

有限なねじれを考慮した薄肉曲線部材の変形解析

ANALYSIS OF THIN WALLED CURVED MEMBERS IN
ACCOUNT FOR LARGE TORSION

薄 木 征 三*・稼 農 知 徳**・渡 辺 昇***

By Seizo USUKI, Tomonori KANO and Noboru WATANABE

1. ま え が き

薄肉曲線部材の曲げねじれ座屈問題には曲線部材に作用する荷重形式からみると、円弧を描く部材軸線の曲率面内に荷重が作用する場合のアーチと、曲率面外に荷重が作用する場合の曲線桁の問題がある。

アーチの曲げねじれ座屈については、薄肉板アーチを扱った S. Timoshenko¹⁾ の論文などがその初期のものであろう。これは座屈変位した状態でのアーチの幾何学的考察から座屈支配方程式を求めるといふ、Euler 以来の手法によるものであった。その後、放物線アーチやタイドアーチ等、アーチ系橋梁の曲げねじれ座屈解析を扱った多くの研究報告がみられる^{2)~8)}。

一方、V.Z. Vlasov⁹⁾ と深沢¹⁰⁾ は、薄肉曲線桁の変位-荷重支配方程式を基礎として、円弧アーチの曲げねじれ座屈支配方程式を導き、前者は純曲げの場合の座屈モーメントを閉じた形で求め、後者は半径方向に等分布荷重が作用する場合の座屈荷重を数値計算で求めた。これらは、アーチの曲げねじれ剛性を考慮している点で S. Timoshenko の理論を拡張したものとなせよう。

U. Ojalvo と M. Newman¹¹⁾ そして波田¹²⁾ は空間で任意に曲率が変化する曲りばりの有限変位をベクトル解析し、座屈支配方程式が線形化有限変位理論として導かれることを示し、後者は数値計算も行っている。薄木¹³⁾ は部材軸方向に曲率一定な薄肉曲線材を対象として、薄肉回転シェルの有限変位のひずみ-変位関係式とシェル要素のつり合い方程式に棒理論の仮定、すなわち横断面形不変の仮定とせん断ひずみに関するオイラー・ベルヌーイの仮定を適用して変位場と応力場を導き、仮想仕事の原理を用いて、純曲げを受けるアーチの曲げねじれ座

屈支配方程式を導き、座屈直前のアーチの変形を考慮した座屈モーメントを閉じた形で求めた。

他方、曲線桁の曲げねじれ座屈ないしは有限変位問題を扱った研究は非常に少ない。遠田¹⁴⁾ は伝達マトリックス法を用いて曲線桁の有限変位解析を行っている。これは、線形化有限変位理論に属すると考えられるが、ねじれ率は微小変位理論のものを用いている。Z.P. Bazant¹⁵⁾ らは断面変形とせん断変形を考慮した曲線桁桁の有限変位問題を剛性法で解析しているが、桁全体の安定性までは議論していない。

この報告では、薄肉ばりの座屈解析および有限変位解析の基礎となるのは、非線形のひずみ-変位関係式と応力のつり合い式に、棒理論の仮定を適用して得られる変位場であるとの認識のもとに、上述の著者らの1人が先に求めた変位場を基礎としてアーチと曲線桁を抱括した座屈解析と有限変位解析を行う。この変位場は棒理論の仮定のほかに、薄肉回転シェルの非線形のひずみ-変位関係式において、部材軸方向の変位の微係数の2次項はほかの変位成分の2次項に比べて小さくて無視できるとの仮定のもとに得られるものである。このような仮定のもとに得られる変位場は、したがって、曲げ変形に対しては微小変位程度であるが部材軸まわりの断面の回転、つまりねじれに対してはほぼ制約なしに大きな変形を扱えるものである。たとえば両端単純支持曲線I型桁のスパン中央点で、かつウェブ中央に鉛直集中荷重を作用させると、垂直変位や水平方向変位よりもむしろ断面のねじれが現象として卓越することが想定される。このような現象の解析に対しては上述のようにして得られる変位場を基礎とすることができよう。

本報告における解析手順は以下のようである。はじめに仮想仕事の原理に増分理論を適用して、荷重増分-部材軸線上の変位増分関係を導き、増分量に関して問題を線形化する。次に曲線部材全体を有限個の要素に分割し、要素内部の部材軸線上の変位を部材軸方向の座標に

* 正会員 秋田大学助教授 鉱山学部土木工学科

** 正会員 工博 秋田大学教授 鉱山学部土木工学科

*** 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

ついてべき級数で近似し、荷重増分-変位増分関係を要素両端での等価節点力増分-節点変位増分関係式に書き直し、これにニュートン・ラフソン法を適用して数値計算を行った。要素内で部材軸線上の変位をべき級数近似するとき、変位3成分とねじれ角をすべて部材軸方向の座標の3次式で近似した。従来有限変位解析においても部材軸方向変位には1次近似が広く用いられているが¹⁶⁾アーチのように軸力が支配的な構造では要素数を増しても正解への収束が非常に遅いことが線形解析の結果でも指摘されている¹⁷⁾。3次近似は精度改良法の1つであって、その結果増える節点自由度(軸方向変位の軸方向への微分係数)は明確な物理的意味をもたない欠点はあるが少なくとも計算精度を著しく増すことがわかっており、本報告では固有値問題を解いてその精度を確認した。

次にアーチと2軸対称両端単純支持曲線I型桁の有限変位の横倒れ座屈解析を行ってみた。前者については既往の実験結果との比較を行い、後者では曲率半径とスパン中央での集中荷重の載荷位置をパラメーターとして荷重とスパン中央のねじれ角との関係を求めた。

最後に曲線I型桁の模型実験を行って有限変位解析との比較を行った。

2. 変位場と応力場¹⁴⁾

これについては著者らが先に報告しているので以下には要点を述べる。

薄肉曲線部材の座標系を図-1(a)に示す(x, y, z)。部材が変位する以前の断面内部に適当に選ばれた点Oを原点とする直交座標、(s, n, θ)は薄肉中心線上の任意点を原点とする直交曲線座標である。ρ*は薄肉中央面の断面の回転軸まわりの曲率半径である。以下指標*は薄肉中央面に関する量を表わすものとしよう。座標原点Oが薄肉中央線上にない場合はs座標の始点と原点Oを板厚が零の仮想の薄板で結ぶ¹⁸⁾。

薄肉回転シェルのひずみ-変位関係式に次の仮定を適用する。

- ① 断面寸法に比べて部材長さや軸線の曲率半径は十分長く、部材軸方向の変位の部材軸に直交方向の微係数は小さく、部材軸方向のひずみも小さい。
- ② 断面形は変形しない。
- ③ 薄肉中央面に垂直で、部材軸に平行な面内のせん断ひずみは無視する。
- ④ 薄肉中央面のせん断ひずみのうち、直応力や荷重とつり合い状態にあるせん断応力によるせん断ひずみは無視する。

図-1(a)に示すように、断面内の任意点 P(x, y)の

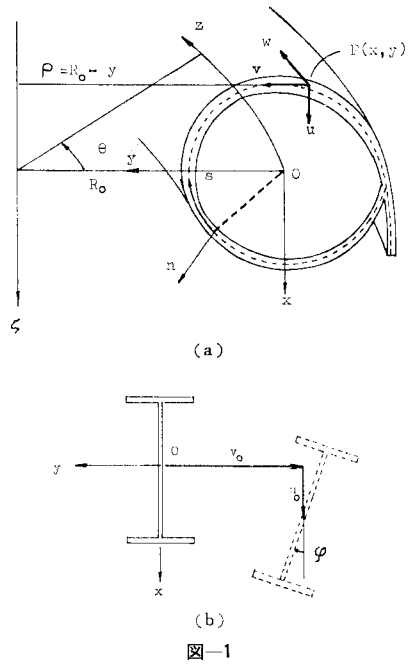


図-1

x, y および z 軸方向への標準状態(変位前)からの変位をそれぞれ u, v および w とすると仮定 ① と ② から得られる変位場は、

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y \sin \varphi - x(1 - \cos \varphi) \\ v &= v_0 + x \sin \varphi - y(1 - \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

である。ここで u₀, v₀ は原点 O の x, y 軸方向への変位であり、φ は z 軸まわりの断面回転角である。

仮定 ③ と ④ からは、

$$w = w_0 - x\phi_y - y\phi_x - \omega\psi_z \dots\dots\dots (2)$$

が得られる。ここで w₀ は原点 O の z 軸方向への変位であり、また φ_y, φ_x はそれぞれ断面の y 軸, x 軸まわりの回転角であり、ψ_z は z 軸まわりのねじれ率である。' を z=R₀θ に関する微分とするとこれらは、

$$\left. \begin{aligned} \phi_x &= (v_0' + w_0/R) \cos \varphi - u_0' \sin \varphi \\ \phi_y &= u_0' \cos \varphi + (v_0' + w_0/R_0) \sin \varphi \\ \psi_z &= \varphi' - \phi_y/R_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

式(2)を導く際に、せん断ひずみ-変位関係式の非線形項において、

$$w(x, y, z) \approx w_0 \dots\dots\dots (4)$$

と近似している。この根拠は次のようである。

軸方向変位 w を原点 O を中心とするテイラー展開で表わすと、

$$\frac{w}{\rho^*} = \frac{w_0}{\rho^*} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 \cdot \frac{x}{\rho^*} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \cdot \frac{y}{\rho^*} + \dots\dots\dots (5)$$

ここで右辺第1項 w₀ (原点 O での w の値) はいわば積分定数に相当する未定の値であるのに対し、第2項以下は仮定 ① より w の微係数のオーダーよりさらに高

次の微小量である。アーチや直線桁の横倒れ座屈現象を考へ部材軸に垂直な平面で部材を切断した切り口（横断面）の挙動を想定してみると、図-1 (b) に示すように、断面はその切断平面内で上下あるいは水平方向へ移動しかつ部材軸まわりに大きく回転するのが特徴的であろう。つまり部材軸方向への断面の変位は小さく、断面各点の軸方向変位は断面全体の剛体的変位 w_0 で近似できると考えられ、よって式 (4) が成り立つ。

次に式 (1), (2) を用いると断面内の直ひずみと薄肉中心線に沿うせん断ひずみは軸線上の変位 u_0, v_0, w_0 および φ の x に関する微係数と $\sin \varphi, \cos \varphi$ の関数で表わされる。曲げねじれ座屈荷重の大きさに与える、座屈直前の部材の変形の影響を調べるためには、ひずみ成分は軸線上の変位の少なくとも 3 次の非線形項までを考慮しなければならない^{13), 18)}。 $\sin \varphi, \cos \varphi$ をテイラー展開して直ひずみ ε_θ 、せん断ひずみ $r_{s\theta}$ を軸線上の変位の 3 次式で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{R_0}{\rho} (\varepsilon_z - x\varepsilon_y - y\varepsilon_x - \omega\varepsilon_\omega) + \varepsilon_n \\ &+ \frac{R_0^2}{\rho^2} \left[\left\{ y^2 + \left(x - \frac{\omega}{R_0} \right)^2 \right\} \varepsilon_{xy} \right. \\ &\left. + \left(x - \frac{\omega}{R_0} \right)^2 \varepsilon_{yy} + \frac{\omega y}{R_0} \varepsilon_{\omega x} + x y \varepsilon_{xy} \right] \\ r_{s\theta} &= r_s = \frac{R_0}{\rho^*} \theta \left(\psi_z - \frac{1}{R_0} \phi_x \varphi + \frac{1}{2 R_0} \phi \varphi^2 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで簡単のために改めて、

$$\phi_x = v_0' + \frac{w_0}{R_0}, \quad \phi_y = u_0', \quad \psi_z = \varphi' - \frac{u_0'}{R_0} \dots (7)$$

および、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= w_0'' - \frac{v_0}{R_0}, \quad \kappa_x = v_0'' + \frac{w_0'}{R_0} \\ \kappa_y &= u_0'' + \frac{\varphi}{R_0}, \quad \vartheta_\omega = \varphi'' - \frac{u_0''}{R_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

とおくと、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \kappa_x - (\phi_y \varphi)' - \varphi^2 / 2 R_0 - (\phi_x \varphi^2)' / 2 \\ &+ \psi_z (\phi_y + \phi_x \varphi) \\ \varepsilon_y &= \kappa_y + (\phi_x \varphi)' - \varphi^2 / 6 R_0 - (\phi_y \varphi^2)' / 2 \\ &- \psi_z (\phi_x - \phi_y \varphi) + (\phi_x^2 + \phi_y^2) \varphi / R_0 \\ \varepsilon_\omega &= \vartheta_\omega - \{ (\phi_x \varphi)' - (\phi_y \varphi^2)' / 2 \\ &+ \phi_x (\psi_z - \phi_x \varphi / R_0) \} / R_0 \\ \varepsilon_n &= (\phi_x^2 + \phi_y^2) / 2, \quad \varepsilon_{xx} = \psi_z^2 / 2 \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{xx} - \varphi \phi_x \psi_z / R_0, \quad \varepsilon_{\omega x} = \varphi \psi_z^2 \\ \varepsilon_{xy} &= \varphi \phi_y \psi_z / R_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

