

砂礫の運動に伴う移動床砂面の擾乱発生過程

INCIPIENT IRREGULARITY ON ALLUVIAL SAND BED DUE
TO MOTION OF INDIVIDUAL BED LOAD MATERIALS

中川博次*・辻本哲郎**

By Hiroji NAKAGAWA and Tetsuro TSUJIMOTO

1. 序 論

移動床砂面上に流れが存在する場合、適当な水理条件のもとでは波状の砂面擾乱が生成され、水理条件に固有の河床波に発達する。このような河床波の発生機構は古くから多くの研究者の興味をひき、さまざまな手法によってその解明が試みられてきた。本論文ではこのような河床波の萌芽であると考えられる砂面の擾乱の発生とその初期成長過程について個々の砂礫の運動の確率的特性との関連から現象説明を試みる。

著者らは掃流砂およびそれに伴うさまざまな河床変形を実験をもとに検討して、河床波（小規模河床形態）形成について次のような理解をしている。すなわち河床波の発生要因は砂粒・流体系では砂粒運動が連続的な挙動でなく離散的な step をもとに形成されており、このような離散的な現象の繰り返しが平均的には流砂が均衡していても必然的に砂面の不規則性を増していくこと、さらにそのような step が固有の流砂の非平衡性を産み出していることにあると確信している。

ところで流砂を含む水理学では流砂法則に関して十分な情報が得られていないため、こうした現象解明に必須な理論の厳密さや首尾一貫性およびモデル自体が洞察力に優れていること等を同時に満足したモデルを得ることは無理と思われる。このような場合、たとえば砂粒子の運動機構を力学的に詳細に記述するなどの厳密さより、砂礫の掃流という根本的な現象だけでなく、それに付随するさまざまな移動床現象を説明し得る、いわば見透しのきくモデルが要求されるものと考えられる。掃流過程において把握すべき本質的特徴は、砂礫の運動に着目した場合、その現象の離散的なこと、すなわち「粒」(granule)の単位で現象が起こること、砂礫の慣性のために

生じる流れの変化に対する応答遅れである。離散的な現象には連続体に対して有効であった微分方程式よりも状態確率、推移確率を用いた表現が適しており、これによって変動を含めた現象の全体像の記述が可能となる。

一方、砂礫の運動の水流に対する応答の遅れの問題は、移動床の不安定性の問題が流体・流体系のそれと本質的に異なる点である。砂粒運動の応答が流体のそれに比して遅いことは河床波形成の初期の段階などで砂粒運動をある程度独立して扱うこと、流れを準定常として扱うことを可能にし、流れを定常と考えると砂粒の応答遅れは遅れ距離として扱えることになる。もっとも Kennedy¹⁾らの導入した遅れ距離は流体の粘性による流速とせん断応力との位相差と、せん断応力と流砂量の対応遅れの両方を含んでいるが、ここでの遅れ距離はむしろ後者である。流体・流体系では前者が決定的な不安定要因となるのに対し、砂粒・流体系では後者の果たす役割が大きいと考えるのが妥当であろう。こうした応答遅れが流砂現象では step length^{2),3)}を媒介にして生じ、これが前述の流砂固有の非平衡性の原因である。すなわち step length によって上流での流砂状況が下流にある比率で影響を及ぼし、この比率が step length の分布である。

以上の議論の結果、掃流過程を rest period と step length を構成要素とした stochastic model^{2),3)}で表現することには魅力ある見透しのよさが含まれていることがわかる。

本論文の以下では、まず砂粒の個々の運動に注目しこれを確率過程としてモデル化することによって砂面擾乱の初生とその統計的性質について検討する。これは従来河床波の発生機構の研究の中心であった Kennedy¹⁾に始まる安定理論を基礎としたものでは言及されなかった初期擾乱に対して説明を与えるものとなる。次に、掃流砂礫の運動を stochastic model で表現した場合に完備される流砂の非平衡性についての考察を踏まえて移動床砂面の不安定性解析を行い、初期砂面擾乱の河床波への成

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工博 京都大学助手 工学部土木工学教室

長について論じる。

なお、本論文で展開される議論に沿って河床波の発生機構の概要をフローチャートで示すと図-1 のようである。

2. 砂粒のランダムな離脱・落下に伴う砂面擾乱の初生過程

本章ではまず河床において砂粒のランダムな離脱・落下が繰り返されることによる河床高の変動の程度を推定することを、若干の確率論的技巧によって試みる。

(1) 砂粒のランダムな離脱・落下による河床砂面の不規則性

砂面上の1点(砂粒1個の占める面積)において砂粒の離脱または落下によって砂面高さが粒径程度の上昇または低下を繰り返していると考え、すなわち砂面高さを、

$$y = nd \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

と表わし、初期の高さを0とする。ここで砂粒1個の落下、離脱が±d (d: 粒径) の河床高変化をもたらす理想状態を仮定する。このとき、この点における河床高変動に対する素過程は砂粒の河床からの離脱および河床への落下で、これらの単位時間当りの生起確率密度をそれぞれ μ_s, μ_d とすると確率論における Smoluchowski の条件 (consistency condition) より次式が得られる。

$$p(n; t + \Delta t) = \{1 - (\mu_s + \mu_d) \Delta t\} p(n; t) + \mu_s \Delta t p(n+1; t) + \mu_d \Delta t p(n-1; t) + o(\Delta t) \quad (2)$$

ここに、 $p(n; t)$ は、時刻 $t=0$ で $y=0$ のとき時刻 t で $y=nd$ である条件付確率を示し、また、 $o(\Delta t)$ は Landau の small o である。式 (2) を若干変形し、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすることより、次の $p(n; t)$ に関する微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} p(n; t) = -(\mu_s + \mu_d) p(n; t) + \mu_s p(n+1; t) + \mu_d p(n-1; t) \quad (3)$$

さて、ここで著者らの興味は、式 (3) の解そのものよりもむしろその特性であるので、次のような若干の技巧によってそれを求めることにする。すなわち、まず式 (3) の両辺を n 倍し、 n について $-\infty$ から $+\infty$ まで加え

