

## 交差点における車の遅れに関する待ち行列論的研究

AN ANALYSIS OF DELAY TO VEHICLES AT AN  
INTERSECTION BY QUEUEING THEORY

大 野 勝 久\*

By Katsuhisa OHNO

## 1. ま え が き

交差点における車の遅れは、交通工学における重要な問題として、1950年代以降多くの研究が行われてきた。交差点は、通常、信号機が設置されているかどうかで大別され、さらに信号機が設置されている場合、それが定周期式か感応式かに応じて分類されている。すなわち、交差点は、

- (i) 信号機が設置されていない交差点
- (ii) 定周期信号機が設置された交差点
- (iii) 感応式信号機が設置された交差点

に分類される。(i)における車の遅れは、Ráff<sup>1)</sup>以来多くの研究者によって論じられており(たとえば2)~5))、歩行者の道路横断問題<sup>6),7)</sup>とも密接な関連をもっている。しかしながら、全国の主要交差点にすべて信号機が設置され、横断歩道が整備された現在、実際の意義は薄れつつあるものといえよう。(iii)における車の遅れに対してもGarwood<sup>8)</sup>の研究以来いくつかの研究<sup>9)~12)</sup>が行われてきたが、すべて実際の感応式信号機のもつ青時間延長限度の存在等を無視して論じている。この青時間延長限度が存在するために実際の感応式信号機は、車の渋滞がはじまると定周期信号機として動作することになる。したがって、本論文では、以下対象とする交差点を(ii)に絞って論ずることとする。

(ii)における車の遅れに関してもすでに多くの研究が行われており、1971年までに得られた主要な結果がAllsop<sup>13)</sup>により整理され、車の遅れを与えられる近似式の数値的な比較がHutchinson<sup>14)</sup>によって行われている。さらに、文献15)で車の遅れ等の厳密解を計算するアルゴリズムが提案され、ほぼ厳密解に等しい遅れを与える新しい近似式が示されている。しかしながら、以上に述べたすべての研究において交差点への車の到着すな

わち入力定常であるものと仮定されており、実際の都市内道路網における交差点への入力が、他の信号機の影響を受けて周期的になるという事実を反映していない。

一方、周期的な入力を考慮した従来の研究としては、文献16)~19)があるが、決定論的あるいは通常の待ち行列論的議論に基づいており、いずれも有効な結果を示すに至っていない。本論文では周期的な入力のもとでの(ii)における車の遅れを、交差点における車の挙動を考慮した待ち行列論的方法により解析し、車の(平均)遅れ等を計算するアルゴリズムを導き、車の遅れを与える近似式を提案する。さらに、オフセットに直接的な関連をもつ入力波形のずらしの影響を計算するアルゴリズムを導き、提案した近似式を数値的に検証する。

次章では、まず準備として、以下の議論が必要とする従来の結果を説明し、3.で待ち行列理論による解析を行う。4.で車の遅れ等を計算するアルゴリズムを導き、5.で車の遅れを与える近似式を提案する。6.では、入力波形のずらしの影響を簡単に計算するアルゴリズムを導き、7.では、4.および6.のアルゴリズムにより計算される遅れの厳密値を用いて、提案した近似式を数値的に検証し、仮定された条件のもとで、ほぼ実用にたえるものであることを示す。なお、付録1に本論文で使用される記号の説明がまとめられている。

## 2. 従来の研究

周期 $c$ 秒の定周期信号機が設置された交差点を考え、その流入部におけるある直進車線上に形成される車の待ち行列を考察する。信号1周期は、有効青時間 $g$ 秒とそれに続く有効赤時間 $r(c=c-g)$ 秒とからなるものとする。ここで有効青時間は、実青時間からその車線の車の発進損失等の損失時間を差し引き、黄時間内におけるその車線の車の通過に使用される時間を加えたものである<sup>20)</sup>。以下文献13)~15)に従い次の記号を使用する。

\* 正会員 工博 京都大学助教授 工学部数理工学科

$\lambda = q/c$  : スプリット

$q$  : 平均到着交通量 (台/秒)

$s$  : 飽和交通流量<sup>20)</sup> (台/秒)

$y = q/s$  : 正規化交通量

$x = qc/sg$  : 飽和度<sup>20)</sup>

$d$  : 平均遅れ (秒/台)

$N$  : 平均溢れ台数 (台)

ここで、溢れ台数とは、有効青時間の終わりにおける車の待ち台数である。

(1) 定常入力に対する従来の研究

まず、対象とする車線への入力に関して、

(I) 入力 は 平均到着率  $q$  の定常ポアソン過程である一を仮定する。すなわち、周期あるいは有効青時間の始めから  $t$  秒間に  $l$  台の車が到着する確率は、

$$\exp\{-qt\} (qt)^l / l! \quad (l=0, 1, \dots)$$

で与えられる。さらに、

(II) 待ち行列に並んでいる各車は、有効青時間の始めから一定時間間隔  $1/s$  秒ごとに 1 台ずつ発進し、交差点を通過する。

(III) 有効青時間内において、待ち行列がないときに到着した車は、遅れなしに交差点を通過する。

が成り立つものとする。Webster<sup>21)</sup> は、上記 (I) ~ (III) のもとでトラフィック・シミュレーションにより、ウェブスターの遅れ公式として知られる

$$d = \frac{c(1-\lambda)^2}{2(1-y)} + \frac{x^2}{2q(1-x)} - 0.65 \left( \frac{c}{q^2} \right)^{1/3} x^{2+5\lambda} \dots\dots\dots(1)$$

およびその簡略公式として、

$$d = \frac{9}{10} \left\{ \frac{c(1-\lambda)^2}{2(1-y)} + \frac{x^2}{2q(1-x)} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

を導き、式 (1) が実測データとよく適合することを示した。ここで、式 (1) における第 1 項は、条件 (I) の代りに到着率  $q$  をもつ 確定的な定常入力を仮定した場合の遅れを表わしていることを注意しておこう。したがって第 2、第 3 項は、定常ポアソン入力に対する遅れの確定入力に対する遅れからの増加分と考えることができる。特に第 2 項は、定常ポアソン入力のもとで確定的なサービス時間  $1/s$  をもつ 通常の待ち行列システムにおける遅れを表わしており、ケンドールの公式 (たとえば文献 22) 参照) からただちに得られるものである。すなわち、第 2 項は、周期  $c$  の間にただか  $sg$  台が等間隔で発進する場合の遅れを表わし、第 3 項は無視された条件 (II)、(III) に対する補正を表わしている。

一方、Newell<sup>23)</sup> は、拡散近似の手法を用い、 $d$  の近似式

$$d = \frac{c(1-\lambda)^2}{2(1-y)} + \frac{1-\lambda}{2s(1-y)^2} + \frac{1}{q} N_N \dots\dots\dots(3)$$

を導いた。ここで、 $N_N$  は  $N$  の近似式であり、

$$N_N = \frac{qc(1-x)}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2 \theta}{-1 + \exp\{sg(1-x)^2/2 \cos^2 \theta\}} d\theta \dots\dots\dots(4)$$

で与えられる。Miller<sup>24)</sup> もまた、 $N$  の近似式

$$N_M = \frac{1}{2(1-x)} \exp\{-1.33\sqrt{sg}(1-x)/x\} \dots\dots\dots(5)$$

を導き、それを用いて (I) ~ (III) のもとでの  $d$  の近似式

$$d = \frac{c(1-\lambda)^2}{2(1-y)} + \frac{1-\lambda}{q(1-y)} N_M \dots\dots\dots(6)$$

を示した。Hutchinson<sup>14)</sup> は、近似式 (2)、(3)、(6) 等の式 (1) を基準とした数値比較を行っている。最近、筆者<sup>15)</sup> は、(I) ~ (III) のもとでの  $d$  の厳密値を計算するアルゴリズムを提案し、この厳密値を基準とした数値比較により、式 (3) が式 (1) ~ (3)、(6) のなかでもっとも正確であることを示した。さらに、式 (4)、(5) で与えられる  $N_N$ 、 $N_M$  を用いた次の近似式

$$d = \frac{1-\lambda}{2(1-y)} \left\{ c(1-\lambda) + \frac{2}{q} N_N + \frac{1}{s} + \frac{1}{s(1-y)} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

$$d = \frac{1-\lambda}{2(1-y)} \left\{ c(1-\lambda) + \frac{2}{q} N_M + \frac{1}{s} + \frac{1}{s(1-y)} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