である。式 (6) で $\rho = R_0 - y$ である。また θ は、 n の 1 次式であり開区間と閉区間で異なった表式となる。1 軸応力状態を前提としているから応力は、

$$\sigma_\theta = E \varepsilon_\theta, \quad \tau_s = G r_s \dots\dots\dots (10)$$

3. 増分理論

(1) 荷重増分と変位増分

ある安定なつり合い状態（これを Q_n 状態とする）があってこれに微小な荷重増分を与えた結果、次の新たなつり合い状態（これを Q_{n+1} 状態とする）に達したとする。

前節のひずみ成分 ε_θ, r_s と同様に、式 (1), (2) に含まれる $\sin \varphi, \cos \varphi$ をテイラー展開して断面内の任意点 P の変位を軸線上の変位 u_0, v_0, w_0 および φ の 3 次式で近似する。すると Q_{n+1} 状態でのひずみと変位は、これらひずみと変位の表式に含まれる u_0, ϕ_y, φ などをそれぞれ $(u_0^\circ + u_0^L), (\phi_y^\circ + \phi_y^L)$ および $(\varphi^\circ + \varphi^L)$ と置き換えたものとなる。ただし、記号 $^\circ$ は Q_n 状態の量であり、記号のない量は増分である。そして増分量の 3 次の項は微小であるとして無視し、増分量の 1 次項には記号 L 、2 次項には記号 N を付す。その結果 Q_{n+1} 状態の変位は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u^\circ + u &= u^\circ + u^L + u^N \\ v^\circ + v &= v^\circ + v^L + v^N \\ w^\circ + w &= w^\circ + w^L + w^N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} u^L &= u_0 - \varphi (y \phi_n^\circ + x \varphi^\circ) \\ v^L &= v_0 + \varphi (x \phi_n^\circ - y \varphi^\circ) \\ w^L &= w_0 - y \phi_l - x \phi_m \\ &- \omega (\psi_z + \phi_y / R_0 - \phi_l / R_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

および、

$$\left. \begin{aligned} u^N &= -\varphi^2 (x - y \varphi^\circ) / 2 \\ v^N &= -\varphi^2 (y + x \varphi^\circ) / 2 \\ w^N &= y \varphi (\phi_y + \varphi^\circ \phi_x + \varphi \phi_x^\circ / 2) \\ &- (x - \omega / R_0) (\phi_x - \varphi^\circ \phi_y - \varphi \phi_y^\circ / 2) \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

である。式 (12) では、

$$\left. \begin{aligned} \phi_n^\circ &= 1 - \varphi^2 / 2 \\ \phi_l &= \phi_x \phi_n^\circ - \phi_y \varphi^\circ - \varphi (\phi_y^\circ + \phi_x^\circ \varphi^\circ) \\ \phi_m &= \phi_y \phi_n^\circ + \phi_x \varphi^\circ + \varphi (\phi_x^\circ - \phi_y^\circ \varphi^\circ) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

とおいている。

同様に Q_{n+1} 状態でのひずみは式 (6) より、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta^\circ + \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^\circ + \varepsilon_\theta^L + \varepsilon_\theta^N \\ r_s^\circ + r_s &= r_s^\circ + r_s^L + r_s^N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 ε_θ^L と ε_θ^N をさらに、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta^L &= \frac{R_0}{\rho} (\varepsilon_z - x\varepsilon_y^L - y\varepsilon_x^L - \omega\varepsilon_\omega^L) + \varepsilon_n^L \\ &+ \frac{R_0^2}{\rho^2} \left[\left\{ y^2 + \left(x - \frac{\omega}{R_0} \right)^2 \right\} \varepsilon_{xy}^L \right. \\ &\left. + \left(x - \frac{\omega}{R_0} \right)^2 \varepsilon_{yy}^L + \frac{\omega y}{R_0} \varepsilon_{\omega x}^L + x y \varepsilon_{xy}^L \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta}^N &= -\frac{R_0}{\rho} (x\varepsilon_{yN} + y\varepsilon_{xN} + \omega\varepsilon_{\omega}^N) + \varepsilon_n^N \\ &+ \frac{R_0^2}{\rho^2} \left[\left\{ y^2 + \left(x - \frac{\omega}{R_0} \right)^2 \right\} \varepsilon_{xx}^N \right. \\ &\left. + \left(x - \frac{\omega}{R_0} \right)^2 \varepsilon_{yy}^N + \frac{\omega y}{R_0} \varepsilon_{\omega x}^N + xy\varepsilon_{xy}^N \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

と表わすとき、上式の右辺の内容は以下のようである。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^L &= \kappa_x - (\varphi^0 \kappa_y + \phi_y \varphi' + 2\phi_y \phi_y / R_0) \\ &- \varphi^0 (\varphi^0 \kappa_x / 2 + \kappa_x \varphi) - (\phi_x^0 \phi_y \varphi^0 \\ &+ \phi_x^0 \phi_y \varphi^0 + \phi_x \phi_y \varphi^0) / R_0 \\ \varepsilon_y^L &= \kappa_y + \varphi^0 \kappa_x + \varphi \kappa_x^0 + (\phi_x^0 \phi_y + \phi_y^0 \phi_x) / R_0 \\ &+ \varphi^0 (2\phi_x^0 \phi_x / R_0 - \varphi^0 \kappa_y / 2) \\ &+ \varphi (-\phi_y \varphi + \phi_x^2 / R_0)^0 \\ \varepsilon_{\omega}^L &= \vartheta_{\omega} - \{ \varphi^0 \kappa_x + \varphi \kappa_x^0 + (\phi_x^0 \phi_y + \phi_x \phi_y^0) / R_0 \} / R_0 \\ &- \varphi (\phi_x^2 / R_0 - \phi_y \varphi - \phi_y \varphi^0) / R_0 + \varphi^0 (\phi_y \varphi' \\ &+ \phi_y \varphi^0 + \phi_y \varphi^0 / 2 - 2\phi_x^0 \phi_x / R_0) / R_0 \\ \varepsilon_{xx}^L &= \phi_x^0 \phi_x + \phi_y^0 \phi_y, \quad \varepsilon_{xy}^L = \psi_z^0 \psi_z \\ \varepsilon_{yy}^L &= -(\varphi^0 \phi_x \psi_z + \varphi^0 \phi_x \psi_z^0 + \varphi \phi_x^0 \psi_z^0) / R_0 \\ \varepsilon_{\omega x}^L &= \psi_z^0 (2\varphi^0 \psi_z + \varphi \psi_z^0) \\ \varepsilon_{xy}^L &= (\varphi^0 \phi_y \psi_z + \varphi^0 \phi_y \psi_z^0 + \varphi \phi_y \psi_z^0) / R_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

および、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^N &= -\varphi \phi_y' (\varphi^2 / 2 + \phi_y^2) / R_0 - \kappa_x^0 \varphi^2 / 2 \\ &- \varphi^0 (\kappa_x \varphi + \phi_x \phi_y / R_0) \\ &- (\phi_x \phi_y \varphi + \phi_x^0 \phi_y \varphi) / R_0 \\ \varepsilon_y^N &= \varphi (\kappa_x - \varphi^0 \phi_y' - \varphi \kappa_x / 2) + \phi_x \phi_y / R_0 \\ &+ \phi_x (2\phi_x \varphi + \phi_x \varphi^0) / R_0 \\ R_0 \varepsilon_{\omega}^N &= -\kappa_x \varphi - \phi_x \phi_y / R_0 + \varphi^0 \varphi \phi_y \\ &+ \varphi^0 (\phi_y \varphi + \phi_y \varphi^0) + \varphi (\phi_y \varphi' / 2 + \phi_y \varphi^0) \\ &- \phi_x (2\phi_x \varphi + \phi_x \varphi^0) / R_0 \\ \varepsilon_{xx}^N &= (\phi_x^2 + \phi_y^2) / 2, \quad \varepsilon_{xy}^N = \psi_z^2 / 2 \\ \varepsilon_{xy}^N &= (\varphi^0 \phi_y \psi_z + \varphi \phi_y \psi_z^0 + \varphi \phi_x^0 \psi_z^0) / R_0 \\ \varepsilon_{yy}^N &= -(\varphi^0 \phi_x \psi_z + \varphi \phi_x^0 \psi_z + \varphi \phi_x \psi_z^0) / R_0 \\ \varepsilon_{\omega x}^N &= \psi_z (2\psi_z \varphi + \psi_z \varphi^0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

式 (15) の第 2 式の r_s^L, r_s^N も同様に

$$\left. \begin{aligned} r_s^L &= (R_0 / \rho^*) \theta (\psi_z + \phi_y / R_0 - \phi_m / R_0) \\ r_s^N &= (R_0 / \rho^*) \theta \varphi (-\phi_x + \phi_y \varphi^0 + \phi_y \varphi^0 / 2) / R_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

式 (17)~(19) での $\varepsilon_z, \kappa_x, \kappa_y, \vartheta_{\omega}$ は前節の式 (18) で定義されたものである。

ひずみ増分と変位増分の 2 次の項まで考慮すると、

Q_{n+1} 状態での仮想仕事の原理は¹⁹⁾

$$\begin{aligned} &\int_0^{\theta} \int_F (\sigma_{\theta} \delta \varepsilon_{\theta}^L + \tau_s \delta r_s^L + \sigma_{\theta}^0 \delta \varepsilon_{\theta}^N + \tau_s^0 \delta r_s^N) dF \rho d\theta \\ &- \int_0^{\theta} \int_F (q_x \delta u^L + q_y \delta v^L + q_{\theta} \delta w^L + q_x^0 \delta u^N \\ &+ q_y^0 \delta v^N + q_{\theta}^0 \delta w^N) dF \rho d\theta \\ &- \left[\int_F (\tau_{x\theta} \delta u^L + \tau_{y\theta} \delta v^L + \sigma_{\theta} \delta w^L + \tau_{x\theta}^0 \delta u^N \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \tau_{y\theta}^0 \delta v^N + \sigma_{\theta}^0 \delta w^N) dF \right]_0^{\theta} = -\delta W^0 \dots (20)$$

ここで、 $q_x^0, q_y^0, q_{\theta}^0$ は x, y および θ 方向の単位体積当りの荷重、 $\tau_{x\theta}^0, \tau_{y\theta}^0$ は部材両端でのせん断応力である。記号⁰の付いていない量は増分である。上式の右辺の δW^0 は Q_n 状態の仮想仕事であって次のようである。

$$\begin{aligned} \delta W^0 &= \int_0^{\theta} \int_F (\sigma_{\theta}^0 \delta \varepsilon_{\theta}^L + \tau_s^0 \delta r_s^L) dF \rho d\theta \\ &- \int_0^{\theta} \int_F (q_x^0 \delta u^L + q_y^0 \delta v^L + q_{\theta}^0 \delta w^L) dF \rho d\theta \\ &- \left[\int_F (\tau_{x\theta} \delta u^L + \tau_{y\theta} \delta v^L + \sigma_{\theta} \delta w^L) dF \right]_0^{\theta} \end{aligned} \dots\dots\dots (21)$$

Q_n 状態はつり合い状態にあるとしているから $\delta W^0 = 0$ となるべきものである。

応力増分とひずみ増分との関係は、増分量に関して線形化すると、

$$\sigma_{\theta} \approx E \varepsilon_{\theta}^L, \quad \tau_s \approx G r_s^L \dots\dots\dots (22)$$

となる。

(2) 二軸対称断面の場合の式の展開

式 (20) に式 (12), (13) および式 (16), (19) を代入して断面内で積分する。このとき 2 軸対称断面で、原点 O を重心 (\approx せん断中心) に取ることにすると次のようになる。ただし分布曲げおよびねじりモーメント荷重は作用していないとする。

$$\begin{aligned} &\int_0^{\theta} \left[\{ EF(\varepsilon_z + \varepsilon_n^L) + EJ_P \varepsilon_{xx}^L + EJ_0 \varepsilon_{yy}^L \} \delta \varepsilon_z \right. \\ &+ \left\{ EF(\varepsilon_z + \varepsilon_n^L) + \frac{EJ_x}{R_0} \left(\varepsilon_x^L + \frac{\varepsilon_n^L}{R_0} \right) \right. \\ &+ EJ_P \varepsilon_{xx}^L \left. \right\} \delta \varepsilon_n^L + EJ_x \left(\varepsilon_x^L \delta \varepsilon_x^L + \frac{1}{R_0} \varepsilon_n^L \delta \varepsilon_x^L \right) \\ &+ EJ_y \varepsilon_y^L \delta \varepsilon_y^L + EC_{\omega} \vartheta_{\omega}^L \delta \vartheta_{\omega}^L + EJ_P (\varepsilon_z + \varepsilon_n^L) \\ &\times \delta \varepsilon_{xx}^L + EJ_0 \varepsilon_z \delta \varepsilon_{yy}^L + EJ_q \varepsilon_{xx}^L \delta \varepsilon_{xx}^L \\ &+ GJ_T \psi_z^L \delta \psi_z^L \left. \right] R_0 d\theta + \int_0^{\theta} \left\{ \left(N^0 - \frac{M_x^0}{R_0} \right) \delta \varepsilon_n^N \right. \\ &- M_x^0 \delta \varepsilon_x^N - M_y^0 \delta \varepsilon_y^N - M_{\omega}^0 \delta \varepsilon_{\omega}^N + M_{xx}^0 \delta \varepsilon_{xx}^N \\ &+ K_y^0 \delta \varepsilon_{yy}^N + \frac{1}{R_0} K_{\omega x}^0 \delta \varepsilon_{\omega x}^N + K_{xy}^0 \delta \varepsilon_{xy}^N \\ &+ T_{zs}^0 \delta \psi_z^N \left. \right\} R_0 d\theta - \int_0^{\theta} (p_x \delta u_0 + p_y \delta v_0 + p_{\theta} \delta w_0 \\ &- m_{in} \varphi^0 \delta \varphi) R_0 d\theta - \int_0^{\theta} m_{in}^0 \varphi \delta \varphi R_0 d\theta \\ &- \left[Q_x \delta u_0 + Q_y \delta v_0 + N \delta w_0 + T_z \phi_n^0 \delta \varphi \right. \\ &- M_x \delta \phi_l - M_y \delta \phi_m - M_{\omega} \delta (\psi_z + \phi_y / R_0) \\ &- \phi_m / R_0 - T_n \varphi^0 \delta \varphi \left. \right]_0^{\theta} - \left[M_x^0 \delta \left(\phi_y \varphi + \varphi^0 \phi_x \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2} \varphi^2 \phi_x \right) + \left(-M_y^0 + \frac{M_{\omega}^0}{R_0} \right) \delta \left(\phi \phi_x - \varphi^0 \phi_y \right) \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\varphi^2\phi_y^\circ) - (T_n^\circ + \varphi^\circ T_z^\circ)\varphi\delta\varphi \Big]_0^\theta = -\delta W^\circ \tag{23}$$

