

交通ネットワークにおける需要均衡問題とその解法

A DEMAND-EQUILIBRIUM PROBLEM IN TRANSPORTATION
NETWORKS AND ITS SOLUTION METHOD

加 藤 晃*・宮 城 俊 彦**

By Akira KATOH and Toshihiko MIYAGI

1. はじめに

交通・運輸にかかる諸問題は社会経済的構造と密接に関係し、輸送システムと社会経済システムは相互に関連しながら動的に変化する。その結果生産される人や物資の流動（フロー）は、また逆に輸送システムや社会経済システムにインパクトを与える。したがって任意の時点における輸送ネットワーク上のフローを予測する問題は、これらのシステムの動的な関係を表現できるモデルを通して行う必要がある。しかし、輸送システム、社会経済システムそして輸送ネットワーク上のフローの動的な相互依存関係に対するわれわれの知識はまだ十分ではない。このような相互依存関係をもつシステムに対する基本的アプローチは、まず基本となる関係を別々に抽出し、サブシステムとして構成したのち、トータルシステムとしてサブシステム間の関係を明確にしていくことであろう。交通量予測に関連した基本的サブシステムは、輸送システムと社会経済システムを与えてフローを求めるという図式であり、フローが輸送システムを与える影響、そしてフローが社会経済システムを与える影響は別のサブシステムを構成するとして分離してしまうことである。すなわち、輸送ネットワーク上のフローを求める問題における重要な仮定は、独立した交通市場が存在することである。より具体的には、輸送システムを構成する輸送ネットワークの地理的、物理的特性および車両の走行特性あるいは燃費といった輸送技術変数が与えられ、また、社会経済システムを構成する土地利用形態、交通にかかる諸制度あるいは人口、雇用者数、所得等の諸変数の値が与えられた場合、輸送サービスに対する交通需要と輸送施設が供給し得る交通量とが均衡すると考えることである^{1), 2)}。

このように交通ネットワークにおける均衡問題とは、輸送ネットワークの地理的形態およびリンク特性が与えられた場合、その輸送ネットワーク上のフローの分布がどのようになるのかを予測する問題といえる。ところで、ネットワーク均衡問題において、起終点間の交通需要が輸送ネットワークの供給し得るサービス水準に依存して変化すると考える場合を可変需要均衡問題あるいは需要-供給均衡問題（単に需要均衡問題）といいう。それに対し、従来の交通配分のように起終点間の需要量がすでに与えられている場合や供給されるサービスに対する需要の弾力性が非常に小さいと考えられる交通に対する均衡問題を固定需要均衡あるいは Wardrop 均衡問題といいう。

本研究は、特に道路ネットワークにおける需要均衡問題について考察しているが、これについては、1956 年 Beckmann によって数理計画問題として定式化され、その後いくつかの解法が提案されてきたが、一般的ネットワークに対し数理計画的手法に裏づけられた方法が提案されるようになったのはごく最近のことである。この概要は 2. で述べる。4. では交通量予測の考え方としての需要-供給均衡モデルについて触れ、ネットワーク均衡問題では経済均衡問題とは異なり特有の供給曲線のシフト現象が存在することを示す。また、5. では Beckmann モデルを経路交通量を変数とし、またリンク容量制約を含めた形で再定式化し、解の存在と一意性の問題について考察する。6. では 5. で与えられる問題の解法について述べるが、ここで提案する手法は、勾配法の変形を用いている点で従来の方法と異なり、また目的関数を線形化し直線探索過程がより容易になっている点および直線探索法として Almijo の方法を採用している点で著者らが提案した前の方法³⁾ の改良型となっている。また、大規模ネットワークへの適用について考察し、7. では 6. で述べるアルゴリズムの計算例を示す。

* 正会員 工博 岐阜大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 岐阜大学助手 工学部土木工学科

2. 需要均衡アルゴリズムの歴史的背景

ネットワーク上のフロー分布の予測に関し、2つの妥当性をもったフロー・パターン決定の規準が提案された。その1つは、中央集約的管理機構によってフローが制御できる場合に適用可能なもので、この場合、管理者当局はネットワーク全体の総費用が最も安くなるような交通パターンを決定できる。他の1つは、ネットワークを利用する人の自由に任せたときに現出すると思われる交通パターンであり、利用者はおのれの自己の利益が最大になるよう行動すると考えられている。

