

円筒タンク内の液体動揺に関する研究

STUDY ON THE SLOSHING OF LIQUID CONTAINED IN CIRCULAR TANK

池田駿介*・秋山成興**・中村広昭***・白井伸一****

By Syunsuke IKEDA, Narioki AKIYAMA, Hiroaki NAKAMURA
and Shinichi SHIRAI

1. 序 論

一般に容器内の液体が振動外力を受けた場合にはそのうちのある振動数成分に対して液体が共振を起こし、液面が動揺するスロッシング現象を呈する。このような現象は石油タンクのような各種の貯液タンクの耐震設計では重要な問題であることが実際の地震の被害調査報告¹⁾からも言及されている。液体がこのような動揺を起こしたときに貯液タンクに働く圧力等の計算をするには普通行われている耐震設計ではほとんどの場合、水平外力に対しては速度ポテンシャル理論あるいは Housner 理論²⁾に基づいており、特に後者の場合が多い。直径に比べて背の低いタンクでは Housner 理論は妥当な値を与えると考えられているが、直径に比べて背の高い薄肉タンクになると壁の可撓性の影響を無視することができなくなる。このような薄肉タンクの場合の解析もすでに行われているが³⁾、ここでは 3. 章で実験的に薄肉円筒タンクが水平振動外力を受けた場合に壁の可撓性が側壁に働く動水圧にどのような影響を及ぼすかを調べた。また、液面動揺防止の目的から液面に浮屋根を浮かせた場合の液面動揺抑制効果についても実験的に検討を加えた。

次に実際の地震動を考えると地盤の動きとしては水平動ばかりでなく上下動も含まれており、この影響も無視することはできない。したがって、上下振動によって内部液体がどのような応答を示すかということも検討する必要がある。鉛直方向の振動を受けたタンク内の液体スロッシングの解析については Faraday が 1831 年に液面動揺は外力振動の $1/2$ -subharmonic 応答することを発見して以来、さまざまな研究がなされている。Ben-

jamin と Ursell⁴⁾ は自由表面での境界条件を線形化し、速度ポテンシャルを用いて解析を行い、液面動揺のモードとその液面動揺が生ずる外力の振動数の範囲を明らかにしている。けれどもこのような線形解析では定常解で解が発散する領域にある場合には液面動揺の振幅やタンクに働く動水圧のような応答値は求めることはできない。Dodge, Kana, Abramson⁵⁾ は自由表面での境界条件を線形化せず、摂動法を用いて 3 次のオーダーまでの非線形解析を行い、液面動揺の応答曲線や波形に関する近似解を求めているが計算の過程で不明の点が多く、本論文では Dodge らに習い 3 次のオーダーまでの計算を行い、液面動揺の応答解析、波形、さらには工学的に重要である圧力に関する非線形解を求めた。鉛直方向の振動を受けたタンクに働く動水圧に関するデータはこれまで報告されておらず、これらの測定も行った。

実際の地震動では当然ながら水平動および鉛直動を同時に考えなければならない。高山⁶⁾はこのような場合について線形化された境界条件下で理論解析を行い、さまざまな応答特性を明らかにしているが、このような場合についての波形、応答、あるいは動水圧分布に関する実験的検討はなされておらず、ここでは実験的にどのような液面動揺現象が生ずるかを調べ、その際にタンクに働く動水圧や波高の測定を行った。

2. 理論的考察

(1) 慣用解析法の概略

慣用解析法の一つである速度ポテンシャル理論の概要は次のとおりである。図-1 を参照して非圧縮性の完全流体が入った剛体平底円筒タンクが水平方向に正弦波変位、 $A \sin \omega t$ を受ける場合について考える。自由表面において液体の速度、変位あるいは傾きが小さいとして線形化すると基礎式および境界条件は円筒座標系 $(r, \theta,$

* 正会員 工博 埼玉大学助教授 工学部建設基礎工学科

** 正会員 工博 埼玉大学教授 工学部建設基礎工学科

*** 正会員 埼玉大学助手 工学部建設基礎工学科

**** 正会員 工修 東京電力(株)

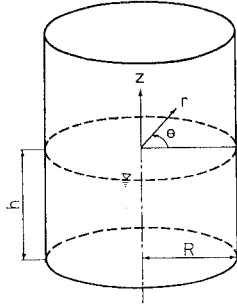


図-1 座標系

z) において次のようになる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=R} = A \omega \cos \omega t \cdot \cos \theta \dots\dots\dots (2)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=-h} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 ϕ は速度ポテンシャル、 R は円筒タンクの半径、 A は正弦波外力の振幅、 ω はその角周波数、 h は水深である。条件式 (2)~(4) を満たす (1) の定常解は簡単に求められ、

$$\phi = A \omega \cos \omega t \cos \theta \cdot R \left\{ \frac{r}{R} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\xi_m^2}{1 - \xi_m^2} \right] \cdot \frac{J_1 \left(\frac{\xi_m}{R} r \right) \cosh \left[\frac{\xi_m}{R} (z+h) \right]}{(\xi_m^2 - 1) J_1(\xi_m) \cosh \left(\frac{\xi_m}{R} h \right)} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

となる。ただし、

$$\xi_m = \frac{\omega}{\omega_m}$$

$$\omega_m^2 = g \frac{\xi_m}{R} \tanh \left(\frac{\xi_m}{R} h \right)$$

であり、 J_1 は第一種一階 Bessel 関数、 ξ_m は超越方程式、

$$\left. \frac{dJ_1(\xi_m r)}{dr} \right|_{r=R} = 0$$

の m 番目の根である。動水圧は線形化されているので、

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots\dots\dots (6)$$

より求められる。ここに ρ は液体の密度である。特に側壁では動水圧は、

$$p = \rho \omega^2 R \cos \theta \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\xi_m^2}{1 - \xi_m^2} \right] \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\cosh \left[\frac{\xi_m}{R} (z+h) \right]}{(\xi_m^2 - 1) \cosh \left(\frac{\xi_m}{R} h \right)} \right\} A \sin \omega t \dots\dots\dots (7)$$

となり、また水面変位は、

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = \frac{1}{g} \omega^2 R \cos \theta \left\{ \frac{r}{R} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\xi_m^2}{1 - \xi_m^2} \right] \cdot \frac{J_1 \left(\frac{\xi_m}{R} r \right)}{(\xi_m^2 - 1) J_1(\xi_m)} \right\} A \sin \omega t \dots\dots\dots (8)$$

で与えられる。

一方、Housner 理論では剛体タンク内の液体を固定質量と自由質量に分けて考えており、剛体円筒タンクが水平方向に \dot{u}_0 の加速度を受けた場合の慣性圧 p_i と波による振動圧 p_c は次式で与えられる。

$$p_i = \begin{cases} \sqrt{3} \rho h \dot{u}_0 \left\{ \frac{z}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\} \\ \cdot \tanh \left(\sqrt{3} \frac{R}{h} \cos \theta \right) & : h \leq 1.5 R \\ \rho R \dot{u}_0 \cos \theta & : h \geq 1.5 R \end{cases} \dots\dots\dots (9)$$

$$p_c = \rho \frac{R^2}{3} \sqrt{\frac{27}{8}} \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{3} - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) \cdot \cos \theta \frac{\cosh \left(\sqrt{\frac{27}{8}} \frac{z}{R} \right)}{\sinh \left(\sqrt{\frac{27}{8}} \frac{h}{R} \right)} \phi_h \omega^2 \sin \omega t \dots (10)$$

ここに、 ϕ_h は水面の傾きである。

(2) タンクが鉛直振動外力を受ける場合

図-1 で示された系に鉛直変位 $A \cos N\omega t$ を加える。ただし、 N は正の数で、液面動揺の角周波数が ω のとき外力の角周波数は $N\omega$ で与えられることとなる。したがって、 N の値が1より小さい正の数るとき液面動揺は外力振動に対して superharmonic、 $N=1$ のとき harmonic、 $N>1$ のとき subharmonic となる。座標系 (r, θ, z) を円筒タンクに固定して考えると運動を支配する方程式は式 (1) と同じ Laplace の式であり、境界条件はタンクの壁と底で、

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{z=0} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

となる。ここに、 n は境界に対して法線の距離である。自由表面では圧力の条件は、

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=\eta} - (g - N^2 \omega^2 A \cos N\omega t) \eta - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right]_{z=\eta} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

である。また、運動学的な条件は $z=\eta$ で、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \dots\dots\dots(13)$$

と与えられる。

ここで、水面での変位と傾きが小さいと仮定し、式(12)、(13)を線形化すると次式が得られる。

$$\left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (g - N^2 \omega^2 A \cos N\omega t) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\}_{\eta=0} = 0 \dots\dots(14)$$

境界条件(11)を満足する基礎式(1)の解は、

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(\lambda_{mn} r) \frac{\cosh \lambda_{mn}(z+h)}{\cosh \lambda_{mn} h} \cdot (C_1 \sin m\theta + C_2 \cos m\theta) \cdot T_{mn}(t) \dots\dots(15)$$

で与えられる。ただし、 J_m は第一種 m 階 Bessel 関数であり、 C_1, C_2 は積分定数、 m, n は正の整数、 λ_{mn} は超越方程式

$$\left. \frac{dJ_m(\lambda_{mn} r)}{dr} \right|_{r=R} = 0$$

の根である。式(15)では時間に関する関数 $T_{mn}(t)$ が定まらないので、これを式(14)に代入すると T_{mn} に関する次式が得られる。

$$\frac{d^2 T_{mn}}{dt^2} + \lambda_{mn} \tanh \lambda_{mn}(z+h) \cdot (g - N^2 \omega^2 A \cos N\omega t) T_{mn} = 0 \dots\dots\dots(16)$$