ここで以下の断面諸量が定義されている。

断面定数：

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= \int_F \frac{R_0}{\rho} dF, & J_x &= \int_F \frac{R_0}{\rho} y^2 dF \\ J_y &= \int_F \frac{R_0}{\rho} x^2 dF, & J_T &= \int_F \frac{R_0 \rho}{\rho^{*2}} \Theta^2 dF \\ C_\omega &= \int_F \frac{R_0}{\rho} \omega^2 dF, & J_0 &= \int_F \frac{R_0^2}{\rho^2} \left(x - \frac{\omega}{R_0}\right)^2 dF \\ J_\rho &= \int_F \frac{R_0^2}{\rho^2} \left\{ y^2 + \left(x - \frac{\omega}{R_0}\right)^2 \right\} dF \\ J_q &= \int_F \frac{R_0^3}{\rho^3} \left\{ y^2 + \left(x - \frac{\omega}{R_0}\right)^2 \right\}^2 dF \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

Q_n 状態の断面力：

$$\left. \begin{aligned} M_x^\circ &= \int_F \sigma_\theta^\circ y dF, & M_y^\circ &= \int_F \sigma_\theta^\circ x dF \\ N^\circ &= \int_F \sigma_\theta^\circ dF, & M_\omega^\circ &= \int_F \sigma_\theta^\circ \omega dF \\ M_{xy}^\circ &= \int_F \frac{R_0}{\rho} \sigma_\theta^\circ \left\{ y^2 + \left(x - \frac{\omega}{R_0}\right)^2 \right\} dF \\ T_{zs}^\circ &= \int_F \frac{\rho}{\rho^{*2}} \tau_s^\circ \Theta dF \\ K_y^\circ &= \int_F \frac{R_0}{\rho} \sigma_\theta^\circ \left(x - \frac{\omega}{R_0}\right)^2 dF \\ K_{\omega x}^\circ &= \int_F \frac{R_0}{\rho} \sigma_\theta^\circ \omega y dF \\ K_{xy}^\circ &= \int_F \frac{R_0}{\rho} \sigma_\theta^\circ x y dF \end{aligned} \right\} \tag{25}$$

部材両端面での断面力増分：

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \int_F \tau_{x\theta} dF, & Q_y &= \int_F \tau_{y\theta} dF \\ T_z &= \int_F (\tau_{y\theta} x - \tau_{x\theta} y) dF \\ T_n &= \int_F (\tau_{y\theta} y + \tau_{x\theta} x) dF \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

荷重増分：

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \int_F \frac{\rho}{R_0} q_x dF, & p_y &= \int_F \frac{\rho}{R_0} q_y dF \\ p_\theta &= \int_F \frac{\rho}{R_0} q_\theta dF, & m_{tn} &= \int_F \frac{\rho}{R_0} (q_x x + q_y y) dF \end{aligned} \right\} \tag{27}$$

式 (25) で記号 $^\circ$ を除くと断面力の増分となり、式 (26) で記号 $^\circ$ を付すと Q_n 状態の断面力となる。式 (23) で Q_n 状態の断面力の関数である第 2 番目の積分項が Euler の座屈理論を含めた固有値決定問題の中核である。

式 (23) では初期たわみ (Q_n 状態での変位) の 2 次項まで考慮すれば十分である。たとえば式 (23) の第 1 番目の積分内の項 $EJ_x \varepsilon_x^L \delta \varepsilon_x^L$ は、式 (18) の第 1 式か

らわかるように初期たわみの 4 次式 (ε_x^L が 2 次式だから) となるが、初期たわみの 3 次以上の項を無視することである。したがって初期応力 (Q_n 状態の断面力) も初期たわみの 2 次項まで考慮するとよい。式 (6) の $\varepsilon_\theta, \tau_s$ の右辺のすべての変位成分に記号 $^\circ$ を付したものを $\varepsilon_\theta^\circ, \tau_s^\circ$ とし、式 (25) の $\sigma_\theta^\circ, \tau_s^\circ$ に $\sigma_\theta^\circ = E\varepsilon_\theta^\circ, \tau_s^\circ = G\tau_s^\circ$ を代入して初期たわみの 3 次の項を無視すると、

$$\left. \begin{aligned} N^\circ &= EF(\varepsilon_z^\circ + \varepsilon_n^\circ) + EJ_P \varepsilon_{xx}^\circ \\ M_x^\circ &= -EJ_x(\varepsilon_x^\circ + \varepsilon_n^\circ/R_0) \\ M_{xy}^\circ &= EJ_P(\varepsilon_z^\circ + \varepsilon_n^\circ) + EJ_Q \varepsilon_{xx}^\circ \\ M_y^\circ &= -EJ_y \varepsilon_y^\circ, & M_\omega^\circ &= -EC_\omega \varepsilon_\omega^\circ \\ K_y^\circ &= EJ_0 \varepsilon_z^\circ, & T_{zs}^\circ &= GJ_T(\psi_z - \phi_x \varphi/R_0)^\circ \\ K_{\omega x}^\circ &= K_{xy}^\circ = 0 \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

となる。

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^\circ &= \kappa_x^\circ - \varphi^\circ(\kappa_y^\circ + \phi_y^\circ)' - \phi_y^\circ/R_0 \\ \varepsilon_y^\circ &= \kappa_y^\circ + \kappa_x^\circ \varphi^\circ + \phi_x^\circ \phi_y^\circ/R_0 \\ \varepsilon_\omega^\circ &= \vartheta_\omega^\circ - (\kappa_x^\circ \varphi^\circ + \phi_x^\circ \phi_y^\circ/R_0)/R_0 \\ \varepsilon_n^\circ &= (\phi_x^\circ \omega^2 + \phi_y^\circ \omega^2)/2, & \varepsilon_{xx}^\circ &= \psi_z'^2/2 \\ \varepsilon_z^\circ &= (\omega_0' - v_0/R_0)^\circ \end{aligned} \right\} \tag{29}$$

4. 剛性方程式

(1) 変位関数

従来の剛性法による有限変位解析では¹⁸⁾、部材軸方向変位 w_0 を座標 z の 1 次式で近似しているが、特にアーチのように軸力が支配的な構造では精度がよくないことが予想される。ここでは軸線の変位をすべて θ の 3 次式で近似する。

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} u_0(\theta) &= a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 \\ v_0(\theta) &= b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + b_3\theta^3 \\ w_0(\theta) &= c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + c_3\theta^3 \\ \varphi(\theta) &= d_0 + d_1\theta + d_2\theta^2 + d_3\theta^3 \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

曲線要素両端での節点自由度として次のものを採用する。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_{\theta=0} &= \begin{Bmatrix} v_i \\ w_i \\ \phi_{xi} \\ \varepsilon_{zi} \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} v_0 \\ w_0 \\ \phi_x \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}_{\theta=\theta_c} &= \begin{Bmatrix} v_j \\ w_j \\ \phi_{xj} \\ \varepsilon_{zj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \tag{31・a}$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_0 \\ \phi_y \\ \varphi \\ \psi_z \end{Bmatrix}_{\theta=0} &= \begin{Bmatrix} u_i \\ \phi_{yi} \\ \varphi_i \\ \psi_{zi} \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} u_0 \\ \phi_y \\ \varphi \\ \psi_z \end{Bmatrix}_{\theta=\theta_c} &= \begin{Bmatrix} u_j \\ \phi_{yj} \\ \varphi_j \\ \psi_{zj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \tag{31・b}$$

ϕ_e は要素の中心角である。上式より 1 つの節点で 8 個の自由度がある。

上式の右辺の $\phi_x, \phi_y, \psi_z, \varepsilon_z$ は式 (7), (8) で定義されているから、式 (30) をこれらに代入して上式の関係を用いる。すると係数 $a_0 \sim a_3, d_0 \sim d_3$ に関する、および係数 $b_0 \sim b_3, c_0 \sim c_3$ に関するそれぞれ 8 元連立方程式を得る。これは簡単に解かれて 16 個の係数は節点変位で表わされる。これをもとの式 (30) に代入してマトリックス表示すると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}(\theta) &= N_u \cdot \mathbf{q}_c, & \tilde{v}(\theta) &= N_v \cdot \mathbf{q}_a \\ \tilde{w}(\theta) &= N_w \cdot \mathbf{q}_a, & \varphi(\theta) &= N_\varphi \cdot \mathbf{q}_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

ここで、

$$\tilde{u}(\theta) = \frac{u_0}{L_e}, \quad \tilde{v}(\theta) = \frac{v_0}{L_e}, \quad \tilde{w}(\theta) = \frac{w_0}{L_e} \dots\dots(33)$$

および、

$$L_e = R_0 \phi_e \dots\dots\dots(34)$$

である。 $\tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{u}$ は軸線の無次元変位であり、 L_e は要素の円弧の長さである。 $\mathbf{q}_a, \mathbf{q}_c$ は曲率面内 (式 (31・a)) および曲率面外 (式 (31・b)) の無次元節点変位であって次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_a &= [\tilde{v}_i \tilde{w}_i \phi_{xi} \varepsilon_{zi} \tilde{v}_j \tilde{w}_j \phi_{xj} \varepsilon_{zj}]^T \\ \mathbf{q}_c &= [\tilde{u}_i \phi_{yi} \varphi_i \tilde{\psi}_{zi} \tilde{u}_j \phi_{yj} \varphi_j \tilde{\psi}_{zj}]^T \end{aligned} \right\} \dots\dots(35)$$

ここで、

$$\tilde{\psi}_{zi} = L_e \psi_{zi} \dots\dots\dots(36)$$

である。また、

$$\left. \begin{aligned} N_v &= \left[N_1, -N_2, \frac{N_2}{\phi_e}, 0, N_3, -N_4, \frac{N_4}{\phi_e}, 0 \right] \\ N_w &= \left[N_2, N_1, 0, \frac{N_2}{\phi_e}, N_4, N_3, 0, \frac{N_4}{\phi_e} \right] \\ N_u &= \left[N_1, \frac{N_2}{\phi_e}, 0, 0, N_3, \frac{N_4}{\phi_e}, 0, 0 \right] \\ N_\varphi &= \left[0, N_2, N_1, \frac{N_2}{\phi_e}, 0, N_4, N_3, \frac{N_4}{\phi_e} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

および、

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 + \frac{\theta^2}{\phi_e^2} \left(-3 + \frac{2\theta}{\phi_e} \right), & N_2 &= \theta + \frac{\theta^2}{\phi_e} \left(-2 + \frac{\theta}{\phi_e} \right) \\ N_3 &= \frac{\theta^2}{\phi_e^2} \left(3 - \frac{\theta}{\phi_e} \right), & N_4 &= \frac{\theta^2}{\phi_e} \left(-1 + \frac{\theta}{\phi_e} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

である。

前節の増分式 (23) をマトリックス表示するために、式 (7), (8) で定義されている幾何学量 $\phi_x, \phi_y, \varepsilon_z, \dots$ を節点変位で表わしておくことと便利である。式 (32), (33) をこれら両式に代入して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \mathbf{B}_z \mathbf{q}_a, & \phi_x &= \mathbf{B}_{\phi_x} \mathbf{q}_a, & \phi_y &= \mathbf{B}_{\phi_y} \mathbf{q}_c \\ \tilde{\phi}_y' &= \mathbf{B}_{\tilde{\phi}_y'} \mathbf{q}_c, & \tilde{\varepsilon}_x &= \mathbf{B}_{\tilde{\varepsilon}_x} \mathbf{q}_a, & \tilde{\varepsilon}_y &= \mathbf{B}_{\tilde{\varepsilon}_y} \mathbf{q}_c \\ \tilde{\psi}_z &= \mathbf{B}_{\tilde{\psi}_z} \mathbf{q}_c, & \tilde{\psi}_w &= \mathbf{B}_{\tilde{\psi}_w} \mathbf{q}_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_x &= L_e \varepsilon_x, & \tilde{\varepsilon}_y &= L_e \varepsilon_y, & \tilde{\phi}_y' &= L_e \phi_y' \\ \tilde{\psi}_w &= L_e^2 \psi_w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

