

## 河床微生物による河川の自浄作用について

THEORY ON THE SELF-PURIFICATION BY BACTERIAL  
ACTIVITY ON RIVER BEDS

日 野 幹 雄\*

By Mikio IIINO

## 1. はじめに

生物化学的作用による河川の自浄作用が、微生物（特に細菌）によっていることに対して、今日異議をととなえるものはない。しかし、その細菌の活動が河川中のどこで行われているかについては明確な測定はもちろん、それを問題にした理論も少ないようである。多くは「河水中（に浮遊する）や河床（に付着している）微生物」の働きによるとして、特にいずれの作用が主であるかを問題にしていない。

著者は先に河川の自浄作用に関与する微生物が河水中に浮遊流下するものとして、同じく微生物の増殖式を考慮した論文を発表した。これは従来の自浄作用の理論中に内在している考え方、あるいは“水中（あるいは河床）の微生物による”とおおまかにいわれてきた考え方に沿ったものであった。しかし、後述のように自浄作用を行う微生物は主として河床に存在するとの最近の報告もある。おそらく自浄作用に関与する微生物は普通、河水中にも河床にも生息しているであろう。しかし、それぞれの寄与度は物理的・生物的条件により異なるであろうし、また相互の関係も無視し得ないであろう。

こうした複雑な場合をいきなり取り扱ったのでは、自浄作用に係る種々の因子の作用・効果を把握することは困難である。そこで、まずそれぞれの場合を切り離して理論的検討を行い、十分に機構を理解してからより現実に近い複雑なケースの解明へと進む方が、自浄作用を理解するうえでの近道と考えられる。もちろん、自浄作用は生物学的非線形過程であるから、浮遊微生物の作用と河床微生物の作用の単純な重ね合せというわけにはいかないし、切り離された個々のケースでは説明し得ない現実もありうる。しかし、量的には若干ゆがむとはいえ、質的にはかなりの現実の説明をなし得ると考えられ

る。

なお、次報ではこれら2つの理論の一般的結論と二、三の実測結果の比較を行い、また今後、2つの理論を統合したものへ進む考えである。

さて最近に至って、河床に付着している微生物層の重要性を指摘する論文がみられるようになった。河水中の有機物の分解がおもに河床に膜状に付着している微生物によるであろうとする次のような実験実測事実がある。

(i) Wuhmann, Ruchti & Eichenberger<sup>1)</sup> (1966) は、長さ 546 m、幅 21 cm、深さ 15 cm の水路で実験を行い、水中の有機物濃度の流下に伴う変化を測定した（流下速度は  $u=153/840(\text{m/sec})=18.3(\text{cm/sec})$ ）。

彼らの実験によれば、浮遊流下生物は無視でき、自浄作用は河川断面の潤辺に付着成長する biomass によることが示されている。

(ii) 手塚ら<sup>2)</sup> (1966) は全長 31 m の循環式水路での自浄作用の模擬実験により、河床状態・初期汚染物質濃度・壁面付着生物層の成長を調べ、自浄作用の進行と付着生物の関係を明らかにした。

(iii) 手塚ら<sup>3)</sup> は汚染の軽微な多摩川上流の調査で、河水中の細菌数は  $10^4/\text{ml}$  程度であったのに対して、瀬の河床では  $10^7/\text{cm}^2$  の細菌が検出されたと報告し、有機物のおもな分解場所は河床であろうと推定している。

(iv) 著者の実験室で行った上昇気泡による循環式円管流（アクリル製内径 3.1 cm、長さ約 7.5 m、流速約 5 cm/s）による自浄作用の実験においても、滑らかな管壁に薄い微生物膜が形成され、管の内部にネットを挿入して管壁を粗にした場合には付着微生物量が増加し、自浄係数が増えるのを確かめた<sup>4),5)</sup>。

(v) 松本ら<sup>6a-6c)</sup> (1975, 1976, 1977) は連続攪拌槽による河川自浄作用のモデル実験を行い、付着生物の増殖に注目している。

(vi) 芦立ら<sup>7a-7c)</sup> (1974, 1976) は河床付着物としての糸状細菌 *Sphaerotilus* いわゆる「ミズワタ、下水菌」

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

の剝離・浮遊量の河川汚濁や季節による変化を調べている。

(vii) また、醸造工学の分野では、Atkinson & Fowler<sup>6)</sup> (1974) は反応槽や攪拌翼に付着する微生物膜(かなり厚くべっとりという感じになる)について微生物膜の厚さと反応速度の関係を調べている。

微生物膜がなぜ河床や固体壁に付着しやすいかについては未解明であり、Atkinson & Fowler は、微生物浮遊液と接触する面が微生物の付着により生物学的活性をもつためといっている。

本論文は、このような実験・実測結果を根拠に、有機物分解は河床に膜状に付着している微生物によるの立場から、河川自浄作用の理論を展開する。なお、付着生物膜の剝脱や分散浮遊の機構と影響については別に論文を予定しており、本論文ではこの影響は考慮しないことにする。主なる目的は、BOD・DO・微生物量の流下距離  $x$  に伴う変化と自浄作用の指標である脱酸素係数  $K_1$  の理論式を closed form solution として導き、河川自浄作用の機構を理解することである。

## 2. 理 論

### (1) 基礎方程式

河床に微生物膜が付着形成される場合の基礎方程式は次のようである(補遺 2)。

$$\begin{cases} \mu_b Y_b - \beta_b Y_b = 0 \dots\dots\dots(1) \\ u \frac{dL}{dx} = -\frac{1}{h} (\mu_b' - \beta_b') Y_b \dots\dots\dots(2) \\ u \frac{dO}{dx} = -\frac{\mu_b'}{h} Y_b + K_2(O_s - O) \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

混乱の可能性はないので以下の取り扱いでは、 $Y_b$  を除き  $\mu_b \cdot \mu_b' \cdot \beta_b \cdot \beta_b'$  の添字  $b$  を省略する注1)。

微生物の増殖を制御する因子は、(i) 栄養分(いまの場合 BOD)、(ii) 呼吸(生物酸化)のための酸素、(iii) 微生物密度、(iv) 食物連鎖の上位者(原生動物)による捕食、(v) 温度、(vi) 微生物の作り出す毒素(inhibitor)、(vii) 外的害毒分等である。このうち、(iii) は増殖関数の中に、(iv) は  $\beta$  として一応含まれていると考えられ、また、(v) 以下の因子は本論文では考えないことにする。

栄養分と酸素のうちの一つがそれぞれ増殖制約因子で他の一つが十分ある場合の BOD・ $Y_b$ ・DO の流下に伴う変化式および脱酸素係数  $K_1$  の理論を述べる。

### (2) 第 I 種領域—栄養分(BOD)が制約因子の場合

(i) まず最初に、酸素濃度は十分高く、栄養分が微

注 1) 記号の意味は補遺に一括表示。

生物増殖の制約因子の場合を考える。微生物の増殖関数  $\mu$  はこのとき次のように近似できる(増殖関数  $\mu$  の関数形については文献 9)、10) で論じた)。

$$\mu = \mu(L/Y_b, O/Y_b) \rightarrow \mu_1(L/Y_b) \dots\dots\dots(4) \text{注} 2)$$

$\mu$  の関数形の一例は次のようである。

$$\mu = \mu_{\max} \frac{L/Y_b}{a + L/Y_b} \cdot \frac{O/Y_b}{b + O/Y_b} \rightarrow \mu_{\max} \frac{L/Y_b}{a + L/Y_b} \dots\dots\dots(4 \cdot a, b) \text{注} 3)$$

なお、上式を  $Y_b$  について表わせれば次のようになる。この式は次節で利用する。

$$(ab)Y_b^2 + (aO + bL)Y_b + \left(1 - \frac{\mu_{\max}}{\mu}\right)LO = 0 \dots\dots\dots(4 \cdot c)$$

