

## 河床波の統計モデルに関する研究

STUDY ON STATISTICAL MODELING OF BED  
CONFIGURATIONS IN LOWER REGIMES

中川 博 次\*・辻 本 哲 郎\*\*

By Hiroji NAKAGAWA and Tetsuro TSUJIMOTO

## 1. 緒 言

砂礫河床水路は、流砂、水流、河床形状の複雑な相互作用系にあり、一様な直線水路でさえ河床波が形成されるなどそこでの移動床現象（流砂量、抵抗、河床変形等）の説明・予測は容易でない。特に、流砂特性、河床形状特性は一般に強い不規則性を有する統計的なものとなっており、移動床現象の体系的説明は確率過程論的手法によって最もうまく達成されるものと予想される。本研究はこうした立場から河床形状の統計的性質を検討してそこに見出される重要な特性をモデル化し、移動床系の全体的記述の手掛りを得ようとするものである。ここでいう全体的記述とは、さまざまな移動床現象の体系的説明とともに、変動やばらつきを含めて現象の全体像を記述することを目指している。

河床波の統計的性質を対象とした研究は Nordin と Algert<sup>1)</sup> の論文発表以来、統計量処理手法、測深技術の進展とともに Colorado 州立大学、U.S.G.S. を中心に盛んに行われてきたが、統計的性質の資料採取に重点が置かれ、あるいは統計的な構造そのものが問題とされ、移動床過程全体の体系的記述への積極的な利用といった面での進展はあまり見られなかったようである。そこで本研究では、まず河床形状の統計的構造を簡単なモデルで表示するためスペクトルの普遍関数表示を試み、さらに具体的かつ適用性の高い河床波の波長・波高の分布についての議論を行う。

なお、本研究では上述の観点から河床形状の統計的性質について検討するので、流砂、河床形状、抵抗等が最も密接に関連していると考えられるいわゆる lower regime に限って議論する。このことによって、regime の違いによって生じる流砂の移動機構、支配的な水理バ

ラメーターの変化を気にしなくて良いことになる。

さて、河床形状としては、時刻  $t$  に記録された河床縦断形状  $y_t(x)$  と、河床の一点  $x$  における河床高の時間変動記録  $y_x(t)$  の 2 つが考えられ、河床波の平衡状態においては統計的に一様、定常と考えられるので、この場合には  $y(x)$ 、 $y(t)$  とそれぞれ時刻、断面を指定する添字を付さないで表わす。本論文では、特に断らない限り、平衡状態のもの、すなわち  $y(x)$ 、 $y(t)$  を定常過程と見なせる状態のものを扱い、またいずれも平均砂面からの河床高を表わす零平均過程として扱われる。

なお本論文で用いられる著者らの実測資料は、長さ 9 m、幅 33 cm の鋼製可変勾配水路で採取されたもので、その実験条件は表-1 に示される。また河床波の成長過程に関する実験をもとにほぼ平衡状態に達した時点以降の河床を自走式超音波測深器を用いて記録した<sup>2)</sup>。なお、実験中は予備実験で検討された流砂量をもとに図-1 に示されるような装置によって給砂を行った。

記録された河床縦断形状記録は 0.8 cm 刻みで 500 個、時間変動の記録は 2 秒刻

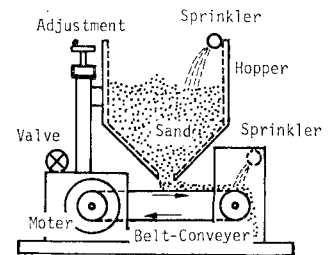


図-1 自動給砂装置

表-1 実験条件

RUN No.	$i$	$d$ (cm)	$\tau_*$	$R_{e*}$	$h/d$	$q_{B*}$
A-1	0.0020	0.065	0.158	26.7	126.2	0.146
A-2	0.0020	0.065	0.128	23.5	102.3	0.020
A-6	0.0020	0.065	0.193	28.8	113.9	0.409
A-12	0.0050	0.065	0.384	40.7	123.1	0.667
B-8	0.0050	0.140	0.170	86.0	55.0	0.107
B-9	0.0050	0.140	0.209	95.5	67.9	0.189
C-5	0.0033	0.096	0.167	48.5	81.3	0.120
C-9	0.0050	0.096	0.232	57.0	75.0	0.276

注)  $q_{B*} = qB/\sqrt{(\sigma/\rho-1)gd^3}$ ,  $R_{e*} = u_*d/\nu$

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

\*\* 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学教室

みで 800 個の離散量に変換して解析された。

## 2. 河床波の統計モデル

河床形状の統計的性質は静特性と動特性に分けられ、前者は河床高分布、後者は相関関数またはスペクトルによって表わされる。河床高分布は  $y(x), y(t)$  の両方ともほとんど同じ性質を示し、図-2 に示されるようにほぼ正規分布で近似される。なお厳密には図-3 に示されるヒストグラムを見てわかるように 2 つのピークが認められる (bimodal 分布) ことが指摘されるし、Cheong と Shen<sup>3)</sup> は、Gram-Charlier 級数によって高次モーメントの正規分布からのずれを扱おうとしているが物理的意味付けは困難である。これに対し正規分布を用いれば  $y(x), y(t)$  とも定常 Gaussian 過程の性質を利用して検討できることになり非常に有利である。本論文でも

この性質を利用して以下河床形状の動特性を検討しモデル化する。

河床形状の統計モデルの最初のもは Nordin と Algert<sup>1)</sup> による Markov モデルであるが、これは実測された相関係数から 2 次の Markov 過程への適合を論じただけにすぎず、河床波特性に示唆を与えはするものの物理的意味に乏しい。またその後の多くの研究では河床波のスペクトルの普遍表示が検討され<sup>2)~6)</sup>、日野<sup>7)</sup> によって次元解析的考察から得られた「-3 乗則」はその基礎となっている。

