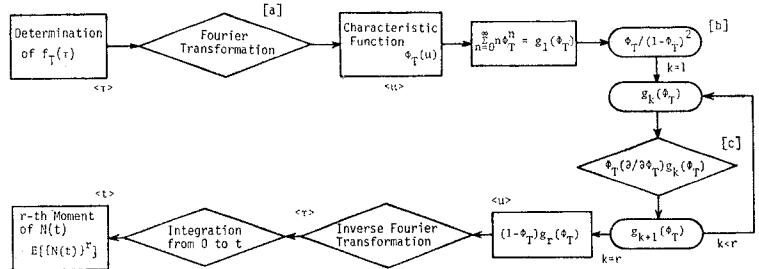


図-5 $E[\{N(t)\}^r]$ の計算の流れ図

$$g_k(\phi_T) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n^k \phi_T^n \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (27)$$

とくと,

$$g_{k+1}(\phi_T) = \phi_T \frac{\partial}{\partial \phi_T} \{g_k(\phi_T)\} \quad (28)$$

であり, $\{N(t)\}$ のモーメントは結局 図-5 に示すような方法で系統的に求められる. $k=1, 2$ の場合の結果は次のようである.

$$E[N(t)] = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[\phi_T / (1 - \phi_T)] dt \quad (29)$$

$$E[\{N(t)\}^2] = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[\phi_T (1 + \phi_T) / (1 - \phi_T)^2] dt \quad (30)$$

一般に f_T が特別な場合を除いて上式を解析的に計算することは容易ではないが, 計算の困難な箇所は Fourier 変換と最終的な定積分のみであるから数値計算は可能である.

このようにして得られた $\{N(t)\}$ のモーメント, あるいは同様に得られる $\{N(x)\}$ のモーメントを式 (20)~(23) に代入することによって砂粒の分散過程が適確に記述される.

(3) Generalized model の性質

さて本モデルで扱われる現象では, 確率変数 ($\{X\}$ および $\{T\}$) は非負であるので Fourier 変換の代わりに Laplace 変換を用いた方が有利である場合が多い. この場合 $f_T(\tau)$ の Laplace 変換を $\tilde{\phi}_T(s)$ と表示すると, 前節の ϕ_T を $\tilde{\phi}_T$ に置き換えてよい. これによって $\{T\}$ が指数分布する場合を始めとし, いくつかの分布に対して $\{N(t)\}$ のモーメントが容易に求められる. ここでは shape parameter r が 2 の gamma 分布 (Bell 型分布) の場合の計算例を示す. gamma 分布の密度関数は,

$$f_T(\tau) = \frac{(r p_s)^r}{\Gamma(r)} \tau^{r-1} \exp(-r p_s \tau) \quad (31)$$

であり, その Laplace 変換は,

$$\tilde{\phi}_T(s) = \{\mu_0 / (s + \mu_0)\}^r \quad (32)$$

である. ここに, $\Gamma(\cdot)$ は gamma 関数であり, また,

$$\mu_0 = r p_s \quad (33)$$

である。 $r=2$ の場合 $\{N(t)\}$ の 1 次および 2 次のモーメントは次のように計算される。

$$E[N(t)] = \mu_0^2 \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 2\mu_0 s} \right] d\tau \dots\dots (34)$$

$$E[\{N(t)\}^2] = \mu_0^2 \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 2\mu_0 s} + \frac{2\mu_0^2}{s^2(s + 2\mu_0)^2} \right] d\tau \dots\dots (35)$$

ここに、 \mathcal{L}^{-1} は、Laplace 逆変換を表わす。さて、Laplace 逆変換の公式を用い、さらに μ_0 を p_s に置き換えると、 $N(t)$ の平均値および分散は、

$$E[N(t)] = p_s t - \frac{1}{4} \{1 - \exp(-4 p_s t)\} \dots\dots (36)$$

$$\text{Var}[N(t)] = \frac{1}{2} p_s t (1 - e^{-4 p_s t}) + \frac{1}{16} (1 - e^{-8 p_s t}) \dots\dots (37)$$