式(1)、(4)より、

$$\mu_1(L/Y_b) - \beta = 0 \dots\dots\dots(5)$$

上式(5)の根は一般に次のように書ける。

$$L/Y_b = 1/c_1 \dots\dots\dots(6)$$

したがって、 $Y_b$  は  $L$  に比例する。

$$Y_b(x) = c_1 L(x) \dots\dots\dots(7*) \text{注} 4)$$

もし、 $\mu_1$  に式(4・b)を用いれば、

$$c_1 = \frac{\mu_{\max} - \beta}{a\beta} \dots\dots\dots(6 \cdot a)$$

$$Y_b(x) = \frac{\mu_{\max} - \beta}{a\beta} L(x) \dots\dots\dots(7 \cdot a*)$$

となる。ある流下距離  $x=ut$  での河床微生物量  $Y_b$  は増殖率の関数形  $\mu_1$  のいかににかかわらずその点での BOD 濃度  $L$  に比例して上のように定まる。もちろん、 $L$  は  $x$  の関数である。このとき、式(2)に含まれる  $\mu \cdot \mu'$  等もそれぞれ一定値となる。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \mu_1(L/Y_b) = \mu_1(1/c_1) = \text{一定} \\ \mu' &= \mu_1'(L/Y_b) = \mu_1'(1/c_1) = \text{一定} \\ \mu' - \beta &= \mu_1'(1/c_1) - \beta = \text{一定} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

式(4・b)を用いた特別の場合には、これらは次のようになる。

$$\mu' = \mu_{\max}' \frac{L/Y_b}{a' + L/Y_b} = \frac{a\beta}{a' \mu_{\max} + (a - a')\beta} \cdot \mu_{\max}' = \text{一定} \dots\dots\dots(8 \cdot a)$$

注 2)  $L$  の次元は  $[M/L^2]$ 、 $Y_b$  の次元は  $[M/L^2]$ 。したがって、 $L/Y_b$  は無次元となっていない。このような点为了避免には微生物膜としてのミクロな議論が必要である<sup>11)</sup>。もし  $Y_b$  の定義を河床単位面積有効微生物膜厚さ  $\delta$  内の微生物量とすれば、次元はみかけ上  $[M/L^2]$  となる。しかし、長さの単位  $[L]$  を変えたところで、有効微生物膜厚さ  $\delta$  はそのままであるから、 $L/Y_b$  の数値は  $[L^{-1}]$  倍となる。

注 3) 本論文中の式で(4・a)、(4・b)等番号の次に小文字の a, b, c, ... を付した式は、(4)等のように番号のみの式の特別な場合の式で、理解を助ける補助式である。一般式は数字のみの式で、この式で本理論の論理は成立する。

注 4) 式番の最後に \*印を付した式は、結論的な重要な関係式であることを意味する。

$$\mu' - \beta' = \frac{\mu_{\max}' a \beta - a' \beta' \mu_{\max} - (a - a') \beta \beta'}{a' \mu_{\max} + (a - a') \beta} = \text{一定} \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

(ii) 以上の結果を BOD の変化式 (2) に代入すれば、

$$u \frac{dL}{dx} = -\frac{(\mu' - \beta')}{h} \cdot Y_b = -\frac{(\mu' - \beta') c_1}{h} \cdot L \dots\dots\dots (9)$$

となる。上式の積分より BOD は厳密に指数減衰することが導かれる。

$$L = L_0 e^{-K_1 x/u} \dots\dots\dots (10^*)$$

ここに、脱酸素係数  $K_1$  は、式 (9)、(10) より次のようになる。この値は初期条件  $L_0 \cdot Y_0$  に無関係な一定値である。

$$K_1 = (\mu' - \beta') c_1 / h = \text{一定} \dots\dots\dots (11)$$

特別な場合として式 (4・b) を用いれば、

$$K_1 = \frac{(\mu_{\max} - \beta) (\mu_{\max}' a \beta - \mu_{\max} a' \beta' - (a - a') \beta \beta')}{a \beta (\mu_{\max}' a \beta + (a - a') \beta)} \cdot \frac{1}{h} \dots\dots\dots (11 \cdot a)$$

さらに、微生物の BOD への再負荷がなければ ( $\beta' = 0$ )、係数  $K_1$  は式 (11・b) となる。

$$K_1 = \frac{(\mu_{\max} - \beta)}{a} \cdot \frac{\mu_{\max}'}{\mu_{\max}} \cdot \frac{1}{h} \dots\dots\dots (11 \cdot b^*)$$

(iii) 式 (7) からただちに、微生物量の変化式が得られる。

$$Y_b(x) = c_1 L_0 e^{-K_1 x/u} \dots\dots\dots (12)$$

もし、式 (4・b) を用いると、式 (12) は次のように表わされる。

$$Y_b(x) = \frac{(\mu_{\max} - \beta) L_0}{a \beta} e^{-K_1 x/u} \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

(iv) 一方、溶存酸素量の変化は、式 (3)、(12) から、

$$u \frac{dO}{dx} = -\frac{\mu'}{h} Y_b + K_2 (O_s - O) = -\frac{c_1 \mu'}{h} L_0 e^{-K_1 x/u} + K_2 (O_s - O) \dots\dots\dots (13)$$

上式は、溶存酸素欠損量  $D$

$$D = O_s - O \dots\dots\dots (14)$$

を導入すれば、次式のように変形される ( $t = x/u$ )。

$$\frac{dD}{dt} + K_2 D = A e^{-K_1 t} \dots\dots\dots (15)$$

式 (15) の解は容易に次のように求まる。

$$D(x) = D_0 e^{-K_2 x/u} + \frac{A}{K_1 - K_2} \{e^{-K_2 x/u} - e^{-K_1 x/u}\} \dots\dots\dots (16^*)$$

ここに、 $D_0$  は  $D$  の初期値、係数  $A$  は  $\mu'$  に式 (8) を用いて、

$$A = \mu' c_1 L_0 \dots\dots\dots (17)$$

$$= \frac{\mu_{\max}' (\mu_{\max} - \beta) L_0}{a' \mu_{\max} + (a - a') \beta} \dots\dots\dots (17 \cdot a)$$

式形から明らかのように、上式はいわゆる oxygen sag (DO が下流に向かって減少し、ある地点で極小値をとり、以後、徐々に飽和濃度へと回復する曲線) を示している。

(v) さて、溶存酸素が十分である条件は、式 (4) において、

$$O/Y_b \gg b \dots\dots\dots (18)$$

が成立することである。これは、式 (12) と式 (16) とより次のようになる。

$$O_s - \left\{ D_0 + \frac{A}{K_1 - K_2} \right\} e^{-K_2 t} \gg \left\{ c_1 b L_0 - \frac{A}{K_1 - K_2} \right\} e^{-K_1 t} \dots\dots\dots (19)$$

また、 $t=0$  では次の条件が成立することである。

$$\frac{O_0}{L_0} \gg c_1 b \dots\dots\dots (20)$$

$$\frac{O_0}{L_0} \gg \frac{b(\mu_{\max} - \beta)}{a \beta} \dots\dots\dots (20 \cdot a)$$

式 (19) の左辺は流下時間  $t = x/u$  とともに増大する項であり、右辺は逆に減少する項である。したがって、ひとたび上記の条件が満たされれば、それより下流では、溶存酸素は十分で栄養分濃度が微生物活動を制約し、したがって自浄作用を規定する因子として働く。一般に、 $b$  はきわめて小さいと考えられるから、上記の条件は多くの場合に成立するであろう。

### (3) 第 II 種領域—溶存酸素が制約因子の場合<sup>注 5)</sup>

(i) 次に、栄養分濃度は十分高いが溶存酸素濃度が微生物の増殖の制限因子となっている場合を考える。このとき、微生物の増殖関係は次のようになる。

$$\mu = \mu(L/Y_b, O/Y_b) \rightarrow \mu_2(O/Y_b) \dots\dots\dots (21)$$

一例をあげれば、

$$\mu = \mu_{\max} \frac{L/Y_b}{a + L/Y_b} \cdot \frac{O/Y_b}{b + O/Y_b} \rightarrow \mu_{\max} \frac{O/Y_b}{b + O/Y_b} \dots\dots\dots (21 \cdot a)$$