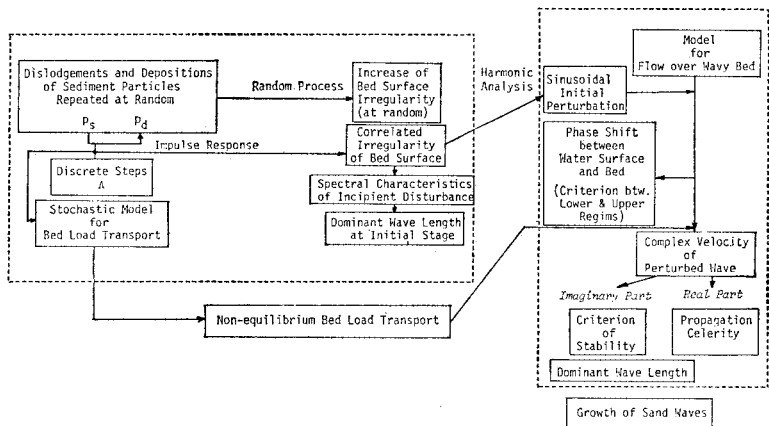


図-1 河床波の発生機構に関する説明図

合わせると、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \frac{d}{dt} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n p(n; t) = \frac{d}{dt} E[n] \\ \text{右辺} &= -(\mu_s + \mu_d) \sum_{n=-\infty}^{\infty} n p(n; t) \\ &\quad + \mu_s \sum_{n'=-\infty}^{\infty} (n'-1) p(n'; t) \\ &\quad + \mu_d \sum_{n''=-\infty}^{\infty} (n''+1) p(n''; t) \end{aligned}$$

となり、結局、式 (3) は次のように n の期待値 $E[n]$ に関する微分方程式に書き換えられる。

$$\frac{d}{dt} E[n] = -(\mu_s - \mu_d) \quad (4)$$

同様に n の j 次モーメント ($E[n^j]$) については式 (3) の両辺を n^j 倍し、 n について $-\infty$ から $+\infty$ まで加え合わせることで求められ、それを整理して表示すると次式となる。

$$\frac{d}{dt} E[n^j] = \sum_{i=1}^j ({}_j C_i \mu_d + (-1)^i \mu_s) \cdot E[n^{j-i}] \quad (5)$$

ただし、

$${}_j C_i = j(j-1)\dots(j-i+1)/i!$$

である。式 (5) によって河床高の変動のモーメント $E[n^j]$ が逐次求められる。

いま流砂が全体として平均的には均衡している場合を考えると、

$$\mu_s = \mu_d = \mu$$

であり、このとき $E[n^j]$ は次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} E[n] &= 0, \quad E[n^2] = 2\mu t + C, \\ E[n^3] &= 0, \quad E[n^4] = 2\mu^2 t^2 + 2\mu(6C+1)t + C' \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに、 C, C' は積分定数で $t=0$ での河床(初期に平坦にならされた河床)の特性で決まる。

さて、こうしたモデルは河床の任意の一点での試行の

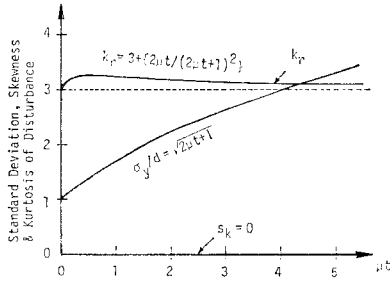


図-2 初期砂面擾乱の統計的静特性

繰り返しに対する確率過程であるが水路方向の場所的変動系列との間にエルゴード性を仮定すると、これらの結果より水路方向の河床高の分散 σ_y^2 、ひずみ度 s_k 、とがり度 k_r 等が求められることになる。すなわち、

$$\sigma_y^2/d^2 = 2\mu t + C \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$s_k = E[n^3]/\{E[n^2]\}^{3/2} = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$k_r = E[n^4]/\{E[n^2]\}^2 = 3 + \{(2\mu t + C' - C^2)/(2\mu t + C)\}^2 \quad \dots\dots(9)$$

が得られる。ところで初期河床面については $t \rightarrow 0$ でほぼ正規分布に従い ($s_k \rightarrow 0, k_r \rightarrow 3$)、また初期の河床高の標準偏差が粒径程度であると考え、積分定数に対し次の条件が得られる。

$$C' = C^2 \approx 1$$

$C=1$ の場合、式 (7)~(9) の結果は 図-2 に示すようになり、とがり度はほぼ 3~3.3 程度の値となる。

以上の結果より、個々の砂礫が河床でランダムに離脱・落下を繰り返すことによって河床面に不規則性が出現しその分散が時間に比例して増加すること、河床高分布はほぼ正規分布で近似できることが示された。なお、ここで展開したモデルでは μ と n を独立なものとして扱っており、そのためモデルの適用範囲は n の変動の小さい砂面擾乱の初生期に限られるが、 n と μ の関係が把握されれば基本的な取り扱いはずえにモデルを拡張することが可能である。

さて上記において μ は河床上の一点（砂粒一個の占める面積）での砂粒の離脱の単位時間当りの生起確率密度であり、いわゆる pick-up rate p_s （平坦河床では平均 rest period の逆数）と同義である。そこで、砂面擾乱の初期段階では著者らが先に導いた平坦河床での pick-up rate の推定式⁴⁾を次式の近似式によって用い、砂面擾乱の増幅率と河床底面せん断応力との関係を求める。

$$p_s \sqrt{d/(\sigma/\rho - 1)g} = F_0 \tau_* \{1 - (\tau_{*c}/\tau_*)\}^3 \quad (\tau_* > \tau_{*c}) \quad \dots\dots\dots(10)$$

ここに、 σ/ρ ：砂の比重、 g ：重力加速度であり、 τ_{*c} は移動限界の無次元掃流力 ($\tau_* = u_*^2/\{(\sigma/\rho - 1)gd\}$ 、 u_* ：摩擦速度)で、ある程度の初期移動がみられる状況で定義されるいわゆる「限界掃流力」よりも厳しい限界値で

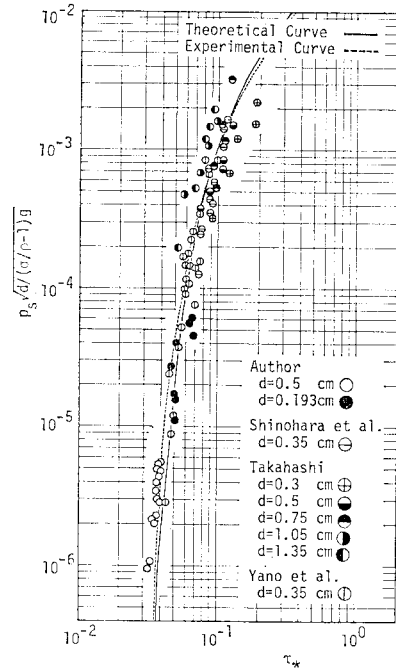


図-3 砂礫の pick-up rate の推定

約 0.035、 F_0 は実験定数で約 0.03 である。なお、式 (10) は 図-3 に示すように理論曲線⁴⁾、実験値ともよく合致している。

ところで砂面擾乱の増幅率を考える場合は初期値が無視される程度まで成長してからの方がわかりやすく、式 (7) において $C=0$ として式 (10) を代入することから次式を得た。

$$(\sigma_y/d) / \sqrt{tu_*d} = \sqrt{2F_0} \cdot \tau_*^{1/4} \{1 - (\tau_{*c}/\tau_*)\}^{3/2} \quad \dots\dots\dots(11)$$