となる。ここで $t \rightarrow \infty$ とした場合の漸近曲線はそれぞれ次のようである。

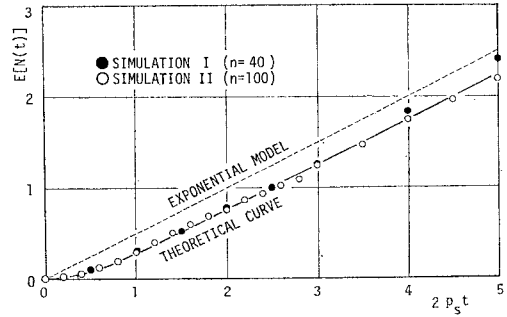
$$E[N(t)] = p_s t - (1/4) \dots\dots (38)$$

$$\text{Var}[N(t)] = (p_s/2)t + (1/16) \dots\dots (39)$$

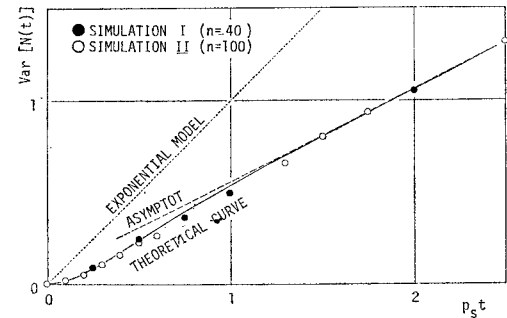
図-6 の (a), (b) には、それぞれ式 (36), (37) で表わされる $N(t)$ の平均値および分散と式 (38), (39) で表わされるそれらの漸近挙動を示した。なお、図には $\{T\}$ が指数分布に従う場合の結果も示した。 $N(t)$ の平均値、分布とも t が小さい場合には分布形によって微妙な違いがみられるが、平均値についての指数分布の場合の解は素過程を確定的現象と考えた場合と完全に一致している。一方分散の方は指数分布と gamma 分布では漸近解でさえまったく異なり、さらに、確定的現象ならば当然出現しないものである。すなわち、確率的現象の素過程の特性が効いてくるのは、 $t=0$ の近傍あるいは現象の出現回数 ($N(t)$) の小さいときおよび現象全体のばらつき (あるいは高次モーメント) を議論するときである。1.でも述べたように掃流過程の場合は、現象のばらつき自体が着目砂粒群の分散、粒度構成の変化、砂面擾乱の発生など具体的な対象となるので、本研究の主旨であるような確率過程論的手法が単に有効であるだけでなく必須なものなのである。なお、図-6 に示されるプロットは乱数発生をもとに数値模擬によって $N(t)$ の特性を調べたもので、この手法も $N(t)$ の性質を知るのに有効である。すなわち、一様乱数を $[0, 1)$ で発生させ、 $\{T\}$ の分布関数の逆関数を解いて step の発生状況を模擬し、これのアンサンブル平均 (モーメント) を求める方法である。

なお、gamma 分布の shape parameter r を $1/2$ (J 型分布) とした場合の $E[N(t)]$ の結果は、

$$E[N(t)] = \frac{1}{2} \left(p_s t + p_s \int_0^t \text{erf} \sqrt{\frac{p_s \tau}{2}} d\tau \right)$$



(a)



(b)

図-6 $E[N(t)], \text{Var}[N(t)]$ の時間的変化 ($r=2$)

$$+ \text{erf} \sqrt{\frac{p_s t}{2}} \dots\dots (40)$$

となる。ここに $\text{erf} \xi$ は誤差関数で、

$$\text{erf} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \exp(-t^2) dt$$

である。式 (40) を若干変形し $t \rightarrow \infty$ とすることから次の漸近曲線が得られる。

$$E[N(t)] = p_s t + \frac{1}{2} \dots\dots (41)$$

次に、もう少し一般的に $t \rightarrow \infty$ の場合の漸近的挙動を調べておく。前述の例でも明らかなように、このような漸近近似でも決定論的取り扱いではまったく期待し得ない確率的事象としての特性は失われず、掃流過程のような確率的要素の強い現象の全体像の記述には有効と考えられる。さて中心極限定理を用いると、 $\{N(t)\}$ が $t \rightarrow \infty$ では平均値 $t/E[T]$ 、分散 $t \cdot \text{Var}[T]/\{E[T]\}^2$ の正規分布に従うことが示される。すなわち、漸近曲線として、

$$E[N(t)] = p_s t \dots\dots (42)$$

$$\text{Var}[N(t)] = \alpha T^2 t / E[T] \dots\dots (43)$$

が得られる。これらの結果は、たとえば先に示した $r=2$ の gamma 分布の厳密解に基づく結果に比べると平均値、分散がそれぞれ $1/4, 1/16$ だけの差があるが、 $t \rightarrow \infty$ では $N(t)$ も十分大きくこれらの差は無視し得る。なお、式 (43) には素過程の変動係数が含まれており、先