本論文では、Cheong と Shen<sup>3)</sup> の研究と同様に -3 乗則を認めて波数スペクトルの相似性の条件を検討し、さらに低波数域で有意なスペクトルピークが存在しないことを認めて簡単なモデルを提示し、これをもとに河床波の形状特性が解析される。次に同様の手法を周波数スペクトルにも適用し、モデル化を検討する。

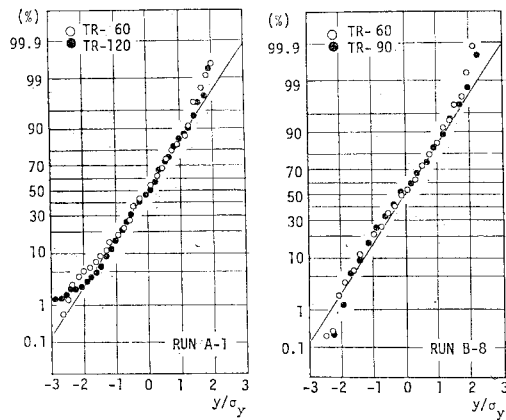


図-2 河床高分布の例

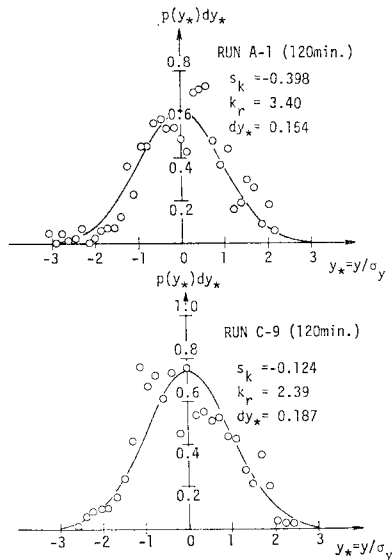


図-3 河床高分布の例 (ヒストグラム表示)

### (1) 波数スペクトルのモデル化

図-4 に示されるような多くの実験および観測によって得られた河床波の波数スペクトル<sup>1), 4), 8)~10)</sup> を検討した結果、高波数域で -3 乗則が成立し、低波数域では有意なピークが存在しないことが認められる。したがってスペクトルモデルとして次式が提示できる (図-5 参照)。

$$S_y(k) = \begin{cases} f(\phi) k^{-3} & (k > k_0) \\ (1 + \epsilon_s) f(\phi) k_0^{-3} & (k < k_0) \end{cases} \dots (1)$$

ここに  $k_0$  は -3 乗則の成立する限界波数であり、 $f(\phi)$

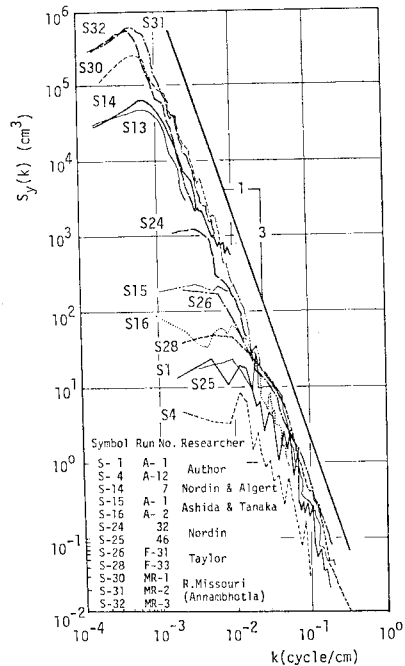


図-4 実測された河床の波数スペクトル

は日野<sup>7)</sup>によって定義された砂の安息角の関数であるが、ここでは後述するように  $f(\phi)$  と表示するもの必ずしも安息角のみの関数と考えるものではない。また  $\epsilon_s$  は補正係数で、これが十分に零に近い値でないとき式(1)に示されるようなモデル化は無意味であり、 $\epsilon_s=0$  としても十分実験値と一致することが後に確かめられる。

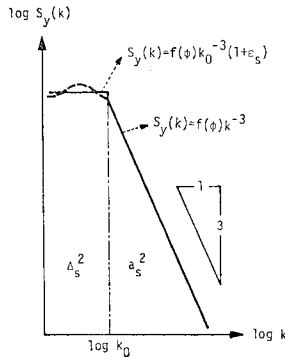


図-5 河床波の波数スペクトルモデル

さて、式(1)のモデルを規格化し、無次元波数、無次元スペクトル密度関数を次のように決定する。ここで波数の無次元化にあたっては長さの代表スケールとして水深  $h$  を選んでいるが、その妥当性も後の実験値の検討によって確かめられる。

$$k_* = kh \dots\dots\dots (2)$$

$$S_{y*}(k_*) dk_* = S_y(k) dk / \sigma_y^2 \dots\dots\dots (3)$$

$$S_{y*}(k_*) = S_y(k) / \sigma_y^2 h \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $\sigma_y$  は河床高の標準偏差である。

次に上記のように規格化されたスペクトルが普遍関数表示であると考え、 $-3$ 乗則の成立する無次元限界波数  $k_{*0}$  および  $-3$ 乗則の成立する高波数域の全分散  $\sigma_y^2$  への寄与率が一定となるはずである。よって、

$$k_{*0} = k_0 h = \text{const.} \dots\dots\dots (5)$$

であり、また  $a_s^2, A_s^2$  をそれぞれ高波数域および低波数域からの分散  $\sigma_y^2$  への寄与分であるとすると、

$$a_s^2 + A_s^2 = \sigma_y^2 = \int_0^\infty S_y(k) dk \dots\dots\dots (6)$$

が成立し、さらに

$$a_s^2 = \int_{k_0}^\infty f(\phi) k^{-3} dk = \frac{f(\phi)}{2 k_0^2} \dots\dots\dots (7)$$

$$A_s^2 = \int_0^{k_0} (1 + \epsilon_s) f(\phi) k_0^{-3} dk = (1 + \epsilon_s) \frac{f(\phi)}{k_0^2} \dots\dots\dots (8)$$

であるから、

$$\frac{\sigma_y k_0}{\sqrt{f(\phi)}} = \sqrt{\frac{2(1 + \epsilon_s) + 1}{2}} = C_s = \text{const.} \dots\dots (9)$$