したがって、

$$\mu_2(O/Y_b) - \beta = 0 \dots\dots\dots (22)$$

の関係から、

$$Y_b(x) = c_2 O(x) \dots\dots\dots (23^*)$$

ここに、 $c_2$  は式 (22) の根の逆数で、

$$\mu_2(1/c_2) - \beta = 0 \dots\dots\dots (24)$$

$\mu$  に式 (21・a) を用いれば、

注 5) 第 II 種領域の存在は Wuhmann らの実験で証されよう。しかし、理論と実験・実測との全般的な比較は、一連の論文 (前論文、本論文および次に予定している理論) が出揃った段階で行う。理論とただちに比較し得る実験・実測はほとんどなく、実験データは散在的断片的だからである。

$$Y_b = \frac{\mu_{\max} - \beta}{b\beta} O \dots\dots\dots(23 \cdot a)$$

$$c_2 = (\mu_{\max} - \beta) / b\beta \dots\dots\dots(24 \cdot a)$$

が得られる。また、このとき係数等について次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \beta = \text{一定} \\ \mu' &= \mu_2'(O/Y_b) = \mu_2'(1/c_2) = \text{一定} \\ \mu' - \beta &= \mu_2'(1/c_2) - \beta' = \text{一定} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

増殖率に式 (21・a) を用いれば、これらは、

$$\mu = \beta \dots\dots\dots(25 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \mu' &= \mu_{\max}' \frac{1/c_2}{b'+1/c_2} \\ &= \mu_{\max}' \frac{b\beta}{\mu_{\max}b' + (b-b')\beta} \dots\dots\dots(25 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu' - \beta' &= \frac{b\beta\mu_{\max}' - b'\beta'\mu_{\max} - (b-b')\beta\beta'}{\mu_{\max}b' + (b-b')\beta} \\ &\dots\dots\dots(25 \cdot c) \end{aligned}$$

(ii) 次に、溶存酸素量  $O$  について考察する。式 (3) は、

$$\begin{aligned} u \frac{dO}{dx} &= -\frac{\mu'}{h} Y_b + K_2(O_s - O) \\ &= -K_2'O + K_2O_s \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

ここに、

$$K_2' = \frac{c_2\mu_2'(1/c_2)}{h} + K_2 = \text{一定} \dots\dots\dots(27)$$

特に、式 (21・a) を用いれば、

$$K_2' = \frac{(\mu_{\max} - \beta)\mu_{\max}'}{\{\mu_{\max}b' + (b-b')\beta\}h} + K_2 (= \text{一定}) \dots\dots\dots(27 \cdot a)$$

したがって、溶存酸素  $O$ ・微生物量  $Y_b$  の流下に伴う変化は次のようになる。

$$O(x) = \left\{ O_0 - \frac{K_2}{K_2'} O_s \right\} e^{-K_2'x/u} + \frac{K_2}{K_2'} O_s \dots\dots\dots(28*)$$

$$Y_b(x) = c_2(O_0 - K_2O_s/K_2') e^{-K_2'x/u} + c_2 \frac{K_2O_s}{K_2'} \dots\dots\dots(29)$$

$O_0 - K_2/K_2' \cdot O_s$  の正負は一義的には決まらず、 $O_0$  により正にも負にもなり得る。したがって、初期条件  $O_0$  が極端に低く  $O_0 - K_2O_s/K_2'$  が負ならば、汚染物の流入点から下流に向かって溶存酸素や微生物量が増すこともあり得るが、一般には  $O_0 - K_2O_s/K_2'$  は正で流下につれて  $O$  や  $Y_b$  は減少する。

ここで注意すべきは、 $t \rightarrow \infty$  で溶存酸素・微生物とも零でなく、再曝気量と微生物の酸素消費量とのつり合いとして有限値に漸近する。

$$\left. \begin{aligned} O &\rightarrow O_\infty = \frac{K_2}{K_2'} O_s \\ Y &\rightarrow Y_\infty = c_2 \frac{K_2}{K_2'} O_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30*)$$

もっとも、すぐ後に指摘するように、溶存酸素が増殖制約因子となる条件は無限の下流までは成立せず、やがて BOD 制約域に移る。

(iii) 最後に BOD の変化は、

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= -\frac{(\mu' - \beta')}{h} Y_b \\ &= -\frac{c_2(\mu' - \beta')}{h} O \\ &= -\mathcal{L}_1 K_2' e^{-K_2'x/u} - \mathcal{L}_2 \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

ここに、

$$\mathcal{L}_1 = \frac{c_2(\mu' - \beta')(O_0 - K_2O_s/K_2')}{hK_2'} \dots\dots\dots(32)$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{c_2(\mu' - \beta')}{h} \cdot \frac{K_2O_s}{K_2'} \dots\dots\dots(33)$$

式 (31) の解は次のように得られる。

$$L(x) = L_0 - \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1 e^{-K_2'x/u} - \mathcal{L}_2 x/u \dots\dots(34*)$$

式 (34) によれば、BOD は時間すなわち (流下距離) とともに直線的に急速に減少し、このままでは BOD は負になる。しかし、これはあり得ない意味のないことで、実際には BOD の急速な低下のため微生物の増殖制約因子は溶存酸素から BOD へと変わることを意味している。

(iv) 一方、係数  $K_1$  は、

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \\ &= -\frac{c_2(\mu' - \beta')}{h} \cdot \frac{O}{L} \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

したがって  $t \rightarrow \infty$  で (ただし、溶存酸素制約域内で)

$$K_1 \rightarrow \frac{c_2(\mu' - \beta')}{h} \cdot \frac{K_2O_s}{K_2'} \cdot \frac{1}{L} \dots\dots\dots(36)$$

(v) 一方、栄養分が制約因子ではないということは、式 (4) より、

$$\frac{L}{Y_b} \gg a \dots\dots\dots(37)$$

を意味し、したがって、式 (23) を考慮すれば、

$$L \gg ac_2O \dots\dots\dots(38)$$

式 (38) に式 (28) を代入すれば、初期溶存酸素量  $O_0$  が与えられた場合の各距離  $x$  におけるこの式の適用最小 BOD は次式で決まる。

$$L_{\min}(x) = M \cdot ac_2 \left[ \frac{K_2}{K_2'} O_s + \left( O_0 - \frac{K_2}{K_2'} O_s \right) e^{-K_2'x/u} \right] \dots\dots\dots(39)$$

ここに、 $M(\gg 1)$  は 1 より十分大きな数である。また、式 (38) に式 (28)、(34) の関係を代入すれば、

$$\begin{aligned} L_0 \gg \mathcal{L}_1 \{ 1 - e^{-K_2'x/u} \} + \mathcal{L}_2 x/u \\ + ac_2 \left( O - \frac{K_2}{K_2'} O_s \right) e^{-K_2'x/u} + ac_2 \frac{K_2}{K_2'} O_s \end{aligned} \dots\dots\dots(40)$$

となる。上式は、初期濃度  $L_0 \cdot O_0$  が与えられた場合の“溶存酸素制約域”の適用範囲を与える。

$t=0$  において、次の条件

$$L_0 \gg ac_2O_0$$

が成立している場合に、上の溶存酸素制約因子の諸式が適用できるが、流下時間  $t(=x/u)$  の増加とともにまもなく、式 (38) あるいは式 (40) の条件が満たされなくなり、BOD・溶存酸素とも増殖制約因子となる短い遷移域を経て、やがて BOD が制約因子となる領域になる。

われわれは、溶存酸素増殖制約域を「第 II 種領域」とよぼう。前項に述べたこれに続く BOD 増殖制約域をしたがって「第 I 種領域」とよぶ。ただし第 II 種領域は常に存在するとは限らず、なにかの理由で BOD 流入点での溶存酸素がきわめて少ないか、あるいは、流入 BOD が異常に高い場合である。この場合には本論文で考慮しなかった嫌気性微生物の活動もはじまり、実際問題はより複雑である。

### 3. 検 討

#### (1) 理論的検討

上述の理論は、いくつかの仮定のもとに導かれていく。しかし、その仮定は特殊なものではない。したがって、上に導かれた諸式から河川の自浄作用の一般的特性を論じることが可能である。上述の諸式には各河川に応じて実験的に決まるパラメーターが含まれているが、これらに具体的数値を与えることなしに、式の上から自浄作用の特性が導かれる。これについては式の導入の過程である程度述べてきたがまとめると次のようである。

理論的検討 (1)—流下に伴う変化

(a) あまり汚れのひどくない河川では流下時間による BOD の通減は指数法則 (式 (10))

$$L(x) = L_0 e^{-K_1 t}$$

に従い、係数  $K_1$  は有機物の分解作用をする微生物等により定まる一定値  $K_1 = (\mu' - \beta')c_1/h$  をとる。

BOD がこのような変化特性を示すのは、溶存酸素量が十分高く ( $O/Y_b \gg b$  ( $b$ : ある定数) 河川汚濁有機物を酸化分解する微生物の増殖が BOD 濃度により制約される領域である。この領域を第 I 種領域と名付けた。BOD の減少が第 I 種領域になると新たな BOD の負荷など条件の変化がない限り、この領域は続く。