式(16)は Mathieu 方程式の標準形であり、この方程式の解は Mathieu の安定・不安定図としてよく知られている。特に $A=0$ とすると式(16)は自由振動の方程式となり、この場合の固有振動数 ω_{mn} は次のようになる。

$$\omega_{mn} = (\lambda_{mn} g \tanh \lambda_{mn} h)^{1/2} \dots\dots\dots(17)$$

Mathieu の安定・不安定図を用いて縦軸に外力振動の振幅、横軸に外力の周波数をとると、一例として図-2 のようにある液面動揺のモードに対して液面が不安定となり、スロッシングを生ずる領域を描くことができる。この図では $m=2$ の場合の液面動揺のモード(すなわち円周方向に2波が入っている)について取り扱っており、その場合にそれぞれの液面の振動の harmonics について、不安定となる領域を示しているが、図からわかるように 1/2-subharmonic が発生する領域以外の領域は狭く、実際現象としては 1/2-subharmonic 以外は生じ難いことが知られる。他の m の値についても同様な計算結果となり、また、筆者らの実験でも 1/2-subharmonic 以外は観察されなかった。したがって、鉛直振動による液面振動の応答を 1/2-subharmonic に限って考えることとし、 m の値に対応する液面動揺のモード別に安定・不安定領域を示したのが図-3 である。 m の値に対応する液面動揺の形態については写真-1 に示されている。

以上のような線形理論では発生するモードの形態とその領域は知ることができ、液面動揺の起こる不安定領域ではポテンシャル ϕ の値が発散してしまうので水面変位や動水圧の値を定常解の場合には有限値として求めることはできない。このような値を求めるには非線形理論が必要であり、以下でその展開を行う。

図-1 を再び参照して、ここでは次のように次元量に $-$ を付して表わすと境界条件(11)を満足する Laplace 方程式の解は鉛直振動の場合には回転現象をいずれのモードについても実験でみられなかったので式(15)中の $\sin \theta$ の項はとることができ、次のように書くことができる。

$$\bar{\phi} = \bar{\alpha}_0(\bar{t}) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{mn}(\bar{t}) J_m(\bar{\lambda}_{mn} \bar{r}) \cdot \cos m\theta \frac{\cosh \bar{\lambda}_{mn}(\bar{z} + \bar{h})}{\cosh \bar{\lambda}_{mn} \bar{h}} \dots\dots(18)$$

ここに、 $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_{mn}$ は未知の時間の関数であ

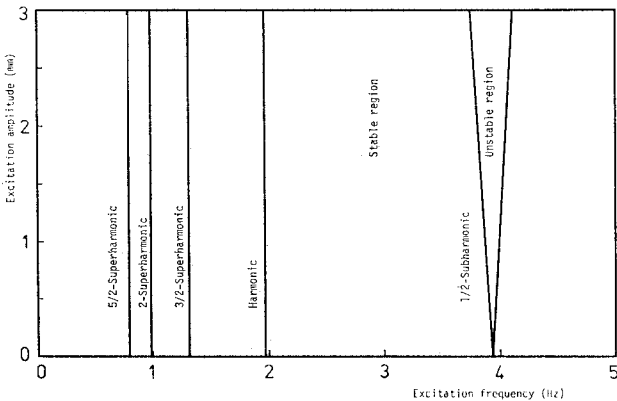


図-2 縦振動による不安定領域

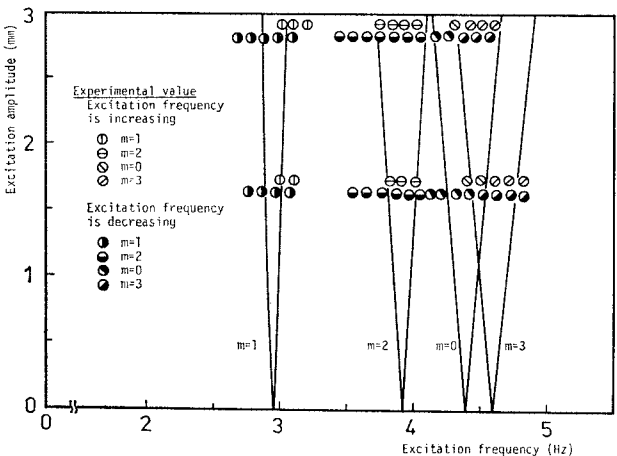
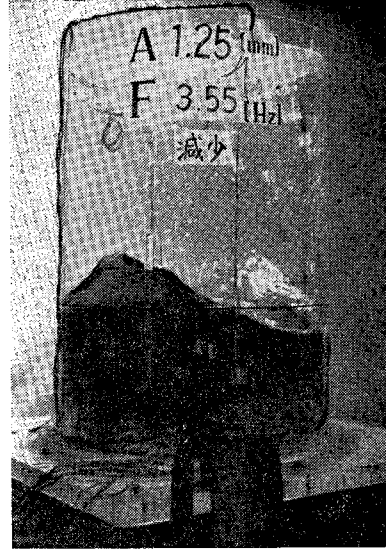


図-3 1/2-subharmonic 応答の不安定領域



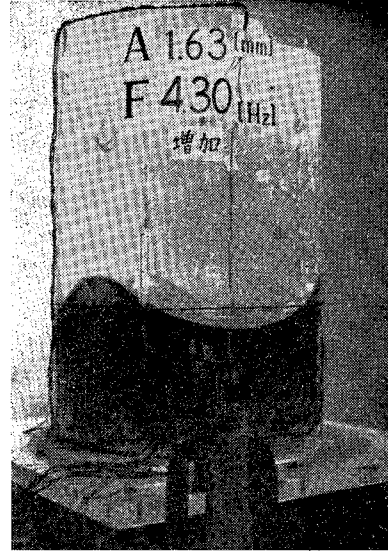
(a) $m=1, n=1$



(b) $m=2, n=1$



(c) $m=0, n=1$



(d) $m=3, n=1$

(a) 第一次非対称モード, (b) 第二次非対称モード
(c) 第一次非対称モード, (d) 第三次非対称モード

写真-1 1/2-subharmonic 応答の水面形

る。上式に対応して自由表面の変位 $\bar{\eta}$ を次のようにおくことができる。

$$\bar{\eta} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_{mn}(t) J_m(\bar{\lambda}_{mn} \bar{r}) \cos m\theta \dots\dots (19)$$

ここに、 \bar{a}_{mn} は時間に関する未知の関数である。このように $\bar{\phi}, \bar{\eta}$ に含まれている $\bar{\alpha}_0, \bar{a}_{mn}, \bar{a}_{mn}$ を境界条件(12), (13) から定めるのであるが、その前にすべての式を無次元化しておく。いま、さまざまな液面動揺のモードのうち、 $m=k, n=l$ のモードが卓越しており、重要であると考え、 $\bar{\phi}$ と $\bar{\eta}$ の級数展開された項の中

で $\bar{\alpha}_{kl}$ と \bar{a}_{kl} が卓越振幅となる。したがって、これに対応する自由振動の固有角周波数(式(17)参照),

$$\omega_{kl} = (\bar{\lambda}_{kl} g \tanh \bar{\lambda}_{kl} \bar{h})^{1/2}$$

と代表長

$$\bar{\lambda}_{kl} \tanh \bar{\lambda}_{kl} \bar{h}$$

を用いて無次元化を行う。無次元化された値は σ を取って表わすと次のようになる。

$$\sigma = \frac{\omega}{\omega_{kl}}$$

$$t = \omega_{kl} \bar{t}$$

$$\begin{aligned}
 r &= (\bar{\lambda}_{kl} \tanh \bar{\lambda}_{kl} \bar{h}) \bar{r} \\
 z &= (\bar{\lambda}_{kl} \tanh \bar{\lambda}_{kl} \bar{h}) \bar{z} \\
 \eta &= (\bar{\lambda}_{kl} \tanh \bar{\lambda}_{kl} \bar{h}) \bar{\eta} \\
 \varepsilon &= (\bar{\lambda}_{kl} \tanh \bar{\lambda}_{kl} \bar{h}) \bar{A} \\
 a_{mn} &= (\bar{\lambda}_{kl} \tanh \bar{\lambda}_{kl} \bar{h}) \bar{a}_{mn} \\
 \alpha_{mn} &= \frac{(\bar{\lambda}_{kl} \tanh \bar{\lambda}_{kl} \bar{h})^2}{\omega_{kl}} \bar{\alpha}_{mn} \\
 \phi &= \frac{(\bar{\lambda}_{kl} \tanh \bar{\lambda}_{kl} \bar{h})^2}{\omega_{kl}} \bar{\phi} \\
 \lambda_{mn} &= \frac{\bar{\lambda}_{mn}}{\bar{\lambda}_{kl} \tanh \bar{\lambda}_{kl} \bar{h}}
 \end{aligned}$$

