

積分方程式法の解析精度の向上に関する考察

SOME CONSIDERATIONS ON THE IMPROVEMENT OF
INTEGRAL EQUATION METHOD

小林 昭一*・西村 直志**

By Shoichi KOBAYASHI and Naoshi NISHIMURA

1. はじめに

積分方程式法は、最近次第に適用範囲が拡大されて、動的問題とか非線形問題にも適用が試みられている。しかしながら、基本的な数値解析法はあまり進展をみず、積分方程式法による解の良否を左右するものが何であるかという検討もほとんど行われていない。

積分方程式は一般には数値的に解かざるを得ないけれども、この際にまず予想されることは、解の精度は対象とした境界値問題における境界の近似と分割、およびその分割された区間上での関数の形状とに左右されるということであろう。われわれも解の精度を向上させる手法を模索し、一重層ポテンシャルあるいは Green 公式に基づく二重層ポテンシャルを含む解析を試みてきた。その結果、数値解析的には、同じ境界分割数で、境界での関数を区間上で一定として近似した場合、特に境界の近傍での解の精度は、前者より後の方が著しく劣ることが見出された。本研究は、この原因を少し詳細に検討するために、2次元 Laplace 方程式を例にとって解の精度に関連するいくつかの要因について検討し、具体的な問題について数値実験を通して確かめたものである。すなわち、積分方程式の近似法と、その近似された方程式の解法を中心に議論し、どのような積分方程式を導くことが有利であるかを検討した。

まず、Laplace 方程式の Neumann 問題の解を Green の公式ならびに一重層ポテンシャルを用いて積分方程式に定式化する手法と、境界での関数近似の意義について検討し、同時に境界を折線で近似した場合について選点法および Galerkin 法による近似解法を示した。

具体的な例として、楕円棒のねじり問題を Green の公式を用いて定式化し、選点法および Galerkin 法によ

る数値解を示した。また、境界近傍で微分まで含めてよい結果を得るためには、Green 公式を用いる場合、一重層ポテンシャルによる場合よりも高次の近似が必要となることが示された。

最後に上記の例で得た推論を確認するために、有限幅水路中央に楕円断面柱が配置された2次元ポテンシャル流れの問題を解析した。

2. 積分方程式法による Laplace 方程式の
Neumann 問題の解析

積分方程式法により Neumann 問題を解く方法には、Green の公式を用いるものと、一重層ポテンシャルを用いるものの2つがある。本章では、兩者について説明する。

(1) Green の公式による定式化

2次元内部問題を考える。解析する領域を D 、その境界を ∂D 、 D の外部を D^c とする。 $D \cap \partial D = \phi$ 、 $D^c \cap \partial D = \phi$ である。

u を $\Delta u = 0$ を満たす関数とする。Green の公式は、よく知られているように

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln|x-y|^{-1}$$

を用いて次のように表わされる。

$$u(x) = \int_{\partial D} G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} dS_y - \int_{\partial D} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} u(y) dS_y, \quad x \in D \dots \dots \dots (1)$$

$$0 = \int_{\partial D} G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} dS_y - \int_{\partial D} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} u(y) dS_y, \quad x \in D^c \dots \dots (2)$$

ここで、 n_y 等は ∂D 上の点 y での ∂D の外向き単位

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学教室

法線ベクトルを表わす。また、 dS_y の添字は積分変数
を表わしている。ポテンシャルとしては式 (1), (2) の
第 1 項は一重層ポテンシャル, 第 2 項は二重層ポテンシ
ヤルといわれる。x を D 内から ∂D に近づけると,

$$u(x) = \int_{\partial D} G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} dS_y - \lim_{\bar{x} \rightarrow x} \int_{\partial D} \frac{\partial G(\bar{x}, y)}{\partial n_y} u(y) dS_y, \quad x \in \partial D, \bar{x} \in D \dots \dots (3)$$

となり, 二重層の Jump を考慮すると, ∂D が滑らかで
あれば, 次の積分方程式を得る。

$$\frac{1}{2} u(x) + \int_{\partial D} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} u(y) dS_y = \int_{\partial D} G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} dS_y, \quad x \in \partial D \dots \dots (4)$$

∂D が Lyapunov 面であれば, 式 (4) の左辺の積分は
通常の積分となる。なお, 角がある場合には, 角の上で
は式 (4) の左辺の係数は 1/2 ではなくなる【付録】参
照)。

数値解析法としては, 式 (2) を用いるもの¹⁾ および式
(3) または式 (4) を用いるもの²⁾ が考えられる。まず式
(4) を用いる方法について簡単に説明する。

Neumann 問題では, ∂D 上での u が未知関数であ
る。 ∂D 上で u を有限個の形状関数 φ_i を用いて, $u(x)$
 $\doteq \sum \varphi_i(x) u_i$ と近似できれば, 式 (4) は次のように近
似される。

$$\sum_i \left(\frac{1}{2} \varphi_i(x) + \int_{\partial D} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \varphi_i(y) dS_y \right) u_i = \int_{\partial D} G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} dS_y \dots \dots (5)$$

選点法を用いる場合には, N 個の $x_i (i=1, 2, \dots, N)$
を ∂D 上に取って,

$$\sum_j \left(\frac{1}{2} \varphi_j(x_i) + \int_{\partial D} \frac{\partial G(x_i, y)}{\partial n_y} \varphi_j(y) dS_y \right) u_j = \int_{\partial D} G(x_i, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} dS_y \dots \dots (6)$$

を解いて $u_j (j=1, 2, \dots, N)$ を求めることになる。

Galerkin 法を用いれば,

$$\sum_j \left[\int_{\partial D} \varphi_i(x) \left\{ \frac{1}{2} \varphi_j(x) + \int_{\partial D} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \varphi_j(y) dS_y \right\} dS_x \right] u_j = \int_{\partial D} \varphi_i(x) \left(\int_{\partial D} G(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n} dS_y \right) dS_x \dots \dots (7)$$