が得られる。すなわち式(5)および式(9)が普遍関数表示の必要条件である。このとき、式(1)に示したスペクトルモデルは次のように普遍関数表示される。

$$S_{y*}(k_*) = \begin{cases} (k_{*0}/C_s)^2 k_*^{-3} & (k_* > k_{*0}) \\ \{(1 + \epsilon_s)/C_s^2\} k_{*0}^{-1} & (k_* < k_{*0}) \end{cases} \dots\dots\dots (10)$$

ここで著者および従来の研究者の実験または観測結

果<sup>1),4),8)~11)</sup>に基づいてモデルに含まれる定数についての検討を行う。

まず図-6は限界波数  $k_0$  と水深  $h$  との関係調べたもので式(5)の成立していること、その定数の値 ( $k_{*0}$ ) が約 0.15 であることが認められる。この関係は日野<sup>7)</sup>によっても指摘されているが、限界波数に対する波長が水深の 6~7 倍となり、この程度の波数域まで安息角のみが支配的であるとは考え難い。

次に図-7は  $f(\phi)$  と  $\sigma_y k_0$  の関係を示したもので式(9)で与えられる関係がほぼ認められる。図中の実線は  $C_s=1.5$  を示すが、このとき  $\epsilon_s=0.19$  であり、 $\epsilon_s=0$  とすると  $C_s=1.23$  である。すなわち  $\epsilon_s$  は十分に零に近く、 $C_s$  の値は 1.2~1.5 程度である。

図-6, 7より式(1)に示すモデル化の可能なことが認められ、図-8には普遍関数表示した波数スペクトルの例を示した。この図からも本節に示したスペクトルモデルが妥当なものといえる。

(2) 波数スペクトルモデルに基づく考察

ここでは上述の波数スペクトルモデルに基づいて河床波の平均あるいは卓越波長についての議論を行う。波数スペクトルのモーメントを用いて平均波長に相当する量

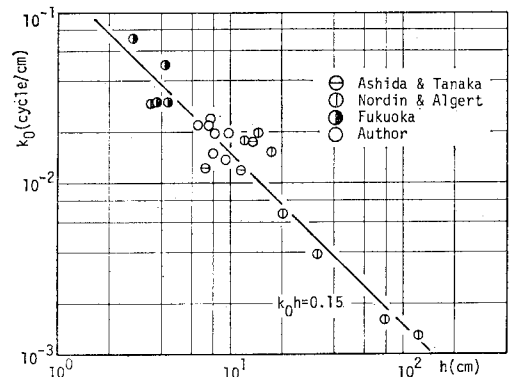


図-6 限界波数と水深との関係

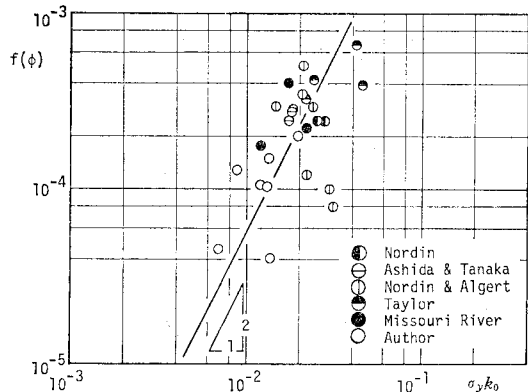


図-7  $f(\phi)$  と  $\sigma_y k_0$  の関係

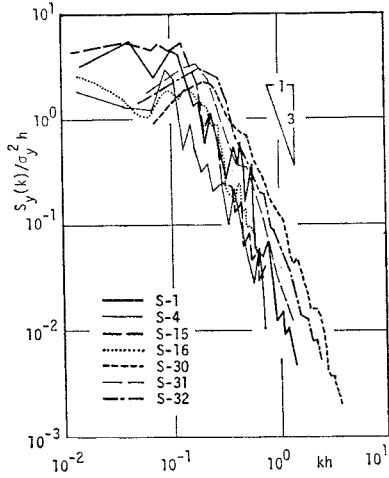


図-8 普遍関数表示された波数スペクトルの例

として次の2つが挙げられる。

$$L_2 = \sqrt{M_0/M_2} \dots\dots\dots(11)$$

$$L_1 = M_0/M_1 \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $M_j$  は波数スペクトルの  $j$  次モーメントであり、 $L_2$  は零交差法によって定義される波長の平均、 $L_1$  はスペクトルの重心位置の波数に対応する波長である。上述のスペクトルモデルを用いて  $L_2$  の計算をする場合には積分の上限 ( $k_\infty$ ) に関する規定が必要で、本来ならば砂の安息角、河床擾乱の発生機構を考慮して決定すべきであるが、これに関する研究は十分に進んでおらず、ここでは Cheong ら<sup>3)</sup>と同様、スペクトルの実測資料の検討の結果、次式を課した。

$$\ln(k_\infty/k_0) = 2.5 \dots\dots\dots(13)$$

このとき、

$$L_2 = \sqrt{3(3+2\varepsilon_s)/2(8.5+\varepsilon_s)}/k_0 \dots\dots\dots(14)$$