これらを境界条件 (12), (13) に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 &\hat{\alpha}_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\{\hat{\alpha}_{mn} F_{mn}^{\mu}\} \\
 &\quad - (1 - N^2 \sigma^2 \varepsilon \cos N \sigma t) a_{mn}] J_m(\lambda_{mn} r) \cos m \theta] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \{\alpha_{mn} \alpha_{pq} \lambda_{mn} \lambda_{pq} J_{m+1} \\
 &\quad (\lambda_{mn} r) J_{p+1}(\lambda_{pq} r) \cos m \theta \cos p \theta F_{mn}^{\mu} F_{pq}^{\nu}\} \\
 &\quad + \alpha_{mn} \alpha_{pq} \frac{m p}{r^2} J_m(\lambda_{mn} r) J_p(\lambda_{pq} r) \\
 &\quad \cdot \cos(m-p) \theta F_{mn}^{\mu} F_{pq}^{\nu} \\
 &\quad + \alpha_{mn} \alpha_{pq} \lambda_{mn} \lambda_{pq} J_m(\lambda_{mn} r) J_p(\lambda_{pq} r) \\
 &\quad \cdot \cos m \theta \cos p \theta G_{mn}^{\mu} G_{pq}^{\nu} \\
 &\quad - 2 \alpha_{mn} \alpha_{pq} \frac{p \lambda_{mn}}{r} J_{m+1}(\lambda_{mn} r) J_p(\lambda_{pq} r) \\
 &\quad \cdot \cos m \theta \cos p \theta F_{mn}^{\mu} F_{pq}^{\nu}\} = 0 \dots \dots \dots (20) \\
 &\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\{\hat{\alpha}_{mn} + \lambda_{mn} \alpha_{mn} G_{mn}^{\mu}\} J_m(\lambda_{mn} r) \cos m \theta] \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \{\alpha_{mn} \alpha_{pq} \lambda_{mn} \lambda_{pq} J_{m+1} \\
 &\quad (\lambda_{mn} r) J_{p+1}(\lambda_{pq} r) \cos m \theta \cos p \theta F_{mn}^{\mu}\} \\
 &\quad + \alpha_{mn} \alpha_{pq} \frac{m p}{r^2} J_m(\lambda_{mn} r) J_p(\lambda_{pq} r) \\
 &\quad \cdot \cos(m-p) \theta F_{mn}^{\mu} \\
 &\quad - \alpha_{mn} \alpha_{pq} \frac{m \lambda_{pq}}{r} J_m(\lambda_{mn} r) J_{p+1}(\lambda_{pq} r) \\
 &\quad \cdot \cos m \theta \cos p \theta F_{mn}^{\mu} \\
 &\quad - \alpha_{mn} \alpha_{pq} \frac{p \lambda_{mn}}{r} J_{m+1}(\lambda_{mn} r) J_p(\lambda_{pq} r) \\
 &\quad \cdot \cos m \theta \cos p \theta F_{mn}^{\mu}\} \dots \dots \dots (21)
 \end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
 F_{mn}^{\mu} &= \frac{\cosh \lambda_{mn}(z+h)}{\cosh \lambda_{mn} h} \\
 &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda_{mn}^{2\mu} z^{2\mu}}{(2\mu)!} + \frac{\lambda_{mn}^{2\mu+1} z^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} \tanh \lambda_{mn} h \right\} \\
 G_{mn}^{\mu} &= \frac{\sinh \lambda_{mn}(z+h)}{\cosh \lambda_{mn} h} \\
 &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda_{mn}^{2\mu+1} z^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} + \frac{\lambda_{mn}^{2\mu} z^{2\mu}}{(2\mu)!} \tanh \lambda_{mn} h \right\}
 \end{aligned}$$

である。

ここでさまざまな応答をする液体スロッシングのうちで、先に述べたように線形理論で推測され、また、実際に実験でも確認することができた 1/2-subharmonic 応答について考えることとする。したがって式 (20) では $N=2$ となる。さらにさまざまなモードのうちでもっとも低い外力周波数で現れ、動水圧も大きい第一次非対称モード ($m=1, n=1$) について考えることとするとこの場合の卓越振幅は $k=l=1$ として a_{11}, α_{11} となる。したがって、式 (20), (21) の無限級数のうち、以下で考察を行うように有限個の項のみを残して近似解を求めることとなる。まずそれぞれの a_{mn}, α_{mn} が卓越振幅 a_{11}, α_{11} のどの程度のオーダーになっているかを調べてみる。式 (20), (21) を θ の関数として考え、これを Fourier 級数に展開し、 θ に独立な項、 $\cos \theta$ の項、 $\cos 2\theta$ の項について集めるとそれぞれ次のようなことがわかる (個々の項の計算については **Appendix I** に示している)。

$$\begin{aligned}
 a_{0n}, \alpha_{0n} &= O(\alpha_{1n}^2, \alpha_{1n} a_{1n}) + O(\text{高階項}) \dots (22) \\
 a_{1n}, \alpha_{1n} &= O(\alpha_{1n}^2 a_{1n}, \alpha_{1n} a_{1n}^2, \alpha_{0n} \alpha_{1n}, \alpha_{0n} a_{1n}, \\
 &\quad \cdot \alpha_{1n} a_{0n}, \alpha_{2n} \alpha_{1n}, \alpha_{2n} a_{1n}, \alpha_{1n} a_{2n}) + O(\text{高階項}) \\
 &\quad \dots \dots \dots (23) \\
 a_{2n}, \alpha_{2n} &= O(\alpha_{1n}^2, \alpha_{1n} a_{1n}) + O(\text{高階項}) \dots (24)
 \end{aligned}$$

ここで、式 (22) と (24) の右辺においては α_{1n} や a_{1n} のような $m=1$ の 1/2-subharmonic 応答に関する項が卓越すると考えているのでその他の応答に関する項 α_{0n} や $a_{2n} a_{2n}$ は高階項に含まれている。式 (22) と式 (24) から $a_{0n}, \alpha_{0n}, a_{2n}, \alpha_{2n}$ は a_{11}, α_{11} の 2 次のオーダーとなり、この結果を式 (23) に代入すれば 1/2-subharmonic 応答でも $n=1$ 以外の波面形状のモードは a_{11}, α_{11} の 3 次のオーダーとなることがわかる。

摂動法によって非線形性の影響が現れるのは、3 次のオーダーまでであるので、3 次のオーダーの項までを残し、さらに **Appendix I** に示されている方程式 (あるいは式 (20), (21) でもよい) は Bessel 関数が積の形で含まれているのでこれらを $J_m(\lambda_{mn} r)$ の級数に展開して計算を行うと次のような方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 &\hat{\alpha}_0 + \{0.11934 \hat{\alpha}_{11} a_{11} \\
 &\quad - \alpha_{11}^2 (0.05968 \lambda_{11}^2 + 0.05967)\} = 0 \\
 &\hat{\alpha}_{01} - (1 - 4 \sigma^2 \varepsilon \cos 2 \sigma t) a_{01} - 0.12148 \hat{\alpha}_{11} a_{11} \\
 &\quad - \alpha_{11}^2 (0.07079 \lambda_{11}^2 - 0.06074) = 0 \\
 &\hat{\alpha}_{01} + (\lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h) \alpha_{01} - 0.26306 \lambda_{11}^2 \alpha_{11} a_{11} = 0 \\
 &\hat{\alpha}_{21} - (1 - 4 \sigma^2 \varepsilon \cos 2 \sigma t) a_{21} + 0.35080 \hat{\alpha}_{11} a_{11} \\
 &\quad - \alpha_{11}^2 (0.17540 - 0.06593 \lambda_{11}^2) = 0 \\
 &\hat{\alpha}_{21} + (\lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h) \alpha_{21} + 0.48266 \lambda_{11}^2 \alpha_{11} a_{11} = 0 \\
 &\{\hat{\alpha}_{11} - (1 - 4 \sigma^2 \varepsilon \cos 2 \sigma t) a_{11}\} \\
 &\quad - 0.16513 \hat{\alpha}_{11} a_{01} + 0.19868 \hat{\alpha}_{11} a_{21} \\
 &\quad - 0.16513 \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h \hat{\alpha}_{01} a_{11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0.19868 \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h \tilde{\alpha}_{21} \alpha_{11} \\
& + (0.17185 \lambda_{01} \lambda_{11} + 0.16513 \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h) \alpha_{01} \alpha_{11} \\
& - 0.27882 \lambda_{11}^2 \alpha_{11}^2 \alpha_{11} \\
& - (0.31040 \lambda_{11}^2 - 0.02230 \lambda_{21} \lambda_{11} \\
& + 0.19868 \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h) \alpha_{11} \alpha_{21} = 0 \\
\dot{a}_{11} + \alpha_{11} - (0.16513 \lambda_{01}^2 - 0.17185 \lambda_{01} \lambda_{11}) \alpha_{01} \alpha_{11} \\
& - (0.16513 \lambda_{11}^2 - 0.17185 \lambda_{01} \lambda_{11}) \alpha_{11} \alpha_{01} \\
& - (0.22228 \lambda_{11}^2 - 0.08895 \lambda_{11} \lambda_{21}) \alpha_{11} \alpha_{21} \\
& + 0.03483 \lambda_{11}^2 \alpha_{11} \alpha_{11}^2 + (0.04570 \lambda_{21}^2 \\
& + 0.08895 \lambda_{11} \lambda_{21}) \alpha_{21} \alpha_{11} = 0
\end{aligned}$$