(b) そのとき、河床に付着する微生物量は BOD に比例する (式 (12))。

$$Y_b(x) = c_1 L(x)$$

(c) 溶存酸素量  $O(x)$  は BOD 負荷地点より減少し最小値に達したのち、徐々に飽和量に回復する。すなわち、いわゆる oxygen sag を示す (式 (16))。

(d) 有機物分解微生物の増殖が、溶存酸素量により制約される領域がある。この領域を第 II 種領域と名付けた。なんらかの理由により溶存酸素量が非常に少なかったり、BOD 負荷が大きい場合がこれにあたる (しかし、このような場合には、通性および嫌気性微生物の活動を無視し得ない)。

(e) 上記のようにひとたび溶存酸素が微生物増殖の制約因子となっても、やがて再曝気作用の結果溶存酸素は増加するため BOD 濃度が微生物増殖の制約因子となる第 I 種領域に移行し、この領域が長く続くことはない。

第 II 種領域では溶存酸素量は指数関数的に ( $\propto e^{-K_2 x/u}$ ) (初期値より増加もしくは減少) 変化し、平衡値  $O_s K_2 / (c_2 \mu' / h + K_2)$  に漸近する傾向を示す (式 (28))。ただし、前述のように途中で第 I 種領域へ移行する。

(f) この場合の河床微生物量は溶存酸素に比例する (式 (29))。

(g) 第 II 種領域での BOD の変化は  $L_0 - \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1 \cdot e^{-K_2 x/u} - \mathcal{L}_2 x/u$  で表わされる。  $x$  が大きくなると第 4 項の変化が主で BOD は直線的に減少する (式 (34))。

これらの関係を Fig. 1 (a), (b) に模式的に示す。

理論的検討 (2)—各点での BOD との関係

以上の関係を流下距離 (あるいは時間) ではなく  $L$

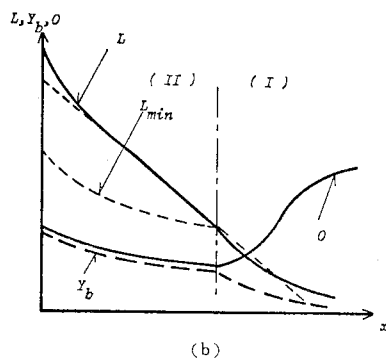
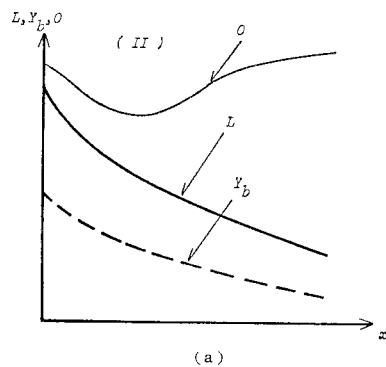


Fig. 1 Schematic explanation on the changes in BOD, DO and bacterial growth  $Y_b$  along the downstream distance  $x$ .

(初期値ではなく、各点の値)を変数として表現すれば次のようになる (Fig. 2).

(a) 係数  $K_1$  は  $L$  が小さければ一定値となり,  $L$  が十分大きくなれば,  $L$  に逆比例して減少する (式 (11), (36)).

$$K_1(x) \begin{cases} = \frac{(\mu_{\max} - \beta) \cdot \mu_{\max}'}{a} \cdot \frac{1}{\mu_{\max}} \cdot \frac{1}{h} & (0 < L < L_*) \quad \text{(I)} \\ = A_K \cdot \frac{1}{L} & (L_* < L) \quad \text{(II)} \end{cases}$$

$$\left( A_K = \frac{c_2(\mu' - \beta') \cdot K_2 O_s}{h} \cdot \frac{K_2}{K_2'} \right), \quad L_* \text{ は遷移点の } L \text{ の値}$$

式末の (I), (II) はそれぞれ第 I 種, 第 II 種領域を意味する.

(b) 溶存酸素量  $O$  は  $L$  が十分小さければ飽和値に近く,  $L$  がある値より大きくなると一定の極限値をとる.

$$O(x) \begin{cases} \rightarrow O_s & (L \rightarrow 0) \quad \text{(I)} \\ \approx \frac{K_2}{K_2'} O_s = O_\infty & (L_* < L) \quad \text{(II)} \end{cases}$$

$L$  が十分高いと汚濁負荷点直後の遷移区間を除いてこの関係が成立し, しばらくの区間は  $dO/dt \approx 0$  となる.

(c) 河床の微生物量  $Y_b$  と  $L$  の比は,  $L$  が小さければ一定である (式 (7)). また,  $L$  が十分大きいと,  $O$  は, 極限値に近づき,  $O \rightarrow O_\infty$  となり  $O/Y_b$  が一定となるから  $L/Y_b$  は  $L$  に比例する.

$$L/Y_b \begin{cases} = \frac{a\beta}{\mu_{\max} - \beta} & \text{(I)} \\ = \left( \frac{1}{Y_\infty} \right) L & \text{(II)} \end{cases}$$

あるいは,

$$Y_b(x) \begin{cases} = \frac{\mu_{\max} - \beta}{a\beta} L(x) \quad (0 < L < L_*) \quad \text{(I)} \\ \equiv Y_\infty = \frac{(\mu_{\max} - \beta)}{b\beta} \cdot \frac{K_2}{K_2'} O_s & (L_* < L) \quad \text{(II)} \end{cases}$$

したがって, 汚濁源からの流下とともに, BOD( $L$ ) は減少するにもかかわらず, 各点での  $K_1, O, Y_b, L/Y_b$  などの値は (汚濁負荷点直後の遷移区間を除けば) 初期 BOD ( $L_0$ ) や流下距離 (時間) によらず, その点での  $L$  の値で決まるということが結論される. これらの関係を模式的に図示したのが, Fig. 2 である.

## (2) 数値的検討

上の理論的検討により, 本理論の河川自浄作用の特性は十分理解されたと考えられる. 理論式中のパラメーターについての実験データのない現在, あまり勝手な数値を与えて多くの計算を行うことは慎むべきであるが, 1 つだけ数値計算例を示して以上の結論を補足したい.

これらのパラメーターのうち, われわれがオーダーを

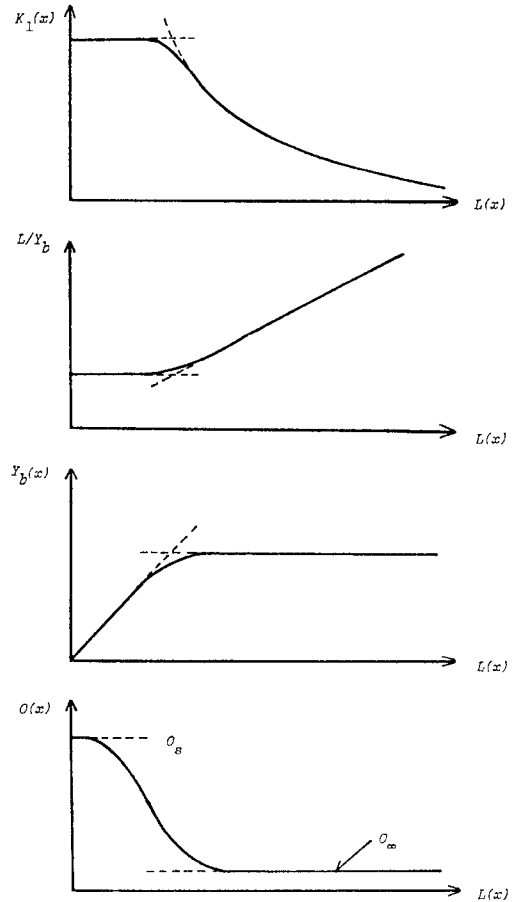


Fig. 2 Schematic representation of  $K_1, L/Y_b, Y_b$  and  $O$  as determined by the BOD concentration  $L(x)$ . These features may be found except near the BOD source.