$$L_1 = \{(3+2\varepsilon_s)/(3+\varepsilon_s)\}/k_0 \dots\dots\dots(15)$$

となり、 $\varepsilon_s = 0$  とすると、

$$L_2 = 0.73/k_0 \dots\dots\dots(16)$$

$$L_1 = 1/k_0 \dots\dots\dots(17)$$

となる。 $L_2$  または  $L_1$  と実測された平均(卓越)波長との関係は 図-9 に示すように必ずしもどちらが優れているか判断し難い。

さて、式 (5) を考慮すると、

$$L_2 = 4.86 h, L_1 = 6.67 h \dots\dots\dots(18)$$

となり、Yalin<sup>12)</sup> の得た dune の平均波長に対する実験式

$$\bar{L} = 5 h \dots\dots\dots(19)$$

とよく一致している。

なお、 $L_1$  と  $L_2$  の関係を示したものが 図-10 で式 (16)、(17) から得られる

$$L_2/L_1 = 0.73 \dots\dots\dots(20)$$

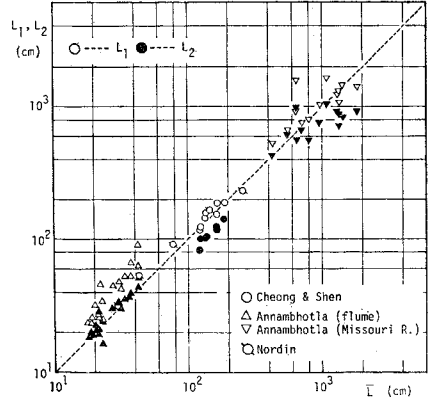


図-9  $L_1, L_2$  と平均波長との関係

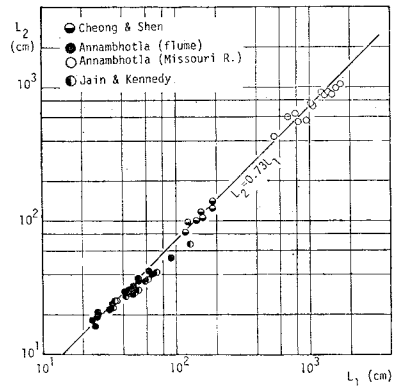


図-10  $L_1$  と  $L_2$  との関係

が良く認められ、これによってもスペクトルモデルの妥当性が示された。

さて、波高については波高分布に関連して後述されるように、あるいは実験的に、

$$\bar{H} = 2 \sigma_y \dots\dots\dots(21)$$

が認められ、このとき平均波形勾配 ( $\theta = \bar{H}/\bar{L}$ ) は式 (19)、(21) より

$$\theta = 2 \sigma_y / 5 h = 2 C_s \sqrt{f(\phi)} / (5 k_{*0}) \dots\dots\dots(22)$$

となり、 $C_s, k_{*0}$  が定数なので  $\theta$  と  $\sqrt{f(\phi)}$  が比例することになる。これは 図-11 でほぼ認められる。ところが  $\theta$  は無次元底面せん断応力  $\tau_* (= u_*^2 / \{(\sigma/\rho - 1)gd\})$ 、 $u_*$ : 摩擦速度、 $\sigma/\rho$ : 砂の比重、 $d$ : 砂粒径) の関数ゆえ  $f(\phi)$  も  $\tau_*$  の関数となり、先に述べたように  $f(\phi)$  は砂の安息角のみの関数とはいえなくなる。すなわち、Jain<sup>6)</sup> が -3 乗則を導いた考え方も共通するが、-3 乗則の成立する波数域でも河床波と水流の相互作用が存在するものの、砂の運動が河床形状に強く規制され、波数  $k$  と河床波の波速  $U_w$  の間に特別な関係 ( $U_w \propto k$ ) が存在することによって、波数スペクトルの形がもはや  $k$  のみで決定される ( $S_y(k) \sim k^{-3}$ ) ことになっているも

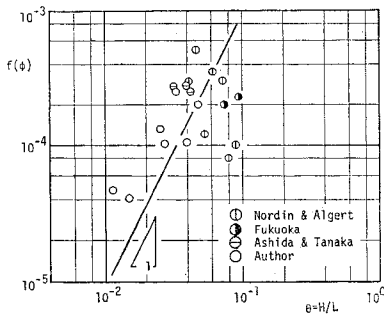


図-11  $f(\phi)$  と波形勾配との関係

のと理解される。

(3) 周波数スペクトルモデル

前節までに論じた波数スペクトルのモデル化は周波数スペクトルについても同様に行える。ただし、これまでに実測された周波数スペクトルの資料は少なく、モデルのパラメーターの決定等に十分でない点もあるが、以下モデルの概要とその検証について述べる。

周波数スペクトル  $S_y(f)$  については、これまでの実験結果や次元解析<sup>7)</sup>の結果、 $-2$ 乗則領域と $-3$ 乗則領域とが認められ次のようにモデル化されるものと考えられる(図-12 参照)。

$$S_y(f) = \begin{cases} g_1 f^{-3} & (f_1 \leq f) \\ g_2 f^{-2} & (f_0 \leq f < f_1) \\ (1 + \epsilon_f) g_2 f_0^{-2} & (0 < f < f_0) \end{cases} \quad (23)$$

ここで  $-2$ 乗則の周波数領域を  $-3$ 乗則の成立する波数領域と対応させ、この領域で波速と波数が比例定数  $r$  を介して比例すると考え、 $g_2$  が次式で表わされる。

$$g_2 = r f(\phi) / 2 \quad (24)$$

また、 $f = f_1$  におけるスペクトル密度関数の接続条件より、

$$g_1 = g_2 f_1 = r f_1 \cdot f(\phi) / 2 \quad (25)$$

となる。次に高・中・低周波数領域からの分散への寄与をそれぞれ  $4H^2$ ,  $4M^2$ ,  $4L^2$  とすると、

$$4H^2 + 4M^2 + 4L^2 = \sigma_y^2 \quad (26)$$

であり、それぞれ式(23)をもとに計算される。これらの寄与の分散に対する割合が一定のときスペクトル密度関数の相似性が成り立つわけで、この条件は、

$$f_1 / f_0 = \beta_s = \text{const.} \quad (27)$$

である。さらに式(27)を式(26)に代入し、式(24)を考慮すると次式が得られる。

$$\sigma_y^2 f_0 = 4r \{2\beta_s(2 + \epsilon_s) - 1\} f(\phi) / \beta_s \quad (28)$$

さらに式(9)によって  $f(\phi)$  を消去すると、

$$f_0 h^2 / r = 4(k_{*0} / C_s)^2 \{2\beta_s(2 + \epsilon_s) - 1\} / \beta_s = \text{const.} \quad (29)$$