これらの式から α を消去し波の振幅 a に関する方程式を導くと次のようである。

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{01} + \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h (1 - 4 \sigma^2 \varepsilon \cos 2 \sigma t) a_{01} \\
- \ddot{a}_{11} \alpha_{11} (0.12148 \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h - 0.26306 \lambda_{11}^2) \\
+ \dot{a}_{11}^2 \{ \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h (0.07079 \lambda_{11}^2 - 0.06074) \\
+ 0.26306 \lambda_{11}^2 \} = 0 \dots\dots\dots (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{21} + \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h (1 - 4 \sigma^2 \varepsilon \cos 2 \sigma t) a_{21} \\
+ \ddot{a}_{11} \alpha_{11} (0.35080 \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h - 0.48266 \lambda_{11}^2) \\
+ \dot{a}_{11}^2 \{ \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h (0.17540 - 0.06593 \lambda_{11}^2) \\
- 0.48266 \lambda_{11}^2 \} = 0 \dots\dots\dots (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{11} + (1 - 4 \sigma^2 \varepsilon \cos 2 \sigma t) a_{11} (1 + K_{11} \alpha_{11}^2 + K_{01} \alpha_{01} \\
- K_{21} \alpha_{21}) + 0.03478 \lambda_{11}^2 \ddot{a}_{11} \alpha_{11}^2 + k_{11} \dot{a}_{11}^2 \alpha_{11} \\
+ 0.16512 \ddot{a}_{01} \alpha_{11} - 0.19868 \ddot{a}_{21} \alpha_{11} \\
+ k_{01} \dot{a}_{01} \dot{a}_{11} - k_{21} \dot{a}_{21} \dot{a}_{11} = 0 \dots\dots\dots (27)
\end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
K_{11} &= 0.12252 - \frac{0.0452 - 0.04344}{\tanh \lambda_{01} h} \\
& + \frac{0.01076 + 0.0950 \lambda_{21}}{\tanh \lambda_{21} h} - \frac{0.14979 \lambda_{11}^2}{\lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h} \\
K_{01} &= 0.34362 \lambda_{01} \lambda_{11} \\
K_{21} &= 0.62069 \lambda_{11}^2 - 0.04458 \lambda_{11} \lambda_{21} \\
k_{11} &= \frac{0.04520 \lambda_{11}^3}{\tanh \lambda_{01} h} - \frac{0.14979 \lambda_{11}^4}{\lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h} - \frac{0.01076 \lambda_{11}^3}{\tanh \lambda_{21} h} \\
k_{01} &= 0.16512 + \frac{0.17181 \lambda_{11}}{\tanh \lambda_{01} h} \\
k_{21} &= 0.19868 + \frac{0.31034 \lambda_{11}^2}{\lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h} - \frac{0.02229 \lambda_{11}}{\tanh \lambda_{21} h}
\end{aligned}$$

である。ここで式 (25) ~ (27) の解を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned}
a_{11} &= A \sin \sigma t \\
a_{01} &= A_{00}^2 + A_{02}^2 \cos 2 \sigma t \\
a_{21} &= A_{20}^2 + A_{22}^2 \cos 2 \sigma t
\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

これらを式 (25) ~ (27) に代入し、各項の計算を行うと、式 (25) より定数項として、

$$\begin{aligned}
\lambda_{01} \tanh \lambda_{01} \cdot A_{00}^2 - 2 \sigma^2 \varepsilon \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h \cdot A_{02}^2 \\
+ \frac{1}{2} \{ \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h (0.07079 \lambda_{11}^2 + 0.06074) \} A^2 \sigma^2 = 0
\end{aligned}$$

また、 $\cos 2 \sigma t$ の係数として、

$$\begin{aligned}
-4 \sigma^2 \varepsilon \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h \cdot A_{00}^2 + (\lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h - 4 \sigma^2) A_{02}^2 \\
+ \frac{1}{2} \{ \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h (0.07079 \lambda_{11}^2 - 0.18222) \\
+ 0.52615 \lambda_{11}^2 \} A^2 \sigma^2 = 0
\end{aligned}$$

式 (26) より定数項として、

$$\begin{aligned}
\lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h \cdot A_{20}^2 - 2 \sigma^2 \varepsilon \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h \cdot A_{22}^2 \\
- \frac{1}{2} \{ \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h (0.17540 + 0.06593 \lambda_{11}^2) \} A^2 \sigma^2 = 0
\end{aligned}$$

$\cos 2 \sigma t$ の係数として、

$$\begin{aligned}
-4 \sigma^2 \varepsilon \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h \cdot A_{20}^2 + (\lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h - 4 \sigma^2) A_{22}^2 \\
+ \frac{1}{2} \{ \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h (0.52621 - 0.06593 \lambda_{11}^2) \\
- 0.96534 \lambda_{11}^2 \} A^2 \sigma^2 = 0
\end{aligned}$$

式 (27) から $\sin \sigma t$ の係数として、

$$\begin{aligned}
\left\{ \left(\frac{3}{4} + 2 \sigma^2 \varepsilon \right) K_{11} - 0.026085 \lambda_{11}^2 \sigma^2 - \frac{1}{4} k_{11} \sigma^2 \right\} A^2 \\
+ (1 + 2 \sigma^2 \varepsilon) K_{01} A_{00}^2 - \left(\frac{1}{2} + 2 \sigma^2 \varepsilon \right) K_{01} A_{02}^2 \\
- (1 + 2 \sigma^2 \varepsilon) K_{21} A_{20}^2 + \left(\frac{1}{2} + 2 \sigma^2 \varepsilon \right) K_{21} A_{22}^2 \\
+ (2 \sigma^2 \varepsilon - \sigma^2 + 1) = 0
\end{aligned}$$

これらの式を解くと A_{00}^2 , A_{02}^2 , A_{20}^2 , A_{22}^2 を A^2 で表わすことができ (Appendix II), 無次元化されている表面波の波形 η は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
\eta &= a_{01} J_0(\lambda_{01} r) + a_{11} J_1(\lambda_{11} r) \cos \theta + a_{21} J_2(\lambda_{21} r) \cos 2 \theta \\
&= (A_{00}^2 + A_{02}^2 \cos 2 \sigma t) J_0(\lambda_{01} r) \\
&+ A \sin \sigma t J_1(\lambda_{11} r) \cos \theta \\
&+ (A_{20}^2 + A_{22}^2 \cos 2 \sigma t) J_2(\lambda_{21} r) \cos 2 \theta \dots\dots\dots (29)
\end{aligned}$$

これらの a_{01} , a_{11} , a_{21} の値から α_{01} , α_{11} , α_{21} の値も求め、次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= -A \sigma \cos \sigma t \\
\alpha_{01} &= \frac{1}{\lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h} \\
&\quad \cdot (2 \sigma A_{02}^2 - 0.13153 \lambda_{11}^2 A^2 \sigma^2) \sin 2 \sigma t \\
\alpha_{21} &= \frac{1}{\lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h} \\
&\quad \cdot (2 \sigma A_{22}^2 - 0.24133 \lambda_{11}^2 A^2 \sigma^2) \sin 2 \sigma t \\
\dot{a}_0 &= -\frac{1}{2} \{ 0.11934 - (0.05968 \lambda_{11}^2 + 0.05967) \} A^2 \sigma^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \{ -0.11934 - (0.05968 \lambda_{11}^2 + 0.05967) \} \\
&\quad \quad \cdot A^2 \sigma^2 \cos 2 \sigma t
\end{aligned}$$

を得る。これらからポテンシャル ϕ を式 (18) を用いて求めることができる。以上から無次元化された圧力 p を、

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\rho} &= \frac{\partial \phi}{\partial t} - (1 - 4 \sigma^2 \varepsilon \cos 2 \sigma t) z \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \dots (30)
\end{aligned}$$

によって求め得る。

3. 実験

(1) 実験概要

実験に用いた振動台は水平と鉛直の同時加振が可能な島津サーボパルサー EHVO 5105 と水平加振が可能な水資源公団試験所の振動台を用いた。

実験に用いたモデルタンクは表-1 のような4種類の

表-1 模型タンクの形状および実験条件

タンクの種類	直径 2R (cm)	壁厚 h_s (cm)	$h_s/2R$	水深直径比 $h/2R$	外力の周波数 (Hz)	タンク材料のヤング率 E (kg/cm^2)
タンク R15	72	1.5	0.0208	0.56	0.7~5.0	4×10^4
タンク R5.5	39.5	0.55	0.0127	0.5, 0.3	1.0~5.0	4×10^4
タンク F1.5	100	0.15	0.0015	0.3, 0.5, 0.7	0.5~20	4×10^4
タンク F1.0	100	0.10	0.0010	0.3, 0.5, 0.7	0.5~20	4×10^4

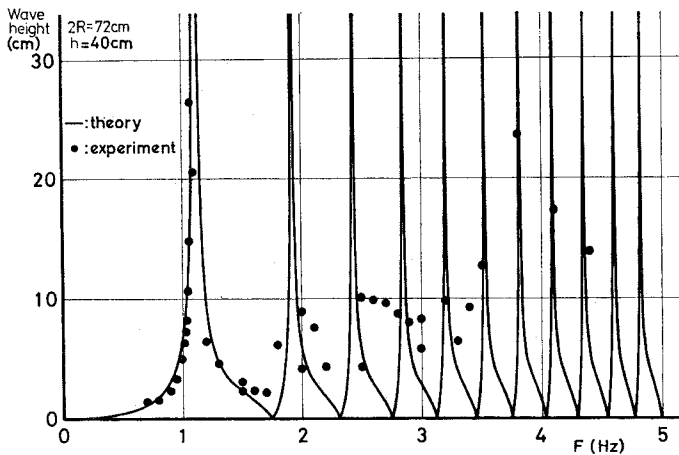


図-4 剛なタンク (R15) の水面応答

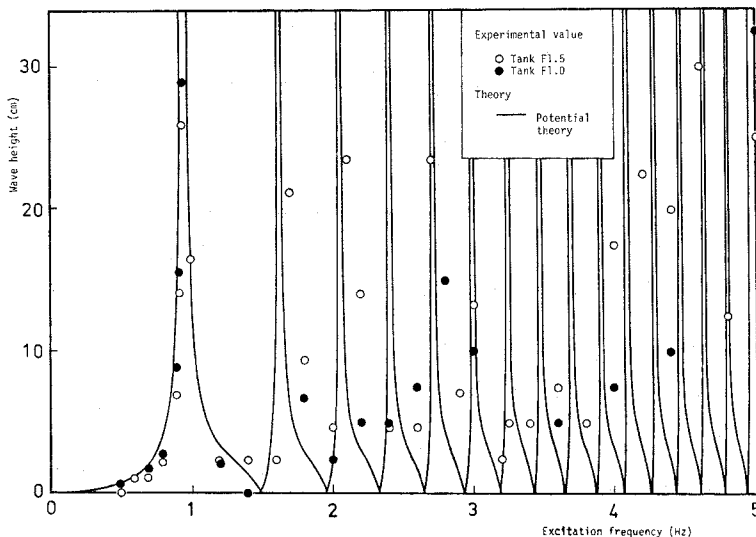


図-5 フレキシブルなタンクの水面応答

表-2 浮屋根の種類

浮屋根の種類	材質	柔軟性	重量 (g)
I	塩化ビニール	柔軟	399
II	塩化ビニール	〃	678
III	ベニヤ板	剛	2290

表-3 実験の種類と測定項目

外力	用いたタンク	浮屋根	測定項目
水平のみ	R15	I, II, III, なし	水面の波高, 側壁の動水圧, 振動台の変位・加速度
	F1.5, F1.0	なし	水面の波高, 側壁の動水圧, 側壁のひずみ, タンクおよび振動台の加速度, 振動台の変位
鉛直のみ	R5.5	なし	水面の波高, 動水圧, 振動台の変位・加速度, 写真による液面動揺のモード
水平と鉛直同時加振	R5.5	なし	水面の波高, 動水圧, 振動台の変位・加速度, 写真による液面動揺のモード