が式 (3) に比べて相対誤差をほぼ数分の 1 に減少させ、相対誤差たかだか 2、3% という厳密値に近い  $d$  の値を与えることを示している。

(2) 周期的入力に対する従来の研究

(1) で仮定した (I) の代りに、

(I)' 入力 は、周期の始めから時間  $t$  ( $0 \leq t \leq c$ ) における到着率が  $q(t)$  で与えられる周期的なポアソン過程である。

を仮定する。すなわち、周期の始めから  $t$  ( $0 \leq t \leq c$ ) 秒間に  $l$  台の車が到着する確率は、

$$\exp\left\{-\int_0^t q(\tau) d\tau\right\} \left\{ \int_0^t q(\tau) d\tau \right\}^l / l! \quad (l=0, 1, \dots)$$

で与えられる。Wormleighton<sup>16)</sup> は、条件 (I)' および (II) のもとでの溢れ台数および遅れを待ち行列理論を用いて論じたが、条件 (III) を無視しており、溢れ台数が入力波形  $q(t)$  のずらしに依存しないという誤った結論を導いている。Mihn and Blunden<sup>19)</sup> も非定常入力のもとでの交差点における車の待ち行列を論じているが、やはり条件 (III) を無視している。Blunden and Pretty<sup>17)</sup> および May and Keller<sup>18)</sup> は、(I)' の代りに、入力が周期的な到着率  $q(t)$  をもつ 確定的な場合を論じ、特に前者は遅れを与える式

$$d = \frac{c}{2}(1 - \lambda + x + 2y) - \frac{1}{\lambda s} \int_0^g q(t) dt - \frac{1}{\lambda sc} \int_0^c tq(t) dt \dots \dots \dots (9)$$

を導いた。ただし、文献 17) では、有効赤時間の始まりを周期の始まりとしており、式 (9) は本論文と同様、有効青時間の始まりを周期の始まりとするように書き直した式である。また、式中の  $q$  は、

$$q = \frac{1}{c} \int_0^c q(t) dt \dots \dots \dots (10)$$

で定義される平均到着交通量 (台/秒) であり、 $x$  および  $y$  はこの  $q$  を用いて与えられる飽和度および正規化交通量である。

このように、周期的な入力に対して得られた従来の結果はその実際的な重要さにもかかわらず、その理論的取扱いの困難さのために (1) に比べてかなり限定されている。しかしながら、溢れおよび遅れが平衡分布をもつすなわち、時間の経過とともに、それらが無限に発散しない条件については、(III) のもとでかなり一般的な入、出力に対して論じられており<sup>25)~27)</sup>、特に (I)', (III) を仮定した場合<sup>25)</sup>、平衡分布が存在する十分条件は、

$$x = qc/sg < 1 \dots \dots \dots (11)$$

であり、

$$\int_0^g q(t) dt < qc$$

が成り立てば必要条件でもあることが知られている。

### 3. 待ち行列理論による解析

本章では、前章で述べた条件 (I)', (II), (III) のもとで車の待ち台数および遅れを待ち行列理論を用いて解析する。以下、平衡分布が存在するための十分条件 (11) が成り立つものとし、簡単のため  $sg$  および  $sc$  は整数と仮定する。

初期時刻  $t=0$  で第 0 周期の有効青時間が始まるものとし、そのときの車の待ち台数を  $L_0^{(0)}$  で表わす。条件 (II), (III) から、待ち行列が存在する限り車は、時刻  $1/s, 2/s, \dots, sg/s = g$  に 1 台ずつ発進し交差点を通過する。同様に  $t=nc$  で始まる第  $n$  周期 ( $n=1, 2, \dots$ ) においても待ち行列が存在する限り、その周期の始めから  $1/s, 2/s, \dots, g$  に 1 台ずつ発進し交差点を通過する。以下、 $L_k^{(n)}$  ( $k=0, 1, \dots, sc, n=0, 1, \dots$ ) で第  $n$  周期の始めから  $k/s$  における待ち台数を表わすものとし、 $Q_k^{(n)}$  ( $k=1, \dots, sc, n=0, 1, \dots$ ) で第  $n$  周期における時間区間  $[(k-1)/s, k/s]$  に到着する車の台数を表わすものとする。このとき (II), (III) より、 $k=0, 1, \dots, sg-1$  に対し、

$$\left. \begin{aligned} L_{k+1}^{(n)} &= L_k^{(n)} + Q_{k+1}^{(n)} - 1, & L_k^{(n)} > 0 \text{ のとき} \\ &= 0, & L_k^{(n)} = 0 \text{ のとき} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

であり、有効赤時間に対する  $k=sg, \dots, sc-1$  に対しては

$$L_{k+1}^{(n)} = L_k^{(n)} + Q_{k+1}^{(n)} \dots \dots \dots (13)$$

が成り立つ。  $P_r\{A\}$  で事象  $A$  の確率を表わすことにし、複素変数  $z$  ( $|z| \leq 1$ ) に対して、

$$H_k^{(n)}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} P_r\{L_k^{(n)}=l\} z^l \dots \dots \dots (14)$$

$$p_k^{(n)} = P_r\{L_k^{(n)}=0\} \dots \dots \dots (15)$$

とおく。すなわち、 $H_k^{(n)}(z)$  は  $L_k^{(n)}$  の確率母関数である。ここで、 $k=1, \dots, sc$  に対して、

$$q_k = \int_{(k-1)/s}^{k/s} q(\tau) d\tau \dots \dots \dots (16)$$

とおけば、条件 (I)' より、 $Q_k^{(n)}$  ( $k=1, \dots, sc, n=0, 1, \dots$ ) の確率母関数は、

$$\sum_{l=0}^{\infty} \exp\{-q_k\} (q_k)^l \cdot z^l / l! = \exp\{q_k(z-1)\} \dots \dots \dots (17)$$

で与えられる。したがって、式 (12), (17) より、 $k=0, \dots, sg-1$  に対して、

$$\begin{aligned} H_{k+1}^{(n)}(z) &= \exp\{q_{k+1}(z-1)\} H_k^{(n)}(z) / z \\ &\quad + \{1 - \exp\{q_{k+1}(z-1)\} / z\} p_k^{(n)} \end{aligned} \dots \dots \dots (18)$$

であり、式 (13) より、 $k=sg, \dots, sc-1$  に対して、

$$H_{k+1}^{(n)}(z) = \exp\{q_{k+1}(z-1)\} H_k^{(n)}(z) \dots (19)$$

が成り立つ。式 (18), (19) の導出が付録 2 の (1) に示されている。 $L_k^{(n)}$  の平均を  $N_k^{(n)}$  で表わせば、

$$N_k^{(n)} = \frac{d}{dz} H_k^{(n)}(z) |_{z=1}$$

であるから、式 (18), (19) よりただちに、

$$\begin{aligned} N_{k+1}^{(n)} &= N_k^{(n)} - (1 - q_{k+1})(1 - p_k^{(n)}) \\ &\quad (k=0, \dots, sg-1) \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

$$N_{k+1}^{(n)} = N_k^{(n)} + q_{k+1} \quad (k=sg, \dots, sc-1) \dots \dots \dots (21)$$

が得られる。また、 $L_0^{(n+1)} = L_{sc}^{(n)}$  であるから式 (19) より、

$$H_0^{(n+1)}(z) = \exp\left\{ \sum_{k=sg+1}^{sc} q_k(z-1) \right\} H_{sg}^{(n)}(z)$$