Pigue はこの2つの規準によって導かれる交通パターンが異なったものになることを2ノード、2リンクのネットワークを用いて初めて示した⁴⁾。また、Knight は異なるサービス特性をもつ道路における交通について均衡状態が存在することを示唆した⁵⁾。

その後、Wardrop は2つのノードとそれを結ぶ n 個の独立した経路より構成されるネットワークに対し、上述の規準を用いた交通パターンを求め、また一般的なネットワークにおける均衡条件式についても触れた⁶⁾。それ以来これらの規準は Wardrop の配分原則とよばれるようになり、利用者の合理的行動を前提としてフロー分布を決定する方法を第1原則、ネットワーク全体の総費用を最小化するようフロー分布を決定する方法を第2原則という。特に第1原則は、今日のネットワーク均衡問題の基本となる人の交通行動に関する仮説を与えており、Jorgensen は Wardrop の配分原則をリンク容量制約を含む数理計画問題として定式化し、同時に第1原則と第2原則の互換性についても触れた⁷⁾。このように Wardrop 均衡の基本的定式化は Jorgensen によって行われたが、交通需要がネットワークのサービス水準に關係なく一定としている点に特徴がある。また、電気回路網における Maxwell の最小発熱定理に類似している点は興味深い。ところで、需要均衡問題については Beckmann が Jorgensen より以前に数理計画問題として定式化を行っている。Beckmann はさらに可変需要の場合の Wardrop 第2原則に相当する消費者余剰問題についても言及しており、需要均衡問題との関連を説明している⁸⁾。その意味では Wardrop の原則の初めての定式化は Beckmann によってなされたということができ、その業績は高く評価できる。なお、最近になって一般化されたネットワーク均衡問題に対する定式化が Hall と Peterson によって数学的にはほぼ完成された形で与えられた⁹⁾。

ここで、これまでに提案された需要均衡問題に対するアルゴリズムについて振り返ってみよう。

このような意図のもとに提案された最初の手法は1965年の Martin と Manheim による増加配分法(通称 IA 法 Incremental Assignment Method)である¹⁰⁾。IA 法は需要曲線の代わりに発生率曲線という概念を用いるが、発生率曲線は現実には誘導し得なかった。また杉恵はこのアイデアを実用化すべく同様の試みを行っている¹¹⁾。これらはいずれもヒューリスティックなものであり、均衡解への収束の保証はなく、また実際にも均衡解とは異なる結果へ導く場合もある^{12), 13)}。しかし、IA 法は久しく忘れられていた需要均衡モデルへの注意を促した点で評価でき、また杉恵の試みはわが国では最初の需要均衡モデルへの挑戦であった。

収束性が保証された厳密なアルゴリズムが提案されるようになったのは Gibert¹⁴⁾以降である。また、Murchland¹⁵⁾は Maxwell の最小発熱定理の拡張である co-content の最適化規準と類似のものに基づくアルゴリズム原則とでもいうべきものを提案した。Murchland による電気回路網におけるフロー問題のアナロジーとしての交通ネットワーク問題の見直しは、その後の Hall と Peterson の均衡問題の一般化、あるいは Ruiter¹⁶⁾、Gartner¹⁷⁾のアルゴリズムに少なからず影響を与えたことは疑う余地もない。

70年代に入ってからは数理計画手法に基づくアルゴリズムが報告されるようになった。まず、1971年に Wilkie と Stefanek¹⁸⁾が制御システム設計におけるパラメーターの最適化問題と同様の考え方のアルゴリズムを提案したが、この方法はすべてのノードがセントロイドの場合にのみ適用可能なものである。その後に、Florian と Nguyen¹⁹⁾、Nguyen²⁰⁾によって経路交通量を変数とした需要均衡問題の解法が示されたが、前者は一般化された Benders の分解原理に基づいており、また、後者は実行可能方向法に基づくより一般的な解法を示している。これらの中で、一般的なネットワークに適用可能で、しかも実用的な方法だと思われるのが Frank-Wolfe 分解原理に基づく手法である²⁰⁾。この場合、計算の段階では経路情報を犠牲にしてリンク交通量だけを操作しており、したがって、リンク交通量を変数にした場合と同じ結果を得る。Gartner も Frank-Wolfe の分解原理に基づく同様のアルゴリズムを発表しているが¹⁷⁾、これらは逆需要関数を再帰リンクの容量関数として対応づけることによって、需要均衡問題を Wardrop 均衡問題と同様な方法で解こうとしていると考えることができる。したがって、計算手法としては Evans の方法²¹⁾と類似のものである。ただし、Evansにおいては需要曲線の概念ではなく、分布モデルと配分モデルの整合性のみが考えられている。