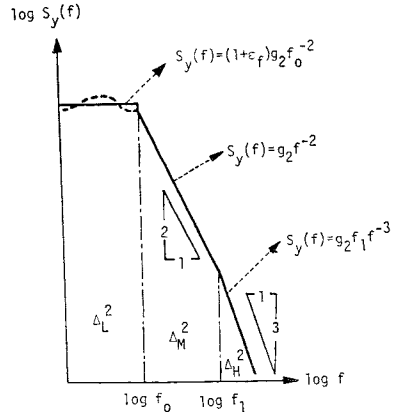


図-12 河床波の周波数スペクトルモデル

となり、スペクトルモデルを確立するためにはモデルのパラメーターである  $\beta_s$  を決定するとともに式(29)を実験値によって確認すれば良い。ここでは実測資料が十分でないのでこれらを直接検討できず、さらに議論を進め間接的な推定を行うこととする。

さて、上記のようにモデル化された周波数スペクトルから河床波の平均あるいは卓越周期が求められるが、ここでも波長と同様次の2つの量がスペクトルモーメント  $\bar{M}_j$  から得られる。

$$T_1 = \bar{M}_0 / \bar{M}_1 \quad (30)$$

$$T_2 = \sqrt{\bar{M}_0 / \bar{M}_2} \quad (31)$$

波数スペクトルの場合と同様、 $T_2$  の場合  $f \rightarrow \infty$  についての考慮が必要なのでここでは  $T_1$  に限って議論を進める。上述のモデルをもとに  $T_1$  を計算すると、

$$T_1 = 2 \sigma_y^2 / \{g_2(3 + \epsilon_f + 2 \ln \beta_s)\} \quad (32)$$

となり、式(9)および式(24)を考慮すると次式が得られる。

$$T_1 = 4 C_s^2 / \{r k_0^2(3 + \epsilon_f + 2 \ln \beta_s)\} \quad (33)$$

ところで、式(17)と式(33)の比によって平均波速が与えられることになり、これが  $r/L_1$  に等しいことから次の  $\beta_s$  について方程式が得られる。

$$3 + \epsilon_f + 2 \ln \beta_s = 4 C_s^2 \quad (34)$$

ここで、 $\epsilon_f = 0$ ,  $C_s = 1.3$  とすると  $\beta_s = 6.55$  となり実測資料は少ないものの著者らの実験結果<sup>2)</sup>とほぼ一致する。しかし  $\epsilon_f$ ,  $C_s$  に対して  $\beta_s$  の値は敏感に変化し、多くの資料による検討が必要である。

なお、式(29)と式(33)から次のように  $f_0$  と  $T_1$  との関係式が得られる。

$$T_1 = \frac{2\beta_s(2 + \epsilon_f) - 1}{4C_s^2\beta_s} \cdot \frac{1}{f_0} \equiv K_f / f_0 \quad (35)$$

$C_s = 1.3$ ,  $\beta_s = 6.55$ ,  $\epsilon_f = 0$  とすると  $K_f = 0.57$  となり、これらの値の精度から  $K_f$  は  $0.45 \sim 0.65$  程度の値と推定される。周波数スペクトルについて比較的多くの実

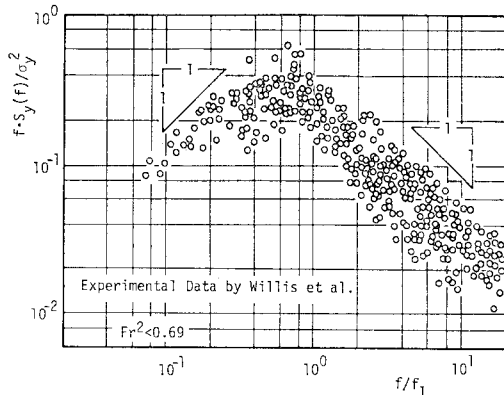


図-13 河床波の周波数スペクトルの例

測資料を得ている Willis と Kennedy<sup>13)</sup> の結果 (図-13 参照) を見ると、 $\beta_s$  の値は読み取り難いが、中間周波数域が  $-2$  乗則に従いそれより低周波数域ではほぼ平坦であること、その限界周波数の無次元量  $f_0 T_1$  の値 ( $K_f$ ) がほぼ  $0.5 \sim 0.7$  程度となっていることが認められ、本節の周波数スペクトルモデルとそれに関する議論がほぼ妥当なものと考えられる。

### 3. 河床波の波長・波高の分布性状について

前章で河床形状の統計的構造の概略が簡単なモデルで表示し得ることが示されこの成果は河床波上の砂粒運動を扱う<sup>14), 15)</sup> のに有益であるが、河床波の形状抵抗や河床波自体の変形過程<sup>2), 16)</sup> の議論では、河床波そのものの波長、波高分布として適当な表示が与えられていた方が都合が良い。従来にも、芦田・田中<sup>8)</sup>、Nordin<sup>9)</sup>、Yang と Sayre<sup>17)</sup> によって種々の分布が提案されており、特に、Rayleigh 分布の適合性が良いとされている<sup>8)</sup> もものの、これらは実験結果からの推定で何ら物理的な説明がなされていず、また、多くの河床形状のスペクトル等を詳しく検討した成果との関連も明確にされていない。本章ではこれらにかんがみ、前章の成果も踏まえて河床波の波長、波高分布といった具体的かつ利用度の高い統計的性質について検討する。

#### (1) 河床波の波長分布について

前章で述べたように平衡状態の河床縦断形状  $y(x)$  は定常 Gaussian 過程とみなすことができ、Rice<sup>18)</sup> らによって盛んに検討された零交差問題の成果が適用される。そこで、ここでは波長をいわゆる zero-up crossing 間隔と定義し零交差間隔  $\{\varepsilon\}$  の分布をもとにその分布性状を検討する。

零平均定常過程  $y(x)$  の単位長さ当りの零交差生起確率密度を  $r_0$  とすると、これは  $\{\varepsilon\}$  の期待値の逆数で

