

## 円柱構造物の水中振動に伴う付加水質量について

### ADDED MASS OF FLEXIBLE OFFSHORE STRUCTURES

巻 幡 敏 秋\*・有 馬 健 次\*\*

By Toshiaki MAKIHATA and Kenji ARIMA

#### 1. 結 言

水中構造物を構成する没水部材は円柱である場合が多い。円柱に関する水中弾性振動についての研究はすでにかなり多くなされており、水の影響を考慮する方法として流体のみに注目する純流体力学的方法と弾性体と流体とを同時に取り扱う流力弾性学的方法とが用いられている。

造船分野では、鬼頭<sup>1)</sup>が平行平面で挟まれた水域中の弾性円柱の横振動について、L. Landweber<sup>2)</sup>および著者ら<sup>3)</sup>は半没水で浮いている円柱の横振動についての解析方法を示した。熊井<sup>4),5)</sup>は付加水質量を算定する際に用いる「3次元運動修正係数  $J$ 」(通常「 $J$  値」とよばれている)の改良を試み、理論値を実測値にかなり近づけることに成功した。一方、土木分野では水中に立てられた Pier としての円柱の地震時での応答および動水圧などを対象としており、桜井<sup>6)</sup>は剛体振動としての付加水質量分布の近似式を提案し、後藤・土岐<sup>7)</sup>は桜井の研究を拡張した。また、C.Y. Liaw<sup>8)</sup>は表面波の影響を理論的に検討している。最近では、小坪・高西<sup>9),10)</sup>は複数本の Pile に関する動水圧および付加水質量に関する興味ある成果を発表している。同時に、彼らは、1本の Pile 水中弾性振動に関して微分方程式を用いた流力弾性学的方法により得た解析結果の詳細な検討から、複数本の Pile へのこれらの拡張を試みている。

単一円柱の水中弾性振動に関する付加水質量の基礎的問題を検討・整理する目的で、本論文では、水中構造物の没水部材の円柱がおもに有している両端での幾何学的境界条件である両端自由、両端支持、両端固定、一端固定他端自由の4つの場合を対象にして、流力弾性学的方法および2次元付加水質量を上記の  $J$  値により修正

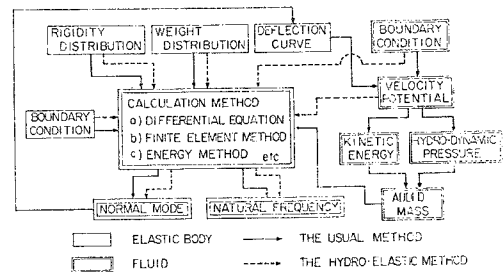


Fig. 1 The analysis of the natural vibration of elastic body in fluid

して求める付加水質量を用いての従来の解析法を示した。これら2つの方法をまとめると Fig. 1 に示したようになる。本論で述べる前者の方法は付加水質量という概念を用いずに水の影響を考慮するとともに、あまりほかに見受けられない、弾性体自身のせん断・回転慣性の影響および円柱に付加した付加重量物の影響を考慮する Ritz 法であり、良好な結果を得た<sup>3),11)</sup>。また、この理論結果より、土木分野でよく用いられる付加水質量分布を弾性振動について簡単な近似式を導いた。本論の後半では、円柱断面方向のみならず長さ方向への水の3次元運動によって生じる2次元付加水質量の低下を示す値である  $J$  値の有効性について論じ、この値を用いて行う水中固有振動数の実用算定式を提案した。

#### 2. 流力弾性学的方法 (Ritz 法)

##### (1) 基礎理論

本章で対象として述べる円柱は、実際の水中構造物の部材に近づけるために、Fig. 2 に示すように、長さ方向の任意箇所  $n$  個の付加重量物を付加している。ただし、付加重量物は流体との境界である円柱の形状は乱さないとする。

a) ひずみエネルギーおよび運動エネルギー

\* 正会員 工修 日立造船(株)技術研究所 主任研究員

\*\* 正会員 工修 日立造船(株)技術研究所 研究員

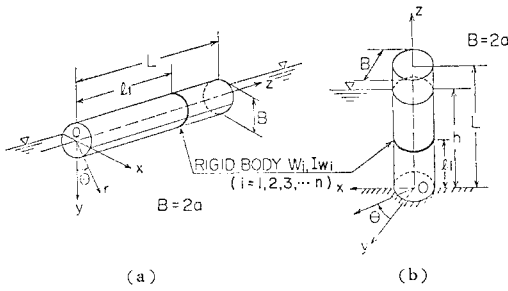


Fig. 2 Axis system of circular cylinder model

Fig. 2 に示した円柱（全長  $L$  および半径  $a$ ）において、 $z=l_i$  に付加重量物（重量  $W_i$  および慣性モーメント  $I_{wi}$ ）を付加させると、ひずみエネルギー  $V$  は、

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 y_b}{\partial z^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L k' GA \left( \frac{\partial y_s}{\partial z} \right)^2 dz \quad \dots\dots\dots (1)$$

となり、運動エネルギー  $T_E$  は、

$$T_E = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\tau A}{g} \left\{ \frac{\partial (y_b + y_s)}{\partial t} \right\}^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\tau I}{g} \left( \frac{\partial^2 y_b}{\partial z \partial t} \right)^2 dz + \sum_{i=1}^n \frac{W_i}{2g} \left\{ \frac{\partial (y_b + y_s)}{\partial t} \Big|_{z=l_i} \right\}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\tau W I_{wi}}{2g} \left( \frac{\partial^2 y_b}{\partial z \partial t} \Big|_{z=l_i} \right)^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。ただし、 $y_b$  および  $y_s$  は曲げおよびせん断力によるたわみ、 $E$  は弾性係数、 $G$  はせん断弾性係数、 $k'$  は断面形状により定まる定数、 $A$  および  $I$  は断面積および断面 2 次モーメント、 $\tau$  および  $\tau W$  は円柱および付加重量物の比重量である。 $y_b$  および  $y_s$  が円振動数  $\omega$  の調和振動を行うとして、任意関数  $X_i, Y_j$  注 1) を用いると、

$$\left. \begin{aligned} y_b &= \sum_i C_i X_i \sin \omega t \\ y_s &= \sum_j D_j Y_j \sin \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