C はほぼ 1 程度であり、 σ_y/d が 5 程度にもなれば式 (7) において C は無視し得る。

(2) 実験的検証

上述したモデルを検証するための実験を行った。実験

表-1 河床波の発生過程に関する実験条件

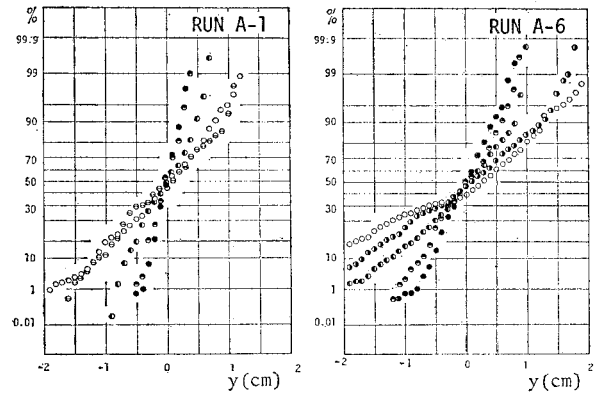
RUN	d(cm)	σ/ρ	i	h(cm)	τ_*	R_{e*}	q_{B*}
A-1	0.065	2.60	1/500	8.20	0.158	26.7	0.146
A-2	0.065	2.60	1/500	6.65	0.128	23.5	0.020
A-6	0.065	2.60	1/500	10.00	0.193	28.8	0.409
A-9	0.065	2.60	1/300	5.80	0.186	28.3	0.099
A-12	0.065	2.60	1/200	8.00	0.384	40.7	0.667
B-8	0.140	2.62	1/200	7.70	0.170	86.0	0.107
B-9	0.140	2.62	1/200	9.50	0.209	95.5	0.189
C-5	0.196	2.62	1/300	7.80	0.167	48.5	0.120
C-9	0.196	2.62	1/200	7.20	0.232	57.0	0.276
C-10	0.196	2.62	1/200	8.50	0.273	61.9	0.376
D-1	0.019	2.57	1/500	7.00	0.468	7.0	0.558
D-2	0.019	2.57	1/500	5.00	0.335	6.0	0.019

N.B. $\tau_* = u_*^2/\{(\sigma/\rho - 1)gd\}$, $R_{e*} = u_*d/\nu$, $q_{B*} = q_B/\sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd^3}$

は長さ 9 m, 幅 33 cm の鋼製可変勾配水路で行われ, 注意深く平坦にならした砂面水路床上に通水し, 自走式超音波測深器を短い時間間隔で走行させることによって河床縦断形状の時間的変化を記録した. なお実験条件は表-1 に示される.

まず 図-4 は河床高分布の時間的変化の一例を示したもので, この図より河床高分布がほぼ正規分布に従っており, その分散が時間とともに増加していることが認められる. 図-5 は河床高の標準偏差の時間的変化を示したもので, 初期の段階では時間の平方根に比例して増加しており砂面擾乱の増幅過程は式 (7) で表現できる. なお 図-5 には Jain と Kennedy³⁾ による実験結果も併示してある. さらに, 図-6 (a), (b) にはそれぞれ河床高分布のひずみ度およびとがり度の時間的変化を示した. いずれも実験値の散乱は大きいながらも正規分布の場合の値と一致している. ただし, とがり度は理論値より若干小さく, これはモデルで考慮されなかった砂の安息角の影響と予想される.

次に底面せん断応力と砂面擾乱の増幅率との関係について検討し, 実験結果と理論曲線 (式 (11)) とを比較して 図-7 に示した. 図より式 (11) は河床高標準偏差の増加の傾向をよく表現するものと思われるが, 若干理論値の方が大きい. これは砂粒の離脱と落下を独立事象として扱ったことによると考えられ, stochastic approach の次の段階では次章に示されるようにこれらの相関を考えるべき



● 1 min. ● 3 min. ● 5 min. ● 10 min. ● 20 min. ⊖ 45 min. ⊕ 90 min. ○ 150 min.

図-4 河床高分布の時間的変化の例

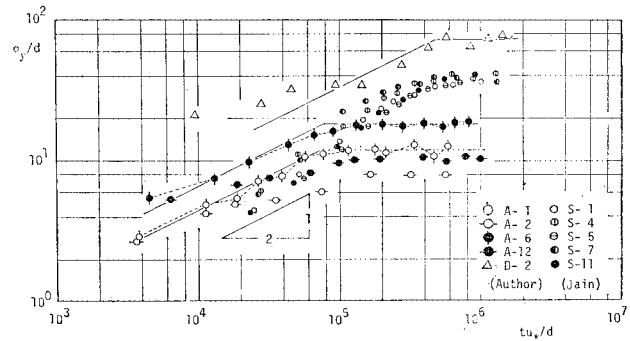


図-5 河床高標準偏差の時間的変化

であることがわかる.

3. 砂礫の運動特性と初期砂面擾乱のスペクトル特性

本章では初期砂面擾乱の初生過程に対する一歩進んだ stochastic approach として, 砂礫の運動に対して先に考えた pick-up rate にさらに step length を考慮した

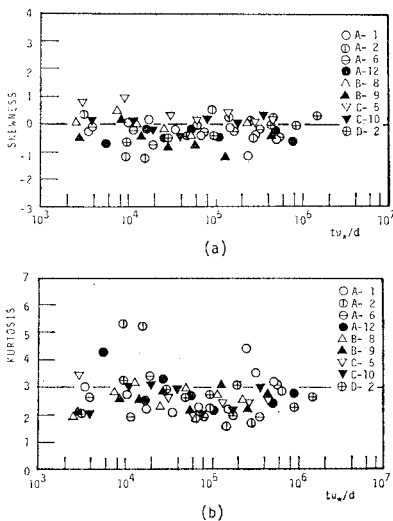


図-6 河床高分布のひずみ度およびとがり度の時間的変化

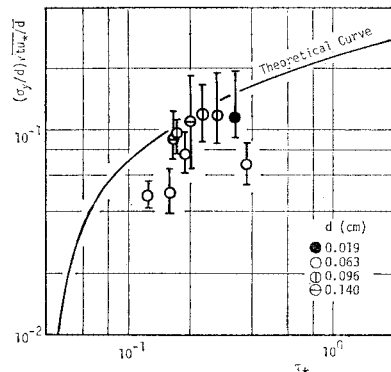


図-7 砂面擾乱の増幅率と底面せん断応力との関係

より現象に忠実なモデルを用い、河床砂礫の離脱と落下の相関を考慮し、これに伴って初生する擾乱の場所的推移の性質を検討する。

(1) 軽微な非平衡状況での砂礫の運動特性

1. で述べたように掃流砂に対する stochastic model は移動床現象の解析、記述に非常に有利であるにもかかわらず、従来はほとんど砂粒群の分散過程を対象とした Lagrange 的モデルが主体であったためそれ以上の発展はみられなかったようである。しかし次に示すような Euler 的解釈も可能で、これによって統計的に非均質な場（流砂の非平衡を生じる場合が多い）の取り扱いも明確に行える。