知っているのは脱酸素係数  $K_1$  と再曝気係数  $K_2$  でもとに大略 0.1~1 (day<sup>-1</sup>) 位の範囲の値をとる (ただし, 本論文では  $K_1$  は理論の結果の1つである). また増殖式中の  $a$  は  $L/Y_b$  が十分小さい場合の直線の増殖曲線と  $L/Y_b$  が十分大きな場合の  $\mu$  の最大値の交点の  $L/Y_b$  の値である.  $\beta$  については  $\mu_{\max}$  より 1 桁小さくその 0.2 倍と仮定する. 水深  $h$  は 1 m, 微生物の BOD への再負荷率  $\beta'$  は簡単のために零とする. さて, 式 (11-b) より,

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{(\mu_{\max} - \beta) \cdot \mu_{\max}'}{a} \cdot \frac{1}{\mu_{\max}} \cdot \frac{1}{h} \\ &= \left( 1 - \frac{\beta}{\mu_{\max}} \right) \frac{\mu_{\max}'}{ah} \\ \mu_{\max}' &= ahK_1 / \left( 1 - \frac{\beta}{\mu_{\max}} \right) \\ &= a \times 1 \times 0.5 \div 0.8 \\ &= \frac{5a}{8} \text{ (day}^{-1}\text{)} \quad (a: \text{m}^{-1}) \end{aligned}$$

$a=40(\text{m}^{-1})$  とすれば,  $\mu_{\text{max}}=25(\text{day}^{-1})$  で発酵工学の教科書にみられる  $\mu_{\text{max}}$  の値の範囲に入る.

以上の数値も含めて, この計算例に用いたパラメータの値をまとめると以下のようである.

$$\begin{aligned} a &= 40 (\text{m}^{-1}), b = 1 (\text{m}^{-1}) \\ \beta &= 0.2 \times \mu_{\text{max}} (\text{day}^{-1}), \beta' = 0 \\ h &= 1 (\text{m}), K_2 = 0.5 (\text{day}^{-1}) \\ O_0 = O_s &= 10 (\text{ppm}), O_s = 10 (\text{ppm}) \\ \mu_{\text{max}} &= 25 (\text{day}^{-1}), \mu_{\text{max}}' = 50 (\text{day}^{-1}) \end{aligned}$$

数値計算は基礎微分方程式 (2, 3) を Runge-Kutta 法により解いた. ただし, 微生物量  $Y_b(x)$  は式 (4・c) と (5) より,

$$(ab)Y_b^2 + (aO + bL)Y_b + \left(1 - \frac{\mu_{\text{max}}}{\beta}\right)L_0 = 0$$

とし, この根として求めた.

計算結果 (1)

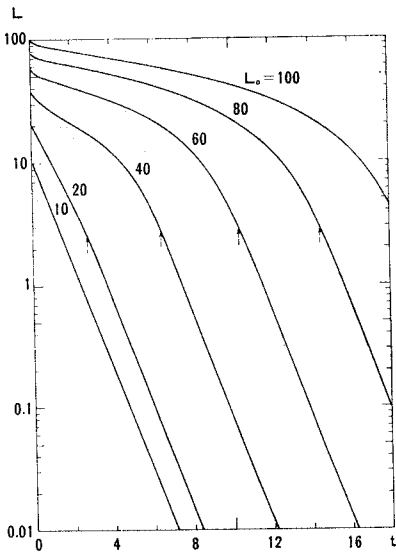


Fig. 3 Downstream change of BOD.  $L_0$  means the initial BOD,  $t(=x/U)$  is the travel time. Arrow represents the point where the exponential decrease of  $L$  begins.

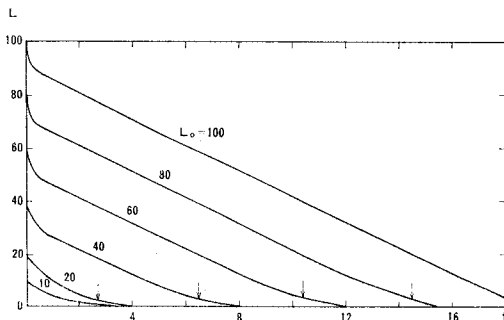


Fig. 4 Linear plot of the BOD change along the downstream distance ( $x=tU$ ).

計算結果は Fig. 3~9 のようである.

図中の記号の単位について: Fig. 3~13 中の  $L \cdot O$  の単位は  $\text{mg}/l$ ,  $Y_b$  の単位は  $\text{mg}/(\text{dm})^3$ , ( $\text{dm}=10^{-1}\text{m}$ )  $t$  は日である. ただし, これらの図は定量的変化を表わすことを目的としたものではなく, 変化の傾向やオーダーの特性を示すことを目的としたもので, したがって, ppm のオーダー・日のオーダーなどの意味である. それゆえ, 誤解や誤った利用を防ぐ意味で図中に単位を記入することをやめる. 定量的な議論のためには, 実験・実測により理論式中に含まれるパラメータの値, さらには増殖式のより厳密な関数形を求めなければならない.

(a) BOD の減少

(i) 初期 BOD が低ければ, BOD は指数的に減少する.

(ii) 初期 BOD が高ければ, Fig. 4 に示すように, BOD はまず直線的に減少する (第 II 種領域). この直線部の勾配の理論値は,

$$-\mathcal{L}_2 = c_2(\mu' - \beta') \frac{K_2 O_s}{h K_2'} = -40$$

で Fig. 4 の曲線のそれと一致する. やがて Fig. 3 の

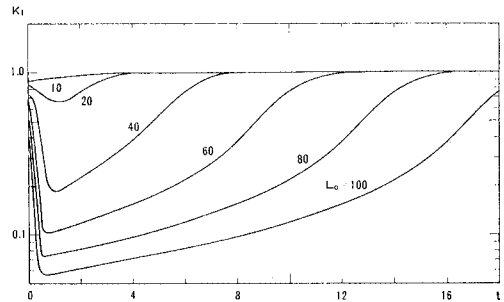


Fig. 5 Changes of the value  $K_1$  along the downstream distance from the BOD source.  $L_0$ : Source intensity of BOD.

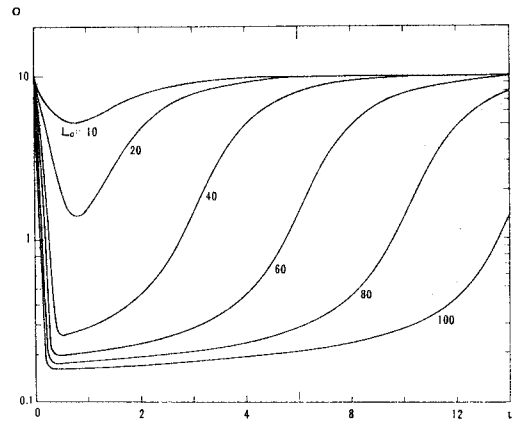


Fig. 6 Changes of the dissolved oxygen concentration along the downstream distance from the BOD source.

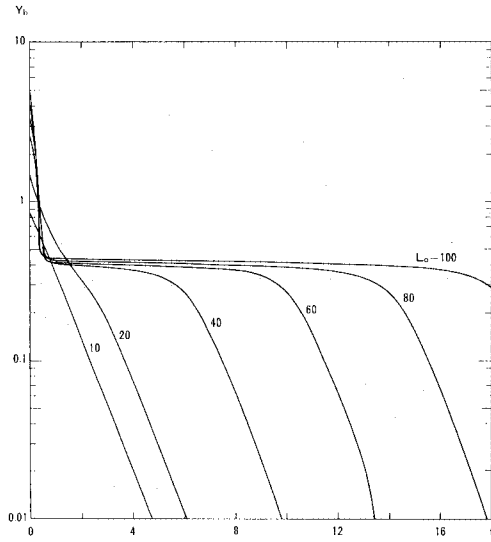


Fig. 7 Changes of bacterial growth on the river bed along the downstream distance ( $x=tU$ ) from the BOD source.

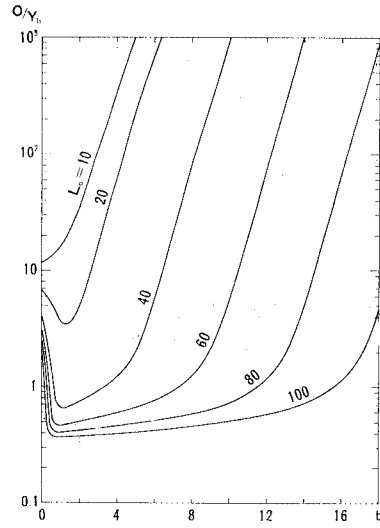


Fig. 9 Changes of the ratio of  $O/Y_b$  with the travel time.