透明なアクリル樹脂製の円筒タンクであり、そのうちの2種類は剛なもの、他の2種類は側壁、底を薄くし可撓性をもたせたもので、特に高周波域でこのような可撓性が動水圧にどのような影響を与えるかを調べるためのものである。

水平振動の場合については水面動揺防止用の浮屋根を3種類作製し、その効果を調べた。浮屋根の種類については表-2に示しているが、浮屋根 I, II は非常に柔軟であり、空中ではその形を保つことができないのでヤング率等を調べるのは困難であった。

水位測定には取りはずしが可能な抵抗線式水位計を採用したが、その性能は最大波高が静水位 ± 240 mm で直線性誤差はフルスケールの3%以内であった。また、動水圧の測定にはST研究所KKのPM25型圧力計を用いた。圧力計のおもな諸元は直径2.4cm、容量50g/cm² および100g/cm²、精度はフルスケールの1%以内である。

実験は水平振動のみを加えた場合、鉛直振動のみを加えた場合、水平と鉛直振動を同時に加えた場合の3種類の場合について行われた。測定項目等については表-3に示している。

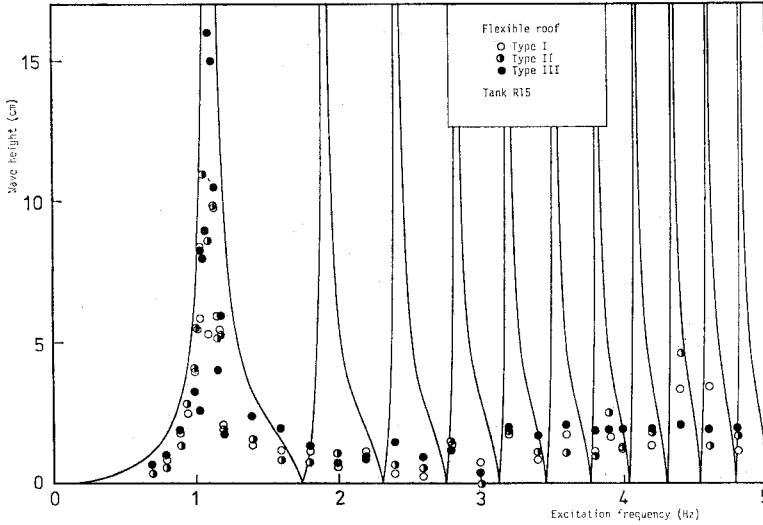


図-6 浮屋根を乗せた場合の水面応答

(2) 水平振動の場合

まず水面の応答特性を 図-4, 5 に示す。図-4 は剛なタンクの場合であり、第一次共振点付近では線形理論から予測される共振特性とよく一致している。図-5 は柔なタンク F1.5, F1.0 の場合の水面の動揺特性を示している。この図は実験した範囲でもっとも水深の大きい場合であり、したがって側壁の変形がもっとも大きいと考えられるが、後に述べるように可撓性の効果は第一次共振点付近の低周波領域では現れず、液面の動揺特性は剛なタンクのそれとよく一致している。

液面の第一次共振点付近ではタンクの剛, 柔にかかわらず液面の回転運動が発生した。このとき、振動を加えるにつれて液面は外力を加えられた方向に1枚の板のように振動を始め、その振幅は次第に大きくなり極大に達するが、ついで次第に小さくなり、次に回転を始めるようになる。同様な現象は Abramson ら⁷⁾, 嶋・中村⁸⁾, Thorpe⁹⁾, 沢本・加藤¹⁰⁾ によっても報告されているがその発生原因についてはまだ明らかではない。ただ、回転の方向がある周期をもって交互に変化する現象も存在することからタンクの偏心等によるものではなく、むしろ一次共振点付近の現象を詳しく観察すると一般の振動現象と同様に共振振動数よりも外力の振動数が小さい場合と大きい場合で液面振動の位相が π だけずれていたことから、共振点付近では位相の異なる液面応答が共存しこれが回転を生み出す原因となったことも考えられる。けれどもこれらについては今後の検討を必要とする。

次に浮屋根の液面動揺防止効果について述べる。図-6 はタンク R15 に3種類の浮屋根を載せた場合の液面動揺特性を示している。前出の 図-4, 5 と比較して一次共振点付近ではその効果はほとんどないものの、高次の

共振域では動揺防止効果は大きいことが知られる。

図-7 は剛な側壁を有するタンク R15 の一次液面共振点に近い領域 (1.06 Hz) での動水圧分布を示している。圧力分布は Housner 理論の中の振動圧分布に似ており、動水圧はほとんど液面動揺によるものである。浮屋根による効果はあまりみられず、速度ポテンシャル理論, Housner 理論によって動水圧分布をよく表わしうる。さらに一次共振点に近づくと線形のポテンシャル理論では波高が実際の値よりもかなり大きく見

積られるようになるので、正しい動水圧を求めることは困難となるが Housner 理論では波高に実験値を用いるのでこのようなことはない。図-8 は同じタンクで比較的周波数の高い領域 (4 Hz) の場合の動水圧分布を示している。実測値は速度ポテンシャル理論, Housner 理論とよく一致する。この場合には Housner の理論では液面動揺による振動圧は無視し、慣性圧のみを考慮して計算しており、動水圧はほとんど慣性圧によるものであることがわかる。

次に側壁の可撓性が動水圧にどのような影響を及ぼす

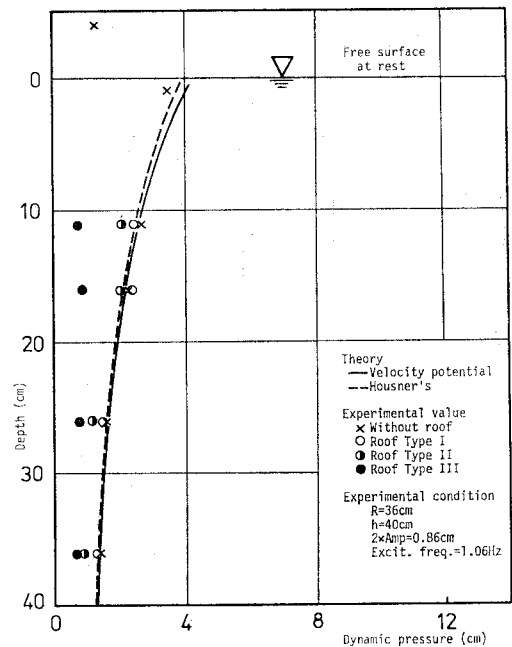


図-7 剛なタンク (R15) の第一次共振点付近における側壁の動水圧分布

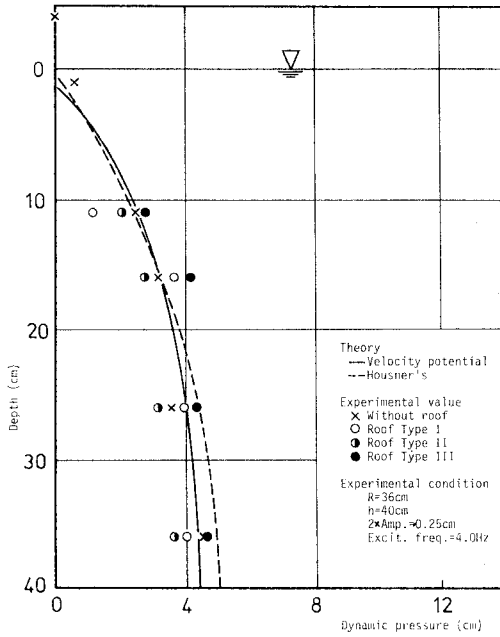


図-8 剛なタンクの高い周波数における動水圧分布

かについて考察する。まず可撓壁の相似則について考える。特に高周波領域では液体と可撓タンクは振動の方程式

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$$

によって支配されていると考えられる。ここに、 M は質量、 x は変位、 K はばね定数である。質量はタンクに含まれている液体が大部分を占めると考え、上記方程式の各項は、

$$M = \frac{\pi}{4} D^2 H \rho, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a \omega^2, \quad K \propto \frac{E h_s}{1 - \nu^2}, \quad x = a$$