表-1 実験条件

RUN	i_b	i_w	h (cm)	U (cm/sec)	F_r	I_e	R (cm)	u_* (cm/sec)	τ_*
1	0.00322	0.0037	6.10	48.03	0.621	0.00351	5.27	4.26	0.0566
2	0.00322	0.0039	8.01	61.67	0.696	0.00357	6.45	4.75	0.0718
3	0.00322	0.0033	7.22	52.38	0.617	0.00327	6.04	4.40	0.0616
4	0.00322	0.0036	5.61	44.21	0.596	0.00346	4.93	4.09	0.0529
5	0.00322	0.0039	7.98	57.53	0.651	0.00361	6.59	4.83	0.0742
6	0.00385	0.0037	7.30	50.14	0.591	0.00375	6.29	4.81	0.0723
7	0.00385	0.0035	9.25	54.16	0.569	0.00361	7.78	5.25	0.0859

に述べたように決定論的扱いではもちろんのこと、素過程に単に指数分布を仮定したモデル (Poisson 過程) ではまったく説明し得ないものであることは注目すべき点である。

同様な議論は $\{N(x)\}$ についても成り立ち、結局これらを先の generalized model に組み込むと、 $\{x(t)\}$, $\{t(x)\}$ の分散の漸近曲線としてそれぞれ次式が得られる。

$$\text{Var}[x(t)] = \{[E[X]]^2/E[T]\} \cdot (\alpha x^2 + \alpha T^2) \cdot t \dots\dots\dots (44)$$

$$\text{Var}[t(x)] = \{[E[T]]^2/E[X]\} \cdot (\alpha x^2 + \alpha T^2) \cdot x + \text{Var}[T] \dots\dots\dots (45)$$

4. Single tracer 法による掃流砂礫の移動特性に関する実験

前章までに検討した掃流砂礫の移動の確率過程としての特性を調べるために single tracer 法によって実験を行った。平坦河床上の掃流砂についてはこれまでも着色砂をトレーサーとして^{1), 2), 14), 15)}あるいは放射性同位元素を利用して²⁾実験が実施され、stochastic model の検証が行わ

れたが、いずれもトレーサー粒子群の分散に関する実験が主体であり、必ずしも step length と rest period の誤差を分離できないこと、個々の step または rest period に関する情報は得られ難いこと等の短所を有している。そこで、ここでは single tracer 法によって粒子の位置と時刻とを克明に記録する実験を行った。

実験は長さ 8 m, 幅 33 cm のアクリル製側壁を有する鋼製勾配可変水路で、中央粒径 0.198 cm のほぼ均一砂を用いて行った。トレーサーとしては移動床を作成した砂と同じ砂を揮発性インクで数種類に着色して用い、それを 1 個ずつ移動床上に放ち、最初の明確な rest period から時刻と位置とを記録した。実験条件は表-1