が成り立ち、式 (18) を用いれば、

$$\begin{aligned} H_0^{(n+1)}(z) &= \exp\left\{ \sum_{k=sg+1}^{sc} q_k(z-1) \right\} \\ &\quad \cdot \left[ \exp\left\{ \sum_{k=1}^{sg} q_k(z-1) \right\} H_0^{(n)}(z) / z^{sg} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^{sg-1} \exp\left\{ \sum_{m=k+2}^{sg} q_m(z-1) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \{1 - \exp\{q_{k+1}(z-1)\} / z\} p_k^{(n)} / z^{sg-k-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp\{qc(z-1)\{H_0^{(n)}(z)/z^{sg}\} \\
 &+ \sum_{k=0}^{sg-1} \{z - \exp(q_{k+1}(z-1))\} \\
 &\cdot \exp\left\{\sum_{m=k+2}^{sc} q_m(z-1)\right\} p_k^{(n)}/z^{sg-k} \\
 &\dots\dots\dots(22)
 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $q$  は式 (10) で定義される平均到着交通量である。したがって、 $L_0^{(n)}$  の初期分布に対する確率母関数  $H_0^{(n)}(z)$  が与えられれば、式 (18), (19), (22) より任意の  $n, k$  に対する  $L_k^{(n)}$  の分布の確率母関数  $H_k^{(n)}(z)$  を計算することができる。このようにすれば、必ずしも  $q(t)$  が周期的でない場合に対しても待ち台数の過渡状態を把握することが可能である。しかしながら、 $n$  が大きくなるにつれて計算量が増大し、あまり実際のでない。前章で述べたように、式 (11) のもとでは、 $n \rightarrow \infty$  において平衡分布が存在するから、以下その平衡分布について論じることとする。

待ち台数の平衡分布に対する確率母関数を  $H_k(z)$  ( $k=0, \dots, sg-1$ ) で表わし、0 になる確率および平均待ち台数を  $p_k$  および  $N_k$  で表わそう。このとき、

$$\begin{aligned}
 H_k(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} H_k^{(n)}(z), \quad p_k = \lim_{n \rightarrow \infty} p_k^{(n)}, \\
 N_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} N_k^{(n)}
 \end{aligned}$$

であり、したがって、式 (22) から  $H_0(z)$  は、

$$H_0(z) = \sum_{k=0}^{sg-1} p_k P_k(z) / R(z) \dots\dots\dots(23)$$

となる。ここで、 $k=0, \dots, sg-1$  に対して、

$$\begin{aligned}
 P_k(z) &= z^k \{z - \exp(q_{k+1}(z-1))\} \\
 &\cdot \exp\left\{\sum_{m=k+2}^{sc} q_m(z-1)\right\} \dots\dots\dots(24)
 \end{aligned}$$

であり、

$$R(z) = z^{sg} - \exp\{qc(z-1)\} \dots\dots\dots(25)$$

である。また、式 (14) より  $\lim_{z \rightarrow 1} H_0(z) = 1$  であり、 $'$  で微分を表わせば、

$$\lim_{z \rightarrow 1} H_0'(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \sum_{k=0}^{sg-1} p_k P_k'(z) / R'(z) \right\}$$

であるから、

$$\sum_{k=0}^{sg-1} (1 - q_{k+1}) p_k = sg(1 - x) \dots\dots\dots(26)$$

が成り立つ。さらに、 $N_0 = \lim_{z \rightarrow 1} H_0'(z)$  であるから、付録 2 の (2) に示すように、

$$\begin{aligned}
 N_0 &= \frac{1}{sg(1-x)} \sum_{k=0}^{sg-1} p_k (1 - q_{k+1}) \left( k + \sum_{m=k+2}^{sc} q_m \right) \\
 &- \frac{1}{2sg(1-x)} \left\{ \sum_{k=0}^{sg-1} q_{k+1}^2 p_k + sg(sg-1) - (qc)^2 \right\} \\
 &\dots\dots\dots(27)
 \end{aligned}$$

が得られる。式 (20), (21) より、

$$\begin{aligned}
 N_{k+1} &= N_k - (1 - q_{k+1})(1 - p_k) \quad (k=0, \dots, sg-1) \\
 &\dots\dots\dots(28)
 \end{aligned}$$

$$N_{k+1} = N_k + q_{k+1} \quad (k=sg, \dots, sc-1) \dots\dots\dots(29)$$

であるから、特に平均溢れ台数  $N = N_{sg}$  は、

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{1}{sg(1-x)} \left\{ \sum_{k=0}^{sg-2} p_k (1 - q_{k+1}) \left( k + \sum_{m=k+2}^{sg} q_m \right) \right. \\
 &+ p_{sg-1} (sg-1) (1 - q_{sg}) \left. \right\} \\
 &- \frac{1}{2sg(1-x)} \left\{ \sum_{k=0}^{sg-1} q_{k+1}^2 p_k + sg(sg-1) - (qc)^2 \right\} \\
 &\dots\dots\dots(30)
 \end{aligned}$$

で与えられる。

平衡状態において、周期の始めから  $t$  ( $0 \leq t \leq c$ ) における平均待ち台数を  $N(t)$  とおく。明らかに、 $N(k/s) = N_k$  ( $k=0, \dots, sc-1$ ),  $N(g) = N$  である。さらに、 $k/s \leq t < (k+1)/s$  となる  $t$  に対しては、条件 (I)', (II), (III) から式 (28), (29) 同様

$$N(t) = N_k + (1 - p_k) \int_{k/s}^t q(\tau) d\tau \quad (k=0, \dots, sg-1)$$

$$N(t) = N_k + \int_{k/s}^t q(\tau) d\tau \quad (k=sg, \dots, sc-1)$$

が成り立つ。このとき、平均遅れ  $d$  は、

$$d = \int_0^c N(t) dt / qc$$

で与えられるから、

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{1}{qc} \left[ \sum_{k=0}^{sc-1} \left\{ \frac{1}{s} N_k + \int_{k/s}^{(k+1)/s} q(\tau) d\tau \right\} \int_{k/s}^t q(\tau) d\tau dt \right. \\
 &- \left. \sum_{k=0}^{sg-1} p_k \int_{k/s}^{(k+1)/s} q(\tau) d\tau dt \right] \dots\dots\dots(31)
 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\int_{k/s}^{(k+1)/s} q(\tau) d\tau dt = (k+1)q_{k+1}/s - \int_{k/s}^{(k+1)/s} tq(t) dt$$

を用いて式 (31) を整理すれば、 $d$  は

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{1}{sqc} \left[ \sum_{k=0}^{sg-1} \left\{ N_k + (k+1)(1 - p_k)q_{k+1} + sp_k \right. \right. \\
 &\cdot \left. \int_{k/s}^{(k+1)/s} tq(t) dt \right\} + \sum_{k=sg}^{sc-1} \{ N_k + (k+1)q_{k+1} \} \\
 &- \left. \frac{1}{qc} \int_0^c tq(t) dt \right] \dots\dots\dots(32)
 \end{aligned}$$

で与えられる。しかしながら、以上で導いた式 (27) ~ (32) に含まれる  $p_k$  ( $k=0, \dots, sg-1$ ) は未知確率である。次章では、この未知確率  $p_k$  を求め、その値を用いて式 (30), (32) から  $N, d$  を定めるアルゴリズムを導く。

### 4. 計算アルゴリズム

定常入力に対する平均遅れ、平均溢れ台数等の計算アルゴリズムはすでに文献 15) に述べられている。そこで示されているように、式 (25) で与えられる  $R(z)$  は、 $x < 1$  のとき単位円  $|z| \leq 1$  内に  $sg$  個の零点  $z_1, \dots, z_{sg}$  ( $=1$ ) をもち、 $z_j$  が零点ならばその共役複素数  $\bar{z}_j$

もまた零点となる。すなわち、正整数  $J$  を

$$\left. \begin{aligned} J &= sg/2, & sg \text{ が偶数のとき} \\ &= (sg-1)/2, & sg \text{ が奇数のとき} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

で定義し、文献 15) のアルゴリズムのステップ 1 (下記アルゴリズムのステップ 1 を参照) により、 $J$  個の零点  $z_j (j=1, \dots, J)$  を定めれば、残りの零点はそれらの共役複素数  $\bar{z}_j$  および  $z_{sg}$  として決定できる。ところが、式 (14) から明らかなように、 $H_0(z)$  は  $|z| \leq 1$  で正則であり、 $|z| \leq 1$  に極をもたないから、式 (23) の分子もまた、 $R(z)$  の零点  $z_j (j=1, \dots, sg)$  で 0 とならなければならない。すなわち、少なくとも  $z_j (j=1, \dots, J)$  に対して、

$$\sum_{k=0}^{sg-1} p_k R_e(P_k(z_j)) = 0, \quad \sum_{k=0}^{sg-1} p_k I_m(P_k(z_j)) = 0 \dots\dots\dots(34)$$