とする。ここに、 $C_i, D_j$  は未定定数である。式 (3) を式 (1), (2) を代入しておのおのの最大値  $V_{\max}, T_{E\max}$  を求めると、

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L EI (\sum_i C_i X_i'')^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L k' GA (\sum_j D_j Y_j')^2 dz \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$T_{E\max} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\omega^2 \tau A}{g} (\sum_i C_i X_i + \sum_j D_j Y_j)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\omega^2 \tau I}{g} (\sum_i C_i X_i')^2 dz + \sum_k \frac{\omega^2 W_k}{2g} \{ (\sum_i C_i X_i + \sum_j D_j Y_j) |_{z=l_k} \}^2$$

注 1) 円柱の変形に対する幾何学的境界条件を満足する  $z$  の関数。

$$+ \sum_k \frac{\omega^2 \tau W I_{wk}}{2g} (\sum_i C_i X_i' |_{z=l_k})^2 \dots\dots\dots (5)$$

である。上式において、' は  $z$  による微分を示す。

式 (3) で表わされるたわみ形で振動する円柱回りの水（完全流体とする）の運動エネルギー  $T_w$  の最大エネルギー  $T_{w\max}$  は、

$$T_{w\max} = -\theta \sum_m \bar{b}_m^2 \frac{K_1(\kappa)}{\kappa K_1'(\kappa)} = -\theta \sum_m \bar{b}_m^2 \cdot B_g(\kappa) \dots\dots\dots (6)$$

で与えられる注 2)。ただし、 $K_1$  は第 2 種 1 次変形 Bessel 関数であり、 $\theta, \kappa, \bar{b}_m$  はおのおのの次式で表わされるものである。

i) 両端自由（両端支持）

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \alpha \rho \pi a^2 L \omega^2 / 4 \\ \kappa &= k_m a = m \pi a / L \\ \bar{b}_m &= \frac{2}{L} \int_0^L (\sum_i C_i X_i + \sum_j D_j Y_j) \sin k_m z dz \\ &= \sum_i C_i f_{im} + \sum_j D_j e_{jm} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ii) 両端固定

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \alpha \rho \pi a^2 L \omega^2 / 4 \\ \kappa &= k_m a = m \pi a / L \\ \bar{b}_m &= \frac{2}{L} \int_0^L (\sum_i C_i X_i + \sum_j D_j Y_j) \cos k_m z dz \\ &= \sum_i C_i f_{im} + \sum_j D_j e_{jm} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

iii) 1 端固定他端自由

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \alpha \rho \pi a^2 L \omega^2 / 4 \\ \kappa &= \bar{k}_m a = m \pi a / h \\ \bar{b}_m &= \frac{2}{h} \int_0^h (\sum_i C_i X_i + \sum_j D_j Y_j) \cos \bar{k}_m z dz \\ &= \sum_i C_i f_{im} + \sum_j D_j e_{jm} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\alpha$  は断面全没水および半没水に対しておのおの 1.0 および 0.5 の値をとる。

b) 振動数方程式

円柱と水とを含めた保存系を考えると、

$$V_{\max} = (T_E + T_w)_{\max} \quad \dots\dots\dots (10)$$

が成り立つ。式 (10) に固有値  $\lambda^2$

$$\lambda^2 = \frac{\tau A \omega^2 L^4}{EI g} \quad \dots\dots\dots (11)$$

の停留条件

注 2) ラプラスの方程式を満足する水の速度ポテンシャル  $\phi$  を求める際、円柱端面での条件として、自由・支持の場合では、動水圧が 0 であることを意味する  $\phi=0^{(2)}$ 、固定の場合では、 $\partial \phi / \partial n = 0$  を用いた。また、水の自由表面では、 $\omega$  が大きいとして  $\phi=0$  と仮定した。また、 $T_{w\max}$  は  $T_w = -\rho \int_S \phi \cdot \frac{\partial \phi}{\partial n} dS$  で求めた。ここで、 $n$  は円柱表面の法線方向、 $S$  は円柱表面を示す。

$$\frac{\partial(\lambda^2)}{\partial C_i} = \frac{\partial(\lambda^2)}{\partial D_j} = 0 \dots\dots\dots(12)$$

を適用すると、係数  $C_i, D_j$  に関する齊次連立1次方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} P_{i,j} & S_{i,l+m} \\ \bar{S}_{i+n,j} & Q_{i+n,l+m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i \\ C_m \\ D_l \\ D_n \end{bmatrix} = \mathbf{0} \dots\dots\dots(13)$$

上式中の小行列  $P_{i,j}, Q_{i+n,l+m}, S_{i,l+m}, \bar{S}_{i+n,j}$  の各要素  $p_{i,j}, q_{i+n,l+m}, s_{i,l+m}, \bar{s}_{i+n,j}$  は次式で与えられる。ただし、 $L$  での無次元化  $\xi = z/L, \zeta_b = y_b/L, \zeta_s = y_s/L, \eta = l/L$  を各要素に施し、式(3)の  $z$  の関数  $X_i, Y_j$  の代わりに  $\xi$  の関数  $\bar{X}_i, \bar{Y}_j$  を用いる。