あり、また  $2/r_0$  が平均波長 (前章の  $L_2$ ) に相当する。

ところで、ここで著者らの興味は平均値よりむしろその分布であり、これの検討のため次式で定義される新しい確率過程を考える。

$$z(x) = 2U[y(x)] - 1 \dots\dots\dots (36)$$

ここで、 $U[\cdot]$  は unit step 関数である。このとき  $z(x) \cdot z(x+\xi)$  の値は区間  $[x, x+\xi]$  に含まれる  $y(x)$  の零点の個数が偶数ならば  $+1$ 、奇数ならば  $-1$  となるので、この区間の零点個数が  $n$  である確率を  $p(n; \xi)$  と表わすと  $z(x)$  の自己相関関数は次式で与えられる。

$$R_{zz}(\xi) = E[z(x) \cdot z(x+\xi)] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n p(n; \xi) \dots\dots\dots (37)$$

ここに、 $E[\cdot]$  は期待値オペレータであり、 $f_n(\xi)$  を  $n+1$  個の零交差間隔の総和の長さの確率密度関数とすると次式が導かれる。

$$p'(n; \xi) = r_0 \int_{\xi}^{\infty} \{f_n(x) - 2f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)\} dx \dots\dots\dots (38)$$

$$p''(n; \xi) = r_0 \{f_n(\xi) - 2f_{n-1}(\xi) + f_{n-2}(\xi)\} \dots\dots\dots (39)$$

なお  $n < 1$  に対し  $f_n(\xi) = 0$  とする。

ところで、式 (37) を 2 回微分して式 (39) を代入し、さらにその両辺を Fourier 変換すると、

$$\frac{1}{4r_0} \psi_z(u) = \sum_{n=0}^{\infty} [-\{\phi_0(u)\}^{n+1}] = \frac{\phi_0(u)}{1 + \phi_0(u)} \dots\dots\dots (40)$$

となり、ここに、 $\phi_0(u)$ 、 $\psi_z(u)$  はそれぞれ  $f_0(\xi)$ 、 $R_{zz}''(\xi)$  の Fourier 変換である。ところで  $\phi_0(u)$  は確率変数  $\{\varepsilon\}$  の特性関数であるから、

$$\phi_0(0) = 1, \phi_0'(0) = iE[\varepsilon], \phi_0''(0) = -E[\varepsilon^2] \dots\dots\dots (41)$$

であり、また  $\psi_z(u)$  については  $R_{zz}(0) = 1$  であることおよび相関関数の性質より、

$$\left. \begin{aligned} \psi_z(0) &= -R_{zz}'(0), \psi_z'(0) = i, \\ \psi_z''(0) &= -2 \int_0^{\infty} R_{zz}(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

となる。さらに式 (40) より、

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(u) &= \psi_z(u) \{4r_0 - \psi_z(u)\}^{-1} \\ \phi_0'(u) &= 4r_0 \psi_z'(u) \{4r_0 - \psi_z(u)\}^{-2} \\ \phi_0''(u) &= 4r_0 [\psi_z''(u) \{4r_0 - \psi_z(u)\} \\ &\quad + 2\{\psi_z'(u)\}^2 \{4r_0 - \psi_z(u)\}^{-3}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

が得られ、上式で  $u=0$  とおいて式 (42) を代入し、式 (41) と比較することから、結局次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} E[\varepsilon] &= 1/r_0 \\ E[\varepsilon^2] &= \left\{ 1 + 2r_0 \int_0^{\infty} R_{zz}(\xi) d\xi \right\} / r_0^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Var}[\Xi] &= E[\Xi^2] - \{E[\Xi]\}^2 \\ &= (2/r_0) \cdot \int_0^\infty R_{zz}(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots (44)$$

ここに、 $\text{Var}[\cdot]$  は分散を示す。ところで、 $R_{zz}(\xi)$  はその定義から次式で表わされる。

$$\begin{aligned} R_{zz}(\xi) &= E\{2U[y(x)]-1\} \cdot \{2U[y(x+\xi)]-1\} \\ &= 1 + 4 \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty f(y_1, x; y_2, x+\xi) dy_1 dy_2 \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty f(y, x) dy \right\} \dots\dots\dots (45) \end{aligned}$$

ここに、 $f(y_1, x; y_2, x+\xi)$  は  $y(x)$  の結合確率密度関数であり、 $y(x)$  が Gaussian 過程でその相関係数が  $\rho_y(\xi)$  であるときは上式の積分が実行され次式が得られる。

$$R_{zz}(\xi) = (2/\pi) \cdot \sin^{-1} \rho_y(\xi) \dots\dots\dots (46)$$

したがってこの場合  $\{\Xi\}$  の分散は次式で与えられる。

$$\text{Var}[\Xi] = (4/\pi r_0) \cdot \int_0^\infty \sin^{-1} \rho_y(\xi) d\xi \dots\dots\dots (47)$$

さて、河床波の波長をいわゆる zero-up crossing 間隔で定義すると  $f_L(\xi)$  が波長分布の確率密度関数とみなせる。いま隣り合う零交差間隔を統計的に独立と考えると、 $f_L(\xi)$  は  $f_0(\xi)$  の二重畳み込みとして表わされその平均値、分散は零交差間隔のそれらのそれぞれ2倍となる。したがって、

$$\left. \begin{aligned} E[L] &= 2/r_0 \\ \text{Var}[L] &= (8/\pi r_0) \cdot \int_0^\infty \sin^{-1} \rho_y(\xi) d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots (48)$$

ところで  $\rho_y(\xi)$  の形は河床形状の統計的構造から与えられるべきものであるが、その逆正弦関数の積分が一般に難しく、まず次のような指数型相関係数を仮定して試算した。この場合指数型相関係数の緩和距離としては平均波長を課した。すなわち、

$$\rho_y(\xi) = \exp(-\pi r_0 \xi) \dots\dots\dots (49)$$

と仮定すると、

$$\int_0^\infty \sin^{-1} \rho_y(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi r_0} \int_0^1 \frac{\sin^{-1} \rho_y}{\rho_y} d\rho_y = \frac{\ln 2}{2 r_0}$$