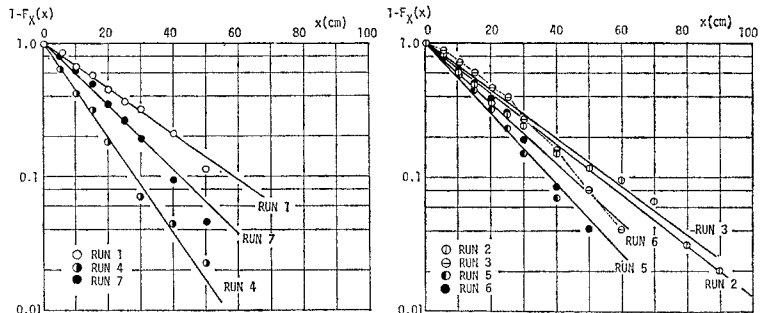


図-7 step length の超過確率

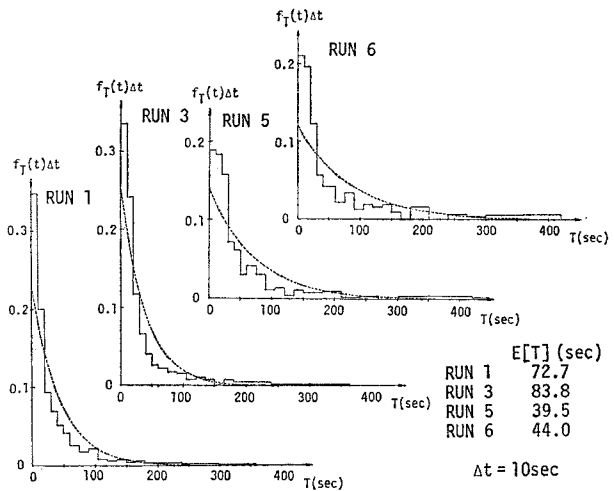


図-8 rest period の分布のヒストグラム表示

に示すように、なるべく平坦河床が保たれるように限界掃流力よりあまり大きくない範囲に限られた。また、移動床面に形成される砂面の不規則性がある程度以上顕著にならないように長時間の通水は避け、同一条件の実験を繰り返して行った。なお、水路下流端では採砂箱を設け流砂量を測定し、流砂量に応じた給砂を行うことで実験中の平均河床高を一定に保つように努めた。

(1) step length および rest period の分布

実験によって得られた個々の粒子の位置と時刻の記録をもとに、実験条件ごとに step length および rest period の分布特性を調べた。図-7 は step length の超

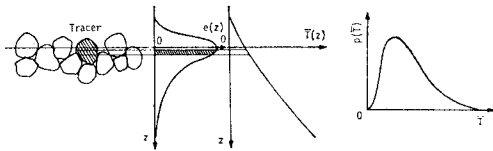


図-9 説明図

過確率を示したものであり、ほとんどの場合で指数分布に良く適合し、従来の実験結果と一致している。一方、rest period の分布はそのヒストグラムが指数分布とはかなり違った性状を示し、図-8 に示されるような顕著な J 型分布となる。すなわち rest period の変動係数が指数分布の場合の値よりもかなり大きくなっている。これは実際トレーサーの追跡中に気づくことであるが、着色トレーサーが rest period の状態にある際、平坦河床とはいえ粒径程度の埋没が見られ、このためすべてのトレーサーが離脱機会を待つ条件が必ずしも同一でないことによる。従来の実験結果において rest period が良く指数分布に適合しているのは、使用砂が本実験のものより粗いために埋没が比較的少なかったこと、rest period の分布がほぼ同一条件で河床に人工的に植えつけられた粒子の原点残留確率で測られたことにより、2. で述べたような rest period が指数分布に従うための条件が満足されやすかったためと考えられる。そこで次に 2. の議論をこの場合に適用して rest period の分布性状をより詳しく検討することとする。

いまトレーサー粒子が河床で z の位置に存在する確率 $e(z)$ およびその位置での平均 rest period $\langle T(z) \rangle$ の z 方向の分布は図-9 のようであると推定され、これから条件付 rest period の分布性状が知られる。 $\langle T \rangle$ の確率密度を $p(\langle T \rangle)$ と表わすと、条件を解放した rest period の分布は 2. の議論から次のようになる。

$$f_T(\tau) = \int_0^\infty f_T(\tau|\langle T \rangle) p(\langle T \rangle) d\langle T \rangle$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\langle T \rangle} \exp(-\tau/\langle T \rangle) p(\langle T \rangle) d\langle T \rangle \quad (46)$$

さて、図-9 を参考にした類推より、 $p(\langle T \rangle)$ として gamma 分布の密度関数を考える。このとき、

$$p(\langle T \rangle) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \langle T \rangle^{\alpha-1} \exp\{-\beta\langle T \rangle\} \quad (47)$$

であり、

$$E[T] = \bar{T} = \alpha/\beta, \quad \text{Var}[T] = \alpha/\beta^2 \quad (48)$$

である。式 (47) を式 (46) に代入して rest period の密度関数が求められるが、一般には積分が容易でなく、積分結果も変形 Bessel 関数を含んだ複雑なものとなる。ただし、 α (gamma 分布の shape parameter) が