いま、位置 x (x は水路方向にとられた距離座標) での単位時間当たり、砂粒 1 個の占める面積当りの砂粒落下個数を deposite rate p_d と定義すると、図-8 を参考にこれは pick-up rate p_s と step length の分布の密度関数 $f_X(\xi)$ を用いて次のように与えられる。

$$p_d = \int_0^{x-x_0} p_s(x-\xi) f_X(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 x_0 は流砂の原点で、 $x \leq x_0$ からの給砂がない。十分に長い水路の中央部を対象とすると $x_0 \rightarrow -\infty$ である（平衡状態）。

いま $x_0=0$ として流砂量および砂粒運動に伴う河床高の変化（変動分を無視したもの）を表わす式はそれぞれ次のようになる。

$$q_B(x) = (A_3/A_2) \cdot \int_0^x p_s(x') dx' \int_{x-x'}^{\infty} f_X(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\frac{\partial y(x)}{\partial t} = A_1 d \left\{ \int_0^x p_s(x-\xi) f_X(\xi) d\xi - p_s(x) \right\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 A_1, A_2, A_3 は、それぞれ 1, 2, 3 次元の砂粒の形状係数である。式 (12)~(14) をみてわかるように p_s は断面を与えればそこでの底面せん断応力に対して与えられる量であるのに対し、 p_d, q_B 等はその断面の条件だけでは決定されず step length によって上流側の影響を受ける。すなわち step length が流砂量の relaxation distance⁹⁾ を決定するものといえる。

これらを検証するため、固定床粗面に接続する同一粗度の移動床において出現する軽微な非平衡流砂状況での流砂挙動を実験的に調べた。長さ 9 m の鋼製実験水路で上方から 16 mm 撮影を行い、ダイナミックフレームによってフィルム解析を行った⁷⁾。なお実験条件は表-2 に示される。

実験で対象とした条件では p_s は場所的にはほとんど変化せず、この場合式 (12), (13) はそれぞれ次式となる。

$$p_d(x) = p_s \cdot F_X(x) \quad \dots\dots\dots (15)$$

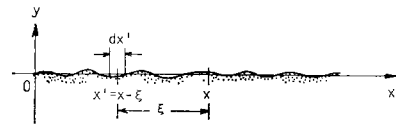


図-8 記号図

表-2 非平衡掃流過程に関する実験条件

RUN	I	h(cm)	u_* (cm/sec)	τ_*	F _r	R _{e*}
1	0.00250	5.95	3.82	0.0488	0.503	70.67
2	0.00250	8.27	4.50	0.0677	0.541	83.25
3	0.00250	9.63	4.86	0.0790	0.432	89.91
4	0.00361	5.30	4.33	0.0627	0.612	80.11
5	0.00417	4.80	4.42	0.0653	0.711	81.77
6	0.00417	5.59	4.78	0.0764	0.703	88.43
7	0.00176	9.63	4.08	0.0556	0.499	75.48
8	0.00150	11.89	4.32	0.0623	0.480	79.92
9	0.00170	11.33	4.34	0.0631	0.471	80.29

$$q_B(x) = p_s (A_3/A_2) d \cdot \int_0^{\infty} \{1 - F_X(x-x')\} dx' \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで、 F_X は step length の分布関数で、いま step length が平坦河床の場合と同様に指数分布する^{2), 3)} とすれば、

$$p_d(x) = p_s \{1 - \exp(-x/A)\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$q_B(x) = (A_3/A_2) p_s A d \{1 - \exp(-x/A)\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

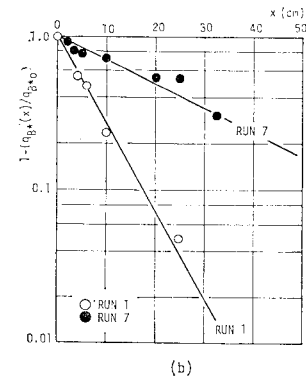
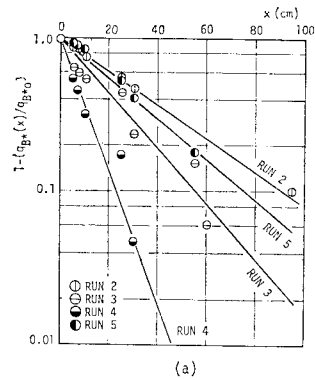


図-9 非平衡流砂量の場所的变化

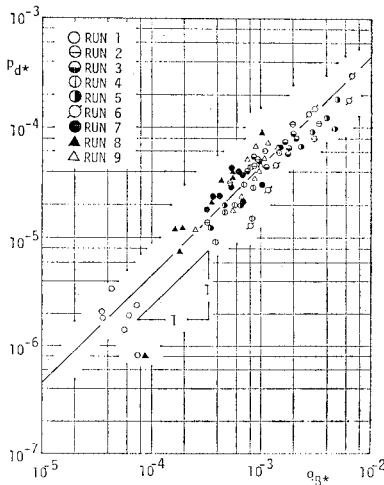


図-10 砂粒の落下率と流砂量との関係

となる。ここに、 A は平均 step length である。なお、このとき次式が成立する。

$$p_{d*}(x) = (A_2/A_3) \cdot (d/A) \cdot q_{B*} \dots\dots\dots(19)$$

ここに、

$$p_{d*} = p_d \sqrt{d/(\sigma/\rho - 1)g}, \quad q_{B*} = q_B / \sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd^3} \dots\dots\dots(20)$$