は無次元量であり、 $\mathbf{B}_{\tilde{\phi}_y'}$ は \mathbf{B}_{ϕ_y} の θ/ϕ_e に関する 1 階微分を表わす。式 (39) の $\mathbf{B}_z, \mathbf{B}_{\phi_x}, \dots$ は、いずれも 1 行 8 列のマトリックスであるが、具体的内容は【付録 1】を参照されたい。

(2) 荷重増分-変位増分関係

変位関数の式 (32) と (39) を用いると増分式 (23) の各項はすべて節点変位で表わされる。たとえば、 $\delta \varepsilon_n^L$ は定義式 (17) より

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_n^L &= \phi_x^\circ \delta \phi_x + \phi_y^\circ \delta \phi_y \\ &= \delta \mathbf{q}_a^T \mathbf{B}_{\phi_x}^T \phi_x^\circ + \delta \mathbf{q}_c^T \mathbf{B}_{\phi_y}^T \phi_y^\circ \dots\dots(41) \end{aligned}$$

と書かれる。ここで Q_n 状態の幾何学量 $\phi_x^\circ, \phi_y^\circ$ はそれぞれ $\mathbf{B}_{\phi_x} \mathbf{q}_a^\circ, \mathbf{B}_{\phi_y} \mathbf{q}_c^\circ$ と表わされるが、以下の数値積分のためにここでは $\phi_x^\circ, \phi_y^\circ$ のままにしておく。

以上のようにして式 (23) の両辺を $\delta \mathbf{q}_a^T, \delta \mathbf{q}_c^T$ について整理し、これらおのおのの係数を零とくと 2 組の剛性方程式が得られる。そして前者に L_e/EJ_x を、後者には L_e/EJ_y を乗じる。このとき式 (23) の両辺で、部材両端の断面力がなす仮想仕事の項は無視する。これは、桁全体の両端に曲げモーメントやねじりモーメントが作用する場合だけ考慮されるべきものだからである。その結果無次元化された剛性方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} & \left(\mathbf{K}_a + \mathbf{K}_a^\circ + \mathbf{K}_a^{\circ T} + \mathbf{K}_a^{\circ\circ} + \mathbf{K}_{aa}^{\circ\circ\circ} + \mathbf{K}_{aa}^{\circ\circ T} \right. \\ & \quad \left. + N_n^\circ \right) \mathbf{q}_a + \left(\mathbf{K}_{aa}^\circ + \mathbf{K}_{ab}^\circ + \mathbf{K}_{ac}^\circ + \mathbf{K}_{ad}^\circ \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{K}_{ae}^\circ + \mathbf{M}_y^\circ + \mathbf{T}_{zs}^\circ \right) \mathbf{q}_c / z = \mathbf{f}_a - \mathbf{r}_a^\circ \\ & \left(\mathbf{K}_c + \mathbf{K}_c^\circ + \mathbf{K}_c^{\circ T} + \mathbf{K}_c^{\circ\circ} + \mathbf{K}_{cc}^{\circ\circ} + \mathbf{K}_{cc}^{\circ\circ T} + \chi N^\circ \right) \\ & \quad + \chi \mathbf{M}_x^\circ + \mathbf{M}_{xy}^\circ + \mathbf{M}_{zn}^\circ \mathbf{q}_c + \left(\mathbf{K}_{aa}^\circ + \mathbf{K}_{ab}^\circ \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{K}_{ac}^\circ + \mathbf{K}_{ad}^\circ + \mathbf{K}_{ae}^\circ + \mathbf{M}_y^\circ + \mathbf{T}_{zs}^\circ \right)^T \mathbf{q}_a \\ & = \mathbf{f}_c - \mathbf{r}_c^\circ \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

ここで

$$\chi = \frac{J_x}{J_y} \dots\dots\dots(43)$$

である。 $\mathbf{K}_a^\circ, \mathbf{K}_c^\circ$ などそれぞれ初期たわみの 1 次および 2 次の項を示す。これら初期たわみマトリックスは【付録 1】(2) に積分形で示してある。 $\mathbf{K}_a, \mathbf{K}_c$ は、それぞれアーチおよび曲線桁の微小変位の剛性マトリックスであって \mathbf{K}_c は文献 (21) と同じものであり、 \mathbf{K}_a は【付録 1】(3) に陽形で示す。

式 (42) の初期応力マトリックスは以下のようである。

$$\left. \begin{aligned} N_n^\circ &= \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \{ (\tilde{N}^\circ - \phi_e \tilde{M}_x^\circ) \mathbf{B}_{\phi_x}^T \mathbf{B}_{\phi_x} \\ & \quad + \frac{1}{\chi} (-\tilde{M}_y^\circ + \phi_e \tilde{M}_w^\circ) \mathbf{A}_m^\circ \} d\theta \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{M}_x^\circ &= \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \tilde{M}_x^\circ (\mathbf{B}_{\varepsilon y}^T \mathbf{N}_\varphi + \mathbf{N}_\varphi^T \mathbf{B}_{\dot{\varphi} y} \\
 &\quad + \mathbf{B}_{\dot{\varphi} y}^T \mathbf{B}_{\dot{\varphi} y} \phi_e + \mathbf{A}_{II}^\circ) d\theta \\
 \tilde{M}_y^\circ &= \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \{ (-\tilde{M}_y^\circ + \phi_e \tilde{M}_\omega^\circ) (\mathbf{B}_{\varepsilon x}^T \mathbf{N}_\varphi \\
 &\quad + \mathbf{B}_{\dot{\varphi} x}^T \mathbf{B}_{\dot{\varphi} y} \phi_e + \mathbf{A}_{IV}^\circ) - \tilde{M}_x^\circ \mathbf{A}_{I}^\circ \\
 &\quad + \tilde{K}_y^\circ \mathbf{A}_{III}^\circ \} d\theta \\
 \tilde{M}_{xy}^\circ &= \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} (\tilde{M}_{xy}^\circ \mathbf{B}_{\dot{\varphi} z}^T \mathbf{B}_{\dot{\varphi} z} - \tilde{M}_y^\circ \mathbf{A}_V^\circ \\
 &\quad - \tilde{M}_\omega^\circ \mathbf{A}_{VI}^\circ + \tilde{K}_y^\circ \mathbf{A}_{III}^\circ + \tilde{T}_{zs}^\circ \mathbf{A}_X^\circ) d\theta \\
 N^\circ &= \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \tilde{N}^\circ \mathbf{B}_{\dot{\varphi} y}^T \mathbf{B}_{\dot{\varphi} y} d\theta \\
 \tilde{M}_{tn}^\circ &= -\frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \tilde{m}_{tn}^\circ \mathbf{N}_\varphi^T \mathbf{N}_\varphi d\theta \\
 &\dots\dots\dots(44)
 \end{aligned} \right\}$$

ここで、以下の無次元断面力と荷重が定義された。

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{N}_\circ &= L_e^2 N^\circ / EJ_x, \quad \tilde{M}_x^\circ = L_e M_x^\circ / EJ_x \\
 \tilde{M}_y^\circ &= L_e M_y^\circ / EJ_y, \quad \tilde{M}_\omega^\circ = M_\omega^\circ / EJ_y \\
 \tilde{T}_{zs}^\circ &= L_e T_{zs}^\circ / EJ_y, \quad \tilde{M}_{xy}^\circ = M_{xy}^\circ / EJ_y \\
 \tilde{K}_y^\circ &= K_y^\circ / EJ_y, \quad \tilde{m}_{tn}^\circ = L_e^2 m_{tn}^\circ / EJ_y
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(45)$$

式(44)の $\mathbf{A}_I^\circ \sim \mathbf{A}_X^\circ$ は初期たわみの関数であり【付録1】(4)に積分形で示してある。

式(42)右辺の $\mathbf{f}_a, \mathbf{f}_c$ はそれぞれ曲率面内と曲率面外の荷重増分であり

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{f}_a &= \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} (\tilde{p}_y \mathbf{N}_\varphi^T + \tilde{p}_\theta \mathbf{N}_\omega^T) d\theta \\
 \mathbf{f}_c &= \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} (\tilde{p}_x \mathbf{N}_u^T - \tilde{m}_{tn} \varphi^\circ \mathbf{N}_\varphi^T) d\theta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(46)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{p}_x &= L_e^3 p_x / EJ_y, \quad \tilde{p}_y = L_e^3 p_y / EJ_x \\
 \tilde{p}_\theta &= L_e^3 p_\theta / EJ_x, \quad \tilde{m}_{tn} = L_e^2 m_{tn} / EJ_y
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(47)$$

特に p_x, p_y が等分布荷重のとき、式(27)より

$$\tilde{m}_{tn} = \frac{L_e^2}{EJ_y} (p_x x_p + p_y y_p) \dots\dots\dots(48)$$

となる。 x_p, y_p は荷重 p_x, p_y の作用点の x および y 座標である。

$\mathbf{r}_a^\circ, \mathbf{r}_c^\circ$ は式(23)右辺の δW° から生ずる残差ベクトルであり式(42)の左辺のマトリックスで表わされ次のようである。

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{r}_a^\circ &= (\mathbf{K}_a + \mathbf{K}_a^\circ + \mathbf{K}_a^{\circ T} / 2 + \mathbf{K}_a^{\circ\circ} / 2 + \mathbf{K}_{aa}^{\circ\circ} \\
 &\quad + \mathbf{K}_{aa}^{\circ\circ T} / 3) \mathbf{q}_a^\circ + (\mathbf{K}_{aa}^{\circ\circ} + \mathbf{K}_{ab}^\circ / 2 \\
 &\quad + \mathbf{K}_{ac}^{\circ\circ} / 2 + \mathbf{K}_{ad}^{\circ\circ} + \mathbf{K}_{ae}^{\circ\circ} / 3) \mathbf{q}_c^\circ / \lambda - \mathbf{f}_a^\circ \\
 \mathbf{r}_c^\circ &= (\mathbf{K}_c + \mathbf{K}_c^\circ + \mathbf{K}_c^{\circ T} / 2 + \mathbf{K}_c^{\circ\circ} / 2 + \mathbf{K}_{cc}^{\circ\circ} \\
 &\quad + \mathbf{K}_{ce}^{\circ\circ T} / 3) \mathbf{q}_c^\circ + (\mathbf{K}_{aa}^{\circ\circ} + \mathbf{K}_{ab}^\circ / 2 \\
 &\quad + \mathbf{K}_{ac}^{\circ\circ} / 2 + \mathbf{K}_{ad}^{\circ\circ} + \mathbf{K}_{ae}^{\circ\circ} / 3) \mathbf{T} \mathbf{q}_a^\circ - \mathbf{f}_c^\circ \\
 &\dots\dots\dots(49)
 \end{aligned} \right\}$$

$\mathbf{f}_a^\circ, \mathbf{f}_c^\circ$ は式(46)の右辺の荷重に記号 $^\circ$ を付したものである。

式(41)において、線形のマトリックス $\mathbf{K}_a, \mathbf{K}_c$ および荷重項 $\mathbf{f}_a, \mathbf{f}_c$ を除いてはすべて Gauss の数値積分

を行った。要素内での Gauss 点の数は 15 とした。

(3) 断面力-変位関係

式(45)を式(28)に代入すると無次元化された断面力-変位関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{N}^\circ &= \lambda_e^2 (\varepsilon_z^\circ + \varepsilon_n^\circ) + \beta \tilde{\varepsilon}_\omega^\circ / \lambda \\
 \tilde{M}_x^\circ &= -(\varepsilon_x^\circ + \varepsilon_n^\circ \phi_e) \\
 \tilde{M}_{xy}^\circ &= \beta (\varepsilon_z^\circ + \varepsilon_n^\circ) + r_e \tilde{\varepsilon}_{xx}^\circ \\
 \tilde{M}_y^\circ &= -\tilde{\varepsilon}_y^\circ, \quad \tilde{M}_\omega^\circ = -\alpha_e \tilde{\varepsilon}_\omega^\circ \\
 \tilde{T}_{zs}^\circ &= k (\tilde{\varphi}_z^\circ - \phi_x^\circ \varphi \phi_e), \quad \tilde{K}_y^\circ = \mu \varepsilon_z^\circ
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(50)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_e^2 &= EFL_e^2 / EJ_x, \quad \mu = EJ_0 / EJ_y \\
 \alpha_e &= EC_\omega / EJ_y L_e^2, \quad \beta = EJ_p / EJ_y \\
 r_e &= EJ_q / EJ_y L_e^2, \quad k = GJ_T / EJ_y
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(51)$$