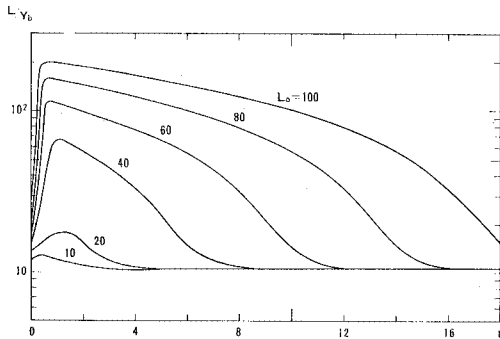


Fig. 8 Changes of the ratio of  $L/Y_b$  along the downstream distance ( $x=tU$ ,  $t$ : travel time).

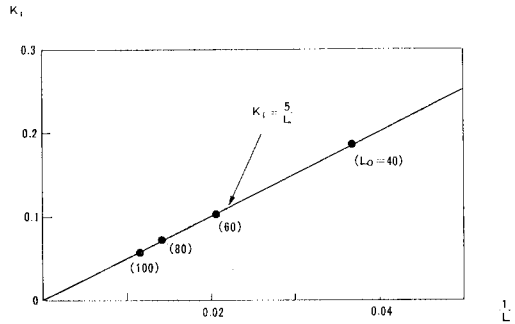


Fig. 10 Relationship between  $K_1$  and  $1/L$ .

ように指数的に減少し（第Ⅰ種領域）に移る。

(b) 脱酸素係数  $K_1$

自浄作用の指標である BOD の減少指数，すなわち脱酸素係数  $K_1$  は 第Ⅰ種領域においては BOD の高低によらず一定である。理論値は，

$$K_1 = \frac{(\mu_{max} - \beta)}{a} \cdot \frac{\mu_{max}'}{\mu_{max}} \cdot \frac{1}{h} = 1$$

で計算値と一致する。それに先立つ第Ⅱ種領域では  $K_1$  はこれよりも低く，汚水の流入とともに急激に減少し，極小値に達したのちやがて徐々に回復する (Fig. 5)。この領域における  $K_1$  と  $1/L$  の関係を Fig. 10 に示す。この直線関係は理論式 (36) とまったく一致する。

$$K_1 = \frac{c_2(\mu' - \beta')}{h} \cdot \frac{K_2 O_s}{K_2'} \cdot \frac{1}{L} = 40 \times 0.123/L = \frac{4.9}{L}$$

$L_0=40$  程度では  $O$  は極小値  $O_\infty$  に達していないのに，上の理論式と数値計算の結果が一致するのは，上式にお

いて  $c_2(\mu' - \beta')$  が逆に極小値より大きく，それらの効果が相殺されるためと考えられる。

(c) 溶存酸素ははじめ指数的に急激に減少しその後徐々に回復し，いわゆる oxygen sag を描く。流入汚水の BOD が高いほど sag は深くなり長く続くが，sag の極小値は一定に近づく。ただし，この計算では微生物の増殖率になお BOD が関連しているため理論極限值  $O_\infty = O_s K_2 / K_2' = 0.123$  よりやや大きく，ほぼ 0.16 である。これは，微生物の増殖が完全に溶存酸素のみで制約されているのではなく  $L/Y$  にも多少依存しているためである。この点を修正すると理論値は 0.155 となる (Fig. 6)。

(d) 微生物量

河床付着微生物量の流下方向（流下時間に換算）の変化と制約因子との比 ( $L/Y_b$ ,  $O/Y_b$ ) を Fig. 7~9 に示す。付着微生物は汚濁負荷点 ( $x/U=0$ ) で最大であるが流下直後急激に減じしばらく一定値に保たれる。これは，微生物の急増殖のために溶存酸素が急減し，再曝気



と微生物の酸素要求が釣り合う最低値となり、微生物の増殖は BOD とはほとんど無関係に最低溶存酸素量で決まるためである。この理論値は、

$$Y_{\infty} = c_2 O_{\infty} = \frac{\mu_{\max} - \beta}{b\beta} O_{\infty} = 0.49$$

であるが、Fig. 7 の計算値はやや少なく  $Y_{\infty} = 0.4 \sim 0.45$  である。

やがて、微生物による BOD 分解の進行による BOD の減少とともに再曝気作用の効果が卓越し ( $O/Y_b$  は急増, Fig. 9), 今度は逆に BOD が制約因子となる第 I 種領域に移る。ここでは、微生物の増殖と死滅・除去の釣り合いから  $L/Y_b = \text{一定値}$  となる (Fig. 8)。この理論値は、

$$L/Y_b = \frac{a\beta}{\mu_{\max} - \beta} = 10$$

で、Fig. 8 の値と一致する。

以上のように前節において理論式の式形から論じたことをこれらの図によって具体的に明確に示し得た。

計算結果 (2)

次に BOD 負荷源からの任意の流下距離 (時間) での BOD ( $L(x)$ ) と、その点での指標  $Y_b \cdot O \cdot K_1$  の関係を以上の計算結果から図示すると、Fig. 11~13 のようになる。汚濁負荷点以後、短い遷移時間 (距離) ( $t=0 \sim t_m$ , この例では  $t_m \cong 0.55 \sim 1$ ) を経たのち、これらの値と  $L(x)$  とはほぼ先に述べた理論から導かれた 1 本の関係曲線により表わされることが示されている。

(注) I・II 種領域区分について

第 I 種領域のはじまりの条件は、式 (18) により  $O/Y_b \geq b$  である。いまの例では  $b=1$  であるので、 $O/Y_b = 10$  を I 領域の開始点として Fig. 9 より各  $L_0$  に対してこの流下時間を読みとり、Fig. 3, 4 に矢印を記入した。Fig. 4 から明らかなように、この点から  $L \propto e^{-K_1 t}$  の関係がはじまる。

一方、同様に第 II 種領域の成立条件は、式 (37)  $L/Y_b$

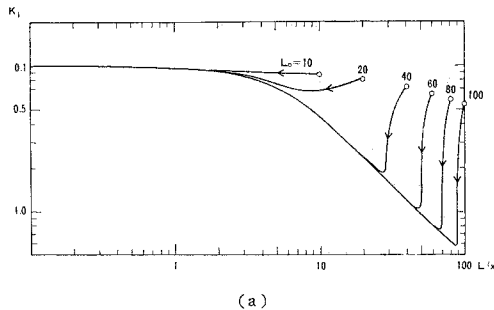


Fig. 11 (a) Changes in  $K_1$  with the downstream distance, shown as a function of local value of  $L(x)$ . Arrow shows the direction of change from the source marked by circle (log-log plot).

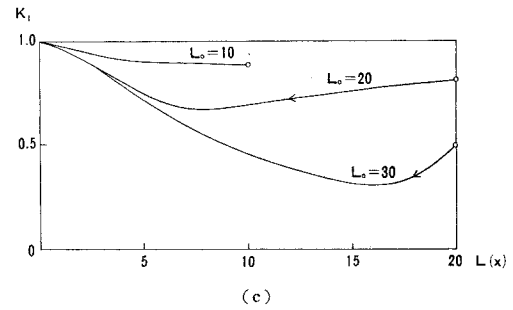
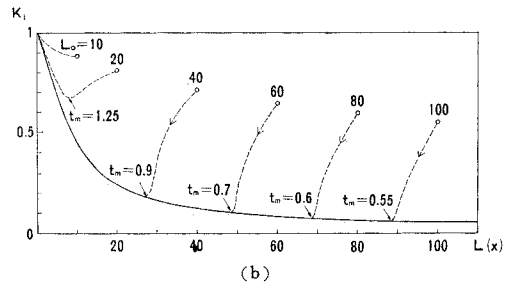


Fig. 11 (b), (c) Changes in  $K_1$  as a function of local value of  $L(x)$  (linear plot).

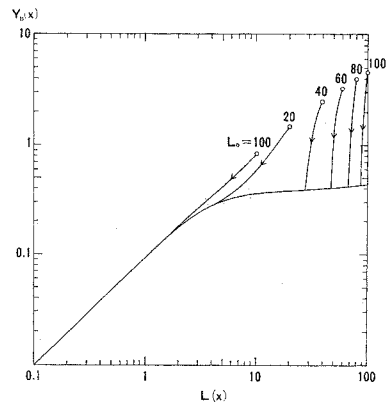


Fig. 12 Change in the bacterial amount  $Y_b$  as a function of local value of  $L(x)$ . Arrow indicates the direction of change beginning from the BOD source marked by circle.