を解いて $u_j (j=1, 2, \dots, N)$ を求めることになる。

なお, $u = \text{const.} (\neq 0)$ は, 式 (4) の同次方程式の非自
明解であるので, これに対応する代数方程式 (6), (7)
は非正則となる。したがって, u_i の 1 つを既知として
与えるか, 対称性のある問題では適当に対称性を利用す

るかして解かなければ一意解が得られない。なお,
Fredholm の第 3 定理から, $\int \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$ ならば, 式
(4) が可解であることが知られている。よって, 適切な
条件の下では, 式 (6), (7) の解が求まる。

$u(x) (x \in D)$ の近似解は, 式 (5) を得たのと同様な
方法で, 式 (1) を離散化して求める。この際, $\partial u / \partial x_1$,
 $\partial u / \partial x_2$ 等は, 式 (1) を直接微分したものを用いるとよ
い。また, ∂D 上での, $u, \partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2$ を求めるに
は, u については式 (4) を用いてもよいが, 後二者につ
いては適当な形状関数 φ に対して,

$$\int G(x, y) \varphi(y) dS_y, \int \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \varphi(y) dS_y, \quad (x \in D)$$

等を解析的に求め, x を ∂D 上に近づける極限計算を
行うのが簡単であろう。この場合には, アルゴリズムの
一般性を保持しつつ, 計算を容易にするためには ∂D
自体をもたえれば折線などでモデル化すると簡便であ
らう。

折線でモデル化した境界の一区間について考えてみる
と, Fig. 1 に示すように, $\varphi=1$ とすると, 上記の積分
は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \int G(x, y) dS_y &= \frac{1}{2\pi} \{ l + (x_1 - l) \ln r_1 \\ &\quad - x_1 \ln r_0 - x_2 \theta \} \\ \int \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} dS_y &= -\frac{\theta}{2\pi} \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

ここに, 式中の記号については Fig. 1 を参照された
い。

$\partial u / \partial x_i$ の評価は, 式 (8) の微分を取り, 適当に座標
変換を行って, 極限移行操作を行うことにより求められ
る【付録】参照)。ただし, このような近似を行うと,
境界での $u, \partial u / \partial n$ は不連続となり, また ∂D にも角
が生じることになる。前者は高次の近似を取ることによ
り回避できるが, 区分的に一定という近似では, 二重層
ポテンシャルおよび一, 二重層ポテンシャルの微分が,
また区分的に線形という近似では, 一, 二重層ポテンシ
ヤルの微分が角においては一般には収束しないことを注
意されたい (これを避けるためには, ∂D を滑らかな曲

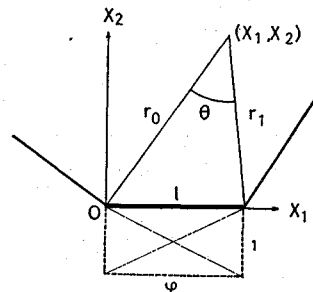


Fig. 1 Local coordinate system for calculation of potentials.

線で近似するか、あるいは、境界に非常に近い点での値を境界上の値の近似値として採用するかのいずれかによらなければならないであろう。後者では、上記の極限の存在しない場合については、「境界に非常に近い点」の取り方によって結果が大きく変化することは明白であり、常によい方法とは考えられない。なお境界形状を近似する問題も重要であるが、これについてはほかの機会に譲り、ここでは折線でモデル化した境界上での区間近似関数にのみ焦点を絞る。

以上、式(4)を用いる数値解法について説明した。まったく同様なことが式(3)についてもあてはまる。以下で示した Green 公式による解析は、実は式(3)を用いたものである。

(2) 一重層ポテンシャルによる定式化

一重層密度 φ を用いて、 u が、

$$u(x) = \int_{\partial D} G(x, y) \varphi(y) dS_y, \quad x \in D \dots\dots(9)$$

と表わされたとする。いま、これを微分して、内部からの極限を取ると次のようになる。

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} \int_{\partial D} \frac{G(\bar{x}, y)}{\partial n_x} \varphi(y) dS_y, \quad \bar{x} \in D, \quad x \in \partial D \dots\dots(10)$$

∂D が滑らかであれば、式(10)は、

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = \frac{\varphi(x)}{2} + \int_{\partial D} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} \varphi(y) dS_y, \quad x \in \partial D \dots\dots(11)$$

となる。この式は、2.(1) に述べたのと同様な近似によつて解くことができる。

3. Neumann 問題の数値解析例

(1) 棒のねじり問題³⁾

典型的な Neumann 問題の例として、棒のねじり問題を取り上げる。

そり関数を φ とすると、弾性棒のねじり問題は直交デカルト座標系 ($o-xyz$) (以後、具体的な問題では、このような表記法を用いる) で次のように定式化される。

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= 0, \quad \tau_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right), \\ \tau_{yz} &= G\theta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \quad (D \text{ において}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= y n_x - x n_y \quad (\partial D \text{ において}), \\ d &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(12)$$

ここに、 G, θ はせん断弾性係数、単位長さ当りのねじれ角、 (n_x, n_y) は ∂D の単位外向き法線、 $\partial \varphi / \partial n$ は法

Table 1 List of calculations carried out; Torsion of an elliptic cylinder, C: collocation, G: Galerkin

Case	1	2	3	4	5	6	7	8
approximation function in a boundary segment	const.				linear			
number of boundary segments	26		54		28		52	
method	C	G	C	G	C	G	C	G

線導関数である。

(2) Green 公式を用いた解析

長軸 $10a$ 、短軸 $5a$ の楕円断面棒のねじり問題の解析を Green の公式に基づいて、Table 1 に示すように行った。この問題の厳密解は $\varphi = -0.6xy$ で与えられる。

なお、Galerkin 法の場合には、式(7)の2重積分の内側の積分は 2.(1) で述べたモデルによって厳密に評価し、外側の積分は、区間ごとに5点の Gauss 積分により近似した。

得られた結果を示すと次のようである。

(i) 内点での $-\varphi, -\tau_{xz}, \tau_{yz}$ を Fig. 2~9 に示す。なお、 φ については、 $x=0, y=-5a$ で $\varphi=0$ となるようにした。