および、

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{\varepsilon}_x^\circ &= L_e \varepsilon_x^\circ, \quad \tilde{\varepsilon}_\omega^\circ = L_e^2 \varepsilon_\omega^\circ \\
 \tilde{\varepsilon}_{xx}^\circ &= L_e^2 \varepsilon_{xx}^\circ, \quad \tilde{\varphi}_z^\circ = L_e \varphi_z^\circ
 \end{aligned} \right\} \dots\dots(52)$$

である。式(51)の $\lambda_e^2, \alpha_e, r_e$ は曲線要素としての無次元断面定数である。曲線材全体の断面定数はこれらの記号 e を取ることにする。

5. 数値計算結果

(1) アーチの微小変位座屈解析

剛性方程式(42)が曲線材全体に対して重ね合わされた結果とする。そして荷重増分はなく($\mathbf{f}_a = \mathbf{f}_c = \mathbf{0}$) Q_n 状態の変位は微小変位であるとするとき式(42)と(49)は、

$$\left. \begin{aligned}
 (\mathbf{K}_a + \mathbf{N}_n^\circ) \mathbf{q}_a + (\mathbf{M}_y^\circ + \mathbf{T}_{zs}^\circ) \mathbf{q}_c / \lambda &= -\mathbf{r}_a^\circ \\
 (\mathbf{K}_c + \lambda \mathbf{N}^\circ + \lambda \mathbf{M}_x^\circ + \mathbf{M}_{xy}^\circ + \mathbf{M}_{tn}^\circ) \mathbf{q}_c \\
 + (\mathbf{M}_y^\circ + \mathbf{T}_{zs}^\circ)^T \mathbf{q}_a &= -\mathbf{r}_c^\circ
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(53)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{r}_a^\circ &= \mathbf{K}_a \mathbf{q}_a - \mathbf{f}_a^\circ = \mathbf{0} \\
 \mathbf{r}_c^\circ &= \mathbf{K}_c \mathbf{q}_c - \mathbf{f}_c^\circ = \mathbf{0}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(54)$$

式(54)より座屈直前の変位 $\mathbf{q}_a^\circ, \mathbf{q}_c^\circ$ が定まり式(53)は固有値決定方程式を与える。

座屈前では曲率面外荷重は作用していない、つまり $\mathbf{f}_c^\circ = \mathbf{0}$ とすると式(54)より $\mathbf{q}_c^\circ = \mathbf{0}$ である。したがって式(50)と式(27)から面外変位に関連して生ずる断面力 $\tilde{M}_y^\circ, \tilde{M}_\omega^\circ, \tilde{T}_{zs}^\circ$ は零となる。以上より式(44)の初期応力マトリックスは初期たわみ($\mathbf{A}_I^\circ \sim \mathbf{A}_X^\circ$)を無視して、

$$\mathbf{M}_y^\circ = \mathbf{T}_{zs}^\circ = \mathbf{0} \dots\dots\dots(55)$$

以下には理論解との比較のためアーチの面内と面外の固有値を示す。

a) 面内座屈

式 (54), (55) を式 (53) の第 1 式に代入すると,

$$(K_a + N_n^\circ) q_a = 0 \dots\dots\dots (56)$$

ここで N_n° は式 (44) で初期たわみを無視 ($A_{II}^\circ = 0$) したものである. 式 (54) の第 1 式から $q_a^\circ = K_a^{-1} f_a$ によって q_a° を求める. 式 (50) の右边を q_a° (の注目する要素に対応する部分) で表わしたものにこれを代入して $\tilde{N}^\circ, \tilde{M}_x^\circ$ を θ の関数として表わし, N_n° を数値積分を行って決定する. f_a° が単位の無次元荷重の場合の N_n° を \bar{N}_n とし, 座屈荷重を k_{cr} とすると,

$$|K_a + k_{cr} \cdot \bar{N}_n| = 0 \dots\dots\dots (57)$$

から k_{cr} を求める.

図-2 (a) は, 中心角が $\pi/2$ で $\lambda=200$ (細長比) の場合の, アーチ頂点に集中荷重が作用したときの載荷点の変位と用いた要素数の関係を示す. 荷重の大きさは $L=R_0\pi/2$ を円弧重心線の長さとして $PL^2/EJ_x=1$ であり, このときの頂点の理論たわみは $w/L=0.5412 \times 10^{-3}$ である. 図の縦軸は剛性法による解のこの理論たわみに対する無次元変位である. 軸線の変位 w_0 を θ の 3 次式で近似した場合は, 従来の 1 次近似に比べて格段に精度のよいことがわかる.

図-2 (b) は 同じ荷重状態での逆対称座屈荷重を理論値に対する比で比較したものである. 理論値は $k_{cr} = P_{cr}R^2/EJ_x=15.32$ である. やはり w_0 を 3 次近似した場合は 1 次近似に比べ少ない要素数で急速に正解に収束している.

b) 曲げねじれ座屈

面内座屈の場合と同様に式 (53) の第 2 式より, 無次元単位荷重に対する初期応力マトリックスに χ を付して,

$$|K_c + k_{cr}(\chi \bar{N} + \chi \bar{M}_x + \bar{M}_{xy})| = 0 \dots\dots\dots (58)$$

k_{cr} は座屈荷重である.

ライズ比が 0.2 で等分布円心荷重の場合の深沢¹²⁾ の理論解との比較を図-3 に示す. 用いた要素数は 20 である. 式 (47) の第 2 式の p_y を p_{cr} と書き換えると上式から直接得られる k_{cr} は,

$$k_{cr} = \frac{L_0^3 p_{cr}}{EJ_x} \dots\dots\dots (59)$$

となる. これを図の縦軸の座屈係数 $m_L = p_{cr}RL^2/EJ_y$ に換算すると $L=20L_0$, 中心角 $\phi=1.5220$ を考慮して

$$m_L = \frac{J_x}{J_y} \frac{8 \times 10^3}{\phi} k_{cr} = 5260 \chi k_{cr} \dots\dots\dots (60)$$

となる. 図-3 の実線 (理論値) では $\chi = J_x/J_y$ なるパラメーターは考慮されていない. これは細長比 λ^2 が無限大, つまり座屈前の軸ひずみと式 (58) の \bar{M}_{xy} に相当する初期応力を無視していることによる. しかし \bar{M}_{xy} の影響は小さく, したがって式 (58) から k_{cr} は χ にほぼ逆比例するから, χ の値は m_L にほとんど影

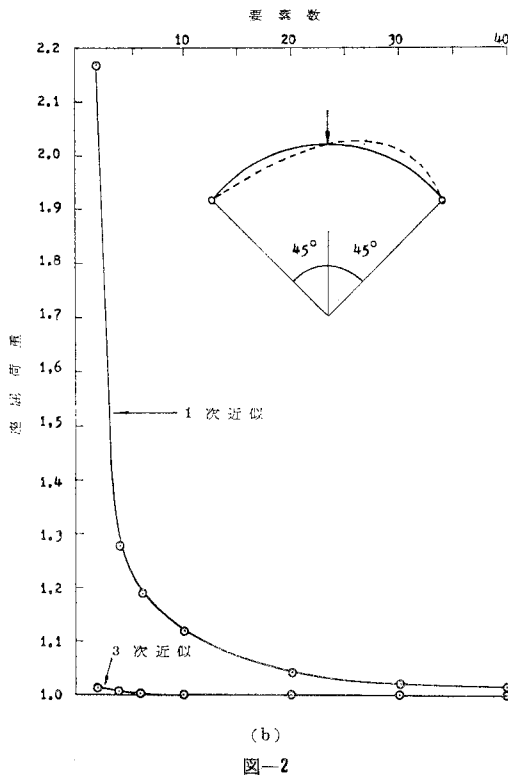
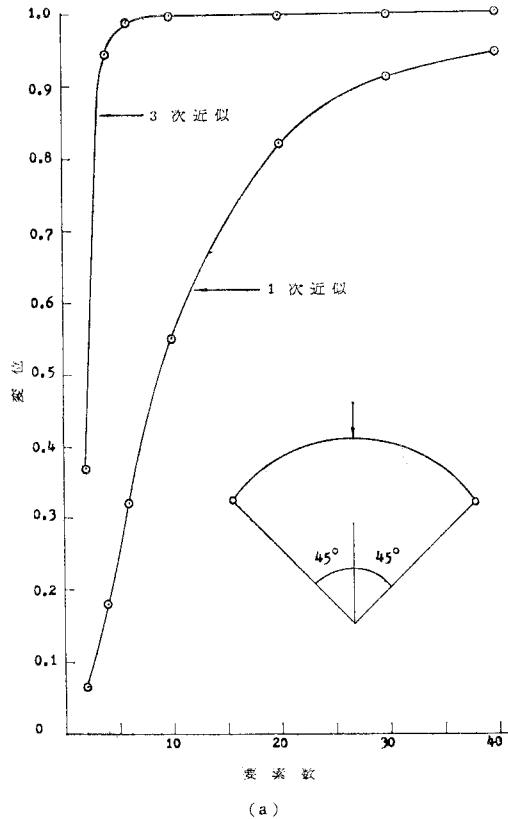


図-2

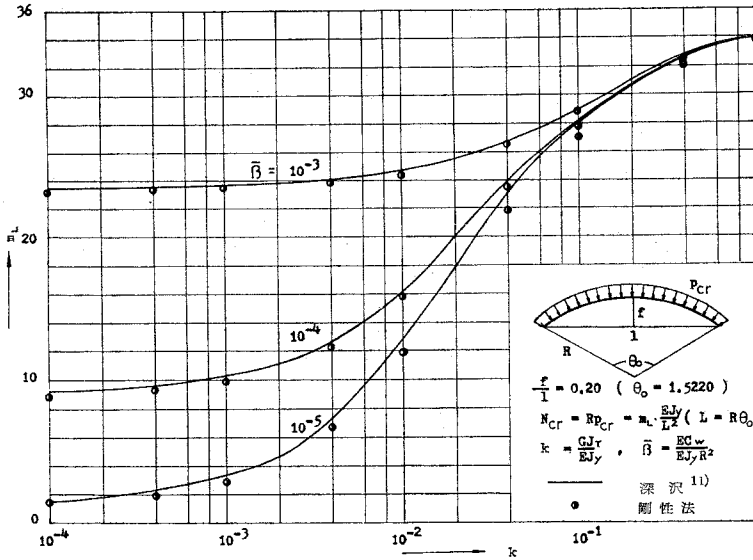


図-3

響しない。ここでは $\lambda=200$, $\chi=1$ とした。

以上から 図-3 の実線と ● 印(剛性法)は完全に一致すべきものではないが、 $\bar{\beta} = EC_w/EJ_y R^2$ が大きいほど両者はよく一致するようである。

(2) 有限変位座屈解析

a) アーチ

図-4 (a), (b) に示すようにモデルアーチの等分割点に 12 個の集中荷重を作用させ、これを零から漸増させていった場合の解析を行った。これは深沢¹¹⁾によって実験的に研究されたモデルの 1 つである。支持条件は面内では両端単純支持、面外には両端固定である。断面形とアーチ形状は図中に示す。断面定数を表-1 に示す。ただし断面寸法に比べて半径 R が 100 倍以上あるので定義式 (24) で $R_0=R$ として $R/\rho \approx 1$, $\omega/R \approx 0$ とした。よって式 (24) で、

$$J_p = J_x + J_y, \quad J_0 = J_y \quad \dots\dots\dots(61)$$

となる。式 (51) の無次元断面定数はアーチ全体に対しては記号を取り除いて、

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 &= 1.124 \times 10^5, \quad \mu = 1.0 \\ \alpha &= 1.392 \times 10^{-5}, \quad \beta = 3.731 \\ \gamma &= 7.135 \times 10^{-5}, \quad k = 4.233 \times 10^{-3} \\ \chi &= 2.731 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(62)$$

文献 12) では各点の鉛直荷重 P を 3.257 kg まで作用させている。ここではこれよりわずか大きい (0.3%) 3.266 kg まで計算を進めるものとし、0 kg から対数的に荷重を増加させ、19 回目の増分で 3.266 kg に達するようにした。すなわち Q_n から Q_{n+1} 状態への荷重増分は、

表-1

F	0.7469 cm ²
J_x	0.6708 cm ⁴
J_y	0.2456 cm ⁴
J_T	0.2703 × 10 ⁻² cm ⁴
C_w	0.3451 cm ⁶
J_q	1.769 cm ⁶

$$P = 3.266 \{ \log(n+1) - \log n \} / \log 20 \quad \dots\dots\dots(63)$$

とした ($n=1, 2, \dots, 19$)。さらにアーチ頂点にアーチ面に垂直に $P/400$ の集中荷重を作用させた。各荷重増分ごとに式 (42) をニュートン・ラフソン法で繰り返し計算を行うと 4~5 回で節点変位 q_a, q_c は有効数字 3~4 桁まで収束した。荷重増分とニュートン・ラフソン法の併用計算法について