が成立しなければならない。ここで、 $R_e(z)$ 、 $I_m(z)$  は  $z$  の実数部、虚数部を表わしている。このとき、

$$\begin{aligned} R_e(P_k(\bar{z}_j)) &= R_e(P_k(z_j)) \\ I_m(P_k(\bar{z}_j)) &= -I_m(P_k(z_j)) \end{aligned}$$

であるから、 $z_j (j=J+1, \dots, sg-1)$  に対しても式 (23) の分子は 0 となる。また、 $z_{sg}=1$  に対しては常にその分子は 0 である。結局、 $sg$  が偶数のとき  $z_j$  が実数になることを考慮すれば、式 (34) から  $p_k$  に関する  $(sg-1)$  個の独立な一次方程式が得られたことになり、それらを式 (26) と連立させて解けば求める未知確率  $p_k$  を決定することができる。以上で得られた結果をまとめれば、 $d$ 、 $N$  等を計算するアルゴリズムは次のようになる。

ステップ 1:  $j=1, \dots, J$  に対して、次の非線形連立方程式

$$\begin{aligned} qcw_j \cos \theta_j - sg \log w_j - qc &= 0 \\ qcw_j \sin \theta_j - sg \theta_j + 2j\pi &= 0 \end{aligned}$$

を初期値  $w_j = w_{j-1}$ 、 $\theta_j = \theta_{j-1}$  を用いてニュートン法により解き、

$$z_j = w_j \exp(i\theta_j)$$

を求める。ここで、 $i = \sqrt{-1}$  であり、 $w_0$ 、 $\theta_0$  としては適当な値、たとえば  $w_0 = 0.5$ 、 $\theta_0 = \pi/5$  を用いればよい。

ステップ 2:  $sg \times sg$  行列  $A = (a_{mk})$  を

$$\begin{aligned} a_{1k} &= 1 - q_k \quad (k=1, \dots, sg) \dots\dots\dots(35) \\ a_{2j,k} &= R_e(P_{k-1}(z_j)) \\ &\quad (j=1, \dots, J-1, k=1, \dots, sg) \dots\dots\dots(36) \\ a_{2j+1,k} &= I_m(P_{k-1}(z_j)) \\ &\quad (j=1, \dots, J-1, k=1, \dots, sg) \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

$sg$  が偶数のとき、

$$a_{sg,k} = P_{k-1}(z_j) \quad (k=1, \dots, sg) \dots\dots\dots(38)$$

$sg$  が奇数のとき、

$$a_{sg-1,k} = R_e(P_{k-1}(z_j)) \quad (k=1, \dots, sg) \dots\dots\dots(39)$$

$$a_{sg,k} = I_m(P_{k-1}(z_j)) \quad (k=1, \dots, sg) \dots\dots\dots(40)$$

により構成し、その逆行列  $A^{-1} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{sg})$  をガウスの消去法により求める。ここで、 $\bar{a}_k (k=1, \dots, sg)$  は、 $A^{-1}$  の第  $k$  列ベクトルである。 $T$  で転置を表わすことにし、 $p = (p_0, \dots, p_{sg-1})^T$  とおけば求める確率  $p_0, \dots, p_{sg-1}$  は、

$$p = sg(1-x)\bar{a}_1 \dots\dots\dots(41)$$

である。さらに、溢れ台数が 0 になる確率  $p_{sg}$  は、

$$p_{sg} = p_0 \exp\left\{ \sum_{k=sg+1}^{sc} q_k \right\} \dots\dots\dots(42)$$

与えられる。

ステップ 3: 平均溢れ台数  $N$  を式 (30) から計算し、式 (28)、(29) により  $N_k (k=0, \dots, sc-1)$  を求める。平均遅れ  $d$  を式 (32) から計算する。

上記アルゴリズムにおけるステップ 2 では、6. で述べる入力波形のずらしに対するアルゴリズムでの必要上、逆行列  $A^{-1}$  を計算し、 $p$  を式 (41) で求めている。しかしながら、ある固定した入力波形に対する平均遅れなどを求めるのであれば、 $sg$  次元ベクトル  $b = (sg(1-x), 0, \dots, 0)^T$  に対して、直接連立一次方程式

$$Ap = b \dots\dots\dots(43)$$

をガウスの消去法を用いて解く方が短時間に  $p$  を計算できる。また、ステップ 2 の式 (42) で得られる  $p_{sg}$  は、文献 28) で導入された負荷係数 (load factor) と直接的な関連があり、負荷係数を

$$1 - p_{sg} \dots\dots\dots(44)$$

として定めることができる。なお、上記アルゴリズムの計算に必要とする記憶容量は、ほぼ  $(sg)^2$  語であり、倍精度演算による計算時間は、たとえば  $c=120$ 、 $g=60$ 、 $s=0.5$  の場合、京都大学大型計算機センターの FACOM M-190 で約 0.2 秒であった。また、その計算時間のほぼ 73% が、ステップ 2 における逆行列  $A^{-1}$  の計算に費やされたことを注意しておく。

### 5. 平均遅れの近似式

前章のアルゴリズムを用いれば、平均遅れ  $d$  を比較的容易に計算することができる。しかしながら、そのためには中型以上の電子計算機の使用が不可欠であり、計算機を用いずに簡単に計算できる式 (9) のような、しかも精度のよい近似式が望まれる。本章では、そのような近似式を導くことを目的とする。

まず、式 (28)、(29) より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{sg-1} N_k &= \sum_{k=0}^{sg-1} \left\{ N + \sum_{m=k}^{sg-1} (1-q_{m+1})(1-p_m) \right\} \\ &= sgN + \sum_{k=0}^{sg-1} (k+1)(1-q_{k+1})(1-p_k) \dots\dots\dots(45) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=sg}^{sc-1} N_k = \sum_{k=sg}^{sc-1} \left\{ N + \sum_{m=sg}^{k-1} q_{m+1} \right\} \\ = s(c-g)N + \sum_{k=sg}^{sc-2} (sc-k-1)q_{k+1} \dots (46)$$

が成り立つ。したがって、式 (32) の第 1 項の積分において、 $q(t)$  を  $sq_{k+1}$  で近似すれば、

$$sp_k \int_{k/s}^{(k+1)/s} tq(t) dt = \left( k + \frac{1}{2} \right) p_k q_{k+1}$$

であるから、式 (26)、(45)、(46) より式 (32) は、

$$d = \frac{1}{q} N + \frac{1}{sqc} \left[ \sum_{k=0}^{sg-1} (k+1)(1-p_k) + sc \sum_{k=sg}^{sc-1} q_{k+1} \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{sg-1} \left( k + \frac{1}{2} \right) p_k q_{k+1} \right] - \frac{1}{qc} \int_0^c tq(t) dt \\ = \frac{1}{q} \left\{ N + \int_0^c q(t) dt + \frac{\lambda}{2} (sg+x) \right\} \\ - \frac{1}{sqc} \left\{ \sum_{k=0}^{sg-1} k p_k (1-q_{k+1}) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{sg-1} p_k \right\} \\ - \frac{1}{qc} \int_0^c tq(t) dt \dots \dots \dots (47)$$

と変形することができる。上式において、 $N$  は式 (4)、(5) で与えられる  $N_N, N_M$  である程度近似できるから、 $d$  の近似式を導くうえで問題となるのは、 $p_k$  を含む第 2 項である。以下、この項の近似を考える。

有効青時間内に到着する平均交通量は、

$$\sum_{k=1}^{sg} q_k = \int_0^g q(t) dt$$

であるから、 $y_g$  を、

$$y_g = \frac{1}{sg} \int_0^g q(t) dt \dots \dots \dots (48)$$

とおけば、 $y_g$  は  $q_k (k=1, \dots, sg)$  の算術平均と考えることができる。明らかに定常入力  $q(t)=q$  の場合、 $y_g=y$  である。式 (26) における  $q_k$  を  $y_g$  で近似すれば、

$$\sum_{k=0}^{sg-1} p_k = sg(1-x)/(1-y_g) \dots \dots \dots (49)$$

が得られる。また、式 (30) を

$$\sum_{m=k+2}^{sg} q_m = sg y_g - \sum_{m=1}^{k+1} q_m$$

および式 (26) を用いて整理すれば、

$$sg(1-x)N = \sum_{k=0}^{sg-1} k p_k (1-q_{k+1}) \\ + \frac{1}{2} \{ (qc)^2 - sg(sg-1) \} + (1-x)(sg)^2 y_g \\ - \sum_{k=0}^{sg-1} \left\{ (1-q_{k+1}) \left( \sum_{m=1}^k q_m \right) \right. \\ \left. + q_{k+1} \left( 1 - \frac{1}{2} q_{k+1} \right) \right\} p_k \dots \dots \dots (50)$$