$$\left. \begin{aligned} p_{i,j} &= \int_0^1 \{ \bar{X}_i' \bar{X}_j'' - \lambda^2 (\bar{X}_i \bar{X}_j + \bar{B} \bar{X}_i' \bar{X}_j') \} d\xi \\ &\quad - \lambda^2 \left\{ \sum_k (R_{Wk} \bar{X}_i \bar{Y}_j + R_{Ik} \bar{X}_i' \bar{Y}_j') \right\}_{\xi=\eta_k} \\ &\quad - \bar{F} \sum_m f_{im} f_{jm} B_e(\kappa) \} \\ q_{i+n,l+m} &= \int_0^1 \{ \bar{C} \bar{Y}_i' \bar{Y}_l' - \lambda^2 \bar{Y}_i \bar{Y}_l \} d\xi \\ &\quad - \lambda^2 \left\{ \sum_k R_{Wk} \bar{Y}_i \bar{Y}_l' \right\}_{\xi=\eta_k} \\ &\quad - \bar{F} \sum_m e_{im} e_{lm} B_e(\kappa) \} \\ s_{i,l+m} &= -\lambda^2 \left\{ \int_0^1 \bar{X}_i \bar{Y}_l d\xi + \sum_k R_{Wk} \bar{X}_i \bar{Y}_l' \right\}_{\xi=\eta_k} \\ &\quad - \bar{F} \sum_m e_{lm} f_{im} B_e(\kappa) \} \\ \bar{s}_{i+n,j} &= -\lambda^2 \left\{ \int_0^1 \bar{Y}_j \bar{X}_i d\xi + \sum_k R_{Wk} \bar{Y}_j \bar{X}_i' \right\}_{\xi=\eta_k} \\ &\quad - \bar{F} \sum_m f_{im} e_{jm} B_e(\kappa) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

また、 $\bar{B}, \bar{C}, R_{Wk}, R_{Ik}, \bar{F}$  は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{B} &= \frac{I}{AL^2}, \bar{C} = \frac{k' GAL^2}{EI}, R_{Wk} = \frac{W_k}{\tau AL}, \\ R_{Ik} &= \frac{\gamma W I W_k}{\tau AL^3}, \bar{F} = \frac{\alpha \rho g \pi a^2}{\tau A} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

である。式(13)の係数行列式を0とおくと振動数方程式が得られる。本論では任意関数  $\bar{X}_i, \bar{Y}_j$  として  $\xi$  のべき関数を用いて数値解析を実施した。

(2) 計算例に対する考察

前節で述べた理論を用いて、比較的模型実験の容易である両端自由および1端固定他端自由の場合のみを取り上げ、理論値と実測値との比較検討を行い、本理論の妥当性の検証を試みた。

a) 両端自由

Table 1 に示している木製円柱模型について、両端、1端、中央に付加重量物を付加した場合（以後、おの

のケース E, UE, M とよぶ）および付加しない場合（以後、ケース E-0 とよぶ）を対象にして、空中および半没水状態の固有振動の数値解析を実施した。Table 2 は理論固有振動数、Fig. 3 は理論振動モードの一例を示す。

著者ら<sup>3)</sup>は、Table 1 の模型を製作し、銅製水槽 ( $L \times B \times D = 4000 \text{ mm} \times 2000 \text{ mm} \times 650 \text{ mm}$ ) において Fig. 4 に示す要領により水中実験を行った。実測値は Table 2 および Fig. 3 に示す。固有振動数の理論値と実測値とはよく一致しており、ケース E-1 の水中振動2節を除くと誤差が5%以内になっている。また、Fig. 3 に示すように振動モードについても理論値と実測値とのよい一致が認められる。ただし、Fig. 3 (c) に示した Case UE-3 は、長さ方向に非対称の重量分布となり、実験実施が困難であったので実測値がない。

空中・水中振動モードの差は、ケース E の場合には顕

Table 1 Circular cylinder wooden model

Principal Dimension			
L mm	B mm	W g	
1,197	600	1,546	
Added Weights of ends		Added Weights of midship	
name	RM	name	RM
E-1	0.10	M-1	0.25
E-2	0.20	M-2	0.52
E-3	0.30		
E-4	0.40		
E-5	0.52		

$$RM = w/W \quad (w: \text{Added weight})$$

Table 2 Comparison of calculated and measured frequencies (Hz)

case name	no. of nodes	frequency in air			frequency in water		
		2 node	3 node	4 node	2 node	3 node	4 node
E-0	measured	187.7	487.7	875.4	136.5	355.1	645.2
	$f_t$	183.5	480.3	878.0	131.6	351.0	646.3
	$f_j$	—	—	—	133.4	349.7	642.3
E-1	measured	160.8	427.8	787.4	124.5	326.4	602.4
	$f_t$	157.2	421.3	784.9	114.6	320.9	593.7
E-2	measured	143.6	344.6	742.3	113.8	303.0	564.6
	$f_t$	141.2	341.2	744.0	110.6	300.7	562.5
E-3	measured	134.9	379.2	725.6	108.3	292.2	550.4
	$f_t$	132.1	375.9	724.9	104.7	288.6	545.3
E-4	measured	127.5	365.7	702.1	102.9	281.4	528.4
	$f_t$	125.0	364.9	711.8	99.6	279.0	532.4
E-5	measured	120.6	354.4	692.0	97.2	271.5	519.3
	$f_t$	118.9	356.0	701.6	94.9	270.7	521.6
M-1	measured	162.8	486.0	716.5	125.6	355.6	575.4
	$f_t$	160.6	475.2	765.5	122.9	349.0	602.9
M-2	measured	151.2	487.0	697.3	119.0	351.6	543.6
	$f_t$	148.9	469.5	726.5	116.6	346.8	586.9
UE-3	measured	—	—	—	—	—	—
	$f_t$	145.8	410.9	780.3	108.0	305.7	575.6

$f_t$ : frequency computed by this method  
 $f_j$ : frequency computed by eq. (22)