は文献 22) を参考とした。

図-4 (a), (b) はそれぞれ荷重 P とアーチ頂点の横変位およびねじれ角の実験値との比較である。 P は荷重増分の累計である。ここで変位場の式 (1), (2) に含まれる $\sin \varphi, \cos \varphi$ をテイラー展開して軸線上の変位の 3 次式で近似したことが計算結果に与える影響の程度を見積ることができる。図-4 (b) において $P=3.266$ kg のときスパン中央のねじれ角は $\varphi=0.40$ rad である。このとき、

$$\sin \varphi = 0.3894, \quad \cos \varphi = 0.9211 \quad \dots\dots\dots(64)$$

一方、テイラー展開では、

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi &\approx \varphi - \frac{1}{3} \varphi^3 = 0.3893 \\ \cos \varphi &\approx 1 - \frac{1}{2} \varphi^2 = 0.9200 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(65)$$

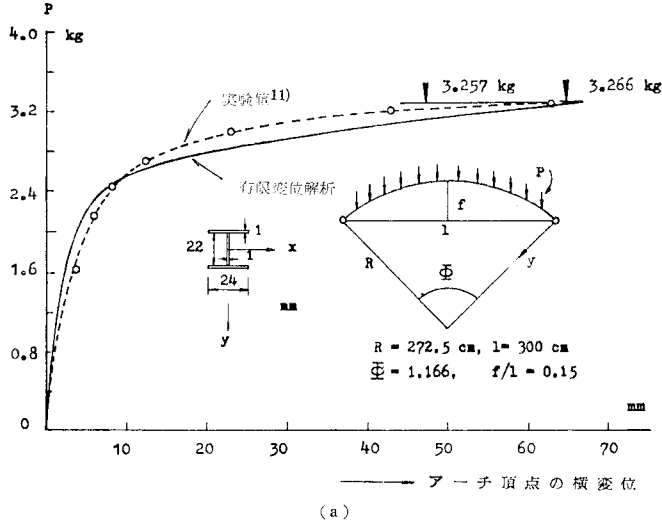
となり有効数字 2~3 桁まで一致する。

図-4 (c) は横倒れしたアーチを上からみた状態の概略図である。たわみ曲線の接線が変位前のアーチ軸線となす角を ϕ とすると部材接線回転角との関係は、

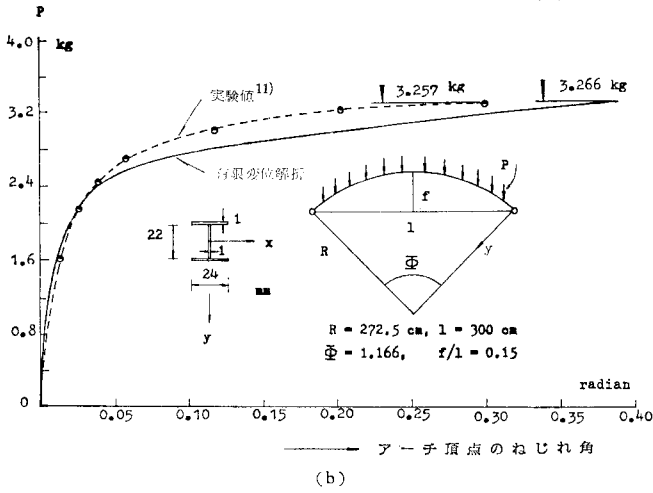
$$\tan \phi = du/dx = \phi_y \quad \dots\dots\dots(66)$$

w の式 (3) で $\sin \varphi \approx \varphi, \cos \varphi \approx 1$ として軸線上の変位の 2 次以上の項を無視すると微小変位理論の変位場に一致する。つまり接線回転角に関しては微小変位の近似式 $\phi = \tan^{-1} \phi_y \approx \phi_y$ $\dots\dots\dots(67)$

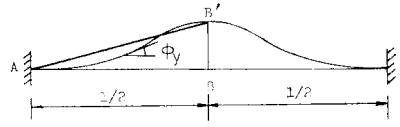
が用いられている。図-4 (c) でアーチ端と変位後の頂点を結ぶ直線 $\overline{AB'}$ と直線 \overline{AB} とのなす角は区間 $0 \leq \theta \leq \theta/2$ の間の接線回転角 ϕ_y の平均値とみなせる。図-4 (a) より $P=3.266$ kg で $\overline{BB'}$ (横変位) 約 67 mm であるから、



(a)

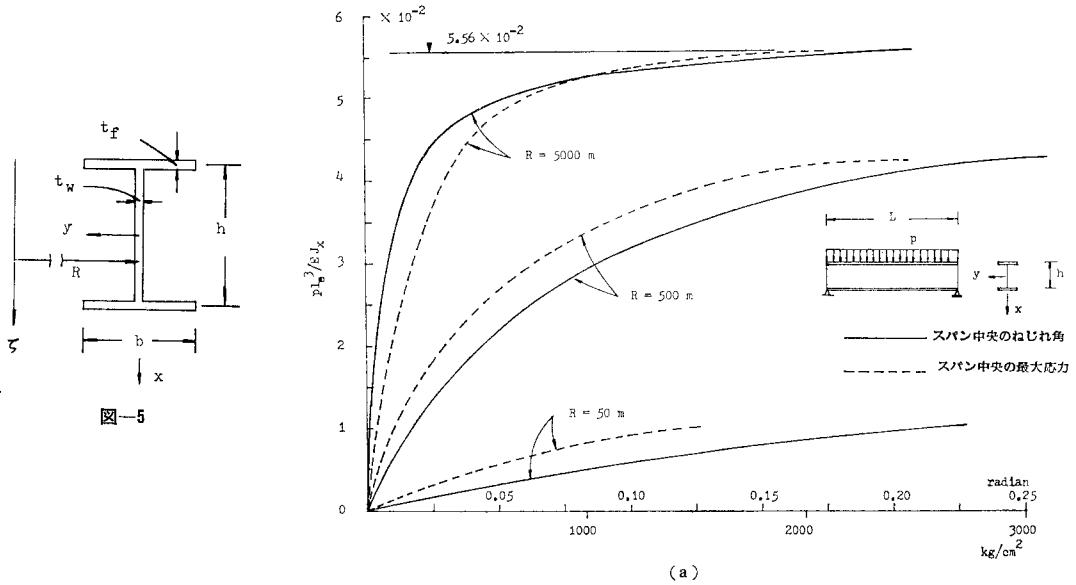


(b)



(c)

図-4



(a)

図-5

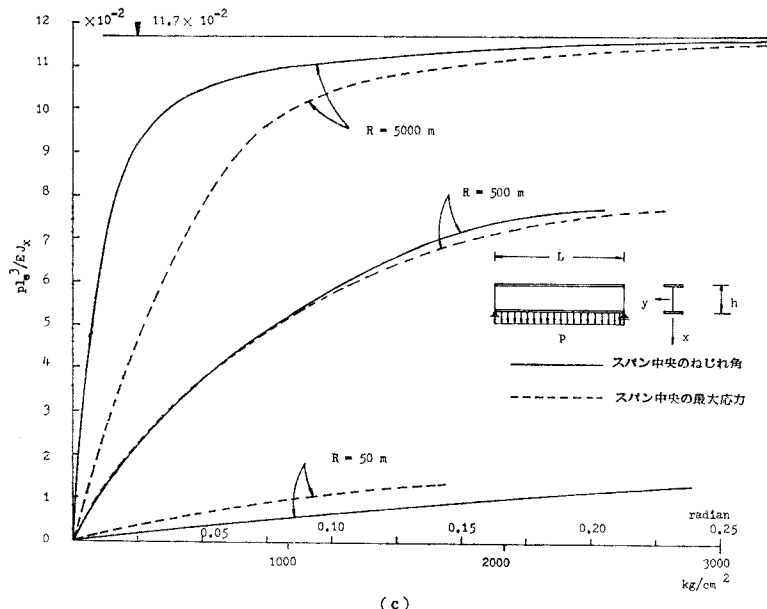
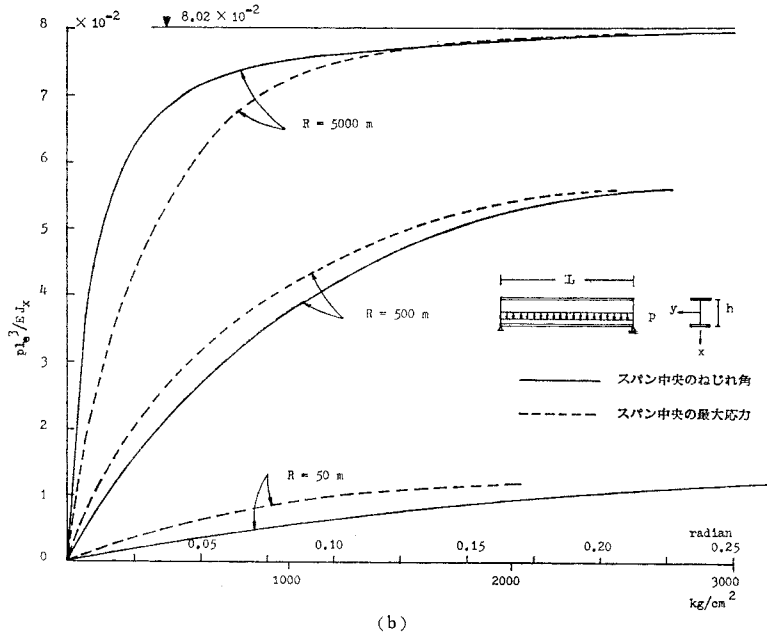


図-6

$$\phi_y = 67 / (2725 \times 1.166/2) = 0.04217 \dots\dots (68)$$

このとき、

$$\tan^{-1} \phi_y = 0.04215 \dots\dots (69)$$

つまり近似式 (67) は 3 桁まで一致する。

ひずみの式 (6) では、 ϕ' 、 ϕ_y' などの微係数も含まれるから、上述の変位場の精度より 1 桁程度下がると考えられるとしても、図-4 (a), (b) の計算結果は 2 桁程度までは信頼できるであろう。

このことは次の曲線桁の計算結果に対して同様であ

る。

b) 曲線桁

図-5 に示すような 2 軸対称 I 型断面に等分布鉛直荷重 $p_x = p$ が作用する場合を対象とした。いわゆる標準断面とすると、 L をスパンとして $h = L/20$, $b = h/3$, $t_w = h/150$, $t_f = b/25$ である。アーチの場合と同様に $R/\rho \approx 1$, $\omega/R \approx 0$ と近似すると式 (24) の J_q は

$$J_q = \frac{A_f h^4}{4} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{b}{h} \right)^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{b}{h} \right)^4 + \frac{1}{5} \frac{A_w}{A_f} \right\} \dots\dots (70)$$

となる。ここで $A_f = b^2/25$, $A_w = h^2/150$ はそれぞれ 1 フランジおよびウェブの断面積である。ほかの断面定数は式 (61) が成り立っているから微小変位理論と同じである。無次元断面定数は次のように定まる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 &= 7.560 \times 10^4 \\ \mu &= 1.0 \\ \alpha &= 1.852 \times 10^{-6} \\ \beta &= 1.030 \\ \gamma &= 6.132 \times 10^{-4} \\ k &= 8.662 \times 10^{-5} \\ \chi &= 2.963 \times 10^{-2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (71)$$

以上のほかに無次元量として円弧中心角が必要であるが、ここでは $L = R\phi = 20 \text{ m}$ を一定とし、 $R = 50 \text{ m}$, 500 m , 5000 m と変化させて構造特性を調べた。

計算方法は次のようである。始めに $R \rightarrow \infty$ の直線桁としての曲げねじれ座屈荷重を求めておく。これを $k_{cr} = p_{cr} L e^3 / EJ_x$ とすると $R = 5000 \text{ m} (\phi = 0.004)$ の場合

の荷重増分は、

$$p = k_{cr} \{ \log(n+1) - \log n \} / \log 20 \dots\dots (72)$$

とした。 $n = 19$ 以降の荷重増分は上式の最後の段階での荷重増分 $p = k_{cr} \log(20/19) / \log 20 = 0.017 k_{cr}$ とした。 $R = 500 \text{ m}$, $R = 50 \text{ m}$ に対しても上式の k_{cr} を適当に推定して増分 p を定め式 (42) の解 q_a, q_c が発散するまで計算を進めた。

載荷位置を上フランジ中央、ウェブ中央および下フランジ中央と変えたときの荷重 p (累積値) とスパン中央

でのねじれ角（実線）と最大直応力（破線）との関係を図-6 (a)~(c) に示す。最大直応力は上フランジの円弧中心側の端点で生ずる。式 (72) の n は 19~24 である。

これらの図で共通しているのは、ある荷重強度に対して $R=50\text{ m}$ では実線が破線の右側にあり、 $R=500\text{ m}$ でも同様であるがその間隔が狭くなり、 $R=5000\text{ m}$ では実線と破線の左右が逆になることである。すなわち R が小さいと応力よりも変位が卓越し、 R が大きくなるにつれ変位よりも応力が卓越してゆく様子がわかる。

6. 実 験

(1) 装 置

対象とする模型は単位を mm として弦長 810、半径 $R=4050$ で、断面形は上下フランジが 20×1.3 、ウェブが、 80×1 の 2 軸対称曲線 I 型片持桁である。固定端は図-7 に示すように、上下フランジは 1 個の、ウェブは両側面をはさんで 2 個の $40 \times 40 \times 5$ の山形鋼を介して $\phi 5$ のボルトで本実験とは別の目的で作製された 10 t 荷重フレームのウェブに取り付けた。フレームはフランジ幅が 200 mm の H 型である。実験桁の断面定数を表-2 に示す。