が得られる。式 (49) 同様、適当な  $q_k$  を  $y_g$  で近似すれば、上式において、

$$(1-q_{k+1}) \left( \sum_{m=1}^k q_m \right) + q_{k+1} \left( 1 - \frac{1}{2} q_{k+1} \right)$$

$$= k y_g (1-q_{k+1}) + \frac{1}{2} y_g \{ (1-q_{k+1}) + 1 \}$$

が成り立ち、式 (26)、(49) を用いて式 (50) を整理すれば、

$$\sum_{k=0}^{sg-1} k p_k (1-q_{k+1}) = \frac{1}{1-y_g} \left\{ sg(1-x)N \right. \\ \left. - \frac{1}{2} [(qc)^2 - sg(sg-1)] \right. \\ \left. - sg(1-x)y_g \frac{2sg(1-y_g) + y_g - 2}{2(1-y_g)} \right\} \dots (51)$$

が得られる。したがって、式 (49)、(51) を式 (47) に代入すれば、

$$d = \frac{1-\lambda+y-y_g}{q(1-y_g)} N + \frac{1}{2sx(1-y_g)} \\ \cdot \left\{ \lambda c y_g (1-x) + (x-y_g) \left( qc+1 + \frac{1}{1-y_g} \right) \right\} \\ + c \left( 1 - \frac{y_g}{x} \right) - \frac{1}{gc} \int_0^c tq(t) dt$$

となり、式中の  $N$  を式 (5) で与えられる  $N_M$  で近似して求める  $d$  の近似式

$$d = \frac{1-\lambda+y-y_g}{2q(1-y_g)(1-x)} \exp \{ -1.33 \sqrt{sg}(1-x)/x \} \\ + \frac{1}{2sx(1-y_g)} \left\{ \lambda c y_g (1-x) + (x-y_g) \right. \\ \left. \cdot \left( qc+1 + \frac{1}{1-y_g} \right) \right\} + c \left( 1 - \frac{y_g}{x} \right) \\ - \frac{1}{qc} \int_0^c tq(t) dt \dots \dots \dots (52)$$

が得られる。なお、 $N$  を式 (4) の  $N_N$  で近似しても同様な近似式を得ることができる。特に定常入力  $q(t)=q$  の場合、 $y_g=y$  であるから、式 (52) は文献 15) で導かれた近似式 (8) と一致する。

### 6. 入力波形のずらし

入力波形  $q(t)$  を  $\epsilon$  だけずらした  $q(t+\epsilon)$  に対する遅れを  $d(\epsilon)$  で表わしたとき、 $d(\epsilon)$  を最小にする  $\epsilon^*$  を決定する問題は、都市内道路網の系統制御、面制御におけるオフセット設定問題と密接な関連をもっている。実際、上流信号機との(絶対)オフセットが0のときの入力波形が  $q(t) (0 \leq t \leq c)$  であれば、オフセットが  $\epsilon$  のときの入力波形は、 $t+\epsilon$  を法  $c$  で考えたとき  $q(t+\epsilon)$  と表わされる。本章では、次章で行う  $d$  の近似式 (52) のずらし  $\epsilon$  を変数とする数値比較を効率的に実行するために、 $d(\epsilon)$  の厳密値を能率よく計算するアルゴリズムを導く。

4. のアルゴリズム、ステップ1で求められる  $z_j (j=1, \dots, J)$  は  $\epsilon$  に依存しないから、 $\epsilon$  を変化させながら
4. のアルゴリズム、ステップ2, 3を繰り返し適用すれば  $q(t+\epsilon) (0 \leq \epsilon \leq c)$  に対する遅れ  $d(\epsilon)$ 、したがっ

て、 $\xi^*$  を計算することができる。しかしながら、ステップ 2 における逆行列  $A^{-1}$  あるいは連立一次方程式 (43) を  $\xi$  が変化することによって解くのは、 $sg$  が大きな場合かなりの計算時間を必要とする。以下では、この計算時間を大幅に短縮するアルゴリズムとして、入力波形  $q(t)$  に対する逆行列  $A^{-1}$  が既知のときに、ずらし  $\xi=1/s$ 、すなわち、入力波形  $q(t+1/s)$  に対する逆行列を簡単に計算するアルゴリズムを示す。このアルゴリズムを繰り返し適用すれば、 $q(t)$  に対する逆行列  $A^{-1}$  を求めるだけで順次、ずらし  $\xi=k/s (k=1, \dots, sc)$  に対する逆行列を計算でき、したがって、式 (28)~(32), (41), (42) から遅れ  $d(k/s)$  等を容易に求めることができる。

式 (16) と同様、 $q(t+1/s)$  に対して、

$$q_k^1 = \int_{(k-1)/s}^{k/s} q(t+1/s) dt \quad (k=1, \dots, sc)$$

とおく。ここで、 $t+1/s$  は法  $c$  で考えるものとする。明らかに、

$$q_k^1 = q_{k+1} \quad (k=1, \dots, sc-1), \quad q_{sc}^1 = q_1 \dots (53)$$

であり、式 (24) で  $q_k$  の代わりに  $q_k^1$  とおいて得られる式を  $P_k^1(z) (k=0, \dots, sg-1)$  とおけば、 $k=0, \dots, sg-2$  に対して、

$$P_k^1(z) = P_{k+1}(z) \exp\{q_{sc}^1(z-1)\}/z \dots (54)$$

が成り立つ。また、

$$P_{sg-1}^1(z) = z^{sg-1} \{z - \exp(q_{sg}^1(z-1))\} \cdot \exp\left\{\sum_{m=sg+1}^{sc} q_m^1(z-1)\right\} \dots (55)$$

である。式 (35)~(40) において、 $q_k, P_k(z_j)$  の代わりに  $q_k^1, P_k^1(z_j)$  とおいて得られる  $sg \times sg$  行列を  $A^1 = (a_{mk}^1)$  で表わし、 $A = (a_{mk})$  および  $A^1$  の第  $k$  列ベクトルをそれぞれ  $a_k$  および  $a_k^1$  で表わすことにする。まず、 $sg$  が奇数の場合を取り扱う。明らかに式 (35), (53) より、

$$a_{1k}^1 = a_{1k+1} \quad (k=1, \dots, sg-1) \dots (56)$$

であり、式 (36)~(40), (54) から、

$$a_{2j,k}^1 = R_e(P_{k-1}^1(z_j)) = u_{2j}a_{2j,k+1} - u_{2j+1}a_{2j+1,k+1} \dots (57)$$

$$a_{2j+1,k}^1 = I_m(P_{k-1}^1(z_j)) = u_{2j}a_{2j+1,k+1} + u_{2j+1}a_{2j,k+1} \dots (58)$$

が得られる。ここで  $j=1, \dots, J, k=1, \dots, sg-1$  であり、 $u_{2j}, u_{2j+1} (j=1, \dots, J)$  は、

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & u_2/(u_2^2+u_3^2) & u_3/(u_2^2+u_3^2) & & & 0 \\ 0 & -u_3/(u_2^2+u_3^2) & u_2/(u_2^2+u_3^2) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & 0 & & u_{2J}/(u_{2J}^2+u_{2J+1}^2) & u_{2J+1}/(u_{2J}^2+u_{2J+1}^2) \\ & & & & -u_{2J+1}/(u_{2J}^2+u_{2J+1}^2) & u_{2J}/(u_{2J}^2+u_{2J+1}^2) \end{bmatrix} \dots (70)$$

$$u_{2j} = R_e[\exp\{q_{sc}^1(z_j-1)\}/z_j] \dots (59)$$

$$u_{2j+1} = I_m[\exp\{q_{sc}^1(z_j-1)\}/z_j] \dots (60)$$

で与えられる。したがって、 $sg \times sg$  行列  $U$  を、

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & u_2 & -u_3 & & & 0 \\ 0 & u_3 & u_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & 0 & & u_{2J} - u_{2J+1} & \\ & & & & u_{2J+1}u_{2J} & \end{bmatrix} \dots (61)$$