φ に関しては、上記のような数値計算法による限り選点法、Galerkin 法の別によらず、精度は分割数を多くすることにより、また近似関数を区間一定から区間線形近似へとすることにより向上していることがわかる。応力の精度に関しても同様のことがいえる。これより、積分方程式法の精度を左右するものは、分割数と近似関数の選び方であること、および、近似関数の選び方は効率の問題でしかあり得ないこと、すなわち、低次近似でも分割を細かくすれば、応力まで含めて精度の向上を期待できることがわかる。

(ii) 境界上での φ の値を Table 2~4 に示す。近似関数を区間一定とした場合には、境界を内接多角形モデルで近似しているので、代表点は実際の楕円境界の内部に落ちることになる。厳密解としては、この内部の点の値を用いた。近似関数を線形とした場合には、角に代表点を取っており、実際の楕円境界上の点と一致しているので、厳密解としては境界上の値を用いている。この場合も、選点法、Galerkin 法の別によらず、いずれの近似関数を用いても、必要ならば分割を細かくすることによって高精度の解を得ることができる。ただし、 $x=10a$ 近くでは、精度が落ちることが認められる。これは、この辺で曲率が大きくなるので、直線近似による角の影響が顕著に現われたためと考えられる。高精度化のためには、さらに細分割が必要であろう。なお、境界値の精度の良否と内点のそれとは必ずしも一致しないようで

ある。

(iii) 境界上での応力をまとめて **Table 5~8** に示す。いずれも近似関数は区間一定としたものである。境界上の応力の値は、内点のそり関数や応力、あるいは境界上のそり関数の精度に比べてきわめて精度が悪いことがわかる。しかも、分割数を増しても、まったく精度が

Table 2 Warping function on boundary; constant approximation

$x[a]$	$y[a]$	exact[a^2]	26 boundary segments	
			collocation[a^2]	Galerkin[a^2]
0.000	4.975	0.000	0.001 (—)*	0.009 (—)*
2.000	4.872	5.846	5.811 (0.6)	5.796 (0.9)
4.000	4.550	10.92	10.84 (0.7)	10.81 (1.0)
6.000	3.950	14.22	14.05 (2.0)	14.01 (2.8)
7.750	3.102	14.42	14.17 (1.7)	14.12 (2.1)
9.000	2.098	11.33	11.00 (2.9)	10.95 (3.4)
9.750	0.781	4.569	4.373 (4.3)	4.332 (5.2)

* relative error (%)

Table 3 Warping function on boundary; constant approximation

$x[a]$	$y[a]$	exact[a^2]	54 boundary segments	
			collocation[a^2]	Galerkin[a^2]
0.000	4.994	0.000	0.006 (—)*	0.022 (—)*
0.750	4.984	2.243	2.239 (0.2)	2.223 (0.9)
1.500	4.937	4.443	4.444 (0.02)	4.428 (0.3)
2.500	4.834	7.251	7.240 (0.2)	7.222 (0.4)
3.500	4.676	9.820	9.800 (0.2)	9.780 (0.4)
4.500	4.456	12.03	12.00 (0.2)	11.98 (0.4)
5.500	4.165	13.74	13.70 (0.3)	13.68 (0.4)
6.500	3.785	14.76	14.71 (0.3)	14.68 (0.5)
7.500	3.285	14.78	14.71 (0.5)	14.68 (0.7)
8.250	2.817	13.94	13.85 (0.6)	13.83 (0.8)
8.750	2.407	12.64	12.53 (0.9)	12.51 (1.0)
9.250	1.870	10.38	10.27 (1.1)	10.25 (1.3)
9.650	1.278	7.400	7.259 (1.9)	7.234 (2.2)
9.900	0.497	2.952	2.870 (2.8)	2.842 (3.7)

* relative error (%)

Table 4 Warping function on boundary; linear approximation

x [a]	exact [a^2]	28 boundary segments		52 boundary segments	
		collocation [a^2]	Galerkin [a^2]	collocation [a^2]	Galerkin [a^2]
0.0	0.000	0.000(—)*	0.000(—)*	0.000(—)*	0.000(—)*
1.0	2.985	2.939(1.5)	2.949(1.2)	2.982(0.1)	2.938(1.6)
2.0	5.879			5.872(0.1)	5.845(0.6)
3.0	8.585	8.536(0.6)	8.588(0.03)	8.575(0.1)	8.550(0.4)
4.0	11.00			10.98 (0.2)	10.96 (0.4)
5.0	12.99	12.91 (0.6)	13.01 (0.2)	12.97 (0.2)	12.96 (0.2)
6.0	14.40			14.38 (0.1)	14.37 (0.2)
7.0	15.00	14.90 (0.7)	15.02 (0.1)	14.97 (0.2)	14.98 (0.1)
8.0	14.40			14.37 (0.2)	14.37 (0.2)
8.5	13.43	13.33 (0.7)	13.39 (0.3)	13.42 (0.1)	13.38 (0.4)
9.0	11.77			11.77 (0.0)	11.75 (0.2)
9.5	8.899	8.927(0.3)	8.909(0.1)	8.897(0.02)	8.861(0.4)
9.8	5.851			5.940(1.5)	5.906(0.9)
10.0	0.000	0.000(—)	-0.006(—)	0.002(—)	0.033(—)

* relative error (%)

よくなるようである。このことに関しては次章で考察する。

4. 境界上の値についての考察

境界上の応力値の精度が悪いことは先に述べた。これに関連して、まずよく知られた、Green 式を満たす解が境界条件を満たす機構を思い起こしてみる。

式 (1), (2) は, ∂D 近傍では式 (3) と等価であるので, 式 (1), (2) を次のように書き直したものについて考える。

Table 5 Stresses on boundary; collocation, constant approximation, 26 boundary segments