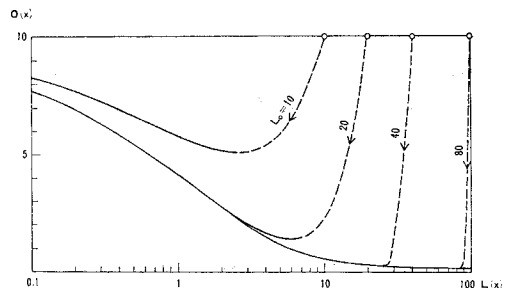


Fig. 13 Change in the DO as a function of local value of  $L(x)$ .

≧  $a (=40)$  である。ところで、Fig. 8 の  $L/Y_b$  と Fig. 3 のⅡ領域(直線領域)とを比較すると、 $L/Y_b \geq 30$  が直線領域の分割条件となっており、式(37)より緩くなっている。これは次のように考えればよい。 $L$  が大きく微生物量が多いと、再曝気作用で溶かし込まれた酸素はたちまち微生物に消費され、 $O$  は最低限の値に保持される。すなわち、 $dO/dt \approx 0$  の比較的広い区間が存在する(Fig. 6)。この区間では  $O/Y_b \ll b$  (Fig. 9) で制約因子はむしろ溶存酸素制約領域である。したがって、 $L$  の変化は第Ⅱ種領域的に直線の減少をする。

$Y_b$  のオーダーについて：Atkinson & Fowler<sup>8)</sup> によれば微生物反応槽内の微生物膜は  $0.1 \sim 1 \text{ kg/m}^2$  である。これを換算すれば  $10^3 \sim 10^4 \text{ mg}/(\text{dm}^2)$  である。この中には有効膜厚以外の微生物重量も含まれているから、いま1つの推算として、有効膜厚を  $100 \mu\text{m}$  として  $(\text{dm})^2 = 10^3 \text{ cm}^2$  の河床面上の微生物重量を求めると(微生物膜の密度を  $1 \text{ g/cm}^3$  とする)、 $Y_b = O(10) \text{ mg}/(\text{dm}^2)$  である。Fig. 7 等の  $Y_b$  の値は  $1 \sim 10$  である。河川浄化が進むにつれて微生物膜も河床一面を覆うことがなくなることを考えるとこれらの値は妥当な範囲にあると思われる。

#### 4. 結 論

最近、河川の生物化学的自浄作用をなす微生物は河床に膜状に付着しているとの実験・実測の報告が多い。本論文は、このような観点から河川の自浄作用の理論を展開し、理論式からの一般的結論と具体的計算例を述べたものである。

(1) 汚濁河川は主として BOD が微生物の増殖の制約因子となる第Ⅰ種領域と、主として溶存酸素が制約因子となる第Ⅱ種領域とに区分し得る。

流入 BOD が高ければ、河川はまず第Ⅱ種領域にあるが、やがて流下とともに第Ⅰ種領域に移行する。

(2) 第Ⅰ種領域では、BOD は普通知られているように指数的に減少する。この領域での自浄係数  $K_1$  は、BOD レベルに無関係に同一の一定値となる(式(11))。

(3) 第Ⅱ種領域では、BOD は直線的に減少し(式(34))、自浄係数  $K_1$  は第Ⅰ種領域のそれより低く、かつ BOD が大きいほど小さい(式(36))。

(4) 溶存酸素は汚濁水流入とともに急激に指数的に減少し、BOD が大きい場合には最低値(再曝気能と微生物の酸素要求能で決まる)に達したのちしばらくその値に保たれる(式(28)、(30))。BOD の減少が進むにつれて再曝気能が上回り溶存酸素は徐々に飽和値に回復する(式(17))。

(5) 河床微生物は汚濁水流入点でもっとも多いが、

すぐ下流で急減し、しばらく一定レベルに落ち着く(式(29)、(30))。これは(4)の溶存酸素の極値に対応する微生物量である。その後、徐々に BOD が減少するとともに第Ⅰ種領域に移行し、微生物量は BOD に比例して指数的に減少する(式(7) or (12))。

(6) ここで述べた上流で1つの汚濁水流入点がある場合の現象は本来非平衡状態にある。しかし、流入直後の遷移区間(流下時間にして半日～1日)を除けば、BOD と  $K_1$ 、 $O$ 、 $Y_b$  等の他の指標の間に一義的關係が成立する(Fig. 2, および 11～13)。

以上の理論的結論がどの程度実測データを説明し得るかが問題である。残念ながら BOD・溶存酸素・微生物量の流下距離による変化を同時に数量的にとらえたデータはない。目下断片的な報告の収集・解析を進めているので、今後これを本論文の理論、前論文の理論および次報の理論とまとめて比較検討をしたい。

以上の理論は、河川生態系の生物のうち微生物のみを考慮したもので、実際にはこれより上位の生物が関与し、また、藻類等による光合成作用も加わるのでさらに問題は複雑である。こうした系は生態システムとして解析しうる。しかし、本論文であえて単純化して論じたのは、最小限の河川生態系を考えて自浄作用の理論式を closed form solution として求め、理解を深めたかったことによる。

#### 補遺 1 記 号

$A$  : 係数, 式(17),  $A = \mu' c_1 L_0$

$a$  : 係数, 単位系を決めるとほぼ一定値となる, 式(4・a) [ $L^{-1}$ ]

$b$  : 係数, 単位系を決めるとほぼ一定値となる, 式(4・a) [ $L^{-1}$ ]

$c_1$  : 係数, 方程式の根の逆数, 式(5), (6)

$c_2$  : 係数, 方程式の根の逆数, 式(24)

$D = O_s - O$  : 溶存酸素欠損量

$h$  : 水深 [ $L$ ]

$K_1$  : 脱酸素係数 [ $T^{-1}$ ]

$K_2$  : 再曝気係数 [ $T^{-1}$ ]

$K_2'$  : 式(27)

$L$  : BOD [ $M/L^3$ ]

$L_1$  : 定数, 式(32)

$L_2$  : 定数, 式(33)

$M$  : 係数, 式(39)

$O$  : 溶存酸素量 [ $M/L^3$ ]

$O_0$  :  $t=0$  での  $O$

$O_s$  : 飽和溶存酸素量 [ $M/L^3$ ]

$t$  : 流下時間 ( $t = x/u$ )

- $u$  : 断面平均流速 [L/T]
- $x$  : 流下距離 [L]
- $Y_b$  : 河床単位面積当りの微生物量 [M/L<sup>2</sup>]
- $\beta_b$  : 河床微生物の死滅・除去率 [T<sup>-1</sup>]
- $\beta_b'$  : 河床微生物の BOD への再負荷率 [T<sup>-1</sup>]
- $\mu_b$  : 河床微生物膜の増殖率 [T<sup>-1</sup>]
- $\mu_b'$  : 河床微生物による BOD 分解率 [T<sup>-1</sup>]

## 補遺 2 基礎方程式

### (1) BOD および DO の微分方程式

まず, BOD(L) および 溶存酸素量 (O) について考える. これらに対する質量保存方程式は河水中に浮遊する微生物による BOD の分解とそれに要する溶存酸素の消費, 微生物の BOD への再負荷を考慮すれば, 次のように書かれる.

$$\frac{DL}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial L}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial L}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial L}{\partial z} \right) - \mu' Y + \beta' Y \dots (A-1)$$

$$\frac{DO}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial O}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial O}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial O}{\partial z} \right) - \mu' Y \dots (A-2)$$

ここに,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \dots (A-3)$$

また,  $x$ : 流下距離,  $y$ : 横断方向の座標,  $z$ : 鉛直方向の座標 (自由表面を零とする),  $u, v, w$ : それぞれ  $x \cdot y \cdot z$  方向の流速成分,  $K_x \cdot K_y \cdot K_z$ :  $x \cdot y \cdot z$  方向の拡散係数,  $\mu' \cdot \beta'$ : 微生物の分解作用による BOD の変化率と微生物からの BOD への再負荷率である.