とおけば、式 (56)~(58) から  $k=1, \dots, sg-1$  に対して、

$$a_k^1 = U a_{k+1}$$

が成り立つ。 $a_{sg}^1$  に対しても同様な関係が成り立つように、 $j=1, \dots, J$  に対して、

$$r_{2j} = R_e \left[ z_j^{sg} \{z_j - \exp\{q_{sg}^1(z_j-1)\}\} \cdot \exp\left\{\sum_{m=sg+1}^{sc-1} q_m^1(z_j-1)\right\}\right] \dots (62)$$

$$r_{2j+1} = I_m \left[ z_j^{sg} \{z_j - \exp\{q_{sg}^1(z_j-1)\}\} \cdot \exp\left\{\sum_{m=sg+1}^{sc-1} q_m^1(z_j-1)\right\}\right] \dots (63)$$

とおき、 $sg$  次元ベクトル  $r$  を

$$r = (1 - q_{sg}^1, r_2, \dots, r_{sg})^T \dots (64)$$

で与えれば、式 (55) から、

$$a_{sg}^1 = U r$$

が成り立つ。すなわち、

$$A^1 = (a_1^1, \dots, a_{sg-1}^1, a_{sg}^1) = U(a_2, \dots, a_{sg}, r) \dots (65)$$

である。ここで、第  $k$  要素に 1 をもつ  $sg$  次元単位ベクトルを  $e_k$  で表わせば、 $A^{-1}a_k = e_k$  であるから、 $sg$  次元ベクトル  $v = (v_k)$  および  $sg \times sg$  行列  $V$  を

$$v = A^{-1}r \dots (66)$$

$$V = (e_2, \dots, e_{sg}, v) \dots (67)$$

とおけば、

$$A^{-1}(a_2, \dots, a_{sg}, r) = V$$

となり、

$$(a_2, \dots, a_{sg}, r)^{-1} = V^{-1}A^{-1} \dots (68)$$

が得られる。したがって、式 (65), (68) から、

$$(A^1)^{-1} = (a_2, \dots, a_{sg}, r)^{-1}U^{-1} = V^{-1}A^{-1}U^{-1} \dots (69)$$

が導かれる。ここで、 $U^{-1}$  および  $V^{-1}$  は、式 (61), (67) より、

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} -v_2/v_1 & 1 & 0 \\ -v_3/v_1 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/v_1 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (71)$$

で与えられる。以上をまとめれば、 $A^{-1}$  が既知のときに、 $(A^1)^{-1}$  を計算するアルゴリズムは次のようになる。

ステップ 1: 式 (59), (60) より  $u_2, \dots, u_{sg}$  を計算し、式 (70) から  $U^{-1}$  を構成する。

ステップ 2: 式 (62), (63) から  $r_2, \dots, r_{sg}$  を計算し、式 (64), (66) を用いて  $v = (v_1, \dots, v_{sg})^T$  を求め、式 (71) から  $V^{-1}$  を構成する。

ステップ 3: 式 (69) を用いて  $(A^1)^{-1}$  を計算する。

$sg$  が偶数の場合には、 $\varepsilon_j$  が実根となり、 $u_{2j+1} = r_{2j+1} = 0$  となるので、式 (64) では  $r_{2j}$  までの項を、式 (70) では  $u_{2j}$  までの  $sg \times sg$  行列をとれば、上記のアルゴリズムがそのまま適用できる。

### 7. 数値比較

Blunden and Pretty<sup>(17)</sup> は、周期的な確定的入力に対する遅れを与える式 (9) を導き、入力波形  $q(t)$  が矩形波および正弦波の場合における式 (9) のずらし (オフセット)  $\varepsilon$  に対する変化を調べている。本章では、周期的なポアソン入力に対する 3. の解析結果に基づいて導かれた近似式 (52) の精度を検証するために、同様な入力波形のもとで、近似式 (52) の  $\varepsilon$  に対する変化を、4. および 6. のアルゴリズムから計算される遅れの厳密値の変化と数値的に比較検討する。2. で述べたように、定常入力に対するウェブスターの遅れ公式 (1) は、確定的入力に対する遅れとポアソン入力に対する遅れの増加分とから構成されている。本章では、周期的入力における確定的入力に対するポアソン入力の遅れの増加分を調べるために、式 (9) の  $\varepsilon$  に対する変化をもあわせて比較検討する。以下、 $q(t)$  としては、

$$\begin{aligned} \text{矩形波: } q_1(t) &= Q \quad (0 \leq t \leq T) \\ &= 0 \quad (T < t \leq c) \end{aligned}$$

および、

$$\text{正弦波: } q_2(t) = q + q \sin \frac{2\pi}{c} t \quad (0 \leq t \leq c)$$

を考え、ずらし  $\varepsilon (0 \leq \varepsilon \leq c)$  のもとでの  $q_i(t+\varepsilon) (i=1, 2)$  を入力波形として考えることにする。ただし、 $(t+\varepsilon)$  は法  $c$  でとるものとする。

通常、飽和交通量は、直進 1 車線当り 1800 台/時間が標準値とされており<sup>20)</sup>、以下の数値計算では  $s=0.5$  台/秒とおく。さらに、周期  $c$  および有効青時間  $g$  としては、 $c=120$  秒および  $g=60$  秒とおくことにする。したがって、スプリット  $\lambda=0.5$  である。飽和度  $x$  は、矩形波入力に対して  $x=QT/30$ 、正弦波入力に対して

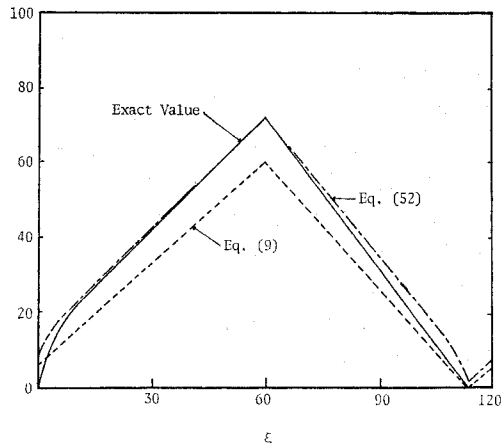


図-1 矩形波入力 ( $Q=0.5, T=54$ ) に対する遅れ (秒/台) の厳密値と式 (9), (52) のずらし  $\varepsilon$  (秒) に関する比較

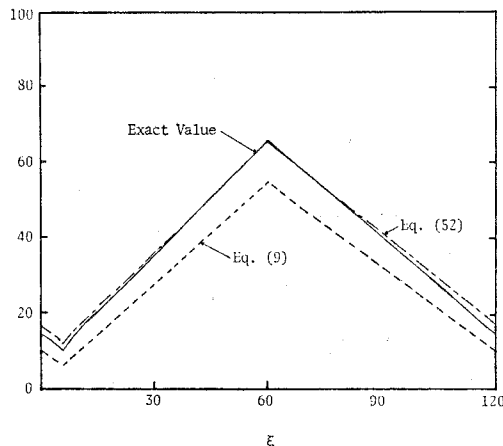


図-2 矩形波入力 ( $Q=0.409, T=66$ ) に対する遅れ (秒/台) の厳密値と式 (9), (52) のずらし  $\varepsilon$  (秒) に関する比較

$x=4q$  で与えられる。図-1 は、 $Q=s=0.5, T=54$  とおいた矩形波入力  $q_1(t+\varepsilon)$  に対する式 (9)、近似式 (52) の値および厳密値を示したものである。図-2 は、同じく矩形波入力  $q_1(t+\varepsilon)$  において  $Q=0.409, T=66$  とおいて得られた結果を示している。図-1, 2 はともに  $x=0.9$  における矩形波入力に対する結果を示したものであるが、同じく  $x=0.9$ 、すなわち、 $q=0.225$  における正弦波入力  $q_2(t+\varepsilon)$  に対する結果が図-3 に示されている。これらの図から示されるように、本論文で導いた近似式 (52) は、周期的なポアソン入力に対してかなり正確な遅れの値を与えている。また、厳密値と式 (9) の値との比較から、ポアソン入力による遅れの増加分はずらし  $\varepsilon$  に依存し、必ずしも TRANSYT<sup>20)</sup> で採用されている一定値  $x^2/[2(1-x)]=4.05$  に一致しないことがわかる。なお、式 (9) の導出には暗々裏に  $x=1$