である。

図-9 および 図-10 に示されるように式 (18) および式 (19) が実験的に認められた。なお 図-9 において q_{B*0} は平衡状態 ($x \rightarrow \infty$) の無次元流砂量で次式で表わされる。

$$q_{B*0} = p_{s*}(A/d) \cdot (A_3/A_2) \dots\dots\dots(21)$$

また、これらの図から逆算される平均 step length A は粒径の 40~250 倍程度となり、平坦河床での従来の実験結果^{9),10)} とほぼ一致している。さらにフィルム解析により砂粒の移動速度およびその変動係数を調べると、これらは場所的にほとんど変化していないことが認められ⁹⁾、また step length は指数分布に従っているなどこの程度の軽微な非平衡状態では、全体としての平均特性(流砂量等)は場所的に異なっても系の構成粒子である個々の砂粒の運動特性はそれほど変化しないことが認められる。

(2) 初期砂面擾乱のスペクトル特性

いま $\bar{p}_d(x)$, $\bar{p}_s(x)$ をそれぞれ場所 x での砂粒 1 個の占める面積当り、単位時間当りの砂粒の落下個数および離脱個数とすると、変動を考慮した河床高変化は次式で与えられる。

$$\partial y(x)/\partial t = \{\bar{p}_d(x) - \bar{p}_s(x)\} A_1 d \dots\dots\dots(22)$$

さて、 y を初期河床高からの高さとし、 $\bar{p}_d(x)$, $\bar{p}_s(x)$ の変動分を $\hat{u}_d(x)$, $\hat{u}_s(x)$ (零平均定常確率過程) と表

わす。流砂が、全体として均衡している場合、 $\bar{p}_d(x)$, $\bar{p}_s(x)$ の平均値である p_d と p_s は等しいから、時刻 t での河床縦断形状 $y(x|t)$ は次式で表わされる零平均定常確率過程となる。

$$y(x|t) = \{\hat{u}_d(x) - \hat{u}_s(x)\} A_1 d \cdot t \dots\dots\dots(23)$$

ところでこうした砂面擾乱の形成過程に対し砂粒の 1 step の運動時間が無視できるとして、

$$\hat{u}_d(x) = \int_0^\infty \hat{u}_d(x-\xi) f_X(\xi) d\xi \dots\dots\dots(24)$$

が成り立つ。このとき $y(x|t)$ の自己相関関数 $R_{yy}(\xi)$ はその定義より次式のように書ける。

$$\begin{aligned} R_{yy}(\xi) &= (A_1 d)^2 \cdot E[\{\hat{u}_d(x) - \hat{u}_s(x)\} \\ &\quad \cdot \{\hat{u}_d(x-\xi) - \hat{u}_s(x-\xi)\}] \\ &= (A_1 d)^2 \cdot \{R_{ss}(\xi) + R_{dd}(\xi) - R_{ds}(\xi) \\ &\quad - R_{sd}(\xi)\} \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

ここで、 $R_{dd}(\xi)$, $R_{ss}(\xi)$ は、 $\hat{u}_d(x)$, $\hat{u}_s(x)$ の自己相関関数、 $R_{sd}(\xi)$, $R_{ds}(\xi)$ はこれらの相互相関関数である。

さて、式 (24) より、

$$\begin{aligned} R_{ds}(\xi) &= E[\hat{u}_d(x) \hat{u}_s(x-\xi)] \\ &= E\left[\int_0^\infty \hat{u}_d(x-s) f_X(s) \cdot \hat{u}_s(x-\xi) ds\right] \\ &= \int_0^\infty R_{ss}(\xi-s) f_X(s) ds = R_{ss}(\xi) * f_X(\xi) \\ &\dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

であり、ここに演算記号 * は畳み込み積分を示す。同様に $R_{sd}(\xi)$, $R_{dd}(\xi)$ も $R_{ss}(\xi)$ と $f_X(\xi)$ の畳み込み積分の形で表わされ、これらの Fourier 変換は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} S_{sd}(\kappa) &= H^*(i\kappa) \cdot S_{ss}(\kappa) \\ S_{ds}(\kappa) &= H(i\kappa) \cdot S_{ss}(\kappa) \\ S_{dd}(\kappa) &= |H(i\kappa)|^2 \cdot S_{ss}(\kappa) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

ここで、 $S_{dd}(\kappa)$, $S_{ss}(\kappa)$ は $\hat{u}_d(x)$, $\hat{u}_s(x)$ のパワースペクトル密度関数、 $S_{ds}(\kappa)$, $S_{sd}(\kappa)$ はこれらのクロススペクトル密度関数である。また、 $H(i\kappa)$ は $f_X(s)$ の Fourier 変換、 κ は角波数、 H^* は H の共役複素数である。

式 (25) の Fourier 変換に式 (27) を代入することから、時刻 t における河床高の波数スペクトル密度関数は次のように表わされる。

$$S_{yy}(\kappa) = S_{ss}(\kappa) \cdot \left\{ \frac{\kappa^2}{(1/A)^2 + \kappa^2} \right\} (A_1 d)^2 \cdot t \dots\dots\dots(28)$$

上式を導くにあたっては step length が平均値 A の指数分布に従うとして $H(i\kappa)$ を計算した。ところで $S_{ss}(\kappa)$ は路床近傍の乱れの空間構造およびそれに対する砂粒の初期移動の応答として評価されるべきものであるが、これについての十分な知見が得られていないの

で、次のように確率過程論的アプローチの常套手段により $\hat{u}_s(x)$ の自己相関関数として 指数形の次式を仮定する。

$$R_{ss}(\xi) = C_0 \exp(-\alpha_0 \xi) \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 C_0 は $R_{ss}(0)$ で $\hat{u}_s(x)$ の分散、すなわち、 $\hat{p}_s(x)$ の分散に相当する。ところで $\hat{p}_s(x)$ は単位時間の砂礫の離脱個数であり、砂礫の河床面からの離脱時間間隔は平坦河床では指数分布するので^{3), 8)},

$$C_0 = p_s \dots\dots\dots (30)$$

である。一方、 α_0 の逆数は、 $\hat{u}_s(x)$ の場所的変動の緩和距離である。このとき、式 (29) の Fourier 変換より $S_{ss}(\kappa)$ が得られ、これを式 (28) に代入して次式が得られる。

$$S_{yy}(\kappa) = 4 \alpha_0 p_s (A_1 d)^2 \cdot t \cdot \left[\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \alpha_0^2) \{\kappa^2 + (1/A)^2\}} \right] \dots\dots\dots (31)$$

さらに上式より、

$$\alpha_y/d = A_1 \sqrt{2} \alpha_0 p_s t / \{\alpha_0 + (1/A)\} \dots\dots\dots (32)$$

が得られる。なお、 \hat{u}_a と \hat{u}_s が無相関の場合は式 (25) より、あるいは式 (32) において $A \rightarrow \infty$ とすることから前章と同じ結果 (式 (7)) が得られる。