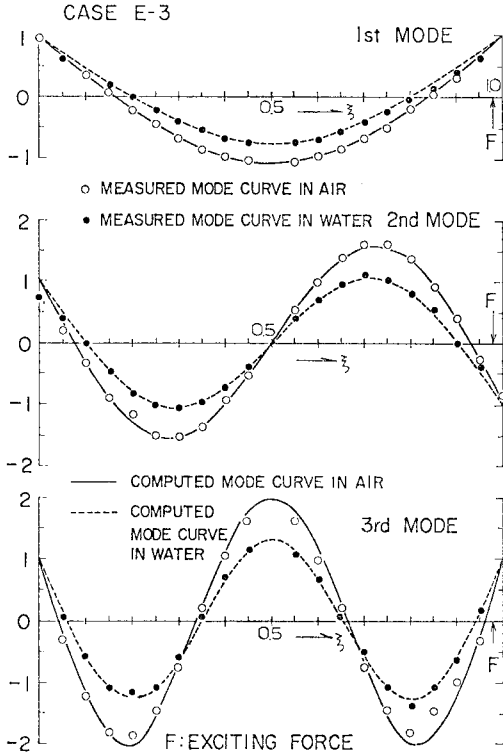


Fig. 3 (a) Computed and measured mode curve

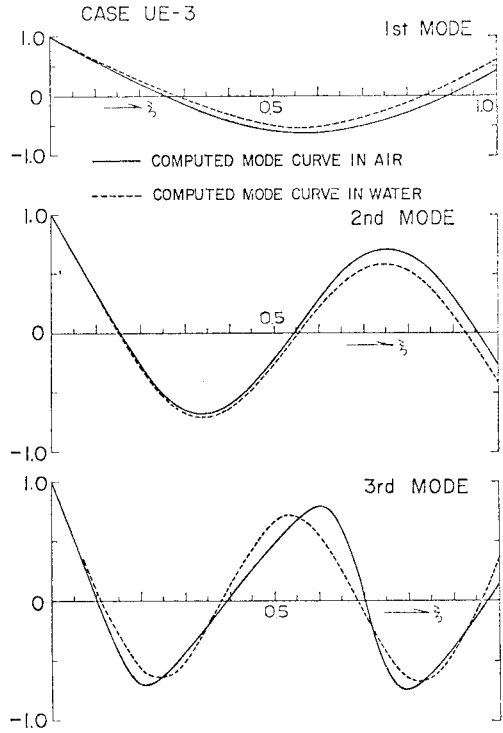


Fig. 3 (c) Computed mode curve

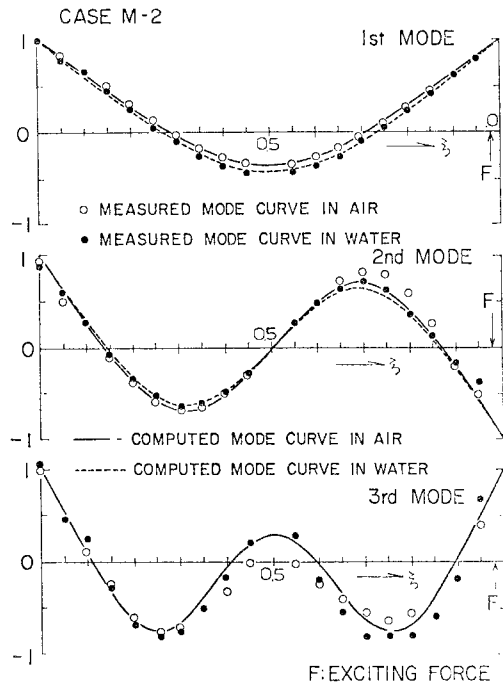


Fig. 3 (b) Computed and measured mode curve

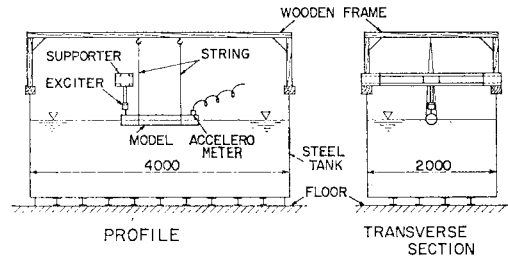


Fig. 4 Experimental setup

の形状は変化しないと考えても差し支えないと思われる注3)。

b) 1端固定他端自由

この条件を有する円柱の水中振動の付加水質量に関する実験は、R.W. Clough<sup>13)</sup>のそれが有名である。しかし、実験データの詳細は若干不明な点があり、実験方法についても問題点があるように思われる。参考までに、著者らは、この実験について、不明な数値等注4)を推測して理論解析を実施し、Table 3に示す解析結果を得た。

後藤・土岐<sup>7)</sup>によって発表されている詳細な実験につ

注 3) 空中・水中振動モードが一致することは、空中および水中における質量分布が相似形であることを示す。

注 4) Table 3中の丸棒の重量および丸棒内の水の重量は諸寸法より算定した。また、アルミニウムの弾性係数は標準値を用いた。

著であるが、ケース M および E-0 の場合はその差が小さい。特にケース E-0 の場合、著者ら<sup>3)</sup>が以前実験により確認した限りでは、空中・水中において振動モード

**Table 3** Clough's experiment<sup>13)</sup>

		1st mode	2nd mode
In air	$f_t$	14.3 HZ	89.5 HZ
	$f_e$	—	—
In water	$f_t$	3.2	20.3
	$f_e$	3.0	19.6
L	609.6 mm	$\gamma A$	4.35 gf/cm
I	542.0 mm <sup>4</sup>	E	74x10 <sup>3</sup> kgf/mm <sup>2</sup>
a	38.1 mm	G	2.72x10 <sup>3</sup> kgf/cm <sup>2</sup>

Model  
Square bar  
(Aluminum alloy)

$f_t$ : Theoretical freq.  
 $f_e$ : Experimental freq.