$x[a]$	$y[a]$	$-\tau_{xz}[a/G\theta]$		$\tau_{yz}[a/G\theta]$	
		exact	numerical	exact	numerical
0.000	4.975	7.960	6.352(20)*	0.000	0.000 (—)*
2.000	4.872	7.795	6.296(19)	0.800	0.6361(20)
4.000	4.550	7.280	6.120(16)	1.600	1.322 (17)
6.000	3.950	6.320	5.774(9)	2.400	2.172 (10)
7.750	3.102	4.963	5.284(6)	3.100	3.266 (5)
9.000	2.098	3.357	4.374(30)	3.600	4.615 (28)
9.750	0.781	1.250	2.062(65)	3.900	6.459 (66)

* relative error (%)

Table 6 Stresses on boundary; Galerkin, constant approximation, 26 boundary segments

$x[a]$	$y[a]$	$-\tau_{xz}[a/G\theta]$		$\tau_{yz}[a/G\theta]$	
		exact	numerical	exact	numerical
0.000	4.975	7.960	6.353(20)*	0.000	0.000 (—)*
2.000	4.872	7.795	6.297(19)	0.800	0.6367(20)
4.000	4.550	7.280	6.120(16)	1.600	1.324 (17)
6.000	3.950	6.320	5.770(9)	2.400	2.184 (9)
7.750	3.102	4.963	5.278(6)	3.100	3.276 (6)
9.000	2.098	3.357	4.360(30)	3.600	4.627 (29)
9.750	0.781	1.250	2.036(63)	3.900	6.471 (66)

*relative error (%)

Table 7 Stresses on boundary; collocation, constant approximation, 54 boundary segments

$x[a]$	$y[a]$	$-\tau_{xz}[a/G\theta]$		$\tau_{yz}[a/G\theta]$	
		exact	numerical	exact	numerical
0.000	4.994	7.990	6.421(20)*	0.000	0.000 (—)*
0.750	4.984	7.974	6.511(18)	0.300	0.2441(19)
1.500	4.937	7.899	6.393(19)	0.600	0.5416(10)
2.500	4.834	7.734	6.348(18)	1.000	0.8195(18)
3.500	4.676	7.482	6.264(16)	1.400	1.163 (17)
4.500	4.456	7.130	6.145(14)	1.800	1.536 (15)
5.500	4.165	6.664	5.984(10)	2.200	1.952 (11)
6.500	3.785	6.056	5.766(5)	2.600	2.443 (6)
7.500	3.285	5.256	5.433(3)	3.000	3.108 (13)
8.250	2.817	4.507	5.126(14)	3.300	3.725 (13)
8.750	2.407	3.851	4.792(24)	3.500	4.227 (21)
9.250	1.870	2.992	4.132(44)	3.700	5.042 (36)
9.650	1.278	2.045	3.281(60)	3.860	5.751 (49)
9.900	0.497	0.795	1.431(80)	3.960	6.748 (70)

* relative error (%)

Table 8 Stresses on boundary; Galerkin, constant approximation, 54 boundary segments

$x[a]$	$y[a]$	$-\tau_{xx}[a/G\theta]$		$\tau_{yz}[a/G\theta]$	
		exact	numerical	exact	numerical
0.000	4.994	7.990	6.421(20)*	0.000	0.000 (-)*
0.750	4.984	7.974	6.512(18)	0.300	0.2435(19)
1.500	4.937	7.899	6.393(19)	0.600	0.5401(10)
2.500	4.834	7.734	6.348(18)	1.000	0.8203(18)
3.500	4.676	7.482	6.264(16)	1.400	1.163 (17)
4.500	4.456	7.130	6.145(14)	1.800	1.536 (15)
5.500	4.165	6.664	5.984(10)	2.200	1.953 (11)
6.500	3.785	6.056	5.765(5)	2.600	2.445 (6)
7.500	3.285	5.256	5.429(3)	3.000	3.117 (4)
8.250	2.817	4.507	5.132(14)	3.300	3.717 (13)
8.750	2.407	3.851	4.793(24)	3.500	4.226 (21)
9.250	1.870	2.992	4.128(38)	3.700	5.045 (36)
9.650	1.278	2.045	3.278(60)	3.860	5.752 (49)
9.900	0.497	0.795	1.413(78)	3.960	6.753 (71)

* relative error (%)

$$u(x) = \int G(x, y)f(y) dS_y - \int \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} g(y) dS_y, \quad x \in D \dots (13)$$

$$0 = \int G(x, y)f(y) dS_y - \int \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} g(y) dS_y, \quad x \in D^c \dots (14)$$

$u, \partial u/\partial n$ を ∂D 上で g, f と書き直した理由は、境界上でポテンシャル表現とポテンシャル密度の区別を明確にするためである。式 (13), (14) で x を境界 ∂D に近づけて、両者の差を取ると、二重層ポテンシャルの Jump の性質により、 $u(x) = g(x) (x \in \partial D)$ となる。また、式 (13), (14) に $\partial/\partial n_x$ を作用させて、 x を境界 ∂D に近づけて、両者の差を取ると、一重層ポテンシャルの微分の Jump の性質と、二重層ポテンシャルの微分(存在するとして)は境界の内側および外側からの極限值が等しいという性質とから、 $\partial u(x)/\partial n = f(x) (x \in \partial D)$ となる。

さて、選点法について考えてみる。式 (13), (14) における g を選んだ近似関数 g^* で置き換える。積分方程式 (4) は、式 (13) または (14) の極限であるから、少なくとも選点では式 (13), (14) が成立しており、近似解においても選点において $u = g$ が成立すると考えてよい。一方、式 (14) は D^c では近似的に満たされるにすぎず、それゆえ、式 (14) の法線微分を取ったものは選点においても 0 となるとは限らない。このことは、先の議論を考慮して $\partial u/\partial n = f$ は選点においても満たされるとは限らず一般に Dirichlet 条件に比べて Neumann 条件は満たされにくいことを示唆している。特に関数値の変化の大きいところでは、このような機構による誤差の存在を否定できないであろう。しかし、3. で述べた境界での応力の誤差の大きさを説明するには次の考察が