となる。ここに E は側壁のヤング率、 h_s は側壁の厚さ、 ν はポアソン比である。よって上記方程式から力学的相似を満足するために原型と模型の間で無次元積

$$\pi_1 = \frac{E h_s}{\rho D^2 H \omega^2}$$

が一致しなければならない。ここでポアソン比は原型と模型でほぼ同じ値をもつとして除いてある。また、幾何学的相似より、

$$\pi_2 = \frac{H}{D}$$

を考慮すれば結局、

$$\frac{E_m}{E_p} \frac{h_{sm}}{h_{sp}} \left(\frac{\rho_m}{\rho_p} \right)^{-1} \left(\frac{D_m}{D_p} \right)^{-3} \left(\frac{\omega_m}{\omega_p} \right)^{-2} = 1$$

となる。ここで原型の代表値として、

$$E_p = 2100000 \text{ kg/cm}^2, \quad h_{sp} = 3 \text{ cm}, \\ \rho_p g = 0.9 \text{ g/cm}^3, \quad D_p = 50 \text{ m}$$

模型の値として、

$$E_m = 40000 \text{ kg/cm}^2, \quad h_{sm} = 0.1 \text{ cm},$$

$$\rho_m g = 1.0 \text{ g/cm}^3, \quad D_m = 1 \text{ m}$$

を代入すると $\omega_m/\omega_p \approx 8.5$ を得る。このように模型の製作上これ以上薄いタンクの製作が困難であるために実際の地震動の周波数よりもかなり大きい周波数で実験を行わなければタンクの可撓性の影響を調べることができない。

図-9 と図-10 はフレキシブルな側壁をもつとみなせるタンク F1.5 と F1.0 について一次共振点付近に

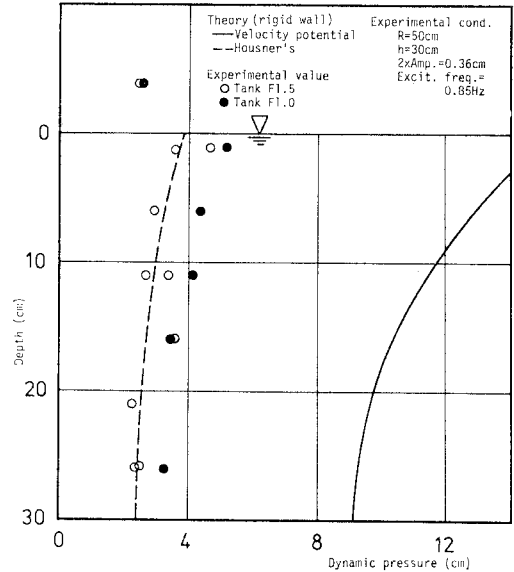


図-9 フレキシブルなタンクの第一次共振点付近における側壁の動水圧 (水深 30 cm)

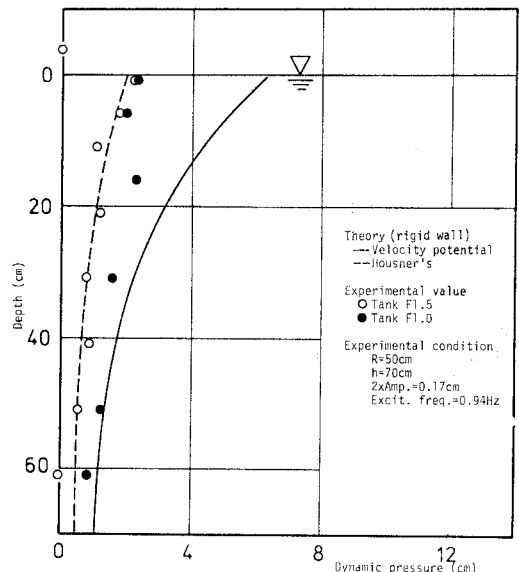


図-10 フレキシブルなタンクの第一次共振点付近における側壁の動水圧 (水深 70 cm)

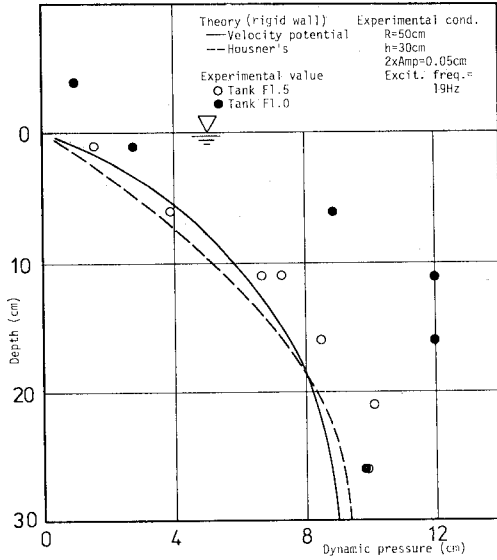


図-11 フレキシブルなタンクの高周波域における側壁の動水圧 (水深 30 cm)

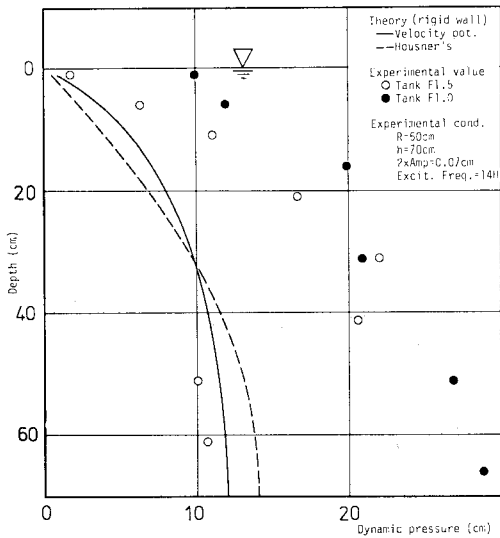


図-12 フレキシブルなタンクの高周波域における側壁の動水圧 (水深 70 cm)

おける側壁の動水圧分布を示している。上記の可撓性の効果に関する考察からわかるようにこのような低い周波数では可撓性の効果はほとんどみられず、圧力分布は Housner 理論によってよく表わしうる。高い周波数の場合については図-11 と図-12 に示されているが、ここでも Housner 理論は剛体壁の場合と同様に慣性圧のみを考えている。タンク F1.5 の場合には水深 30 cm では剛体タンクの理論とよく一致するが、水深 70 cm の場合にはもはやこの理論では説明できず実験による動水圧は非常に大きくなる。タンク F1.0 では両水深において剛壁タンク理論の 2 倍程度の値となる。その他の高

周波振動域でも同様の傾向がみられ、振動数が大きくなるほどタンク側壁の可撓性の影響は大きくなった。導いた相似則を用いて原型タンクの周波数を調べてみると $\omega_m/\omega_p=8.5$ より、図-12 の周波数 14 Hz を用いれば原型では 1.6 Hz 程度となり、実際の地震動の卓越周波数に近い値となる。このように実際のタンクではその可撓性のために動水圧が非常に大きくなる可能性があり、設計に際して十分に考慮しなければならないと思われる。

(3) 鉛直振動の場合

前に得られた Mathieu 図を次元化して表わし、そのうえに振幅を一定に保ちながら外力の周波数を徐々に増加させた場合と減少させた場合に液面の動揺が観察された点をプロットしたのが図-3 である。液面動揺のモードは今回の実験では 1/2-subharmonic 応答のみが観察され、その水面形態は Mathieu 図から予想されるとおりに振動数を上げるに依り、第一次非対称モード ($m=1, n=1$)、第二次非対称モード ($m=2, n=1$)、第一次対称モード ($m=0, n=1$)、第三次非対称モード ($m=3, n=1$) の順に現れた (写真-1)。このとき、同図に示されるように外力の周波数を増加させていく場合と減少させていく場合とでは液面動揺が現れる範囲が異なる。すなわち周波数を下げていく場合の方がより小さな周波数まで動揺の範囲が広がっている。このような現象は、水面

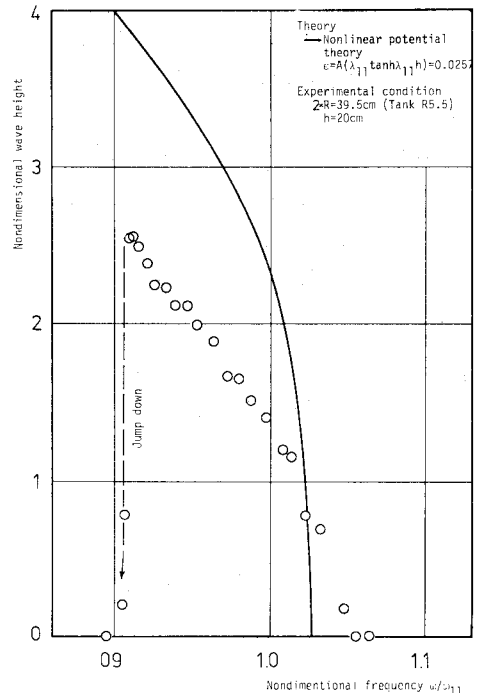


図-13 鉛直振動による液面の応答特性 (第一次非対称モード)

が非線形の応答をし、“柔らかいばね化”を起したものと考えられ、鉛直振動の場合にも従来水平振動において報告されている¹¹⁾のと同じ現象が発生することが判明した。さらに外力の周波数を上げていくと高次のモードが現れるはずであるが理論上でも各モードの不安定領域が互いに重なり合ってくるために液面が乱れ実験では判別不可能であった。また、水平振動の場合に現れた液面の回転現象は鉛直振動の場合にはまったく現れなかった。