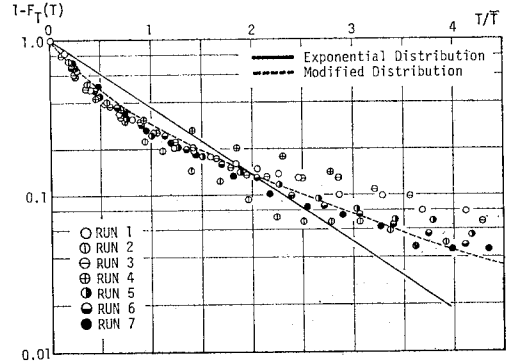


図-10 規準化された rest period の分布

3/2 の場合については次のように簡単になる。

$$f_T(\tau) = \frac{3}{\bar{T}} \exp(-\sqrt{6\tau/\bar{T}}) \quad (49)$$

なお、 $\sigma = \tau/\bar{T}$ と規準化するとその密度関数および超過確率はそれぞれ、

$$f_T(\sigma) = 3 \exp(-\sqrt{6\sigma}) \quad (50)$$

$$G_T(\sigma) = \int_\sigma^\infty f_T(\sigma) \alpha \sigma = (\sqrt{6\sigma} + 1) \exp(-\sqrt{6\sigma}) \quad (51)$$

となり、また、その k 次モーメントは次のようになる。

$$M_T^{(k)} = \Gamma(2k+2)/6^k \quad (52)$$

したがって、変動係数 α_T 、ひずみ度 s_T が容易に求められ、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_T &= \sqrt{7/3} \approx 1.53 \\ s_T &= 46\sqrt{21}/49 \approx 4.30 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

となる。これらは実験で得られた値の平均とほぼ一致しており、図-10 に示すように式 (51) は実験結果とよく合致している。なお G_T に対する α の効果はそれほど顕著でなく、上述のような 3/2 程度で十分に現象が説明できるが、今後トレーサーの存在位置による $\langle T \rangle$ の変化等を詳細に調べて α を合理的に選定すべきだと考える。

ところで、変動係数、ひずみ度の検討の結果、 $\{T\}$ の分布として shape parameter $r=1/2$ とした gamma 分布を用いても十分な近似精度が得られ、またその方が 3. で考察した generalized stochastic model を用いて砂礫の分散過程の記述等に便利であると考えられる。gamma 分布で近似した規準化された rest period の密度関数およびそのモーメントは、

$$f_T(\sigma) = \frac{r}{\Gamma(r)} (r\sigma)^{r-1} \exp(-r\sigma) \quad (54)$$

$$M_T^{(k)} = \Gamma(k+r)/\{r^k \Gamma(r)\} \quad (55)$$

である。

(2) 継続した step length および rest period の特性に関する実験的考察

まず隣り合う step length および rest period の間の

相関について調べた。すなわち、実験によって得られた砂粒子の挙動の記録をもとに $\{X_i\}$ と $\{X_{i+1}\}$, $\{T_i\}$ と $\{T_{i+1}\}$ ならびに $\{T_i\}$ と $\{X_i\}$, $\{X_i\}$ と $\{T_{i+1}\}$ ($i=1, 2, \dots$) の間の相関係数を求めた。これら調べることは、確率変数である step length および rest period の独立性という確率モデルの基本仮定の検証となり、本実験のように各 step length, rest period がひとつひとつ、さらにそれらの継続性状が克明に記録できて初めて可能となるもので、従来のトレーサー実験のように粒子群の分散性状のみ追跡するのでは達成されない。表-2 には実験によって得られた結果を示した。この結果、前章までに行ったように stochastic model の誘導が独立分布の仮定のもとに行えることが確認された。

一方同一分布についてはその検証が難しく、統計的母集団の捉え方にもよる。たとえば、前節に述べたような条件付分布を考えると、それぞれが別の母集団とみなしているが、先のモデルのように条件を解放した確率分布を考えた統一母集団として扱えば、各 rest period が同一母集団からの出現事象とみなせる。

以上の結果および考察から前章までに議論したモデルが有効であり、以下 stochastic model による理論結果と実験結果とを比較検討する。

まず、step length の分布は前節に述べたように今回の実験ではほぼ指数分布とみなしてよく、平均 step 数と距離との関係は理論的に正確に（漸近近似でなく）次式で与えられ、実際 図-11 に示すように実験結果とよく一致している。

$$E[N(x)] = x/A \dots \dots \dots (56)$$

なお、 A としては個々の step length についての測定資料 (4. (1) 参照) よりその平均値を用いた。一方、rest period の分布は前節に示したように指数分布から偏倚しており、ここでは shape parameter が $1/2$ の gamma 分布として考える。すなわち、 $E[N(t)]$ は式