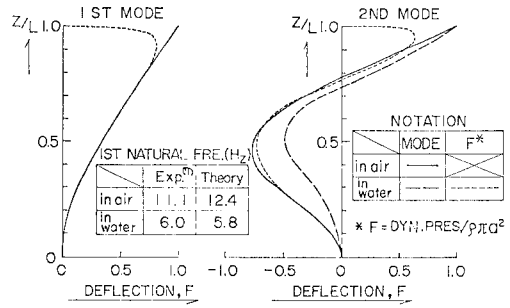
**Table 4** Natural frequencies of the cylinder models

Model		I		II		III	
Mode Order		1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
Natural Freq.	in air						
	$f_e$	20	—	11.1	—	10	—
	$f_t$	20.6	102.6	12.4	71.4	9.6	57.3
in water	$f_e$	8.3	—	6.0	—	5.5	—
	$f_t$	8.6	34.7	5.8	30.8	4.9	27.8
	$f_j$	8.7	42.9	5.8	33.3	4.9	29.1
$L/B$		13.2		22.2		28.6	
$J$		0.850	0.856	0.906	0.907	0.920	0.920
$E$		2.8x10 <sup>4</sup> kgf/cm <sup>2</sup>					
$G$		6.3x10 <sup>2</sup> kgf/cm <sup>2</sup>					
$\gamma$		1.2 gf/cm <sup>3</sup>					
$\rho g \pi a^2 / \gamma A$		5.49		3.97		3.10	

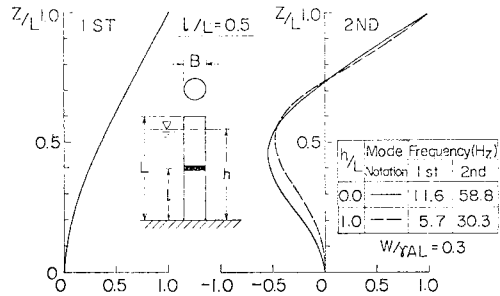
$f_t$ : Theoretical freq. calculated by this method  
 $f_j$ : Theoretical freq. calculated by eq. (22)  
 $f_e$ : Experimental freq.<sup>13)</sup>

いて、Table 4 に示した数値を使用して理論解析を行い、Table 4 にまとめたように実測値との比較を試みた。1次固有振動数の理論値と実測値とはよく一致しており、模型IIの空中振動を除くと誤差の最大値は3%である。

Fig. 5 は Table 4 中の模型IIの理論振動モードと動圧分布を示している。1次振動モードにおいて、小坪ら<sup>10)</sup>が指摘しているように、空中・水中振動モードの差はほとんど認められないが、2次振動ではかなりの差が生じるようである。Fig. 6 は模型IIの上端部および中央部に付加重量物 ( $R_w=0.3, R_l=0$ ) を付加した場合の固有振動の理論値を示している。本図により、重量物が上端部に付加されると、空中・水中振動モードの差が



**Fig. 5** Computed mode curve and dynamical pressure



**Fig. 6** Variation of mode curve with water level

1次振動においても現われてくることになる。

### 3. 付加水質量算定法

円柱の付加水質量算定法には2つの方法がある。その1つは流体力学的解析法などより得た動水圧から付加水質量分布を求める方法であり、他の1つは付加水質量分布が長さ方向に一樣であると仮定し、2次元付加水質量に対して、流体力学的に求める水の3次元運動の影響を示す  $J$  値を乗じて付加水質量を算定する方法である。

#### (1) 付加水質量分布

水中振動する円柱回りの動圧 ( $= -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$ ) の  $y$  方向成分  $p(z)$  が与えられると、付加水質量分布  $m(z)$  は、

$$m(z) = \frac{p(z)}{y(z)} = \alpha \rho \pi a^2 C_V j(z) \dots \dots \dots (16)$$

となる。ここでは、時間項を抜いて単純化し、 $y(z)$  は

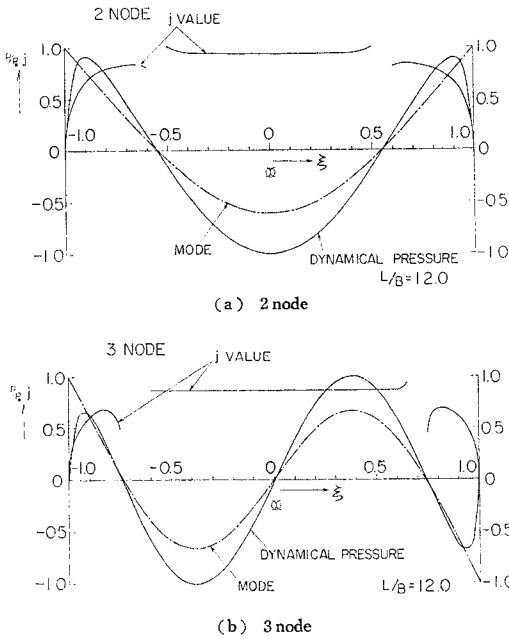


Fig. 7 Dynamical pressure and local  $j$  value

振動モード,  $C_v$  は 2 次元付加質量係数であり, 円柱では 1.0 となる. また,  $j(\xi)$  は通常局所 3 次元運動修正係数<sup>14)</sup>とよばれており注 5), この  $j$  分布曲線が与えられると付加水質量分布が決まる.

両端自由の円柱 ( $L/B=12.0$ ) について求めた動圧および  $j$  分布の理論値の例を図示すると, Fig. 7 (a), (b) となる. 同図中, 節付近の  $j$  分布曲線の不連続が生じているのは, たわみ形の節の位置に対する Fourier 級数の近似の悪さによるものであり, 本来ならば連続曲線となるべきものである.  $j$  分布曲線は, 次数が大きくなるに従い, 長手方向に一様となる傾向をもつ. 一連の計算結果より,  $L/B$  の値が大きくなる場合にも同傾向を示す.