以上が需要均衡問題に対するアルゴリズムの展開であ

るが、当然のことながらそれまでに提案された多くの固定需要均衡問題に対するアルゴリズムが大きく寄与している。わが国でも固定需要の場合については多くの研究成果があるが、需要均衡問題に対しては杉恵以降、著者らの報告があるのみである。

3. ネットワークとフローに関する定義

交通ネットワークはノード集合 N と有向リンク集合 L により構成される有向グラフ $G[N, L]$ として表わすことができる。 N の要素は交通の発生・吸引点を表わすセントロイド集合 I と中間ノード集合 \bar{I} より構成されるが、各ノードは非負整数値 i を 1 対 1 に対応させることによって区別できる。 $i(i \in I)$ は 1 から s , $i(i \in \bar{I})$ は $s+1$ から n までの値が割り当てられているものとする。また、 L の要素 $j(j \in L)$ にも 1 から l までの一連の非負整数値が対応しているものとする。

任意のセントロイド間（あるいは OD ペア） k の同種の流れをコモディティとよぶ。この場合、起点となるセントロイドを O_k 、また終点のセントロイドを D_k と表わす。ところで、ある OD 間で自動車とバスの流動あるいは人と貨物の流動などを考える場合、これらを異種の交通流動として解析しようとするならば、1 つの OD 間に複数のコモディティが存在することになる。この場合には、目的地ノード O_k から出発地ノード d_k へ向うおのののコモディティに対応した再帰リンクを設定することによってこれら異種の流れが区別できる³⁾（図-1）。本論では自動車の流れのみを対象としているので、OD ペア数とコモディティ数は一致し、したがって再帰リンクの数も OD ペア数に等しい。特に都市交通を閉じたシステムとして解析する場合には、交通発生点と吸引点は同数個存在すると考えてよいので、コモディティ数 r は $r=(s-1) \cdot s/2$ で与えられる。再帰リンクも含めたネットワーク $G[N, L']$ では、 $j(j \in L')$ は 1 から r までが再帰リンク集合 R に属し、残り $r+1$ から l までが一般のリンク集合 L を構成する。すなわち $L'=R \cup L$ 。本論で対象とするネットワークは OD ペアが再帰リンクと 1 対 1 に対応するので、 k 番目の OD ペア

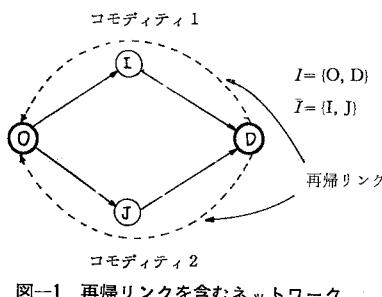


図-1 再帰リンクを含むネットワーク

アを表わす添字 k は再帰リンク $k(k \in R)$ に対応する。

ところで、OD ペアには利用可能な経路が多数存在する。このような経路の集合を利用可能経路集合とよび、OD ペア k については P_k で表わす。 P_k は有限で、また非零集合であると仮定する。しかし均衡状態で実際に利用される経路はさらに限定される。実際に利用される経路の集合を有効経路集合とよび E と記す。このとき、すべての OD ペアについて、 $E_k \subseteq P_k$ が成立する。有効経路集合の要素 $r(r \in E)$ も 1 から m までの非負整数値が割り当てられる。ところで、経路 r はいくつかのリンクで構成される。経路 r を構成するリンク集合を r_L で表わす。

4. 交通量予測原理

任意の OD 間の交通需要 $x_k(k \in R)$ は、交通発生ゾーンおよび吸引ゾーンの社会経済システム変数ベクトル A_{O_k}, A_{D_k} とその地域間の交通サービス水準を表わすベクトル S_k の関数 D_k で表わされる。

$$x_k = D_k(A_{O_k}, A_{D_k}, S_k) \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