必要である。

境界値、特に接線微分について検討しよう。ポテンシャル表現式 (13) およびその接線微分の境界への極限值は、

$$u(x_0) = \int_{\partial D} G(x_0, y)f(y) dS_y - \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x_0, y)g(y) dS_y + \frac{g(x_0)}{2} \dots (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}(x_0) = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial s} G(x_0, y)f(y) dS_y - \int_{\partial D} \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial n_y}(x_0, y)(g(y) - g(x_0)) dS_y + \frac{1}{2} \frac{\partial g(x_0)}{\partial s}, \quad x_0 \in \partial D \dots (16)$$

となる。ここに点 x_0 は ∂D の g の可微分点である。式 (16) の積分は主値の意味である。与えられた問題の解では $g = u$ であるから式 (15) は式 (4) となり、式 (16) は、

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial s}(x_0) = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial s} G(x_0, y)f(y) dS_y - \int_{\partial D} \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial n_y}(x_0, y)(g(y) - g(x_0)) dS_y, \quad x_0 \in \partial D \dots (17)$$

となる。

さて、 g を近似関数 g^* で置き換える。まず積分方程式 (4) は選点 \tilde{x}_0 において、

$$\frac{1}{2} g^*(\tilde{x}_0) = \int_{\partial D} G(\tilde{x}_0, y)f(y) dS_y - \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n_y}(\tilde{x}_0, y)g^*(y) dS_y, \quad \tilde{x}_0 \in \partial D \dots (18)$$

と構成されるから、ポテンシャル表現

$$u^*(x) = \int_{\partial D} G(x, y)f(y) dS_y - \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y)g^*(y) dS_y, \quad x \in D \dots (19)$$

の境界への極限值は式 (15), (18) より選点 \tilde{x}_0 において、

$$u^*(\tilde{x}_0) = \int_{\partial D} G(\tilde{x}_0, y)f(y) dS_y - \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n_y}(\tilde{x}_0, y)g^*(y) dS_y + \frac{g^*(\tilde{x}_0)}{2} = g^*(\tilde{x}_0) \dots (20)$$

となる。これは前述のとおりである。しかし、式 (19) の接線微分の境界値は、 ∂D 上の g^* の可微分点 x_0 で、

$$\frac{\partial u^*}{\partial s}(x_0) = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial s} G(x_0, y)f(y) dS_y - \int_{\partial D} \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial n_y}(x_0, y)(g^*(y) - g^*(x_0)) dS_y$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial g^*}{\partial s}(x_0) \dots\dots\dots(21)$$

となる。

さて g^* が区間の細分割によってその 1 階の導関数まで含めて g に近づけ得る近似関数であるとする。この場合式 (21) は式 (16) の近似として意味をもつ。しかし、 g^* が導関数を含まず、その値のみ g に近づけ得る近似関数の場合、式 (21) はもはや式(16)の近似としての意味を有しない。 g が十分滑らかな関数であると仮定すれば、区間一定近似であれば g^* の可微分点 x_0 において式 (21) の第 3 項は 0 になり、第 1, 2 項は式 (17) の積分を近似するので、

$$\frac{\partial u^*}{\partial s} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial s} \dots\dots\dots(22)$$

となる。近似解の表示式 (19) の内部 D の導関数は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^i}(x) = & \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial x^i} G(x, y) f(y) dS_y \\ & - \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) g^*(y) dS_y, \\ & x \in D \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

なる表示を有するので、 g の値まで近似し得る近似関数 g^* を選んでおけば、式 (23) は $\partial u/\partial x^i$ の近似となり得るのであるが (3. (2) (i) の結論の説明となる)、その境界への極限は式 (22) であるので、 D での式 (23) の連続性から境界近傍での近似解の精度は著しく低下することがわかる。以上のように、区間一定近似された二重層ポテンシャルの接線方向の微分が、境界近傍で乱れる原因は、何階の導関数まで近似し得る近似関数を用いることが必要かという考察を怠ったことであると結論されよう。

以上の考察をもう一度次のようにまとめておく。

1) Green 公式の境界値、式 (15) および式 (16) の近似解においては式 (20), (21) よりわかるように、近似関数の ∂D におけるグローバルな値に支配される部分、すなわち積分項と、近似関数のローカルな値、すなわち ∂D 上のある点での $g, \partial g/\partial s$ の補間精度によって支配される部分が、それぞれ約 1/2 の割合を占めており、低次近似では高精度な解を期待することはできない。

2) 特に、近似関数を区間一定としたとき、境界上での接線微分の値は、正解の約 1/2 にしかならない。近似解 (19) は、 D 内では微分まで含めて連続解を構成するから、境界近傍での接線方向の微分の近似精度は著しく悪くなる。

2) のような不都合を解消するためには次の方法が考えられる。

- a) 区間近似関数を線形以上のものとする。
- b) 一重層ポテンシャル法を用いる。
- c) 式 (17) を用いる。

a) についてはより一般的に次のようにいうことができる。「積分方程式法における近似関数は、そのポテンシャル表現の境界への極限值を求め、それを近似し得るようなものとして決定すべきである。」b) の結論については次のように説明できる。一重層ポテンシャル V の接線微分は、

$$\frac{\partial V}{\partial s}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial s_x}(x, y) f(y) dS_y, \quad x \in \partial D \dots\dots\dots(24)$$

となって、 $\partial f/\partial s$ に依存しないので、 f^* として f の値のみを近似するような関数を選べばよい。それゆえ、二重層ポテンシャルを含む Green 公式に比べて、低次近似にも意味があることが結論される。c) は、表示式 (17) が陽に $\partial g/\partial s$ を含まないことからの結論である。表示式 (17) は決して $\partial u^*/\partial s$ の表示でないことに注意されたい。もちろんこの方法は a) と組み合わせることが望ましい。区間一定近似では (22) が成り立つので、境界近傍においては全体の解析精度の低下につながるからである。c) の方法はあくまで $\partial u/\partial s$ の境界値のみを求める手段にすぎない。

以上のことから、

(i) u の境界上の挙動は選んだ近似関数によって決定される。特に二重層ポテンシャルでは区間一定近似は境界の近傍での解の乱れを生む原因であり、必ずしも適当でない。したがって予想される u の境界上の挙動を十分に表現し得る高次の近似関数を用いるか、境界値だけがが必要な場合には式(17)のようなローカルな近似関数の性質に依存しない式を用いるかのいずれかを考えねばならない。