この  $j$  分布曲線は, 不連続部を無視すると近似的に,

$$j_n = j_{\infty} \left\{ 1 - \beta |\xi|^{[L/B]-1} \right\} \quad \beta = \frac{10+n}{[L/B]n^2} \quad \dots\dots\dots (17)$$

という簡単な式で表わすことができる<sup>12)</sup>. ここに,  $[L/B]$  は Gauss の記号とよばれるものであり,  $L/B$  を超えない最大の整数を示す. また,  $j$  分布曲線の長さ方向の中央における値  $j_{\infty}$  を Fig. 8 に示す.  $n$  は節数を示す.

Fig. 9 は 1 端固定他端自由の円柱の理論  $j$  分布曲線の一例を示している. 水深変化および 1 次・2 次振動の差により  $j$  分布曲線の傾向の変化は認

められない注 6). 両端自由の場合に得た式 (17) と類似した式で, この  $j$  分布曲線を表わすと,

$$j = 1.0 - (\xi)^{[L/B+5]}/L \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる注 7). ただし,  $\xi = z/h$  ( $h \geq z$ ) である.

両端支持の円柱の  $j$  分布曲線は長さ方向に一定となり, その値は次節で述べる  $J$  値と同じ値となる. これは動水圧分布形状と水中振動モードとがまったく相似形であることに由来している.

(2) 3 次元運動修正係数  $J$

3 次元運動修正係数  $J$  の定義は, 弾性体が水中振動を行うときに伴う 3 次元的に動く水の「3 次元運動エネルギー  $T_w$ 」と弾性体が振動する  $xy$  面内のみ動くとした水の「2 次元運動エネルギー  $\bar{T}_w$ 」との比である<sup>4), 15)</sup>. すなわち,

$$J = \frac{T_w}{\bar{T}_w} = -\frac{\rho}{2} \int \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS / \frac{\rho A}{2} \int v^2 dx \quad \dots\dots\dots (19)$$

である. ここに,  $v$  は弾性体の振動速度,  $S$  は弾性体の表面積である. 弾性体の水中振動による単位長さ当りの付加水質量  $\bar{m}$  は, 定義の式 (19) より,

$$\bar{m} = \alpha \rho b^2 J C_V \quad \dots\dots\dots (20)$$

与えられる. ただし,  $b$  は振動方向に直角となる半幅長である.

式 (20) を用いて円柱の  $\bar{m}$  を求めると,

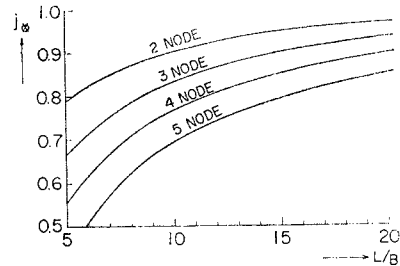


Fig. 8  $j_{\infty}$ - $L/B$  curve

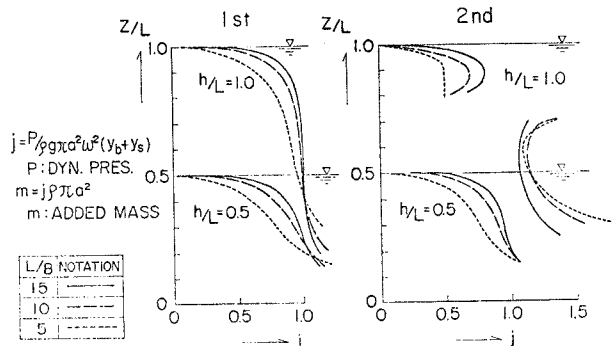


Fig. 9 Local  $j$  value

注 6) 両端自由の場合と同様, 不連続部を無視する.

注 7) 剛振動の  $j$  分布曲線に相当する近似式はかなり提案されている<sup>8), 7), 10)</sup>.

注 5) 小坪・高西がよんでいる  $F$  値に相当する<sup>10)</sup>.

$$\bar{m} = \alpha \rho \pi a^2 J \quad \dots \dots \dots (21)$$

となる。この計算方法は付加水質量が長さ方向に一様であることを前提にしており、空中・水中振動モードにあまり差がみられない場合にはほぼ妥当であろう。このとき、水中の固有振動数  $f_j$  は、空中の固有振動数  $f_a$  を修正して求める式

$$f_j = \frac{\lambda^2}{2\pi L^2} \sqrt{EIg(\bar{r}A + \alpha \rho g J \pi a^2)} = f_a \sqrt{1 + J\bar{F}} \quad \dots \dots \dots (22)$$

を用いて算定可能である。ただし、 $\bar{F}$  は式 (15) 中に述べた式である。

i) 両端自由の場合 (両端において  $\phi=0$ )

円柱の水中振動モードといい得る一様断面両端自由の

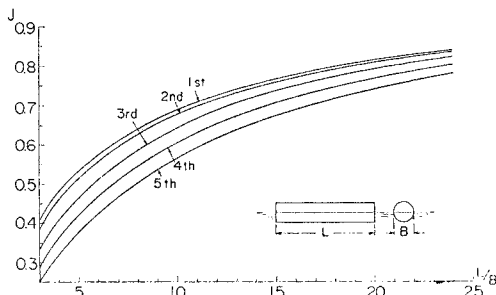


Fig. 10 Three-dimensional reduction factor  $J$  (free-free mode)

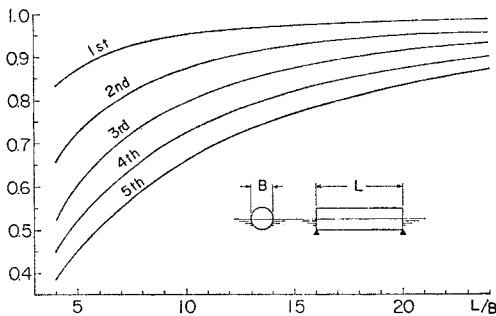


Fig. 11 Three-dimensional reduction factor  $J$  (supported-supported mode)