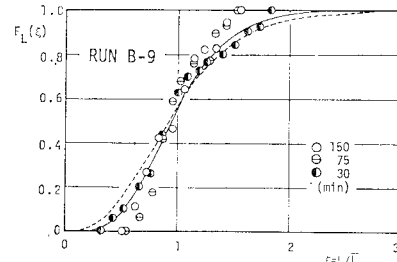
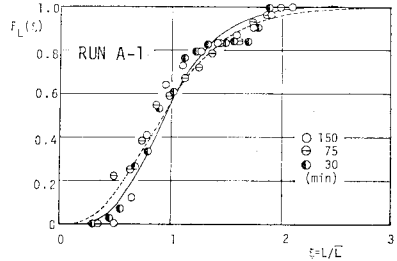
となり、波長の分散および変動係数 ( $\alpha_L$ ) が次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \text{Var}[L] &= 4 \ln 2 / (\pi r_0^2) \\ \alpha_L &= \sqrt{\text{Var}[L]}/E[L] = \sqrt{\ln 2/\pi} \approx 0.47 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

なお、実際の  $\rho_y(\xi)$  は必ずしも式 (49) で与えられるようなものとは限らず、次のように周期性の強い例についても数値計算を行った。

$$\rho_y(\xi) = \exp(-\pi r_0 \xi) \cdot \cos \pi r_0 \xi \dots\dots\dots (51)$$

このとき  $\alpha_L$  は約 0.34 となり、実際の河床波では 0.35~0.5 程度と推定された。これらは著者らの実験値<sup>2), 10)</sup> と良く合致した。このため河床波の波長分布は shape parameter  $r$  が



図—14 河床波の波長分布の例

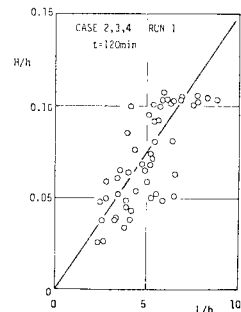
$$r = 1/\alpha_L^2 \approx 4.5 \dots\dots\dots (52)$$

程度の gamma 分布で良く近似されるものと期待され、図—14 に示されるようにその適合性は十分良好であると判断される。なお図中の実線は  $r=6$ 、破線は  $r=4$  の gamma 分布による理論曲線で、平均値で標準化されたその密度関数は次式で与えられる。

$$f_L(\xi) = \frac{r}{\Gamma(r)} (r\xi)^{r-1} \cdot \exp(-r\xi) \dots\dots\dots (53)$$

(2) 河床波の波高分布と平均波高について

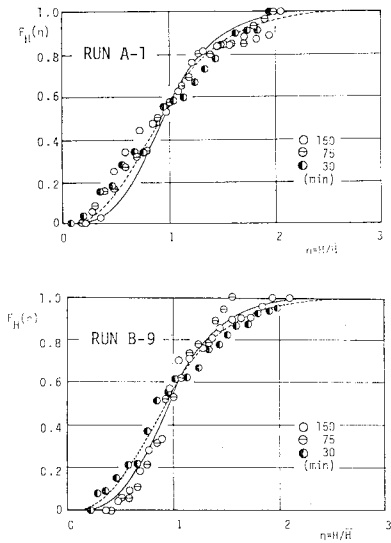
河床波の波高分布については  $y(x)$ ,  $y(t)$  の両方から等しく求められるべきものであるが、 $y(x)$  と  $y(t)$  の動特性は異なり、波高は静特性と密接に結びつきそれに波形が影響しているものと考えられ、分布に対する理論的取り扱いは難しい。ただし、著者らが河床波の個々の波の形状を検討した結果<sup>10)</sup>、その例を図—15 に示すように各波の相似性(波高波長比が等しい)がほぼ成立し、これを認めると波長と同一分布となり、標準化された波高の密度関数は次式のような gamma 分布のそれで近似される。



図—15 河床波の個々の波の波長と波高との関係

$$f_H(\eta) = \frac{r}{\Gamma(r)} (r\eta)^{r-1} \cdot \exp(-r\eta) \dots\dots\dots (54)$$

これは波長分布と同様に 図—16 によってほぼその適合性が認められた。



図一16 河床波の波高分布の例

次に先に述べたように波高は河床高分布の静特性と関係しており、特に、その標準偏差  $\sigma_y$  と密接に結びついていると考えられるので、これについての検討を行った。従来実験的に平均波高が  $\sigma_y$  の2倍程度であることが知られているが、これについて上述の波の分布をもとに説明を加えた。

いま、波長および波形勾配で決定される正弦波一波长を単位に考え、これが波長が gamma 分布に従った状態で配列していると仮定する。すなわち波長  $L_i$  内の河床面は正弦波の始点を原点として、

$$y = (H_i/2) \cdot \sin(2\pi x/L_i) \dots\dots\dots (55)$$

で与えられ、この一波长分の河床高の分散  $\sigma_{y_i}^2$  を求めると次のようになる。

$$\sigma_{y_i}^2 = \frac{1}{L_i} \int_0^{L_i} \left(\frac{H_i}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L_i}\right) dx = \frac{H_i^2}{8} \dots\dots\dots (56)$$

したがって、全体としての河床高の分散は次式で与えられることになる。

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_{y_i}^2 (L_i/\bar{L}) \text{prob}[L=L_i] \dots\dots\dots (57)$$

あるいは、

$$\sigma_y^2/\bar{H}^2 = \int_0^\infty \xi^3 f_L(\xi) d\xi/8 \dots\dots\dots (58)$$

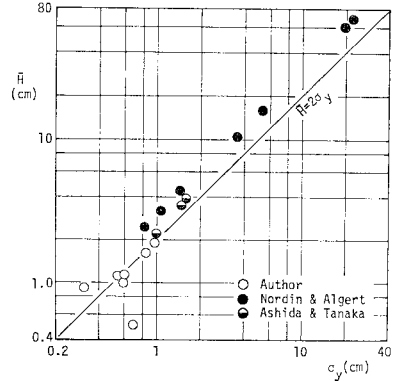
となり、波長分布として gamma 分布を採用すると、平均波高と河床高標準偏差との比は次式となる。

$$\hat{H} \equiv \bar{H}/\sigma_y = 2r\sqrt{2r\Gamma(r)/\Gamma(r+3)} \dots\dots\dots (59)$$