さて、 α_0^{-1} は一つの長さスケールで、粒径または水深を基礎とする量であるが、現状ではその評価法が明確でなくここでは平均 step length を採用して諸量とともに代入して計算例を示すこととする。もっとも α_0 あるいは $R_{ss}(\xi)$ については今後詳細な実験的検討を行う必要がある。図-11 はモデルの計算結果と実験結果 (前章の実験結果) を比較した例である。実測スペクトルに比べモデルの方は低波数域で立ち上りがみられること、高波数域における減衰の仕方が緩やかであるなどの相違が認められるが、おおむねよい一致がみられた。なお、

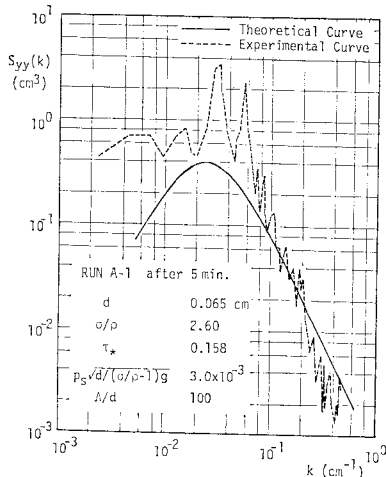


図-11 初期砂面擾乱の波数スペクトルの例

式 (31) をみてわかるようにモデルのスペクトルはそのままの形で (スペクトルピークに対応する波数が変化しない) 全波数域にわたって同じ割合で増加することになり、これは発生初期だけに相当し、その後は波どうしの追いつき統合現象など⁹⁾ 波数間の相互作用が顕著になり波長の変化も生じてくる。

以上河床波の萌芽と推定される砂面擾乱のスペクトル特性について確率過程論的な考察を行った。議論の途中では現象にかかわる諸要素についての情報が十分でないためいくつかの大胆な仮定がなされたが、砂面擾乱の初生およびその統計的性質の概要が明らかにされ実験結果とも比較的良好に対応することがわかった。なお、設定された諸仮定については今後検討を進めるが必ずしもこれらの仮定の真偽が理論展開に本質的な影響を与えるとは思われない。

4. 砂粒の運動に伴う移動床砂面の不安定性について

前章までに明らかにされたように個々の砂礫の不規則な運動が素過程となって移動床砂面に必然的に不規則性が生じ、これが河床波の萌芽と考えられる。こうした初期擾乱を正弦波で近似できれば以後いわゆる不安定解析によって水理条件に対するその盛衰を議論できる。

本章では Kennedy¹⁾、林¹⁰⁾ のポテンシャル流理論に基づいた取り扱い例を、砂粒運動について前章で述べた Euler 的に理解した stochastic model を採用して試み、河床波発達の可能性を検討することとする。

(1) 砂面擾乱の挙動を表わす基礎式

正弦波状擾乱路床の上の流は Milne-Thomson¹¹⁾、Kennedy^{1), 10)} によってポテンシャル流理論を用いて取り扱われ、次の結果が得られている。いま水面、砂面がそれぞれ次式で表わされるものとする。

$$y = \xi(x, t) = A(t) \sin \kappa(x - U_b t) \dots\dots\dots (33)$$

$$y = \eta(x, t) = a(t) \sin \kappa(x - U_b t) - h_0 \dots\dots (34)$$

ここに κ は角波数、 U_b は河床擾乱の伝播速度、 h_0 は一様流部の水深であり、 $A(t)$ 、 $a(t)$ はそれぞれ水面波および砂面波の振幅である。一様流流速を U_0 で表わすとき摂動流速 u に対するポテンシャルは、

$$\phi = \frac{\cosh \kappa y + F_r^2 \kappa h_0 \sinh \kappa y}{\sinh \kappa h_0 - F_r^2 \kappa h_0 \cosh \kappa h_0} U_0 a \cos \kappa(x - U_b t) \dots\dots\dots (35)$$

で与えられ、一方、 $a(t)$ と $A(t)$ の間に次の関係式が得られている⁹⁾。

$$\frac{a(t)}{A(t)} = \left\{ 1 - \frac{1}{F_r^2 \kappa h_0} \tanh \kappa h_0 \right\} \cosh \kappa h_0 \dots\dots\dots (36)$$

ここに, F_r は Froude 数 ($=U_0/\sqrt{gh_0}$) である. 上式より, 水面波と砂面波の位相が同じか逆かを知ることができ擾乱が発達する場合それが dunes または ripples か antidunes かを判断する基準となるもので, その境界は,

$$F_r^2 = \tanh \kappa h_0 / \kappa h_0 \dots\dots\dots (37)$$

である.

さて, 砂粒運動に伴う砂面変形は式 (14) で表わされ, 砂礫の pick-up rate は式 (10) によって河床のせん断応力と関係づけられる. さらに波状路床上の局所流速 ($U=U_0+u$; u : 摂動流速) と底面せん断応力の関係について次式を仮定する. すなわち局所的な水深の場所的变化 (水流の拡大, 収縮の効果) を考慮して,

$$\tau(x)/\rho U^2 = \beta \left\{ 1 - \alpha \frac{\partial(\xi - \eta)}{\partial x} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

と表わし,

$$\tau_2 = \alpha F_r^2 \dots\dots\dots (39)$$

なるパラメーター τ_2 を導入する. また, 平均 step length A については,

$$A = \tau_1 h \dots\dots\dots (40)$$

と置き τ_1 を砂粒運動についてのパラメーターとする. これらのパラメーターの導入は以下の計算の便宜のためであり, それぞれ波状路床上のせん断応力分布, 砂の移動機構の検討から決められるべき量である. 特に τ_1 については A が前述のようにむしろ粒径によって決定される量であり, パラメーター τ_1 はパラメーター h/d に置き換え得る.

以上の考察より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} = & \frac{F_0 \beta A_1}{\sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd}} \left[2 \left(1 - 3 \frac{U_c^4}{U_0^4} + 2 \frac{U_c^6}{U_0^6} \right) \right. \\ & \cdot \left. \left\{ \int_0^\infty \frac{u(x-l)}{U_0} f_X(l) dl - \frac{u(x)}{U_0} \right\} \right. \\ & + \alpha \left(1 - \frac{U_c^2}{U_0^2} \right)^3 \alpha \kappa \\ & \cdot \frac{F_r^2 \kappa h_0 (1 - \operatorname{sech} \kappa h_0) - \tanh \kappa h_0}{F_r^2 \kappa h_0 - \tanh \kappa h_0} \\ & \cdot \left. \left\{ \int_0^\infty \cos \kappa(x - U_b t - l) f_X(l) dl - \cos \kappa \right. \right. \\ & \cdot \left. \left. (x - U_b t) \right\} - \cos \kappa(x - U_b t) + o\{(\alpha \kappa)^2\} \right] \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