図-13 は外力の周波数と液面の応答特性を第一次非対称モードの場合について示したものである。実線は、3次のオーダーの非線形解析によって得られた応答曲線を示しており、縦軸は $\lambda_{11} \tanh \lambda_{11} h$ によって無次元化された液面動揺の振幅、横軸は第一次非対称モードの共振角周波数 ω_{11} で無次元化された外力の角周波数を示している。水面は外力の周波数を下げるに従い理論値よりもやや大きい周波数で揺れ始め、理論値と勾配は異なるものの波高と外力の周波数の応答曲線が周波数の小さい方へ傾いていく、いわゆる“柔らかいばね”化を示しながら液面動揺を次第に大きくしていく。最後に非線形現象特有の“ジャンプ・ダウン”によって動揺は急激に収まる。非線形理論は実測値と若干異なる点はあるものの波高を有限な値として求めることができ、したがって動水圧分布を算定することが可能となる。

図-14 は動水圧の時間的変化を示しており、図-15 はある瞬間における水面の波形と動水圧の分布を示している。このように液面動揺の振幅があまり大きくない場合には理論値と実験値は比較的一致する。

図-16 は実験時にみられた4種類のモードに対して底面における動水圧の時間変化を示したものである。水面が大きく動揺している(b)の第一次非対称モードのみが、圧力も1/2-subharmonic 応答しており、水面動揺の影響を受けている。他の場合には底部の動水圧変化の周期は台変位のそれと同じで分布形もほぼ一様で台変位

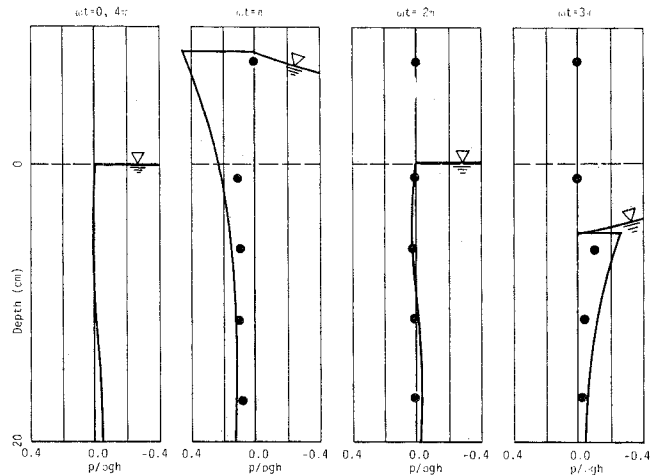


図-14 鉛直振動による側壁の動水圧の時間変化（第一次非対称モード）

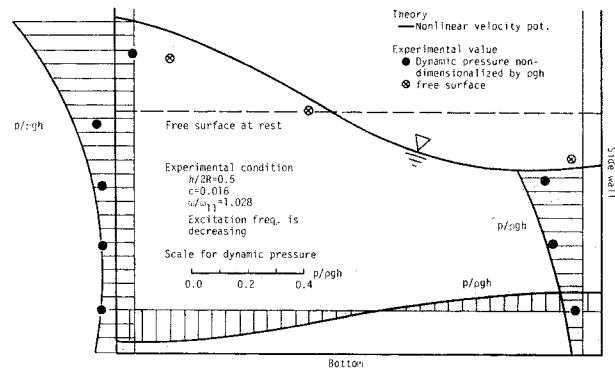
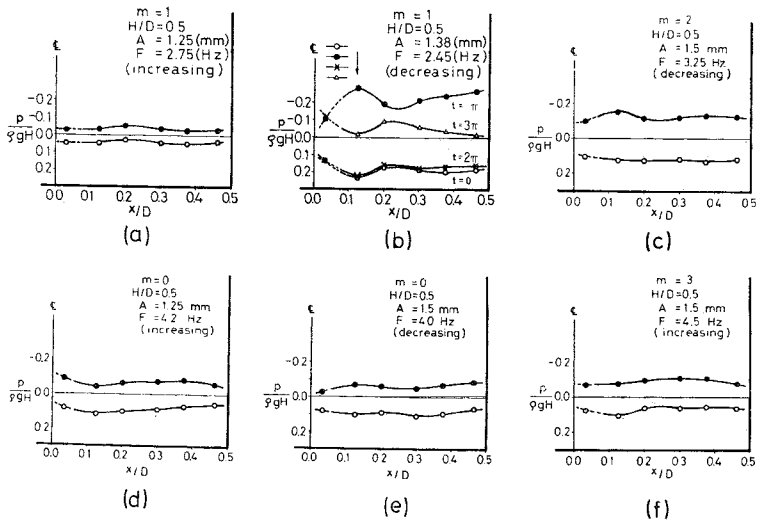
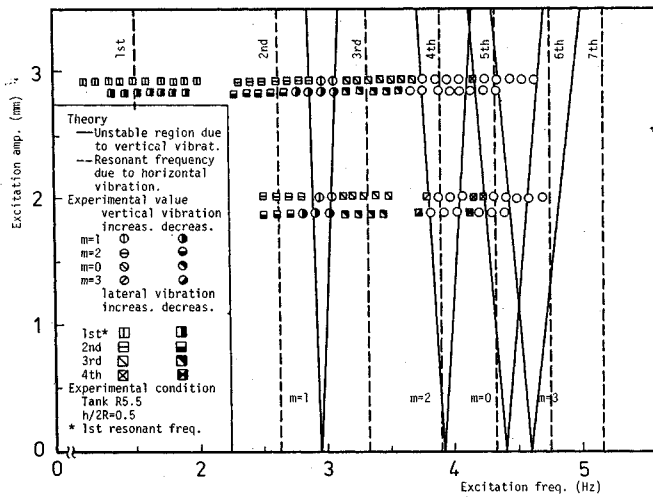


図-15 鉛直振動による波形と動水圧分布（第一次非対称モード）



(a), (b) 第一次非対称モード, (c) 第二次非対称モード
(d), (e) 第一次対称モード, (f) 第三次非対称モード

図-16 底面の動水圧分布



図一七 水平と鉛直同時加振による液面の応答特性 (図中○印は種々のモードが重なり判別できなかったものを示す)

による慣性圧が主要な要素となっていることが知られる。台に取り付けてある加速度計のデータから慣性圧を求めても、これらの場合には動水圧の大部分が慣性圧によって占められていた。

(4) 水平・鉛直両方向に振動を受けた場合

タンクに水平・鉛直両方向に位相差 $\pi/2$ (台の変位は円) の振動外力を加えたときにどのような液面揺動が生ずるかを実験によって調べたものが図一17である。この図で破線は線形理論より予測される水平外力に対する共振周波数であり、実線で囲まれた領域は鉛直方向外力に対する不安定領域である。この図で丸印は鉛直振動に対応するモードで揺れたもの、四角印は水平振動に対応するモードで動揺したものを示しているが、水平および鉛直方向外力のそれぞれに対応して液面動揺が生じており、ちょうど水平振動のみを加えて液面動揺が生じた場合と鉛直振動のみを加えた場合をたし合わせたようになっていることが知られる。

4. 結 論

以上の研究の結果明らかとなった諸点を以下に列記する。

(1) 水平外力を受ける剛体タンクでは Housner 理論によって低周波域から高周波域まで動水圧をよく表わしうる。

(2) 可撓性を有するタンクでは動水圧は高周波域では剛体タンクとして計算された理論値よりもかなり大きくなる。実際のタンクでは地震動によってこのような現象が発生しうる条件にあり、動水圧の算定に際して注意

が必要である。

(3) 可撓性をもつ浮屋根は低周波域で発生する第一次の共振点付近の液面動揺に対してはほとんど抑制効果がない。

(4) 鉛直振動に対する液面の応答は 1/2-subharmonic 応答をすることが確認され、また、そのモードは Mathieu の安定・不安定図によってよく説明することができた。

(5) 鉛直振動に対しては3次のオーダーまでの非線形計算によってはじめて波形、動水圧分布を求めることができ、その理論結果は実際の圧力分布を比較的好く説明できた。

(6) 水平・鉛直両方向から振動が加わる場合には一方のみから振動が加わる場合よりも当然であるが動水圧は大きくなっ

た。

(7) 以上の結果を総合的にみても、高周波域において可撓性をもつ側壁と液体の共振現象によって動水圧が増大することが工学上もっとも重要な問題であり、液面の動揺に関しては1次共振点付近の波が時間的にどのように発達していくかという非定常問題を考えることが重要な課題であろう。

謝 辞: 本研究は故嶋 祐之教授により始められ、その後筆者らにより継続研究されてきたものである。この間文部省科学研究費・自然災害特別(1)(代表者東洋大学 本間 仁教授)の補助を受け、さらに実験に際しては水資源開発公団試験所に振動台をお貸しいただいた。また、フレキシブルタンクおよび圧力計については川崎重工(株)のお世話になった。実験に際しては元当学科技官 林 計佐道氏を始め多くの学生諸君のご助力を得た。ここに記して謝意を表します。