表-2 step length, rest period の相関係数

RUN	r_s	r_{TX}	r_{XT}	r_{XX}	r_{TT}
1	0.057	0.0303 (154)	-0.134 (138)	-0.0550 (146)	-0.0411 (142)
2	0.072	0.0299 (191)	-0.134 (175)	0.0555 (172)	-0.1071 (172)
3	0.062	-0.0068 (213)	-0.106 (191)	0.0117 (187)	-0.0347 (187)
4	0.053	-0.0170 (44)	-0.0958 (33)	0.0973 (33)	0.0387 (33)
5	0.074	0.0908 (260)	0.0810 (244)	0.0733 (249)	0.0287 (249)
6	0.072	0.0456 (313)	0.0497 (305)	0.0221 (303)	0.0766 (303)
7	0.086	-0.0187 (286)	-0.0479 (248)	0.0779 (270)	0.145 (268)

Note: Numbers in () denote the numbers of data.

(40) で与えられ、特に $t \rightarrow \infty$ では式 (41) が有効であると考えられる。図-12 はこれを検討したもので、ここに与えたモデルで継続した rest period の平均的性状が十分表現できることがわかる。式 (41) における p_s としては個々の rest period についての実験結果 (4. (1) 参照) から得られる平均 rest period の逆数を用いた。

なお、 $P_n(x)$ および $P_n(t)$ の累積確率の場所的および時間的变化をそれぞれ 図-13, 14 に示した。図中の実線は Poisson 過程として扱った理論曲線で、step len-

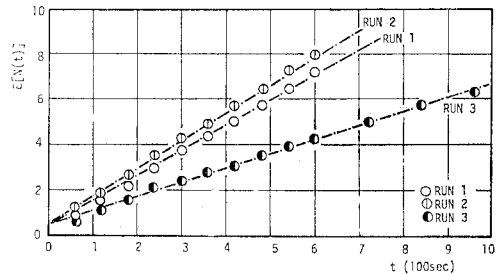


図-12 $E[N(t)] \sim t$

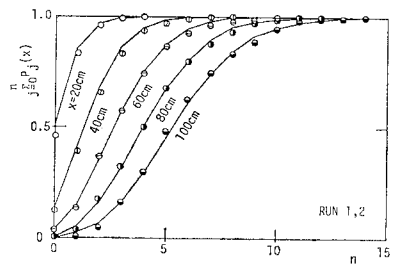


図-13 $P_n(x)$ の累積確率の場所的变化の例

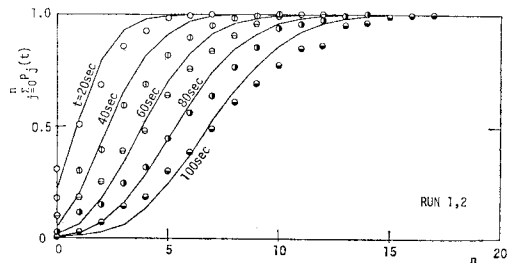


図-14 $P_n(t)$ の累積確率の時間的变化の例

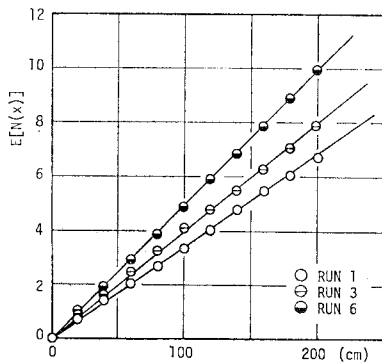


図-11 $E[N(x)] \sim x$

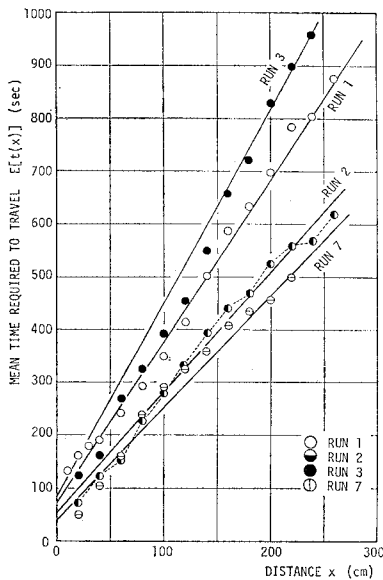


図-15 $E[t(x)] \sim x$

gth は指数分布に良く適合するため、図-13 では理論と実験結果の対応が良いが、図-14 では rest period の分布の偏倚のため対応が系統的に悪くなっていることがわかる。