(ii) Green の公式を用いる方法は Neumann 問題の解法としては必ずしも有利でない。一重層ポテンシャル法と同程度の結果を得るためには、二重層ポテンシャルの近似関数として、より高次のものを取ることが必要となるからである。Green 公式の構成には二重層ポテンシャルの計算も必要であるので、計算量、手間ともにまさる一重層ポテンシャル法を用いることが得策であろう。また、Green 公式では選点においても境界条件が正確に満たされるとは限らない。などが結論されよう。

なお、境界近傍での微分の精度を考える場合、法線微分についても考察しておく必要がある。十分滑らかな f, g に対しては、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}(x) = & \frac{f(x)}{2} + \int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n_x}(x, y) f(y) dS_y \\ & - \int_{\partial D} \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}(x, y) (g(y) - g(x)) dS_y, \\ & x \in \partial D \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

である。Neumann 問題では f はデータとして与えら

れる $\partial u/\partial n$ であるが、アルゴリズムの一般性を保つためには f に対してもなんらかの近似関数 f^* を選ぶ必要がある。その場合 f^* は f の値まで近似し得るものであればよい。以上の考察から、境界での解の精度は、一重層、二重層ポテンシャルの近似として、後者に、前者のそれより1階高次のものを用いて初めて同程度になることが結論される。

5. 解の改善に関する数値例

(1) 一重層ポテンシャルによる解析

4. で述べたように、境界近傍での解の乱れを少なくする方法として、まず一重層ポテンシャル法を用いることが考えられ、式(11)のような積分方程式が得られる。この場合には、式(24)のように、解の境界での接線微分が密度のローカルな性質によらない。また、得られた方程式の左辺は Neumann 条件そのものに対応しているので、2.(2) で述べたような近似解法によっても十分高精度で境界条件が満たされることが期待できる。

楕円棒のねじり問題を一重層ポテンシャルを用いて解いた結果(境界上の値のみ)を Table 9 に示す。境界を 26 分割し、各区間内では一定密度として、選点法で解いた結果である。長軸端近くでは精度が悪いが、それ以外では、低次の近似でかつ粗い分割にもかかわらず、比較的よい精度であることがわかる。

Table 9 Stresses on boundary; single layer potential method, collocation, constant approximation, 26 boundary segments

$x[a]$	$y[a]$	$-\tau_{xx}[a/G\theta]$		$\tau_{yz}[a/G\theta]$	
		exact	numerical	exact	numerical
0.000	4.975	7.960	7.588(5)*	0.000	0.000(—)*
2.000	4.872	7.795	7.429(5)	0.800	0.7622(5)
4.000	4.550	7.280	6.928(5)	1.600	1.523(5)
6.000	3.950	6.320	6.040(4)	2.400	2.293(4)
7.750	3.102	4.963	4.913(1)	3.100	3.069(1)
9.000	2.098	3.357	3.514(5)	3.600	3.769(5)
9.750	0.781	1.250	1.556(25)	3.900	4.890(25)

*relative error (%)

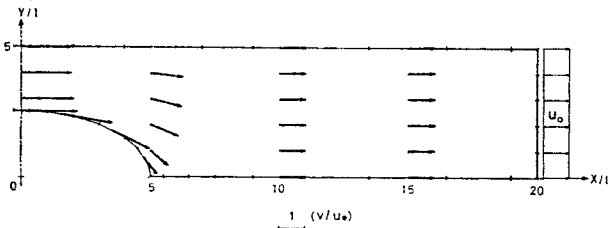


Fig. 10 Flow around an elliptic cylinder between parallel walls; Dirichlet-type formulation, 70 boundary segments, constant approximation.

(2) ポテンシャル流れの例題⁴⁾

本節では、ポテンシャル流れの問題を考えてみる。ポテンシャル流れの問題は、流れ関数を用いると Dirichlet 問題に、また速度ポテンシャルを用いると Neumann 問題に定式化される。

解析対象としては、Fig. 10 に示すように有限幅水路中央に楕円柱が配置されている場合とする。対称性を利用して上半分 ($y > 0$) のみを解析した。また、本節の結果はすべて Green 公式、選点法によった(なお、この問題の正解は得られていないようである)。

これらの問題を解析することの意義は次のようである。まず、境界における 0 でない流速成分は Dirichlet 問題では法線微分、Neumann 問題では接線微分にあたる。前者は表示式(25)、後者は表示式(16)で与えられるので、水路端を除いては前者の区間一定近似が後者の区間線形近似と同程度の結果を与えるはずである。もちろん、Dirichlet 問題においても近似解の接線微分は二重層ポテンシャルに区間一定近似を用いると、正解の 1/2 程度になっているはずであるが、水路の両端以外ではこれは 0 であり、問題を生じない。ただし、水路両端では Dirichlet 問題の場合も二重層ポテンシャルを区間一定近似すると法線方向の流速に乱れを生ずることになる。しかし、全流量がそのことによって変化することはなく、また興味の対象が主として水路端から離れた点での流速であることを考慮すれば、上記の結論に問題はないと考えられる。したがって、以下に示す例題の解析により上述の予想が確かめられれば、4. における推論が実証されることになる。

Fig. 10 に示した流速分布は、境界を 70 分割し、区間上で近似関数を一定として、Dirichlet 問題を選定法により解いた結果である。流れの連続性もよく保たれており、相当高精度が期待できる。

Table 10 には、Dirichlet 問題の解と Neumann 問題として解いた結果とを比較して示した。なお、線形な区間近似関数を用いた場合には、データの不連続性を表現しにくいため Fig. 11 に示すようなデータを与えて全流量が等しくなるように調節した。Table 10 から、Neumann 問題で線形区間近似関数を用い

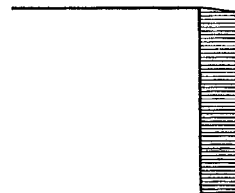


Fig. 11 Boundary data for Neumann-type calculation.