この関数 D を需要関数といい、社会経済システム変数がフローによるインパクトを受けないと仮定できる範囲では、 x_k は S_k だけの関数になり、需要曲線

$$x_k = D_k(S_k), k \in R \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

を得る。サービス水準は一般に交通費用に置き換えて考えることができ、交通費用が増加すれば交通需要は減少すると考えられるので、関数 D は交通費用 $c_k(k \in R)$ に関し単調減少関数であると仮定する。また、次式で与えられる逆需要関数 g_k を定義する。

$$c_k = g_k(x_k), k \in R \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

$g(x)$ は、非負の単調減少関数で、連続微分可能な関数であると仮定する。

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dg}{dx}(x) < 0, 0 \leq x < \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) > 0 \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (4)$$

ところで、交通施設 $j(j \in L)$ が与え得るサービス水準（あるいは、その施設を利用することによって支払う交通費用： c_j ）は、輸送技術変数ベクトル T_j と施設利用量 $x_j(j \in L)$ の関数となるが、 T_j がフローのインパクトを受けないと仮定できるならば、 c_j は x_j だけの関数となり、以下の供給曲線を得る。

$$c_j = B_j(x_j), j \in L \quad \dots \dots \dots \quad (5)$$

関数 $B(x)$ は、非負の単調増加関数で、 $[0, b]$ で連続微分可能な関数であると仮定する。ここに、 b は施設容量を表わす。

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dB}{dx}(x) > 0, 0 \leq x < b \\ B(0) = 0 \end{array} \right\}$$

逆需要関数に関する仮定のうち、式(4)の第2式は、ある一定費用以上では交通は発生しないとしたものである。また、リンク供給関数、式(5)は、リンク交通費用は当該リンクの交通量のみの関数であることを表わしたものである。現実には交差点の待ち時間のように、他リンクの交通量の影響を受ける費用要因もあるので、式(5)は一般的妥当性をもつとはいえないが一般に受け入れられている仮定である。

ところで、ある OD 間の交通費用は、リンク集合よりなる経路の集まりで与えられるため明確に定義することができない。しかし、 E の要素が識別できれば、それに含まれる経路 $q (q \in E)$ と q を構成するリンク集合 $Q(q)$ によって任意の OD ペア k の交通費用 c_k が求められる。

ただし、 $c_k(k \in R)$ が $x_k(k \in R)$ だけの関数になるのは特殊な場合であり、当該 OD 以外の交通も c_k に影響を与えることに注意する。

さて、式(3)の逆需要曲線と式(7)の供給曲線は同一座標軸に描くことができ、図-2に示すように交点 F_k (x_k^*, c_k^*) をもつ。図において B' は当該 OD の交通量だけを考えたときの供給曲線であり、 B は他の OD 交通量が E_k の経路を利用するか、あるいは q ($q \in E_k$) と p ($p \in E_k$, $p \neq q$) が同一のリンクを利用するによる供給曲線のシフト現象を表わしている。

交通量予測の原理は、需要曲線と供給曲線を与えて顕在化する均衡パターン $F(x^*, c^*)$ を求めることである。また、この需要-供給均衡原理によって自然成長的交通量の増加、開発交通量、誘発交通量等が統一的に説明できる²²⁾。

5. 需要均衡モデル

(1) Beckmann モデルの再定式化

均衡解 $F(x^*, c^*)$ を求めるには、需要方程式と供給方程式を連立させて解けばいいように思えるが、有効経路集合を構成する経路を前もって識別できないこと、そして前述のシフト量を前もって求めることができないため供給方程式を構成することができない。このように単に連立方程式を解くという形で均衡点を直接求めることは問題が多く、したがって、なんらかの仮説のもとでの問題の再構成を必要とする。この点に関し、Beckmann は最小費用経路の仮説に基づき、均衡問題をフローに関する