荷重は自由端の補剛材に $\phi 5$ のボルトで固定したプラスチック片（厚さ 5 mm）の V ノッチからつり糸で荷重板をつる

表-2

F	1.320 cm ²
J_x	0.1740 cm ⁴
J_y	12.86 cm ⁴
J_T	0.5596×10^{-2} cm ⁴
C_w	2.773 cm ⁶
J_q	192.8 cm ⁶

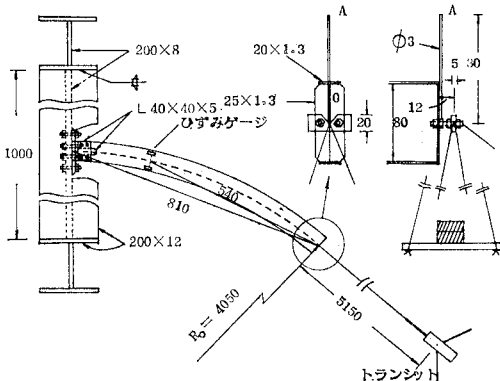


図-7 実験装置

し、これに鋼製の重りをのせた。荷重順序は、1 kg を 2 回、0.85 kg を 2 回、0.785 kg を 2 回、0.70 kg を 2 回、0.50 kg を 4 回、0.40 kg を 4 回とし、したがって最終的に 10.27 kg まで作用させた。

ひずみの測定は通常の泊ゲージを用い、自由端の変位はトランシットで測定した。図-7 に示すように、自由端のウェブに長さ 30 cm、 $\phi 3$ mm の中空の棒をハンダ付けし、この上端 A と下端 O（ウェブ中央）の水平角と鉛直角の変化を自由端の正面 5.15 m のところに置いたトランシットで測定した。基準状態からの水平角を α_A 、鉛直角を β_A などとすると、軸方向変位 w_0 を無視して

$$\left. \begin{aligned} u_0 &\doteq 515 \alpha_0 \text{ cm} \\ v_0 &\doteq 515 \beta_0 \text{ cm} \\ \sin \varphi &\doteq 515 (\beta_A - \beta_0) / 30 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (73)$$

より変位が求まる。

(2) 結 果

計算は 10 等分割要素とし、計算に必要な断面定数は表-2 より、

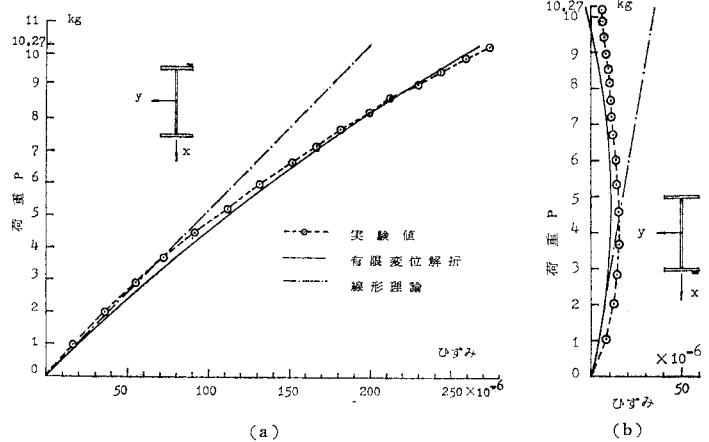


図-8

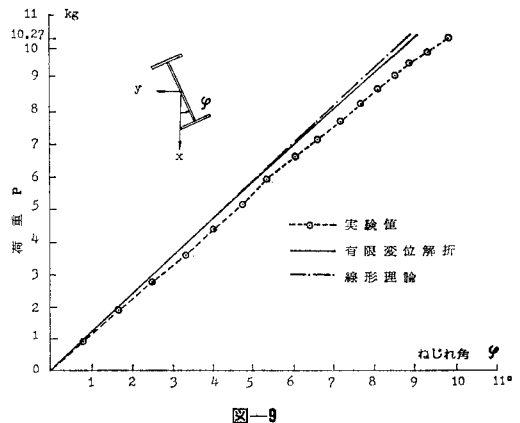


図-9

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 &= 4.751 \times 10^4, \quad \mu = 1.0 \\ \alpha &= 3.443 \times 10^{-5}, \quad \beta = 1.014 \\ \gamma &= 2.394 \times 10^{-3}, \quad k = 1.679 \times 10^{-4} \\ \chi &= 1.353 \times 10^{-2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (74)$$

ただし固定端は前の山形鋼のウェブ中心と考えて、弦長は 79 cm とした。中心角は $\phi = 0.1954$ 、スパン $L = 79.14$ cm となる。

自由端から弦長にして 54 cm のところの断面のひずみの実測値 (●) と計算値の比較の一部を図-8 (a), (b) に示す。図-9 は自由端のねじれ角の比較図である。ねじれ角は線形的に増加しているが、ひずみは弾性限度以内でも非線形性が顕著である。なお、この実験桁の直線桁としての曲げねじれ座屈荷重は 60.4 kg である。

7. あとがき

薄肉断面部材の座屈問題を含めた有限変位問題は、非線形ひずみ-変位関係式と応力のつり合い式を基礎とするとの認識のもとに、これに棒部材の仮定を適用して得られる変位場と応力場を用いて薄肉曲線材の微小変位座屈解析と有限変位解析を行った。結果は以下のである。

(1) 変位場と応力場を部材軸線上の変位の 3 次の非線形項まで考慮した式で表わし、これら軸線上の変位を曲線要素内で座標の 3 次式で近似した場合の剛性方程式を得た。剛性方程式は無次元化された一般的な形で与えた。

(2) アーチの面内逆対称と曲げねじれ座屈荷重を計算して理論解と比較した結果、特に部材軸方向変位を座標の 3 次式で近似することが計算精度を著しく改善するのがわかった。

(3) アーチに鉛直集中荷重系が作用する場合の曲げねじれ座屈現象の進行を、荷重増分ごとにニュートン・ラフソン法を適用して追跡した結果、従来の実験値を定量的にもよく再現できた。

(4) 標準断面をもつ曲線 I 型桁に鉛直等分布荷重が作用した場合を載荷高さと曲率半径を変えて、ほぼ降伏点応力度まで解析した。曲率半径が小さいほど応力よりも変位の成長が進行し、曲率半径がスパンに比べて非常に大きいと (本報告では 250 倍) 曲げねじれ座屈現象が顕著に現われる。

(5) 曲線片持ち I 型桁の自由端に集中荷重を漸増させた場合の模型実験を行い、ひずみが弾性限度以内でも荷重-ひずみ関係は大きな非線形性を示すことが実験的にも数値的にも捕えられた。

本報告における計算は北海道大学大型計算機センター

および秋田大学と東北大学大型計算機センターを結ぶ TSS を用いて実行した。

【付録 1】

(1) $\bar{\theta} = \theta / \phi_e$ とすると

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_z &= [-4\bar{\theta} + 6\bar{\theta}\bar{\theta} - 2\bar{\theta}\bar{\theta}^2, \bar{\theta}(\phi_e^2 - 6) + 2\bar{\theta}^2 \\ &\quad \times (3 - \phi_e^2) + \theta^2\bar{\theta}, -\theta(1 - 2\bar{\theta} + \bar{\theta}^2), 1 - 4\bar{\theta} \\ &\quad + 3\bar{\theta}^2, -2\theta(1 - \bar{\theta}^2), 6\bar{\theta} - \bar{\theta}^2(6 + \phi_e^2) \\ &\quad + \theta^2\bar{\theta}, \theta(\bar{\theta} - \bar{\theta}^2), -2\bar{\theta} + 3\bar{\theta}^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\phi x} &= [\bar{\theta}(\phi_e^2 - 6) + 2\bar{\theta}^2(3 - \phi_e^2) + \theta^2\bar{\theta}, 2\theta(2 \\ &\quad - 3\bar{\theta} + \bar{\theta}^2), 1 - 4\bar{\theta} + 3\bar{\theta}^2, \theta(1 - 2\bar{\theta} + \bar{\theta}^2), \\ &\quad 6\bar{\theta} - \bar{\theta}^2(6 + \phi_e^2) + \theta^2\bar{\theta}, 2\theta(1 - \bar{\theta}^2), \\ &\quad \bar{\theta}(-2 + 3\bar{\theta}^2), \theta(-\bar{\theta} + \bar{\theta}^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\phi y} &= [6\bar{\theta}(-1 + \bar{\theta}), 1 - 4\bar{\theta} + 3\bar{\theta}^2, 0, 0, 6\bar{\theta} \\ &\quad \times (1 - \bar{\theta}), \bar{\theta}(-2 + 3\bar{\theta}), 0, 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\phi z} &= [-6 + 12\bar{\theta}, -4 + 6\bar{\theta}, 0, 0, 6 - 12\bar{\theta}, \\ &\quad -2 + 6\bar{\theta}, 0, 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\psi z} &= [6\theta(1 - \bar{\theta}), 0, 6\bar{\theta}(-1 + \bar{\theta}), 1 - 4\bar{\theta} + 3\bar{\theta}^2, \\ &\quad 6\theta(-1 + \bar{\theta}), 0, 6\bar{\theta}(1 - \bar{\theta}), \bar{\theta}(-2 + \bar{\theta}^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\kappa x} &= [\phi_e^2 - 6 + 4\bar{\theta}(3 - \phi_e^2) + 3\theta^2, 4\phi_e - 12\theta \\ &\quad + 6\theta\bar{\theta}, -4 + 6\bar{\theta}, \phi_e - 4\theta + 3\theta\bar{\theta}, 6 - 2\bar{\theta} \\ &\quad \times (6 + \phi_e^2) + 3\theta^2, 2\phi_e - 6\theta\bar{\theta}, -2 + 6\bar{\theta}, \\ &\quad -2\theta(1 - 3\bar{\theta})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\theta \omega} &= [6(\phi_e - 2\theta), 0, 6(-1 + 2\bar{\theta}), -4 + 6\bar{\theta}, \\ &\quad -6\phi_e + 12\theta, 0, 6(1 - 2\bar{\theta}), -2 + 6\bar{\theta}] \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_{\kappa y} = \mathbf{B}_{\phi y} + \phi_e \mathbf{N}_\varphi$$

(2)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_a^\circ &= \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \mathbf{B}_{\phi x}^T (\lambda_e^2 \mathbf{B}_z + \phi_e \mathbf{B}_{\kappa x}) \phi_x^\circ d\theta \\ \mathbf{K}_a^{\circ\circ} &= \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \left\{ (\phi_e^2 + \lambda_e^2) \phi_x^{\circ 2} + \frac{\kappa}{\chi} \phi_0^2 \phi_e^2 \right\} \\ &\quad \times \mathbf{B}_{\phi x}^T \mathbf{B}_{\phi x} + \frac{1}{\chi} (1 + \alpha_e^2 \phi_e^2) \mathbf{B}_\Pi^{\circ T} \mathbf{B}_\Pi^\circ d\theta \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{aa}^{\circ\circ} = \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \left(\mathbf{B}_\Pi^{\circ\circ T} \mathbf{B}_{\kappa x} + \frac{\mu}{\chi} \mathbf{B}_\Pi^{\circ\circ T} \mathbf{B}_z \right) d\theta$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{aa}^\circ &= \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \left\{ \mathbf{B}_\Pi^{\circ T} (\mathbf{B}_{\kappa y} - \alpha_e \phi_e \mathbf{B}_{\theta \omega}) - \varphi^\circ k \phi_e \right. \\ &\quad \times \mathbf{B}_{\phi x}^T \mathbf{B}_{\psi z} \left. \right\} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ab}^\circ &= \frac{\chi}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \left\{ \mathbf{B}_z^T (\lambda_e^2 \phi_y^\circ \mathbf{B}_{\phi y} + \frac{\beta}{\chi} \tilde{\psi}_z^\circ \mathbf{B}_{\psi z}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{B}_{\kappa x}^T (\mathbf{B}_I^\circ + \phi_y^\circ \phi_e \mathbf{B}_{\phi y}) \right\} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ac}^{\circ\circ} &= \frac{\chi}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \left[\phi_x^\circ \mathbf{B}_{\phi x}^T \left\{ (\phi_e^2 + \lambda_e^2) \phi_y^\circ \mathbf{B}_{\phi y} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \phi_e \mathbf{B}_I^\circ + \frac{\beta}{\chi} \tilde{\psi}_z^\circ \mathbf{B}_{\psi z} \right\} + \frac{k}{\chi} \varphi^\circ \phi_x^\circ \mathbf{B}_{\phi x}^T \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{N}_\varphi \phi_e^2 + \frac{1}{\chi} (1 + \alpha_e \phi_e^2) \mathbf{B}_\Pi^{\circ T} \mathbf{B}_\Pi^\circ \right] d\theta \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{ad}^{\circ\circ} = \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\phi_e} \mathbf{B}_\Pi^{\circ\circ T} (\mathbf{B}_{\kappa y} - \alpha_e \phi_e \mathbf{B}_{\theta \omega}) d\theta$$

$$\begin{aligned}
K_{ae}{}^{oo} &= \frac{\chi}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} \left(B_{\kappa x}{}^T B_V{}^{oo} + \frac{\mu}{\chi} B_z{}^T B_X{}^{oo} \right) d\theta \\
K_C{}^o &= \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} \{ B_{IV}{}^{oT} (B_{\kappa y} - \alpha_e \Phi_e B_{\theta w}) \\
&\quad - k \phi_x{}^o \Phi_e N_\varphi{}^T B_{\psi z} \} d\theta \\
K_C{}^{oo} &= \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} \{ \chi (\Phi_e^2 + \lambda e^2) \phi_y{}^{oo} B_{\phi y}{}^T B_{\phi y} + \chi B_I{}^{oT} \\
&\quad \times B_I{}^o + \chi \phi_y{}^o (B_{\phi y}{}^T B_I{}^o + B_I{}^{oT} B_{\phi y}) \Phi_e \\
&\quad + (1 + \alpha_e \Phi_e^2) B_{III}{}^{oT} B_{III}{}^o + \beta \phi_y{}^o \psi_z{}^o (B_{\psi z}{}^T \\
&\quad \times B_{\phi y} + B_{\phi y} B_{\psi z}{}^T) + \tau e \psi_z{}^{oo} B_{\psi z}{}^T B_{\psi z} \\
&\quad + k \Phi_e^2 \phi_x{}^{oo} N_\varphi{}^T N_\varphi \} d\theta \\
K_{cc}{}^{oo} &= \frac{1}{\Phi_e} \int_0^{\Phi_e} \{ B_{III}{}^{oT} B_{\kappa y} + \alpha_e B_{III}{}^{oT} B_{\theta w} \\
&\quad + k B_{III}{}^{ooT} B_{\psi z} \} d\theta
\end{aligned}$$