(3) 着目砂粒の分散特性に関する実験結果の考察

最後に着目砂粒の平均的な分散特性についての実験結果を検討する。本実験での実験装置および方法では水路長が限られているため、 t 時間後の粒子の存在位置については測定区間から流失してしまうトレーサーがあるため正確な記録が得られ難く、ここでは主として $\{t(x)\}$ に関するデータを検討することとする。

まず図-15 には $E[t(x)]$ の結果を示した。図中には各実験条件に対して求められた平均 rest period と平均 step length を用いて次式で与えられる理論曲線を実線で示してある。

$$E[t(x)] = \{E[T]/E[X]\}x + E[T] \dots \dots \dots (57)$$

上式は、式 (22) に式 (56) を代入して得られるもので、step length がほぼ指数分布に従っているので漸近曲線ではなく正確な表示である。この図より着目砂粒の分散過程の平均的挙動が式 (57) で良く説明できることがわかる。

なお、図-16 には $E[x(t)]$ に関する実験結果と次式で与えられる理論曲線とを比較した。

$$E[x(t)] = \{E[X]/E[T]\} \cdot t \dots \dots \dots (58)$$

これは、式 (20) に中心極限定理から得られた $E[N(t)]$ の漸近曲線である式 (42) を代入したもので、rest period が指数分布からかなり偏倚しているため式 (58) は漸近近似である。図-16 ではトレーサーの測定区間外

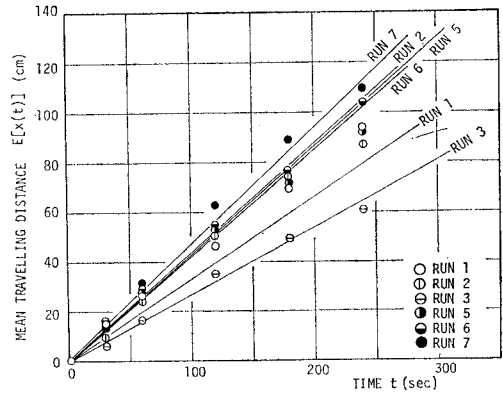


図-16 $E[x(t)] \sim t$

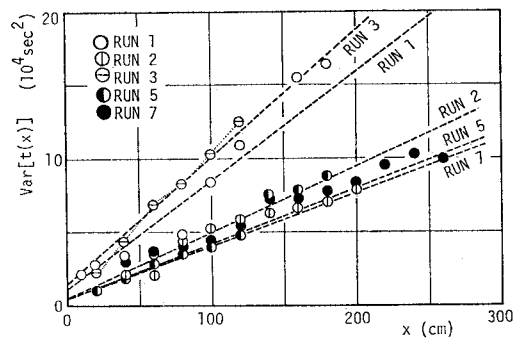


図-17 $Var[t(x)] \sim x$

への流失を考慮し、図-15 の半分の時間、距離について示したものであるが、実験値と理論値は比較的良く一致しており、generalized model に $E[N(t)]$, $E[N(x)]$ の漸近解を組み合わせたものの有効性が認められる。

次に砂粒の分散過程における平均所要時間まわりのばらつきについて検討する。図-17 は $\{t(x)\}$ の分散を示したもので、図中の破線は漸近曲線として得られた式 (45) を表わす。図を見てわかるように $Var[t(x)]$ も generalized model と $\{N(t)\}$ のモーメントに関する漸近表示とでよく説明できる。特に $\{x(t)\}$, $\{t(x)\}$ の 2 次モーメントの挙動は指数分布を仮定したモデルから求められるものとはかなり異なっており、このような場合、特に本論文で詳述した generalized model が有効となる。

5. 結 論

本論文では掃流過程に対する stochastic model の優位性に鑑み、特に個々の掃流砂礫の運動とその分散過程を記述する stochastic model を詳しく検討し、モデルの一般化を図った。すなわち掃流過程が個々の粒子の確率的挙動を素過程として形成されており、その挙動のばらつきが掃流過程全体としての性質に与える影響に注目