上式からわかるように、 $r$  が 4~6 程度の値では、 $\hat{H}$  は約 2.2 となりほぼ次式が成立する。

$$\bar{H} \approx 2\sigma_y \dots\dots\dots (60)$$

これは 図一17 に示されるように本論文に用いた実験値



図一17 河床波の平均波高と河床高の標準偏差との関係

によっても検証された。

### 4. 結 言

本論文では河床形状の統計的性質を検討し、それが lower regime (おもに dunes の領域) での流砂量、抵抗、河床変形など移動床過程の説明に有効である点にかんがみ、これらの適用性を高めるため簡単なモデル化を試みた。すなわち河床形状を定常 Gaussian 過程と考え確率過程論の成果を利用して簡潔なモデルで河床形状を表現し、特に河床波のスペクトルモデルの提案、さらにより具体的で適用性の大きい河床波自体の波長、波高分布に対する適切な分布形についての考察を行った。

まず河床形状のスペクトルに対しては -3 乗則など次元解析的に得られる性質に立脚した普遍関数表示を得、実験的に検証するとともにこれをもとに河床波の平均波長、周期、波形勾配等に関する議論を行った。

次に確率過程論における零交差問題の成果を利用して、波長分布として変動係数が約 0.47 の gamma 分布が適当なことを示し、波高分布についても同一の分布形を推定し、これらの妥当性を実験結果によって確認した。さらに平均波高と河床高の標準偏差との関係を波の分布に基づいて評価し、河床形状の統計的性質を移動床現象の解析や実際の河道設計等に応用し得るものとして定式化した。

なお本論文では局所的な流砂の挙動や流れの変化等は無視(あるいは縮約)しており、また統計的な理論展開でも、こうした手法では常套手段ではあるものの、関連した事象に対する現時点での情報不足から導入したいくつかの仮定があり、今後これらについての詳細な検討が必要と思われる。著者らもより基礎的な流砂問題に関する研究、河床形状についての多くの資料収集など研究を継続していく予定である。



最後に本研究を遂行するにあたり、実験、資料整理等に協力いただいた、当時の京都大学大学院生矢田 篤君（現在・関西電力勤務）に謝意を表す。

#### 参 考 文 献

- 1) Nordin, C.F. and J.H. Algert : Spectral analysis of sand waves, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 92, HY 5, pp. 95~114, 1966.
- 2) 中川博次・辻本哲郎 : 河床波の発達性状に関する実験的考察, 京都大学防災研究所年報, 第 19 号 B-2, pp. 289~309, 1976.
- 3) Cheong, H.F. and H.W. Shen : Spectral properties of alluvial bed forms in rivers and flumes, Proc. International Symposium on River Mechanics, IAHR, Bangkok, Thailand, Vol. 1, Paper A-55, pp. 639~651, 1973.
- 4) Nordin, C.F. Jr. : Statistical properties of dune profiles, Geological Survey Professional Paper 562-F, U.S. Government Printing Office, 41 p., 1971.
- 5) Engelund, F. : On the possibility of formulating a universal spectrum for dunes, Basic Research Progressive Report, Hydraulic Laboratory, Technical University of Denmark, Copenhagen, 18, pp. 1~4, 1969.
- 6) Jain, S.C. : Evolution of sand wave spectra, Ph.D. Dissertation, The University of Iowa, 102 p., 1971.
- 7) Hino, M. : Equilibrium range spectra of sand waves formed by flowing water, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 34, Part 3, pp. 565~573, 1968.
- 8) 芦田和男・田中祐一朗 : 砂漣に関する実験的研究 (3), 京都大学防災研究所年報, 第 10 号 B, pp. 121~132, 1967.
- 9) Taylor, B.D. : Temperature effects in alluvial streams, Report No. KH-R-27, W.M. Kech Laboratory of Hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1971 (Flow over alluvial bed by H.W. Shen, Environmental Impact on Rivers, Chapter 2, 31 p., 1972 より引用).
- 10) Annambhotla, V.S.S. : Statistical properties of bed forms in alluvial channel in relation to flow resistance, Ph.D. Dissertation, The University of Iowa, 137 p., 1969.
- 11) 福岡捷二 : 砂漣の発生・発達とそのスペクトル, 東京工業大学土木工学科研究報告, No. 4, pp. 121~132, 1968.
- 12) Yalin, M.S. : Geometrical properties of sand waves, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 90, HY 9, pp. 105~119, 1964.
- 13) Willis, J.C. and J.F. Kennedy : Sediment transport in migrating bed forms, Preprint for U.S.-Japan Binational Seminar on Erosion and Sedimentation, Hawaii, USA, 21 p., 1978.
- 14) Hubbell, D.W. and W.W. Sayre : Closure to discussion of sand transport studies with radioactive tracers, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 91, HY 5, pp. 139~149, 1965.
- 15) 中川博次・辻本哲郎 : 流砂の stochastic model の dune bed への適用に関する研究, 土木学会第 33 回年次学術講演会講演概要集, 第 2 部, II-263, pp. 507~508, 1978.
- 16) 中川博次・辻本哲郎・矢田 篤 : 河床形状と流砂の相互関係と河床波の変形過程について, 京都大学防災研究所年報, 第 21 号 B-2, pp. 385~405, 1978.
- 17) Yang, C.T. and W.W. Sayre : Stochastic model for sand dispersion, Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, Vol. 97, HY 2, pp. 265~288, 1971.
- 18) Rice, S.O. : Mathematical analysis of random noise, Bell System Technical Journal, 23, pp. 282~332, 1944 (Reprinted in Selected Paper on Noise and Stochastic Processes edited by N. Wax, Dover, 1954).

(1978.10.16・受付)