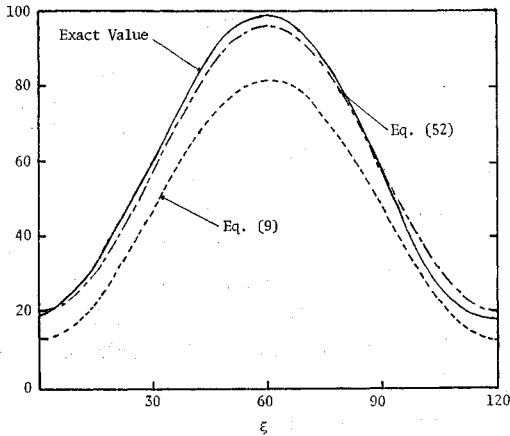


図-3 正弦波入力 ( $q=0.225$ ) に対する遅れ (秒/台) の厳密値と式 (9), (52) のずらし  $\epsilon$  (秒) に関する比較

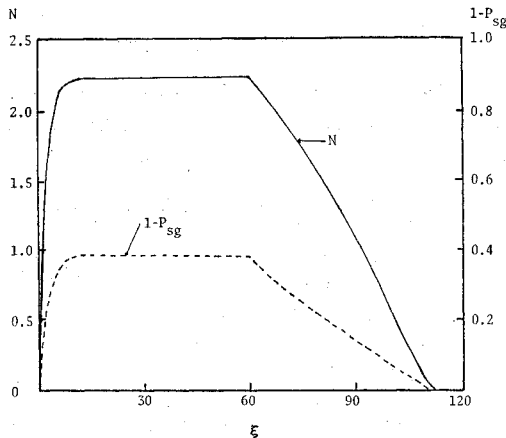


図-4 矩形波入力 ( $Q=0.5, T=54$ ) に対する平均溢れ台数  $N$ , 負荷係数 ( $1-P_{sg}$ ) とずらし  $\epsilon$  (秒) の関係

が仮定されており、確定的入力に対する遅れとしては、式 (9) がいくぶん大きな値を与えることを注意しておこう。

図-2 に示されるように、矩形波入力に対して遅れを最小にするオフセット  $\epsilon^*$  は、矩形波の後縁が有効青時間の終わりに一致するときであり、この事実は Gartner<sup>20)</sup> らによって示されている。最後に、図-4 は、図-1 同様、矩形波入力  $q_1(t+\epsilon)$  で  $Q=0.5, T=54$  の場合における式 (30) および式 (44) から計算される平均溢れ台数  $N$  および負荷係数 ( $1-p_{sg}$ ) を示したものであり、 $N$  が  $\epsilon$  に依存しないという Wormleighton<sup>16)</sup> の結果が誤りであることを示している。

### 8. 結 言

本論文では、定周期信号機の設置された交差点にお

ける周期的なポアソン入力のもとでの車の遅れを、待ち行列理論を用いて解析し、主要な結果として次のようなものを得た。

(1) 車の遅れ  $d$ , 平均溢れ台数  $N$ , 負荷係数 ( $1-p_{sg}$ ) 等を計算するアルゴリズムを示した。

(2) 入力波形のずらし  $\epsilon$  が変化したときに、 $d, N, (1-p_{sg})$  等を効率よく計算するアルゴリズムを示した。

(3) 車の遅れの近似式 (52) を導き、(1), (2) のアルゴリズムから計算された厳密値と比較し、比較的誤差が少ないほぼ実用にたえうるものであることを示した。

本論文では交差点への入力として、周期的なポアソン入力を仮定した。実際のこの仮定は、定常ポアソン入力の仮定のもとで導かれたウェブスターの遅れ公式 (1) あるいはその簡略公式 (2) が広汎に使用されていることを考えれば、かなり妥当なものと思われる。しかしながら、現実の都市内道路網における交差点への入力は、上流交差点からの発進交通流、上流交差点との距離、その区間の道路条件、速度分布等のさまざまな要因の影響を受け特に過密な道路区間では必ずしもこの仮定は成立しないものと思われる。今後、実際の観測データとの比較検証を行い、近似式 (52) をより精度のよい実用的なものに改善することが残された課題である。また、このような近似式を用いれば、道路交通網におけるスプリット、オフセットのより簡単な最適設定法を開発することも可能であろう<sup>21)</sup>。

終わりに、常日頃ご懇篤なご指導を賜わる 京都大学 三根 久、長谷川利治両教授に深謝いたします。

### 付録 1 記 号

$A = (a_{mk})$ :  $sg \times sg$  行列, 式 (35)~(40)

$A^{-1}$ :  $A$  の逆行列

$a_k$ :  $A$  の第  $k$  列ベクトル ( $k=1, \dots, sg$ )

$\tilde{a}_k$ :  $A^{-1}$  の第  $k$  列ベクトル ( $k=1, \dots, sg$ )

$A^1 = (a_{mk}^1)$ : 入力波形  $q(t+1/s)$  に対する  $sg \times sg$  行列, 式 (56)~(58)

$a_k^1$ :  $A^1$  の第  $k$  列ベクトル

$b$ :  $sg$  次元ベクトル

$c$ : 周期長

$d$ : 平均遅れ

$e_k$ :  $sg$  次元単位ベクトル

$g$ : 有効青時間

$H_k^{(m)}(z)$ :  $L_k^{(m)}$  の確率母関数, 式 (14)

$H_k(z)$ : 平衡状態における周期の始めから  $k/s$  における待ち台数の確率母関数 ( $k=0, 1, \dots, sc$ )

$I_m(z)$ :  $z$  の虚数部

$J$  : 正整数, 式 (33)

$L_k^{(n)}$  : 第  $n$  周期の始めから  $k/s$  における待ち台数 ( $k=0, 1, \dots, sc, n=0, 1, \dots$ )

$N$  : 平均溢れ台数, すなわち有効青時間の終りににおける平均待ち台数

$N_k^{(m)}$  :  $L_k^{(m)}$  の平均

$N_k$  : 平衡状態における周期の始めから  $k/s$  における平均待ち台数 ( $k=0, 1, \dots, sc$ )

$N(t)$  : 周期の始めから  $t$  における平均待ち台数

$p_k^{(m)}$  :  $L_k^{(m)}=0$  となる確率, 式 (15)

$p_k$  : 平衡状態における周期の始めから  $k/s$  において待ち台数が 0 になる確率

$q$  : 平均到着交通量, 式 (10)

$q(t)$  ( $0 \leq t \leq c$ ) : 周期の始めから  $t$  における平均到着率

$Q_k^{(n)}$  : 第  $n$  周期における時間区間  $[(k-1)/s, k/s)$  に到着する車の台数 ( $k=1, \dots, sc, n=0, 1, \dots$ )

$q_k$  : 周期の始めから  $[(k-1)/s, k/s)$  内に到着する平均交通量, 式 (16)

$q_k^1$  : 式 (53)

$r$  : 有効赤時間

$R_c(z)$  :  $z$  の実数部

$r_k$  : 式 (62), (63)

$r$  :  $sg$  次元ベクトル, 式 (64)

$s$  : 飽和交通流量

$u_k$  : 式 (59), (60)

$U$  :  $sg \times sg$  行列, 式 (61)

$v$  :  $sg$  次元ベクトル, 式 (66)

$V$  :  $sg \times sg$  行列, 式 (67)

$x=qc/sg$  : 飽和度

$y=q/s$  : 正規化交通量

$y_\theta$  : 式 (48)

$z_j$  : 式 (25) の零点 ( $j=1, \dots, J$ )

$\lambda=g/c$  : スプリット

$\xi$  : ずらし (オフセット)

## 付録 2

### (1) 式 (18), (19) の導出

式 (12), (14), (15) より

$$\begin{aligned} H_{k+1}^{(m)}(z) &= \sum_{l=0}^{\infty} P_r\{L_{k+1}^{(m)}=l\} z^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} P_r\{L_{k+1}^{(m)}=l, L_k^{(m)}=m\} z^l \\ &= p_k^{(m)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} P_r\{Q_k^{(m)}=l-m+1\} z^l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cdot P_r\{L_k^{(m)}=m\} z^l \\ &= p_k^{(m)} + \sum_{m=1}^{\infty} P_r\{L_k^{(m)}=m\} z^m \\ &\cdot \sum_{l=m-1}^{\infty} P_r\{Q_k^{(m)}=l-m+1\} z^{l-m} \end{aligned}$$

であり, したがって, 式 (17) より,

$$\begin{aligned} H_{k+1}^{(m)}(z) &= p_k^{(m)} + \{H_k^{(m)}(z) - p_k^{(m)}\} \\ &\cdot \exp\{q_{k+1}(z-1)\}/z \\ &= \exp\{q_{k+1}(z-1)\} H_k^{(m)}(z)/z \\ &\quad + \{1 - \exp\{q_{k+1}(z-1)\}/z\} p_k^{(m)} \end{aligned}$$

として式 (18) が得られる. 式 (19) も同様に導くことができる.