以上で、

$$\begin{aligned}
B_{II}{}^o &= \varphi^o B_{\kappa x} + \phi_y{}^o \Phi_e B_{\phi x} \\
B_{III}{}^o &= \tilde{\kappa}_x{}^o N_\varphi + \phi_x{}^o \Phi_e B_{\phi y} \\
B_{IV}{}^o &= -\varphi^{oo} B_{\kappa x} / 2 - \varphi^o \phi_y{}^o \Phi_e B_{\phi x} \\
B_V{}^{oo} &= -\varphi^o (\tilde{\kappa}_x{}^o N_\varphi + \phi_x{}^o \Phi_e B_{\phi y}) - \phi_x{}^o \phi_y{}^o \Phi_e N_\varphi \\
B_{VI}{}^{oo} &= 2 \varphi^o \phi_x{}^o \Phi_e B_{\phi x} \\
B_{VII}{}^{oo} &= -\varphi^{oo} B_{\kappa y} / 2 + (\phi_x{}^{oo} \Phi_e - \varphi \tilde{\phi}_y{}^o) N_\varphi \\
B_{VIII}{}^{oo} &= \{ (-\phi_x{}^2 \Phi_e + \varphi \tilde{\phi}_y{}^o + \tilde{\phi} \phi_y) N_\varphi + \varphi^o \phi_y{}^o N_\varphi \\
&\quad + \varphi^o \tilde{\phi} B_{\phi y} + \varphi^{oo} B_{\phi y} / 2 \} \Phi_e \\
B_{IX}{}^{oo} &= -\varphi^o \tilde{\psi}_z{}^o \Phi_e B_{\phi x} \\
B_X{}^{oo} &= -\phi_n{}^o \Phi_e (\varphi^o B_{\psi z} + \tilde{\psi}_z{}^o N_\varphi) \\
B_{XI}{}^{oo} &= \tilde{\psi}_z{}^o (2 \varphi^o B_{\psi z} + \tilde{\psi}_z{}^o N_\varphi) \\
B_{XII}{}^{oo} &= \Phi_e (\varphi^o \phi_y{}^o B_{\psi z} + \varphi^o \tilde{\psi}_z{}^o B_{\phi y} + \phi_y{}^o \tilde{\psi}_z{}^o N_\varphi) \\
B_{XIII}{}^{oo} &= \varphi^o \Phi_e (\varphi^o B_{\phi y} / 2 + \phi_y{}^o N_\varphi)
\end{aligned}$$

(3) i 行 j 列の要素を k_{ij} とし、 $\Phi_e = \Phi$, $\lambda e^2 = \lambda^2$ とおくと、

$$\begin{aligned}
k_{11} &= 32 \lambda^2 \Phi^2 / 105 + 12 - 2 \Phi^2 + 2 \Phi^4 / 15 \\
k_{12} &= \lambda^2 \Phi (-11 \Phi^2 / 210 + 3/5) + 6 \Phi (\Phi^2 / 10 - 1) \\
k_{13} &= 11 \lambda^2 \Phi^2 / 210 + 2(3 - \Phi^2 / 4) \\
k_{14} &= \lambda^2 \Phi / 30 + \Phi (-1 + 2 \Phi^2 / 15) \\
k_{15} &= 31 \lambda^2 \Phi^2 / 105 + (-12 + 2 \Phi^2 - \Phi^4 / 30) \\
k_{16} &= 2 \Phi \{ \lambda^2 (-3/10 + \Phi^2 / 42) - 3 + \Phi^2 / 5 \} \\
k_{17} &= -\lambda^2 \Phi^2 / 21 + 2(3 - \Phi^2 / 4) \\
k_{18} &= \lambda^2 \Phi / 15 + \Phi (1 - \Phi^2 / 30) \\
k_{22} &= \lambda^2 (6/5 - \Phi^2 / 5 + \Phi^4 / 105) + 16 \Phi^2 / 5 \\
k_{23} &= \lambda^2 \Phi (1/10 - \Phi^2 / 105) - 3 \Phi \\
k_{24} &= \lambda^2 / 10 + 6 \Phi^2 / 10 \\
k_{26} &= \lambda^2 (-6/5 + \Phi^2 / 5 - \Phi^4 / 140) + 28 \Phi^2 / 10 \\
k_{27} &= \lambda^2 \Phi (-1/10 + \Phi^2 / 140) - 3 \Phi \\
k_{28} &= \lambda^2 (1/10 - \Phi^2 / 60) - 4 \Phi^2 / 10 \\
k_{33} &= \lambda^2 \Phi^2 / 105 + 4, \quad k_{34} = -\Phi / 2 \\
k_{37} &= -\lambda^2 \Phi^2 / 140 + 2, \quad k_{38} = \lambda^2 \Phi / 60 + \Phi / 2 \\
k_{44} &= 2 \lambda^2 / 15 + 2 \Phi^2 / 15, \quad k_{46} = -(\lambda^2 + \Phi^2) / 30 \\
k_{25} &= -k_{15}, \quad k_{35} = -k_{17}, \quad k_{36} = k_{27}, \quad k_{45} = k_{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{46} &= -k_{26}, \quad k_{47} = -k_{38}, \quad k_{55} = k_{11}, \quad k_{56} = -k_{12} \\
k_{57} &= -k_{13}, \quad k_{58} = k_{14}, \quad k_{66} = k_{22}, \quad k_{67} = k_{23} \\
k_{68} &= -k_{24}, \quad k_{77} = k_{33}, \quad k_{78} = -k_{34}, \quad k_{88} = k_{44}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
A_I{}^o &= -\varphi^o (B_{\kappa x}{}^T N_\varphi + B_{\phi x}{}^T B_{\phi y} \Phi_e) \\
&\quad - \phi_y{}^o \Phi_e B_{\phi x}{}^T B_\varphi \\
A_{II}{}^o &= -N_\varphi{}^T (\tilde{\kappa}_x{}^o N_\varphi + \phi_x{}^o \Phi_e B_{\phi y}) \\
&\quad - \phi_x{}^o B_{\phi y}{}^T N_\varphi \Phi_e \\
A_{III}{}^o &= 2 \varphi^o \Phi_e B_{\phi x}{}^T B_{\phi x} \\
A_{IV}{}^o &= 2 \phi_x{}^o \Phi_e B_{\phi x}{}^T N_\varphi \\
A_V{}^o &= -N_\varphi{}^T (\tilde{\kappa}_x{}^o N_\varphi + \varphi^o B_{\phi y}) - \varphi^o B_{\phi y}{}^T N_\varphi \\
A_{VI}{}^o &= \tilde{\phi}^o \Phi_e (B_{\phi y} N_\varphi + N_\varphi{}^T B_{\phi y}) + \varphi^o (B_{\phi y}{}^T N_\varphi \\
&\quad + N_\varphi + N_\varphi{}^T B_{\phi y} + B_{\phi y}{}^T N_\varphi + N_\varphi{}^T B_{\phi y}) \Phi_e \\
A_{VII}{}^o &= -\Phi_e B_{\phi x}{}^T (\varphi^o B_{\psi z} + \tilde{\psi}_z{}^o N_\varphi) \\
A_{VIII}{}^o &= -\phi_x{}^o \Phi_e (N_\varphi{}^T B_{\psi z} + B_{\psi z}{}^T N_\varphi) \\
A_{IX}{}^o &= \varphi^o \Phi_e (B_{\psi z}{}^T B_{\phi y} + B_{\phi y}{}^T B_{\psi z}) \\
&\quad + \phi_y{}^o \Phi_e (B_{\psi z}{}^T N_\varphi + N_\varphi{}^T B_{\psi z}) \\
&\quad + \psi_z{}^o \Phi_e (B_{\phi y}{}^T N_\varphi + N_\varphi{}^T B_{\phi y}{}^T) \\
A_X{}^o &= \varphi^o \Phi_e (B_{\phi y}{}^T N_\varphi + N_\varphi{}^T B_{\phi y}) + \phi_y{}^o \Phi_e N_\varphi{}^T N_\varphi
\end{aligned}$$

参考文献

- 1) Timoshenko, S.: Kippsicherheit des gekrümmten Stabes mit Kreisförmiger Mittellinie, Z.A.M.M., Heft 5, pp. 358~362, 1923.
- 2) Stüssi, F.: Kippen und Querschwingungen von Bogenträgern, Int. Assoc. of Bri. and Str. Engrs. Pubs., Vol. 7, pp. 327~343, 1943.
- 3) Östlund, L.: Lateral Stability of Bridge Arches Braced with Transverse Bars, Trans. of Royal Insti. of Tech., Stockholm, Sweden, 1954.
- 4) Godden, W.G.: The Lateral Buckling of Tied Arches, Proc. of I.C.E., Part III, pp. 496~514, 1954.
- 5) Esslinger, M.: Flambage Lateral des Poutres en I courbe tenant compte de la torsion de flexion, Annales des Ponts et Chaussées, Mai-Juni 1954.
- 6) Klöppel, K. and W. Protte: Ein Beitrag mit Kipp-Problem des keistörnig gekrümmten Stabes, Der Stahlbau, Heft 1, pp. 1~15, Jan. 1961.
- 7) Stein, P.: Die Anwendung des "Durchbiegungsverfahrens" zur Ermittlung des Kritischen Last von Bogenträgern beim Ausweichen senkrecht zu ihrer Ebene unter Berücksichtigung von biegeweichen Hängern, Bauingenieur, Heft 5, pp. 175~183, 1961.
- 8) 倉西 茂: アーチ橋のねじれ座屈について, 土木学会論文集, 第 75 号, pp. 59~64, 1961.
- 9) Vlasov, V.Z. (奥村敏憲ほか共訳): 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 1967.
- 10) 深沢泰晴: 軸圧縮力を受ける円弧アーチの曲げねじれ座屈に関する研究, 土木学会論文集, 第 96 号, pp. 29~47, 1963.
- 11) Ojalvo, I.U. and M. Newman: Buckling of Naturally Curved and Twisted Beams, ASCE, EM 5, pp. 6156~1087, Oct. 1968.
- 12) Namita, Y.: Die Theorie II. Ordnung von krummen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers, Trans. of JSCE, No. 155, pp. 32~41, 1968.

- 13) 薄木征三：変形を考慮した薄肉断面円弧アーチの曲げねじれ座屈，土木学会論文報告集，第263号，pp. 35～48，1977.
- 14) 遠田良喜：伝達マトリックス法による薄肉断面曲線ばりの有限変位解析，土木学会論文集，第237号，pp. 11～26，1972.
- 15) Bazant, Z.P. and M.E. Nimeiri : Stiffness Method for Curved Box Girders, ASCE, ST 10, pp. 2071～2090, Oct. 1974.
- 16) 前田幸雄・林 正：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，第253号，pp. 13～27，1976.9.
- 17) Ashwell, D.G. and R.H. Gallagher : Finite Elements for Thin Shells & Curved Members, John Wiley & Sons, 1976.
- 18) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，第225号，pp. 1～15，1974.5.
- 19) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd edition, Pergamon Press, 1975.
- 20) 薄木征三・稼農知徳：薄肉断面曲線材の変形法による解析，土木学会論文集，第235号，pp. 29～39，1975.3.
- 21) Oden, J.T. : Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, 1972.

(1978.2.8・受付)