となり, ここに U_c は, 砂の移動限界に対する流速である. また, 摂動流速は式 (35) より求められ,

$$u(x) = \phi_x(x, -h_0, t) = F_* U_0 \alpha \kappa \sin \kappa(x - U_b t) \dots\dots\dots (42)$$

となる. ここに,

$$F_* = (1 - F_r^2 \kappa h_0 \tanh \kappa h_0) / (\tanh \kappa h_0 - F_r^2 \kappa h_0) \dots\dots\dots (43)$$

である. さらに step length は指数分布に従うとして式

(41) を計算し, 式 (34) を時間で微分して得られる

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} = & \dot{a}(t) \sin \kappa(x - U_b t) \\ & - a(t) \kappa U_b \cos \kappa(x - U_b t) \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

と等置する. そこで $\dot{a}(t)/a(t)$ が x の関数でない条件を使って $\dot{a}(t)/a(t)$ および擾乱の伝播速度 U_b がそれぞれ次のように求められる.

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = & S_* \left\{ \alpha \left(1 - \frac{U_c^2}{U_0^2} \right)^3 F^{**} \right. \\ & \left. - 2 \left(1 - 3 \frac{U_c^4}{U_0^4} + 2 \frac{U_c^6}{U_0^6} \right) F_* \kappa A \right\} \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_b = & S_* \left\{ 2 \left(1 - 3 \frac{U_c^4}{U_0^4} + 2 \frac{U_c^6}{U_0^6} \right) F_* \right. \\ & \left. + \alpha \kappa A \left(1 - \frac{U_c^2}{U_0^2} \right)^3 F^{**} \right\} \dots\dots\dots (46) \end{aligned}$$

ここに,

$$S_* = \frac{F_0 \beta A_1}{\sqrt{(\sigma/\rho - 1)gd}} F_r^2 \kappa h_0 \frac{\kappa A}{1 + (\kappa A)^2} \dots\dots\dots (47)$$

$$\begin{aligned} F^{**} = & \{ F_r^2 \kappa h_0 (1 - \operatorname{sech} \kappa h_0) - \tanh \kappa h_0 \} / \\ & \cdot (F_r^2 \kappa h_0 - \tanh \kappa h_0) \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

である.

(2) 移動床砂面の不安定性

移動床砂面の不安定性は式 (45), 特にその右辺の { } 内の符号で判断される. すなわち (U_c/U_0) の 2 乗以上の項を無視すると不安定性の規準は次式で表わされる.

$$\begin{aligned} M_* \equiv & \alpha F^{**} - 2 F_* \kappa A \\ = & \frac{1}{F_r^2 \kappa h_0 - \tanh \kappa h_0} \left[\alpha \{ F_r^2 \kappa h_0 (1 - \operatorname{sech} \kappa h_0) \right. \\ & \left. - \tanh \kappa h_0 \} - \kappa A (F^2 \tanh \kappa h_0 - 1) \right] \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

上式の分母=0 も安定・不安定の一つの境界でこれは式 (37) と一致している. 一方, 上式の分子=0 から得られる境界曲線は, α, A についてパラメーター τ_1, τ_2 を導入して次のようになる.

$$\begin{aligned} F_r^2 = & \{ 2 + \tau_* (1 - \operatorname{sech} \kappa h_0) \\ & \pm \sqrt{\Gamma_1 - \Gamma_2} \} / 4 \kappa h_0 \tanh \kappa h_0 \dots\dots\dots (50) \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned} \Gamma_1 - \Gamma_2 = & \{ 4 + \tau_*^2 (1 - \operatorname{sech} \kappa h_0) \} \\ & - 4 \tau_* (2 \tanh^2 \kappa h_0 + \operatorname{sech} \kappa h_0 - 1) \dots\dots\dots (51) \end{aligned}$$

$$\tau_* = \tau_2 / \tau_1$$

であり, 式 (50) は ($\Gamma_1 - \Gamma_2$) > 0 の場合に限る.

τ_* をパラメーターにして $F_r \sim \kappa h_0$ 面で式 (37), (50) によって与えられる安定・不安定の領域区分を示したのが 図-12 であり, 特に $\tau_* = 1.5$ の場合の不安定領域を斜線を施して示した. 図の破線は式 (37) を示しており, これより上方の不安定領域は antidunes, 下

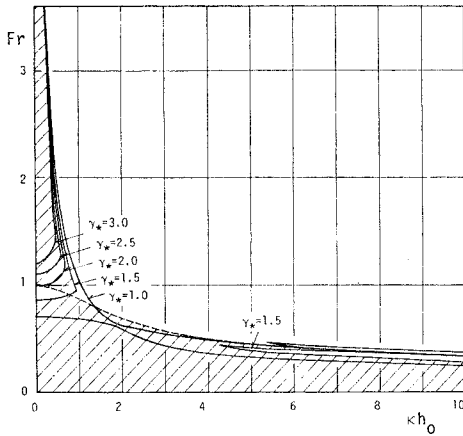


図-12 パラメーター γ_* による砂面の不安定領域の変化

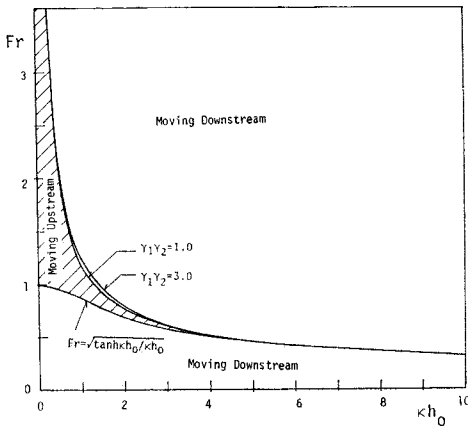


図-13 砂面擾乱の伝播方向の領域区分

方のそれは ripples または dunes の形成される領域である。

一方、砂面擾乱の伝播方向については式 (46) の α , A をパラメーター r_1, r_2 に置き換えて表わすと次式が得られ、これを示したのが 図-13 で図の斜線部分が擾乱が上流側へ遡上する領域である。

$$U_b = C_0 \kappa \beta g \frac{r_1 (\kappa h_0)^2}{1 + (r_1 \kappa h_0)^2} \cdot \frac{1}{F_r^2 \kappa h_0 - \tanh \kappa h_0} \cdot [2 \kappa h_0 (\tanh \kappa h_0) F_r^4 - \{2 - r_1 r_2 (\kappa h_0)^2 \cdot (1 - \operatorname{sech} \kappa h_0)\} F_r^2 - r_1 r_2 \kappa h_0 \tanh \kappa h_0] \quad (52)$$

なお、これらの領域の境界はパラメーター $r = r_1 \cdot r_2$ の変化に対しては比較的鈍感である。図-13 を 図-12 と比較してわかるように antidunes のほとんどは上流方向へ、dunes と ripples はすべて下流方向に伝播することになり、実験事実とも一致する。

上記の結果は Kennedy¹¹⁾, 林¹⁰⁾のそれとほとんど一致しており、図-14 に示すようにほぼ河床形態の領域区分と一致している。図-14 に示された実験値は U.