Table 10 Velocities; Potential flow around an elliptic cylinder

$x [L]$	$y [L]$	Dirichlet-type		Neumann-type				
		const. approximation		linear approximation		const. approximation		
		$u[u_0]$	$-v[u_0]$	$u[u_0]$	$-v[u_0]$	$u[u_0]$	$-v[u_0]$	$2u[u_0]$
0.000	2.495	2.161	0.000	2.139	0.004	1.057	0.002	2.114
0.000	3.000	2.073	0.000	2.062	0.002	2.097	0.000	
0.000	4.000	1.951	0.000	1.943	0.000	1.977	0.000	
0.000	5.000	1.914	0.000	1.907	0.001	0.9599	0.000	1.920
5.000	1.000	0.6996	0.5895	0.7041	0.5894	0.6545	0.5744	
5.000	2.000	1.082	0.4581	1.082	0.4582	1.099	0.4676	
5.000	3.000	1.233	0.2874	1.232	0.2878	1.241	0.2881	
5.000	4.000	1.296	0.1378	1.295	0.1387	1.305	0.1446	
10.000	0.000	0.9793	0.003	0.9783	0.003	0.4843	-0.038	0.9686
10.000	1.000	0.9838	0.012	0.9826	0.012	0.9340	0.003	
10.000	2.000	0.9942	0.019	0.9932	0.019	0.9833	0.022	
10.000	3.000	1.007	0.019	1.006	0.019	0.9983	0.022	
10.000	4.000	1.016	0.011	1.016	0.011	0.9750	0.020	
10.000	5.000	1.019	0.002	1.019	0.002	0.5048	0.025	1.010

Table 11 C.P.U. time; D : Dirichlet-type, N : Neumann-type

problem	calculation					C.P.U. time (m.sec.)
	approx. function	method	n. of b. segments	integral equation	n. of field points	
torsion	const.	collocation	26	Green's f.	29	275
torsion	const.	Galerkin	26	Green's f.	29	523
torsion	const.	collocation	54	Green's f.	36	677
torsion	const.	Galerkin	54	Green's f.	36	1711
torsion	linear	collocation	28	Green's f.	22	452
torsion	linear	Galerkin	28	Green's f.	22	1050
torsion	linear	collocation	52	Green's f.	22	995
torsion	linear	Galerkin	52	Green's f.	22	3094
torsion	const.	collocation	26	single layer	29	282
potential flow	const.	collocation	70	Green's f., D.	32	960
potential flow	const.	collocation	70	Green's f., N.	32	1005
potential flow	linear	collocation	74	Green's f., N.	32	1987

た結果は、Dirichlet 問題の結果とよく一致していることがわかる。しかし、区間近似関数を一定とした場合には、境界において u の値が他の場合の約 $1/2$ になっている。この傾向は、 $u = \partial\phi/\partial x$ (ϕ : 速度ポテンシャル) を考慮すれば、4. の考察から予想されるものである。なお、4. の c) の方法で $u = \partial\phi/\partial x$ の境界値を求めるならば、一区間一定近似ではほとんどの点で $\partial g/\partial s = 0$ なので、ここで求めた結果の 2 倍の答が求まることになる。以上の結果は、4. での考察の正当性を十分に証明するものである。

最後に、参考のために本論文で示した計算例について、計算時間を一括して **Table 11** に示した。使用した計算機は、京大大型計算機センターの M-190、コンパイラーは Fortran GE である。また、方程式の解法には Crout 法を用いた。ただし、プログラミング上高速化の特別な工夫はしていないので、**Table 11** はあくまでめやすであると考えられたい。

6. おわりに

以上述べてきたことより、以下のことが結論されるよう。

(1) 積分方程式法の精度は、境界における近似関数の選び方に支配される。特に、ポテンシャルの特異性に依じて、同程度の精度の近似解を得るための近似関数の次数が異なり、二重層ポテンシャルでは一重層ポテンシャルより高次の近似関数を必要とする。区間一定近似の二重層ポテンシャルは、境界近傍で解の精度を著しく落とす原因となり、必ずしも適切とはいえない。

(2) 境界での近似関数は、ポテンシャル表現の境界への極限形を近似し得るようなものとして決定するのがよい。

(3) Green 公式は、Neumann 問題の解法としては一重層ポテンシャル法に比べて有利とはいえない。Green 公式は二重層ポテンシャルを含んでいるため、同じ問題を解くのに一重層ポテンシャルの場合より高次の近似を必要とすること、および Green 公式を用いたとしても一重層ポテンシャルが含まれることになり、必要な計算量は必然的に一重層ポテンシャル法より多くなることよりの判断である。

なお、上記の (2) の結果は、ここで述べた 2 次元 Laplace 方程式に限定されるも

のでないことは明白であろう。また、ここで扱ったような問題では、Galerkin 法には特に利点がないことも注意すべきである。

近年、積分方程式法といえば Green 公式に基づいた数値解析法をさすことが多くなったように感じられる。しかし、本論で指摘したように二重層ポテンシャルはその取扱いが面倒な点があり、使わないでよいのであればそれにこしたことはないのである。その意味で、積分方程式法=Green 公式といった杓子定規な考え方でなく、ここで述べた一重層ポテンシャル法の利用など、対象とする問題に適した積分方程式は何であるかを常に考察することが必要であろう。

【付 録】 ポテンシャルの評価

本文中に現われたポテンシャルの計算は、**Fig. 1** のような局所座標系を用いることにより、以下のように容易に実行できる。 $x_2 > 0$ を内部とし、境界は折線でモデル化した。

(i) 一定区間近似関数の場合

∂D を折線で近似し, その折線中の一線分を I (Fig. 1 の太線部分) とする. いま, 密度を $\varphi=1$ (I 上), 0 (その他) とすれば, I 上にない点 (x_1, x_2) での一重層ポテンシャルは簡単な計算により次のようになる.

$$S = \frac{1}{2\pi} \int_I \ln \frac{1}{r} dx_1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \{l + (x_1 - l) \ln r_1 - x_1 \ln r_0 - x_2 \theta\}$$

同様に, 二重層ポテンシャルおよび一, 二重層ポテンシャルの導関数は内点 (x_1, x_2) で次のようになる.

$$D = -\frac{1}{2\pi} \theta$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_0), \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = D$$

$$\frac{\partial D}{\partial x_1} = \frac{x_2}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} \right),$$

$$\frac{\partial D}{\partial x_2} = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{x_1 - l}{r_1^2} - \frac{x_1}{r_0^2} \right)$$

他の座標系に関しては, 座標変換を用いて $\partial S/\partial x_i$ など を求めればよい.