Appendix I

θ に独立な項:

$$\begin{aligned} & \left\{ \dot{a}_0 + (1 - 4\sigma^2 \epsilon \cos 2\sigma t) a_{0n} + \frac{1}{2} \dot{a}_{1n} a_{1n} J_1(\lambda_{1n} r) \right\} \\ & + (\dot{a}_{0n} a_{0n}) + \dots \Big] J_0(\lambda_{0n} r) \\ & = \frac{1}{2} \left[(\alpha_{0n}^2 + \alpha_{0n}^2 a_{0n} + \alpha_{0n}^2 a_{0n}^2 + \alpha_{0n}^2 a_{1n}^2 + \dots) \right. \\ & + \left. \left\{ \frac{1}{2} \alpha_{1n}^2 \lambda_{1n}^2 J_2^2(\lambda_{1n} r) + \alpha_{1n}^2 a_{0n} + \alpha_{1n}^2 a_{0n}^2 \right. \right. \\ & + \left. \left. \alpha_{1n}^2 a_{1n}^2 + \dots \right\} + (\alpha_{0n} \alpha_{1n} a_{1n} + \dots) \right. \\ & + (\alpha_{1n}^2 + \alpha_{1n}^2 a_{0n} + \alpha_{1n}^2 a_{0n}^2 \\ & + \alpha_{1n}^2 a_{1n}^2 + \alpha_{2n}^2 + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (\alpha_{2n}^2 a_{0n} + \alpha_{2n}^2 a_{0n} + \alpha_{2n}^2 a_{1n} + \dots) + (\alpha_{1n} \alpha_{2n} a_{1n} + \alpha_{2n}^2 + \alpha_{0n}^2 + \alpha_{0n}^2 a_{0n} + \alpha_{0n}^2 a_{0n}^2 + \dots) \\
 & + (\alpha_{1n}^2 + \alpha_{1n}^2 a_{0n} + \alpha_{1n}^2 a_{2n}^2 + \alpha_{0n} \alpha_{1n} a_{1n} + \dots) + (\alpha_{2n}^2 + \dots) + (-\alpha_{1n}^2 + \alpha_{1n}^2 a_{1n} + \dots) + \dots \\
 \dot{a}_{0n} + \alpha_{0n} + \alpha_{0n} a_{0n} + (\alpha_{1n} a_{1n} + \alpha_{2n} a_{2n} + \dots) & = (\alpha_{0n} a_{0n} + \alpha_{0n} a_{0n}^2 + \alpha_{0n} a_{1n}^2 + \alpha_{1n} a_{0n} a_{1n} + \dots) \\
 & + (\alpha_{1n} a_{1n} + \alpha_{1n} a_{1n} a_{0n} + \dots) + (\alpha_{1n} a_{1n} + \alpha_{1n} a_{1n} a_{0n} + \alpha_{2n} a_{2n} + \alpha_{3n} a_{3n} + \dots) + (\alpha_{2n} a_{2n} a_{0n} + \alpha_{3n} a_{3n} a_{0n} + \dots) \\
 & - (\alpha_{1n} a_{1n} + \alpha_{1n} a_{1n} a_{0n} + \dots) - (\alpha_{1n} a_{1n} + \alpha_{1n} a_{1n} a_{0n} + \dots)
 \end{aligned}$$

cos θ :

$$\begin{aligned}
 & (\dot{a}_{1n} + \dot{a}_{1n} a_{0n} - a_{1n} + \dot{a}_{0n} a_{1n} + \dots) - \frac{1}{2} \{ (\alpha_{0n} \alpha_{1n} + \alpha_{1n}^2 a_{1n} + \alpha_{0n}^2 a_{1n} + \dots) + (\alpha_{2n} \alpha_{1n} + \alpha_{1n}^2 a_{1n} + \alpha_{2n}^2 \alpha_{1n} + \dots) \\
 & + (\alpha_{0n} \alpha_{1n} + \alpha_{1n}^2 a_{1n} + \dots) - (\alpha_{0n} \alpha_{1n} + \alpha_{1n}^2 a_{1n} + \dots) \} = 0 \\
 \dot{a}_{1n} + \alpha_{1n} + \alpha_{1n} a_{0n} + (\alpha_{0n} a_{1n} + \alpha_{1n} a_{1n}^2 + \dots) & + (\alpha_{0n} a_{1n} + \alpha_{1n} a_{0n} + \alpha_{1n} a_{1n}^2 + \dots) \\
 & + (\alpha_{1n} a_{1n}^2 + \alpha_{2n} a_{1n} + \alpha_{1n} a_{2n} + \alpha_{2n} a_{2n}^2 + \dots) - (\alpha_{1n} a_{0n} + \alpha_{1n} a_{1n}^2 + \dots) - (\alpha_{0n} a_{1n} + \alpha_{1n} a_{1n}^2 + \dots) = 0
 \end{aligned}$$

cos 2θ :

$$\begin{aligned}
 & \{ \dot{a}_{2n} - (1 - 4\sigma^2 \varepsilon \cos 2\sigma t) a_{2n} \} J_2(\lambda_{2n} r) + (\dot{a}_{2n} a_{0n} + \dot{a}_{1n} a_{1n} + \alpha_{0n} a_{2n} + \dots) \\
 & - \frac{1}{2} \{ (\alpha_{0n} \alpha_{2n} + \alpha_{1n}^2 + \alpha_{0n}^2 a_{2n} + \dots) + (\alpha_{3n} \alpha_{1n} + \alpha_{2n} \alpha_{1n} a_{1n} + \alpha_{1n}^2 a_{2n} + \dots) \\
 & + (\alpha_{2n} \alpha_{0n} + \alpha_{1n}^2 + \alpha_{0n}^2 a_{2n} + \alpha_{1n} \alpha_{0n} a_{1n} + \dots) - (\alpha_{1n}^2 + \alpha_{0n} \alpha_{2n} + \alpha_{0n} \alpha_{1n} a_{1n} + \dots) \} = 0 \\
 (\dot{a}_{2n} + \alpha_{2n} + \alpha_{2n} a_{0n}) + (\alpha_{1n} a_{1n} + \alpha_{0n} a_{2n} + \dots) & = (\alpha_{2n} a_{0n} + \alpha_{0n} a_{2n} + \alpha_{1n} a_{1n} + \alpha_{0n} a_{0n} a_{2n} + \dots) \\
 & + (\alpha_{3n} a_{1n} + \alpha_{1n} a_{3n} + \alpha_{1n} a_{1n} a_{2n} + \alpha_{2n} a_{2n}^2 + \dots) + (\alpha_{2n} a_{1n}^2 + \dots) - (\alpha_{2n} a_{0n} + \alpha_{1n} a_{1n} + \alpha_{1n} a_{0n} a_{1n} + \dots) \\
 & - (\alpha_{0n} a_{2n} + \alpha_{1n} a_{1n} + \alpha_{0n} a_{1n}^2 + \dots)
 \end{aligned}$$

Appendix II

$$\begin{aligned}
 A_{00}^2 & = \frac{[\frac{1}{2}(\lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h - 4\sigma^2)(0.07080 \lambda_{11}^2 + 0.06074) - 8\sigma^4 \varepsilon \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h + 4\sigma^2 - \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h]^*}{\dots} \\
 & \quad + \sigma^2 \varepsilon \{ \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h (0.07080 \lambda_{11}^2 - 0.18222) + 0.52615 \lambda_{11}^2 \} A^2 \sigma^2 \\
 A_{02}^2 & = \frac{\{ \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h (0.07080 \lambda_{11}^2 - 0.18222) + 0.52615 \lambda_{11}^2 + 4\sigma^2 \varepsilon \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h \times (0.07080 \lambda_{11}^2 + 0.06074) \} A^2 \sigma^2}{2 \{ (8\sigma^4 \varepsilon - 1) \lambda_{01} \tanh \lambda_{01} h + 4\sigma^2 \}} \\
 A_{20}^2 & = \frac{[\frac{1}{2}(\lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h - 4\sigma^2)(0.17540 + 0.06593 \lambda_{11}^2) - \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h - 4\sigma^2 - 8\sigma^4 \varepsilon^2 \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h]^*}{\dots} \\
 & \quad - \sigma^2 \varepsilon \{ \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h (0.52621 - 0.06593 \lambda_{11}^2) - 0.96534 \lambda_{11}^2 \} A^2 \sigma^2 \\
 A_{22}^2 & = \frac{[\frac{1}{2} \{ \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h (0.52621 - 0.06593 \lambda_{11}^2) - 0.96534 \lambda_{11}^2 \} - 8\sigma^4 \varepsilon^2 \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h + 4\sigma^2 - \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h]^*}{\dots} \\
 & \quad - 2\sigma^2 \varepsilon \lambda_{21} \tanh \lambda_{21} h (0.17540 + 0.06593 \lambda_{11}^2) A^2 \sigma^2
 \end{aligned}$$

参考文献

<p>1) 曾我部 潔・重田達也・柴田 碧：液体貯槽の耐震設計に関する基礎的研究，東大生産研報告，26巻，7号，1977。</p> <p>2) Housner, G.W. : Dynamic pressures on accelerated Fluid Containers, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 47, 1957.</p> <p>3) Okumura, T. and others : Some Investigations on the Dynamic Behavior of Flexible Cylindrical Liquid Storage Tank, Tech. Rep., Depart. Found. Engrg., Saitama Univ., Vol. 7, 1977.</p> <p>4) Benjamin, T.B. and F. Ursell : The Stability of a Plane Free Surface of a Liquid in Vertical Periodic Motion, Proc. Roy. Soc., A 225, 1954.</p> <p>5) Dodge, F.T., D.D. Kana and H.N. Abramson : Liquid Surface Oscillations in Longitudinally Excited Rigid Cylindrical Containers, AIAA Jour., Vol. 3,</p>	<p>No. 4, 1965.</p> <p>6) Takayama, T. : Theory of Transient Fluid Waves in a Vibrated Storage Tank, Rep. Port & Harbour Res. Inst., Vol. 15, No. 2, 1976.</p> <p>7) Abramson, H.N. : Dynamic Behavior of Liquid in Moving Container, Appl. Mech. Rev., 16-7, 1963.</p> <p>8) 嶋 祐之・中村広昭：地震時における貯水槽液面の動的特性とその防止対策，研究報告書，1975。</p> <p>9) Thorpe, S.A. : On Standing Internal Gravity Waves of Finite Amplitude, JFM, Vol. 32, Part 2, 1968.</p> <p>10) 沢本正樹・加藤一正：有限振幅内部重複波に関する研究，土木学会論文報告集，No. 232, 1974年。</p> <p>11) Abramson, H.N., W.H. Chu and D.D. Kana : Some Studies of Nonlinear Sloshing in Rigid Containers, Jour. Appl. Mech., Trans. ASME, Dec. 1966等。</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

(1978.7.3・受付)