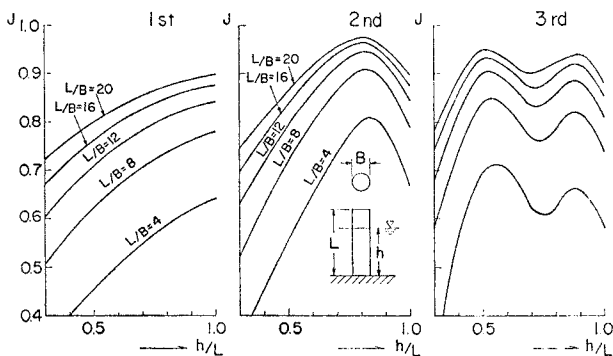


Fig. 12 Three-dimensional reduction factor  $J$  (fixed-free mode)

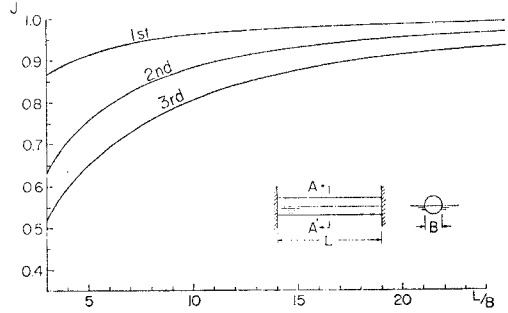


Fig. 13 Three-dimensional reduction factor (fixed-fixed mode)

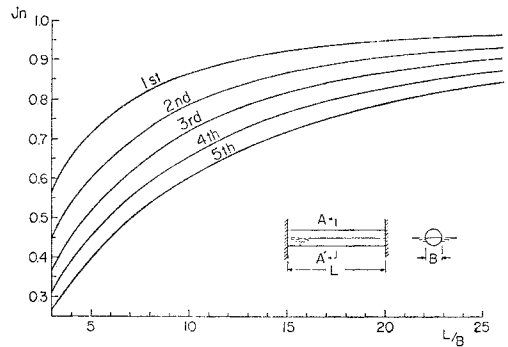


Fig. 14 Three-dimensional reduction factor (free-free mode)

規準関数を用いて、式 (19) により  $J$  値を計算し、図示すると Fig. 10 となる。著者らは、この  $J$  値と円柱模型実験から得た実測  $J$  値とかなりよく合うことを示した<sup>3)</sup>。同図より、 $J$  値は、 $L/B$  および節数  $n$  が大きくなるにつれ、 $J$  値が小さくなる傾向を有することがわかる。

ii) 両端支持の場合 (両端において  $\phi=0$ )

一様断面両端支持の規準関数である  $\sin$  関数を用いて求めた  $J$  値は Fig. 11 に示す。この  $J$  値は両端自由のそれと同じ傾向を示している。節数による  $J$  値の差は、両端自由の場合に比べて大きくなる。

iii) 一端固定他端自由の場合

(一端で  $\partial\phi/\partial n=0$ , 他端では  $\phi=0$ )

一様断面の一端固定他端自由の規準関数を用いて  $J$  値を求めると、Fig. 12 になる。同図は水深変化に対する  $J$  値の変化を示している。1次振動モードでは水深が増えるに従い  $J$  値が大きくなるが、2次および3次振動モードでは、水面が節付近になる水深での  $J$  値は相対的に大きくなる傾向となる。これは水の運動が2次的になるためと推測される。

iv) 両端固定の場合 (両端では  $\partial\phi/\partial n=0$ )

一様断面両端固定の規準関数を用いて  $J$  値を求めると Fig. 13 となる。この  $J$  値は両端自

由, 両端支持の  $J$  値と同傾向を  $L/B$  に対して示すが, 両端の壁による水の運動の拘束のために, これら 2 つの  $J$  値より大きな値となっている.

**Fig. 14** は, 一樣断面両端自由の規準関数を用いて求めた  $J$  値を図示したものである. この計算の対象条件は両端自由の円柱の前後に剛体壁がある場合を意味しており水中構造物の部材はときとして, このような場所に存在すると予想されるので本計算を実施した. この  $J$  値は両端自由の  $J$  値 (**Fig. 10**) より大きい値であるが, **Fig. 12** の両端固定の  $J$  値より小さい値である.

以上求めた  $J$  値の算定式は付録に掲げておく. 両端自由および一端固定他端自由である円柱模型 (**Table 1, 4**) について, 式 (22) より水中固有振動数を算定すると **Table 2, 4** に掲げた値になる. 両者ともに, 流力弾性学的解析法から得た理論値および実測値とよく一致しており, 空中固有振動数から水中固有振動数を簡単に求める際には  $J$  値は非常に有効である. また, 円柱部材からなる水中構造物の水中固有振動解析において, 各部材に, それらの両端条件に適する  $J$  値を採用した式 (21) の付加水質量を考慮すればかなり実際に近いであろう.

### 4. 結 論

水中構造物の部材としておもに用いられている各種の端部条件を有している円柱の付加水質量について, 理論および模型実験による考察を行い, 次の結論を得た.

(1) 水中固有振動を解析的に把握することが不可能であるような, 任意箇所に加重量が付加された円柱に対して, エネルギー法を利用した流力弾性学的解析法は非常に有効である.

(2) 円柱の水中弾性振動における付加水質量分布を理論解析より求め, この分布曲線を近似する簡単な式を提案した.

(3) 3次元運動修正係数  $J$  を用いると, 各種の端部条件をもつ円柱の付加水質量を近似的に算定可能である. さらに, 空中固有振動数  $f_a$  および  $J$  値を考慮した実用算定式

$$f_w = f_a / \sqrt{1 + J \rho g \pi a^2 / r A}$$

を用いると, 水中固有振動数  $f_w$  が算出可能である.

最後に, 本論文をまとめるにあたり, 終始ご指導していただいた大阪大学工学部造船学科 松浦教授に感謝の意を表します.