積分方程式の構成上, (x_1, x_2) が I に近づいた場合の S, D などの挙動を知ることが必要である. 極限移行に際しては, $x_2 \rightarrow 0$ のとき,

$$\theta = \pi \text{ (内点から } (x_1, 0), 0 < x_1 < l \text{ に近づくとき)}$$

$$= -\pi \text{ (外点から } (x_1, 0), 0 < x_1 < l \text{ に近づくとき)}$$

$$= \text{不定 (端点 } (0, 0), (l, 0) \text{ に近づくとき)}$$

$$= 0 \text{ (} I \text{ 上でなく } (x_1, 0), x_1 > l \text{ または } x_1 < 0 \text{ に近づくとき)}$$

となることに注意しなければならない.

たとえば, 代表点として, I の中点 $(l/2, 0)$ を選ぶと, 内部からの極限は, $\theta = \pi$ として,

$$S = \frac{1}{2\pi} \left(l - l \ln \frac{l}{2} \right), \quad D = -\frac{1}{2}$$

となる.

なお, 端点 $(0, 0), (l, 0)$ においては, 隣接する要素上の密度が等しくない限り, D は一定値には近づかず, $\partial D/\partial x_i$ は有界ではなくなる. さらに, 角においては, 隣接要素の密度が仮りに等しくても一重層ポテンシャルの導関数は収束しないことになる.

(ii) 線形区間近似関数の場合

密度を, $\varphi = x_1/l$, および $(l-x_1)/l$ として (i) の場合と同様に計算しておきさえすれば, 任意の線形関数に対する結果は, それらの線形結合で求められる. 特に, (i) の結果を利用すると, 結局は密度 $\varphi = x_1/l$ に対するものだけを求めておけばよいことがわかる. 結果は次のようである.

$$\varphi = x_1/l \text{ のとき,}$$

$$S = \frac{1}{2\pi} \int \ln \frac{1}{r} \varphi dS = \frac{1}{2\pi l} \left[x_1 \{l + (x_1 - l) \ln r_1 - x_1 \ln r_0 - \theta x_2\} - \frac{1}{2} (r_1^2 \ln r_1 - r_0^2 \ln r_0) + \frac{1}{4} (r_1^2 - r_0^2) \right]$$

$$D = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \varphi dS$$

$$= \frac{1}{2\pi l} [-x_1 \theta - x_2 (\ln r_1 - \ln r_0)]$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi l} [l - x_2 \theta + x_1 (\ln r_1 - \ln r_0)], \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = D$$

$$\frac{\partial D}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi l} \left[-\theta + \frac{x_2 l}{r_1^2} \right],$$

$$\frac{\partial D}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi l} \left[-\frac{l(x_1 - l)}{r_1^2} - (\ln r_1 - \ln r_0) \right]$$

$\varphi' = (l-x_1)/l$ のとき,

$$S' = \frac{1}{2\pi l} \left[(l-x_1) \{l + (x_1 - l) \ln r_1 - x_1 \ln r_0 - x_2 \theta\} + \frac{1}{2} (r_1^2 \ln r_1 - r_0^2 \ln r_0) - \frac{1}{4} (r_1^2 - r_0^2) \right]$$

$$D' = \frac{1}{2\pi l} [- (l-x_1) \theta + x_2 (\ln r_1 - \ln r_0)]$$

$$\frac{\partial S'}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi l} [-l + x_2 \theta + (l-x_1) (\ln r_1 - \ln r_0)],$$

$$\frac{\partial S'}{\partial x_2} = D'$$

$$\frac{\partial D'}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi l} \left[\theta - \frac{l x_2}{r_0^2} \right],$$

$$\frac{\partial D'}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi l} \left\{ \frac{l x_1}{r_0^2} + (\ln r_1 - \ln r_0) \right\}$$

これらの結果を用いて線形補間を行うためには, Fig. A1 に示すように, 2 つの区間を結合して, 区間 I に対しては S などを, 区間 I' に対しては S' などを用いればよい. 極限操作は, 点 0 に近づけるときの θ の値が θ_0 となることに注意されたい ((i) の場合には π であった).

なお, この場合には点 0 では $\theta_0 \neq \pi$ のときには, 一, 二重層ポテンシャルの導関数は収束しないことがわ

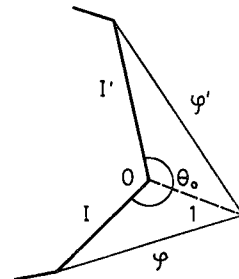


Fig. A1 Linear shape function.

かる。

参 考 文 献

- 1) Kupradze, V.D. : Potential Methods in the Theory of Elasticity, transl. by H. Gutfreund, chapt. 10, Israel program for scientific translation, Jersalem, 1965.
- 2) Niwa, Y., S. Kobayashi and T. Fukui : An Application of the Integral Equation Method to Seepage Problems, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 24, 479~486, Proc. 24th Japan National Congr. Appl.

Mech., Univ. of Tokyo Press, 1974.

Dubois, M. and C. Lachat : The Integral Formulation of Boundary Value Problems, "Variational Methods in Engineering", ed. by C.A. Brebbia & H. Tottenham, 9/89~9/109 Proc. Intern. Conf. at Univ. of Southampton (1972), Southampton Univ. Press, 1973.

- 3) Sokolnikoff, I.S. : Mathematical Theory of Elasticity, 2nd ed., McGraw-Hill, 1956.
 - 4) 今井 功 : 流体力学 (前編), 裳華房, 昭和 52 年.
(1978.9.12・受付)
-