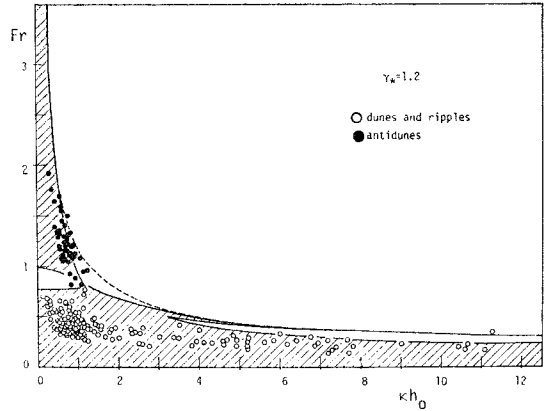


図-14 河床形態区分 (小規模 2 次元) の実験的検証

S.G.S.¹²⁾ および田中¹³⁾によるものであり、一方、計算曲線は 図-12 を参考に実験値との適合性を考慮し、 $r_* = 1.2$ に対応するものを示した。しかし先にも述べたように上述の理論は河床波の発生初期に限られ、成長過程においては波長も増加する⁹⁾ことを考えれば 図-13 は必ずしも平衡状態での河床波の領域区分を示すものではなく、不安定解析の検証は初期の発達過程に関する詳細な実験でなされるべきである。また、こうした実験的検討に基づく考察が河床波の発生・形成機構をより明確にする手掛りとなるものと考えられる。

5. 結 論

本研究では砂礫の掃流過程に内在する固有の非平衡性に着目し、これを備えた流砂モデルである pick-up rate と step length から構成される stochastic model をもとに、河床波の発生機構について論じた。

まず、2. では掃流砂の挙動が離散的であることに注目し、河床における砂礫のランダムな離脱・落下を素過程とした確率過程としてモデル化し、砂面の凹凸が発生、増大していくことを示した。この結果、砂面高さの分布はほぼ正規分布で近似され、全体として流砂の均衡した河床でも河床高の分散が時間に比例して増加することが示され、水路実験の結果とよく合致した。

次に、こうした砂面擾乱の空間相関を検討するため step length の情報を加味した。これによって軽微な非平衡流砂過程が比較的よく記述され、河床での砂粒の離脱・落下が step length の分布の密度関数を impulse response とした線形系で表現される。これより線形系の性質を利用して砂の挙動の確率的特性と砂面変動特性を関係づけ、初生期の砂面擾乱の統計的性質が検討され実験結果と比較された。

最後に上記のように初期擾乱の出現が明らかにされた

ので、これに対する砂面の不安定性解析を行った。ここでは擾乱路床上の流れにポテンシャル流理論を用いた Kennedy^{1),6)}、林¹⁰⁾の手法を継承し、さらに流水の局所的な拡大・縮小が流速とせん断応力の関係に及ぼす効果を考慮し、砂礫の運動に対しては pick-up rate と step length を用いて表現した。本論文での解析ではいわゆる「遅れ距離」^{1),6),10)}を仮定しておらず、おもに step length がこの役割を果たしている。すなわち、遅れ距離の大部分を占める流砂の relaxation distance¹⁰⁾は非平衡な流砂状況では必然的に出現するものであるが、step length を用いた流砂モデルではこの仕組がモデルに内在されている。これによって得られた解析結果は従来のもの^{1),6),10)}とほぼ一致し満足すべきものと思われる。

以上のように個々の砂礫の運動を stochastic model で表現することによってその固有の性質である間歇性、確率的であること、非平衡性を十分考慮でき、少なくとも流砂量式のもつ欠陥のために遅れ距離など曖昧な仮定を導入せざるを得なかった従来の不備を克服できた。ただし、各章において述べたように詳細な点でまだ多くの仮定、推論が含まれており、今後これらを明確にしていく必要がある。

参 考 文 献

- 1) Kennedy, J.F. : The mechanics of dunes and antidunes in erodible bed channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 16, part 4, pp. 521~544, 1963.
- 2) Einstein, H.A. : Der Geschiebetrieb als Wahrscheinlichkeitsproblem, *Mitteilung der Versuchsanstalt für Wasserbau an der Eidgenössische Technische Hochschule in Zurich*, Verlag Rascher & Co., p. 110, 1937.
- 3) 中川博次・辻本哲郎：掃流過程に対する確率モデルとその一般化，土木学会論文報告集，第 291 号，pp. 73~83, 1979.
- 4) 中川博次・辻本哲郎：水流による砂れきの移動機構に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，第 244 号，pp. 71~80, 1975.
- 5) Jain, S.C. and J.F. Kennedy : The growth of sand waves, *Proc. 1st International Symposium on Stochastic Hydraulics*, Pittsburgh, USA, pp. 449~471., 1971.
- 6) Kennedy, J.F. : The formation of sediment ripples, dunes and antidunes, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 1, pp. 147~168, 1968.
- 7) 中川博次・辻本哲郎・宮本博司：16 mm 撮影による掃流砂運動の特性量解析と流砂の平衡状態について，京都大学防災研究所年報，第 21 号 B-2, pp. 407~421, 1978.
- 8) 矢野勝正・土屋義人・道上正規：砂れきの掃流機構の確率過程としての特性について，京都大学防災研究所年報，第 11 号 B, pp. 61~73, 1968.
- 9) 中川博次・辻本哲郎：河床波の発達性状に関する実験的考察，京都大学防災研究所年報，第 19 号 B, pp. 289~309, 1976.
- 10) Hayashi, T. : Formation of dunes and antidunes in open channels, *Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division*, Vol. 96, HY 2, pp. 357~366, 1970.
- 11) Milne-Thomson, L.M. : Steady flow over a sinuous bottom, *Theoretical Hydrodynamics*, 5th edition, Macmillan, p. 444, 1968.
- 12) Guy, H.P., D.B. Simons and E.V. Richardson : Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956~61, *Geological Survey Professional Paper*, 462-1, U.S. Government Printing Office, p. 96, 1965.
- 13) 田中祐一郎：Antidunes に関する実験的研究，京都大学防災研究所年報，第 13 号 B, pp. 271~284, 1970.

(1978.11.9・受付)