### (2) 式 (27) の導出

式 (23) より,

$$\begin{aligned} H_0'(z) &= \{R(z) \sum_{k=0}^{sg-1} p_k P_k'(z) \\ &\quad - R'(z) \sum_{k=0}^{sg-1} p_k P_k(z)\} / R(z)^2 \end{aligned}$$

であるが,  $P_k(1)=R(1)=0$  であるから, 分母, 分子ともに  $z=1$  で 0 となる. したがって, 分母, 分子の 2 階微分をとれば,

$$\begin{aligned} N_0 &= \lim_{z \rightarrow 1} \{R'(z) \sum_{k=0}^{sg-1} p_k P_k''(z) + R(z) \sum_{k=0}^{sg-1} p_k P_k'''(z) \\ &\quad - R'''(z) \sum_{k=0}^{sg-1} p_k P_k(z) - R''(z) \sum_{k=0}^{sg-1} p_k P_k'(z)\} / \\ &\quad \cdot \{2 R'(z)^2 + 2 R(z) R''(z)\} \\ &= \sum_{k=0}^{sg-1} p_k P_k''(1) / \{2 R'(1)\} \\ &\quad - R''(1) \sum_{k=1}^{sg-1} p_k P_k'(1) / \{2 R'(1)^2\} \end{aligned}$$

となり, 式 (24), (25) より,

$$\begin{aligned} P_k'(1) &= 1 - q_{k+1} \\ P_k''(1) &= 2(1 - q_{k+1})(k + \sum_{m=k+2}^{sc} q_m) - q_{k+1}^2 \\ R'(1) &= sg(1 - x) \\ R''(1) &= sg(sg - 1) - (qc)^2 \end{aligned}$$

であるから, 式 (26) を用いれば式 (27) が得られる.

### 参考文献

- 1) Ráff, M.S. : The distribution of blocks in an uncongested stream of automobile traffic, J. Amer. Statist. Assoc., Vol. 46, pp. 114~123, 1951.
- 2) Tanner, J.C. : A theoretical analysis of delays at an uncontrolled intersection, Biometrika, Vol. 49, pp. 163~170, 1962.
- 3) Weiss, G.H. and A.A. Maradudin : Some problems in traffic delay, Operations Res., Vol. 10, pp. 74~104, 1962.
- 4) McNeil, D.R. and J.T. Smith : A comparison of motorist delays for different merging strategies, Transportation Sci., Vol. 3, pp. 239~254, 1969.
- 5) Daganzo, C.F. : Traffic delay at unsignalized intersections : Clarification of some issues, Transportation

- Sci., Vol. 11, pp. 180~189, 1977.
- 6) Tanner, J.C. : The delay to pedestrians crossing a road, *Biometrika*, Vol. 38, pp. 383~392, 1951.
  - 7) Mayne, A.J. : Some further results in the theory of pedestrians and road traffic, *Biometrika*, Vol. 41, pp. 375~389, 1954.
  - 8) Garwood, F. : An application of the theory of probability to the operation of vehicular-controlled traffic signals, *Journal of mathematical Soc.*, Vol. 7, pp. 65~77, 1940.
  - 9) Darroch, J.N., G.F. Newell and R.W.J. Morris : Queues for a vehicle-actuated traffic light, *Operations Res.*, Vol. 12, pp. 882~895, 1964.
  - 10) Newell, G.F. : Properties of vehicle-actuated signals : I. One-way streets, *Transportation Sci.*, Vol. 3, pp. 30~52, 1969.
  - 11) Newell, G.F. and E.E. Osuna : Properties of vehicle-actuated signals : II. Two-way streets, *Transportation Sci.*, Vol. 3, pp. 99~125, 1969.
  - 12) Little, J.G. : Queuing of side-street traffic at a priority type vehicle-actuated signal, *Transportation Res.*, Vol. 5, pp. 295~300, 1971.
  - 13) Allsop, R.E. : Delay at a fixed time traffic signal- I : Theoretical analysis, *Transportation Sci.*, Vol. 6, pp. 260~285, 1972.
  - 14) Hutchinson, T.P. : Delay at a fixed time traffic signal- II : Numerical comparisons of some theoretical expressions, *Transportation Sci.*, Vol. 6, pp. 286~305, 1972.
  - 15) Ohno, K. : Computational algorithm for a fixed cycle traffic signal and new approximate expressions for average delay, *Transportation Sci.*, Vol. 12, pp. 29~47, 1978.
  - 16) Wormleighton, R. : Queues at a fixed time traffic signal with periodic random input, *Canadian Operations Res. Soc. Journal*, Vol. 3, pp. 129~141, 1965.
  - 17) Blunden, W.R. and R.L. Pretty : On the theory of deterministic cyclic traffic flows in networks, *Proceedings of the 3rd Int. Symp. on the theory of Traffic Flow*, pp. 287~299, 1965.
  - 18) May, A.D. Jr. and H.E.M. Keller : A deterministic queueing model, *Transportation Res.*, Vol. 1, pp. 117~128, 1967.
  - 19) Minh, D.L. and W.R. Blunden : Time-inhomogeneous signalized intersection as a discrete infinite dam, *Proceedings of the 7th Int. Symp. on Transportation and Traffic Theory*, pp. 271~280, 1977.
  - 20) 交通工学研究会 : 交通工学ハンドブック, 技報堂, pp. 133, 134, 253~258, 1973年5月.
  - 21) Webster, F.V. : Traffic Signal Settings, Road Research Technical Paper No. 39, Her Majesty's Stationery Office, 1958.
  - 22) 鈴木武次 : 待ち行列, 裳華房, p. 147, 1972年9月.
  - 23) Newell, G.F. : Approximate methods for queues with application to the fixed-cycle traffic light, *SIAM Review*, Vol. 7, pp. 223~239, 1965.
  - 24) Miller, A.J. : The capacity of signalized intersections in Australia, *Australian Road Research Board Bulletin*, No. 3, 1968.
  - 25) Mine, H. and K. Ohno : Traffic light queues as a generalization to queueing theory, *Journal of Applied Probability*, Vol. 8, pp. 480~493, 1971.
  - 26) Ohno, K. and H. Mine : Traffic light queues with dependent arrivals as a generalization to queueing theory, *Journal of Applied Probability*, Vol. 9, pp. 630~641, 1972.
  - 27) Ohno, K. and H. Mine : Traffic light queues with departure headways depending upon positions, *Journal of Operations Research Soc. of Japan*, Vol. 17, pp. 145~165, 1974.
  - 28) 交通工学研究会 : 道路の交通容量, 1965, 技術書院, pp. 109~112, 122~145, 1970年11月.
  - 29) Robertson, D.I. : TRANSYT : A traffic network study tool, Ministry of Transport, RRL Report LR 253, 1969.
  - 30) Gartner, N.H., J.D.C. Little and H. Gabbay : Optimization of traffic signal settings by mixed-integer linear programming, *Transportation Sci.*, Vol. 9, pp. 321~363, 1975.
  - 31) Ohno, K. and H. Mine : Optimal traffic signal settings- I and II, *Transportation Res.* Vol. 7, pp. 243~292, 1973.