し、Einstein によって始められた Poisson 過程を基礎とした掃流砂の分散過程の確率モデルについてその拡張、一般化を試みた。

まず個々の砂粒の挙動を示す rest period, step length の分布形について考察し、特に rest period に対するトレーサー粒子の埋没の効果を条件付確率の考慮によって検討できるよう一般化を図った。次にこれらの継続量の確率的特性を誘導し、さらに分散過程の一般的表示を巧みに導き、特にモーメント計算の手法を提示した。

次に single tracer 法による実験を実施し、stochastic model の誘導の際の基本仮定を検討するとともに、モデルの構成に沿っての理論の実験的検証を行った。また、特に rest period の分布については先に述べた条件付確率を考慮した新しいモデルが実験結果と良く合致することが示された。ここで得られた実験結果と本論文で一般化された stochastic model に基づく理論結果の比較により、ここに提示した generalized model で掃流過程のばらつきを含めた全体像がかなり良く説明できることがわかった。本論文では対象を平坦平衡河床もしくはそれからわずかにはずれた状況に限定したが、Hubbell¹⁾の指摘に従って河床形状特性と rest period, step length を関連づけることによって、ここに示したモデルは dunes 等の形成された河床での砂粒の分散過程の記述にも十分適用できる¹⁾。またここに展開された確率論の技巧は掃流砂運動に伴う移動床過程の多くの問題に適用し得るものと考えられる。

参 考 文 献

- 1) Einstein, H.A. : Der Geschiebetrieb als Wahrscheinlichkeitsproblem, Mitteilung der Versuchsanstalt für Wasserbau an der Eidgenössische Technische Hochschule in Zurich Verlag Rascher & Co., 110 p., 1937.
- 2) Hubbell, D.W. and W.W. Sayre : Sand transport studies with radioactive tracers, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 90, HY 3, pp. 39~68, 1964.
- 3) 矢野勝正・土屋義人・道上正規 : 砂粒の流送機構の確率過程としての特性について, 京都大学防災研究所年報, 第11号 B, pp. 61~73, 1968.
- 4) Yang, C.T. and W.W. Sayre : Stochastic model for sand dispersion, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 97, HY 2, pp. 265~288, 1971.
- 5) Grigg, N.S. : Motion of single particles in alluvial channels, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 96, HY 12, pp. 2501~2518, 1970.
- 6) Sayre, W.W. and W.J. Conover : General two dimensional stochastic model for the transport and dispersion of bed material sediment particles, Proc. XIIIth Congress, IAHR, Colorado, USA, Vol. 2, pp. 88~95, 1967.
- 7) Shen, H.W. and P. Todorovic : A general stochastic model for the transport of sediment bed material, Proc. First International Symposium on Stochastic Hydraulics, Pittsburgh, USA, pp. 489~503, 1971.
- 8) Hung, C.S. and H.W. Shen : Stochastic model of sediment motion on flat bed, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 102, HY 12, pp. 1745~1759, 1976.
- 9) Cheong, H.F. and H.W. Shen : Stochastic characteristics of sediment motions, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 102, HY 7, pp. 1035~1049, 1976.
- 10) 辻本哲郎・中川博次 : 流砂の stochastic model の dune bed への適用に関する研究, 土木学会第33回年次学術講演会講演概要集, 第2部, II-263, pp. 507~508, 1978.
- 11) Paintal, A.S. : Stochastic model of bed load transport, Journal of Hydraulic Research, IAHR, Vol. 9, No. 4, pp. 527~554, 1971.
- 12) Hayakawa, N. : Stochastic analysis of bed load transport and stability of erodible bed, Proc. First International Symposium on Stochastic Hydraulics, Pittsburgh, USA, pp. 426~448, 1971.
- 13) 中川博次・辻本哲郎 : 水流による砂れきの移動機構に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第244号, pp. 71~80, 1975.
- 14) 篠原謹爾・椿東一郎 : 河床砂れきの移動機構に関する一考察, 九州大学応用力学研究所報, 第10号, pp. 85~94, 1957.
- 15) 高橋正佑 : 河床れきの流送に関する実験的研究, 第1報, 新砂防, 第18巻, 第4号, pp. 5~14, 1966.
- 16) Hubbell, D.W. and W.W. Sayre : Closure to discussion of sand transport studies with radioactive tracers, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 91, HY 5, pp. 139~149, 1965.

(1978.11.21・受付)