### 【付 録】

3次元運動修正係数  $J$  の算定式

(a) 両端自由

$$J_n = \frac{-8}{\pi^2} \sum_m \{(-1)^m \beta_n + 1\}^2 B_e(\kappa) \dots \dots \dots (a-1)$$

ここに,  $\beta_n$  は,

$$\beta_n = \frac{\sin \bar{\lambda}_n \sinh \bar{\lambda}_n}{\cosh \bar{\lambda}_n - \cos \bar{\lambda}_n} \dots \dots \dots (a-2)$$

であり,  $\bar{\lambda}_n$  は次式を満足する値である.

$$\cos \bar{\lambda}_n \cosh \bar{\lambda}_n = 1 \dots \dots \dots (a-3)$$

(b) 両端支持

$$J_m = -B_e(\kappa) \dots \dots \dots (b-1)$$

(c) 一端固定他端自由

$$J_n = -\frac{1}{2} \frac{\bar{h} \sum b_m^2 B_e(\kappa)}{V_2} \dots \dots \dots (c-1)$$

ここに,  $\bar{h}$  は,

$$\bar{h} = h/L \dots \dots \dots (c-2)$$

であり,  $b_m, V_2$  は,

$$b_m = \frac{2}{h} \int_0^h v_n(z) dz \dots \dots \dots (c-3)$$

$$v_n(z) = \cosh r_n z - \cos r_n z - \frac{\cosh r_n L + \cos r_n L}{\sinh r_n L + \sin r_n L} \cdot (\sinh r_n z - \sin r_n z) \dots \dots \dots (c-4)$$

$$V_2 = \{3 v_n(h) v_n'''(h) - v_n'(h) v_n''(h) + r_n L \bar{h} (v_n''(h) - 2v_n'(h) v_n'''(h) + v_n''(h)^2)\} / 4 r_n L \dots \dots \dots (c-5)$$

である. ただし,  $r_n$  は,

$$\cos r_n L \cdot \cosh r_n L = -1 \dots \dots \dots (c-6)$$

を満たすものである.

(d) 両端固定

$$J_n = 4 b_0^2 - 2 \sum_m b_m^2 B_e(\kappa) / \bar{v}_n^2 \dots \dots \dots (d-1)$$

ここに,  $\bar{v}_n$  は,

$$\bar{v}_n = \lambda_n^2 \{ \cos \bar{\lambda}_n + \cosh \bar{\lambda}_n + \mu_n (\sin \bar{\lambda}_n - \sinh \bar{\lambda}_n) \} \dots \dots \dots (d-2)$$

$$\mu_n = -\frac{\cosh \bar{\lambda}_n - \cos \bar{\lambda}_n}{\sinh \bar{\lambda}_n - \sin \bar{\lambda}_n} \dots \dots \dots (d-3)$$

である. また,  $b_0$  および  $b_m$  は,

$$b_0 = \frac{2}{\bar{\lambda}_n} \{ \sin \bar{\lambda}_n - \sinh \bar{\lambda}_n + \mu_n (2 - \cos \bar{\lambda}_n - \cosh \bar{\lambda}_n) \} \dots \dots \dots (d-4)$$

$$b_m = 4 \{ (-1)^m \beta_n + \mu_m \} / \bar{\lambda}_n \{ 1 - (m\pi/\bar{\lambda}_n)^4 \} \dots \dots \dots (d-5)$$

$$\beta_n = \frac{\sinh \bar{\lambda}_n \sin \bar{\lambda}_n}{\sinh \bar{\lambda}_n - \sin \bar{\lambda}_n} \dots \dots \dots (d-6)$$

である.

### 参 考 文 献

- 1) 鬼頭史城: 2つの平行平面内に挟まれた水域中における弾性棒の振動について, 日本造船協会誌, 第357号, pp. 1~6, 昭34.
- 2) Landweber, L.: Vibration of a Flexible Cylinder in a Fluid, Journal of Ship Research, Vol. 11, No. 3, pp. 143~150, Sept. 1967.
- 3) 松浦義一・有馬健次: 弾性体の水中振動について, 関西



- 造船協会誌, 第155号, pp. 163~175, 昭49.
- 4) 熊井豊二: 船体上下振動に於ける附加慣性係数に就いて, 造船協会論文集, 第105号, pp. 219~227, 1959.
  - 5) 熊井豊二: 船体上下振動の3次元修正値について(第1報), 造船協会論文集, 第113号, pp. 143~151, 1962.
  - 6) 桜井彰雄: 水中に立てられた柱状構造物の振動, 土木技術, 第16巻, 6号, pp. 11~17, 昭36.
  - 7) 後藤尚雄・土岐憲三: 水中橋脚の振動と耐震設計に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第100号, pp. 1~8, 昭38.
  - 8) Liaw, C.Y. and A.K. Chopra: Dynamics of Towers Surrounded by Water, Earthquake Eng. and Structural Dynamics, Vol. 3, pp. 33~49, 1974.
  - 9) 小坪清真・高西照彦: 多柱基礎への水の付加質量について, 土木学会論文報告集, 第248号, pp. 1~10, 昭51.
  - 10) 小坪清真・高西照彦: 多柱基礎橋脚に対する水の付加質量の3次元解析, 土木学会論文報告集, 第259号, pp. 25~39, 昭52.
  - 11) 有馬健次・巻幡敏秋: 水中構造物の固有振動解析(円柱 Pillar について), 土木学会関西支部学術講演会発表, 昭52.
  - 12) 松浦義一・有馬健次: 有限長丸棒の水中振動について, 関西造船協会誌, 第170号, pp. 133~138, 昭53.
  - 13) Clough, R.W.: Effects of Earthquakes on Under Structures, Proc. of II W.C.E.E., Vol. 2, pp. 815~831, 1960.
  - 14) 熊井豊二: 船体上下振動付加質量の3次元修正値について(第2報), 造船協会論文集, 第113号, pp. 152~155, 1962.
  - 15) Lewis, F.M.: The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship, S.N.A.M.E., Vol. 37, 1929.

(1978.11.10・受付)