現象は定常で横断方向に一様, かつ流れは流下方向に一様 ( $v=w=0, \partial u/\partial x=0$ ) とすれば,

$$\bar{u} \frac{d\bar{L}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( K_x \frac{d\bar{L}}{dx} \right) - \mu' \bar{Y} + \beta' \bar{Y} - \frac{\mu_b'}{h} Y_b + \frac{\beta_b'}{h} Y_b \dots (A-4)$$

$$\bar{u} \frac{d\bar{O}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( K_x \frac{d\bar{O}}{dx} \right) - \mu' \bar{Y} - \frac{\mu_b'}{h} Y_b + \frac{K_2}{h} (O_s - \bar{O}) \dots (A-5)$$

ここに,  $\bar{u}, \bar{L}, \bar{O}$  はそれぞれ断面平均の流速・BOD・DO である. 以後, これらを改めて  $u, L, O$  と書く.

また,  $\bar{Y}$  は微生物濃度の断面平均値である. しかし, 流れの鉛直方向の拡散能に比べて微生物の増殖能は小さく, また境界からの微生物フラックスもきわめて小さいことを考えると,  $Y$  は河の水深方向に一様に分布して

いると考えてよい.  $\mu'$  は厳密には  $L$  およびその関数であるので式 (A-1, 2) の  $\mu'$  と式 (A-4, 5) の  $\mu'$  とは異なる. しかし, 上記の理由により,  $\mu'$  を特に区別する必要はない.

$Y_b$  は河床に膜状に付着する微生物量の河床単位面積当りの値,  $\mu_b' \cdot \beta_b'$  はそれぞれ河床微生物膜による BOD 減少率と BOD への再負荷率である.  $K_2$  は再曝気係数,  $O_s$  は飽和溶存酸素濃度. なお,  $K_2(O_s - \bar{O}) \cdot \mu_b' Y_b \cdot \beta_b' Y_b$  等の項は水深方向に積分した際に境界条件 (境界における輸送フラックス) として入ってくる. 水深  $h$  で割ってあるのは断面平均値をとったためである.

### (2) 微生物の増殖微分方程式

#### a) 微生物が河水中に浮遊する場合

次に, 微生物の質量保存則について述べる. 微生物が河水中に浮遊移流されるものとすれば, 保存方程式は  $L$  や  $O$  と同じに考えてよい.

$$\frac{DY}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K_x \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K_y \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K_z \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + \mu Y - \beta Y \dots (A-6)$$

ここに,  $\mu \cdot \beta$  はそれぞれ微生物の増殖率と死滅・除去率で, これらの関数形については前報<sup>10)</sup>に述べた. 前述の仮定のもとに上式を水深方向に平均すれば, 次式となる.

$$u \frac{d\bar{Y}}{dx} = \frac{d}{dx} \left( K_x \frac{d\bar{Y}}{dx} \right) + \mu \bar{Y} - \beta \bar{Y} \dots (A-7)$$

ここに,  $\bar{Y}$  は断面平均微生物濃度で以後  $Y$  と書き換える. 微生物の増殖率  $\mu$  は  $Y$  の関数であるが, 前述のように微生物は河水中に一様濃度で分布していると考えられるので, 式 (A-6) のそれと特に区別する必要はない.

$$Y(x) \equiv \bar{Y} \quad (=一定)$$

微生物の水深方向の分布については別に観点を改めて論じる.

#### b) 微生物が河床に付着している場合

さて, 微生物は河床にも付着し膜を形成している. この量を河床単位面積当りの微生物量  $Y_b$  [M/L<sup>2</sup>] とすると,

$$\frac{\partial Y_b}{\partial t} + u_b \frac{\partial Y_b}{\partial x} = \mu_b Y_b - \beta Y_b \dots (A-9)$$

河床に付着していることから  $u_b=0$  であり, 定常の仮定より,

$$\mu_b - \beta_b = 0 \dots (A-10)$$

である.

微生物膜の厚さ  $\delta$  と増殖率  $\mu_b$  の関係は,  $\delta$  がある厚さ以上になると厚さには無関係となることが実験的に知られている<sup>9)</sup>. また, 現実には微生物膜は剝離したり,

原生動物等に捕捉されるであろうが、マクロにみて定常と考える。

以上をまとめると基礎方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u \frac{dL}{dx} &= (-\mu'Y + \beta'Y) + \left( -\frac{u_b'}{h} Y_b + \frac{\beta_b'}{h} Y_b \right) \\ u \frac{dO}{dx} &= -\mu'Y - \frac{\mu_b'}{h} Y_b + K_2(O_s - O) \\ u \frac{dY}{dx} &= \mu Y - \beta Y \\ O &= \mu_b Y_b - \beta_b Y_b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A-11)$$

### 補遺 3 一般形の厳密解が求まった理由

微生物の活動を直接考慮した、いわゆる biokinetics の自浄作用の理論は、一般に基礎方程式が非線形となるため closed form な解析解を求めることは困難で、通常基礎方程式の数値解法により解が求められる。本論文では、非線形の微生物増殖式を用い、しかも論文 10) で行ったような折線近似もなら行っていないのに、解析解が容易に得られた。その理由は次のようである。

(i) 増殖率  $\mu$  を Monod 式のように BOD( $L$ ) の関数ではなく、BOD と微生物量の比 ( $L/Y_b$ ) としたこと、

(ii) 微生物は河床に膜状に付着し、移流しないこと。この2つの仮定のため、微生物量  $Y_b$  は第I種領域ではその点の BOD、第II種領域ではその点の DO に正比例することが導かれた。そのため BOD または DO の変化式は線形となり、それ以後はからみ合った糸玉の端が見つかったように一気に解けることになった。

### 参考文献

- 1) Wuhrmann, K., J. Ruchti and E. Eichenberger: Quantitative experiments on self-purification with

- pure organic compounds, Adv. in Water Pollution Research, Vol. 1, Proc. IIIrd Intern. Conf., Munich, 229~251, 1966.
- 2) 資源研究所：昭和46年度水質汚濁防止に関する試験報告書〔手塚(1974)より引用〕, 1966.
- 3) 手塚泰彦：河川の汚染, 築地書館, 1974.
- 4) 歌原英明：河川生態系の自浄作用に関する理論的・実験的研究, 東工大・土木工学科 昭和52年度修士論文, 1978.
- 5) 川端規之：河川自浄作用に関する研究, 東工大・土木工学科 昭和52年度卒業研究, 1978.
- 6 a) 松本順一郎・大垣真一郎・今井雄二：連続槽モデルによる河川自浄作用の実験的研究, 第30回土木学会年次学術講演会, II-265, 550~551, 1975.
- 6 b) 松本順一郎・大垣真一郎：付着生物の増殖に関する実験的研究, 第31回土木学会年次学術講演会, 1976.
- 6 c) 松本順一郎・大垣真一郎・勝山裕久：付着生物群による有機物の形態変化に関する研究, 第32回土木学会年次学術講演会, 1977.
- 7 a) 那須義和・芦立德厚・滝沢優憲：汚濁河川における河床付着物「みずわた」の評価について, 第29回年講, II-313, 653~4, 1974.
- 7 b) 那須義和・芦立德厚・松本智子：汚濁河川における河床付着物「みずわた」の評価について(2), 第30回年講, II-266, 552~3, 1975.
- 7 c) 芦立德厚・川井邦宏・那須義和：汚濁河川における河床付着物「みずわた」の評価について(3), 第31回年講, II-317, 577, 1976.
- 8) Atkinson, B. and H.W. Fowler: The significance of microbial film in fermenters, Chapter 6, in Advances in Biochemical Engineering, ed. by T.K. Ghose, A. Fiechter & N. Blakebrough, pp. 221~277, 1974.
- 9) 日野幹雄：生態水理学への試論 (private circulation, 東工大・土木研究報告 No. 23 に収録), 1975.
- 10) 日野幹雄：微生物の作用を直接考慮した河川自浄作用の一理論式, 土木学会論文報告集 No. 286, 1979.
- 11) 日野幹雄：生態水理学への試論 (VIII), 東工大・土木工学科研究報告 No. 23, 37~41, 1978.
- 12) Contois, D.E.: Kinetics of bacterial growth, Relationship between population density and specific growth rate of continuous cultures, J. gen. Microbiol. Vol. 21, 40~50, 1959.

(1978.8.23・受付)