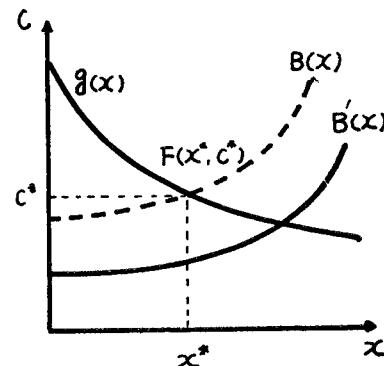


図-2 ネットワーク均衡と供給曲線のシフト現象

る制約条件のもとでの最大化問題に置き換えた⁸⁾. Beckmann モデルはあるリンクを経由して目的地へ向う交通量を変数としているが、ここでは経路交通量（パス・フロー）を変数にした、リンク容量制約を含む最小化問題として扱う。すなわち、需要均衡問題とは以下に示す最小化問題 [P] を解くことである。

最小化：

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j \in L} \int_0^{y_j} B_j(\eta) d\eta - \sum_{k \in R} \int_0^{y_k} g_k(\xi) d\xi \quad \dots (8)$$

制約条件 :

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{r=1}^m \delta_{j,r} x_r < b_j, \quad j \in L \\ x_r \geq 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (9)$$

目的関数 (8) における y_j は次の関係式によって与えられる.

$$\sum_{r=1}^m \delta_{j,r} x_r = y_j, \quad j \in L' \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

三

x_r : r 番目の経路交通量 ($r=1, 2, \dots, m$)

b_i ; リンク $j (j \in L)$ の容量

g_k : QD ペア k ($k \in R$) の逆需要閾数

y_j, y_k : リンク $j(j \in L)$ の交通量, OD ペア $k(k \in R)$ の交通量

$\delta_{j,r}$: 経路 r と再帰リンク j ($j \in R$) によって構成される サーキットを表わす サーキット行列 で以下のように定義する.

制約条件(9)の第1式のような厳密な不等式は現在の数理計画理論で扱うには不都合である。したがって、

$$\sum_{r=1}^m \delta_{j,r} x_r \leq b_j - \varepsilon, \quad \varepsilon \text{ は正の小数}$$

という意味で、等式を含めた次のような形に便宜的に置

き直す。

$$\sum_{r=1}^m \delta_{j,r} x_r \leq b_j, \quad j \in L \quad \dots \dots \dots \quad (12)$$

ここで、問題 $[P]$ が凸計画問題であることを示そう。まず許容領域 $S \subset R^n$ を次のように定義する。

$$S_j = \{x | \sum_{r=1}^m \delta_{j,r} x_r < b_j, x_r \geq 0, x_r \in R^n\}$$

$$S = \bigcap_{j=r+1}^l S_j$$

$\sum_{r=1}^m \delta_{j,r} x_r$ が凸関数であることは明らかであり、したがって、式(12)で与えられる準位集合は凸集合である。凸集合の内点の集合も凸集合であるから許容領域 S は凸集合である。次に目的関数 f が $x \in S$ で凸関数であることを示そう。 f は B_j, g_k に関する定義より $x \in S$ で連続微分可能である。したがって、 f のヘッセ行列 $\nabla^2 f(x)$ が $x \in S$ で非負定値であることを示せばよい。まず、 f の2回偏微分は、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_p}(\mathbf{x}) = \sum_{j \in L} \delta_{j,r} \cdot \delta_{j,p} \cdot \dot{B}_j - \sum_{k \in P} \delta_{k,r} \cdot \delta_{k,p} \dot{g}_k \dots \dots \dots (13)$$

で与えられる. ここに, \dot{B}_j, \dot{g}_k はおののおの B_j, g_k の 1 回偏導関数を表わす. $z_r \in R^n$ のベクトル z を考え, ベッセ行列の 2 次形式をとると,

$$\begin{aligned} z^t \nabla^2 f(x) z &= \sum_{j \in L} \dot{B}_j \left(\sum_{r=1}^n \delta_{j,r} z_r \right)^2 \\ &\quad - \sum_k \dot{g}_k \left(\sum_{r=1}^n \delta_{k,r} z_r \right)^2 \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

となる. B_j, g_k に関する定義より, $\dot{B}_j > 0, \dot{g}_k < 0$ であるから,

$$\mathbf{z}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{z} \geq 0 \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

よって、 f は $x \in S$ で凸関数である。等号を含めた領域式(12)では、 B_j の性質より $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$ となるので、

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in S \\ \infty, & x \notin S \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

と定義しなおすことにより、 $\tilde{f}(\mathbf{x})$ はすべての $\mathbf{x} \in R^n$ で凸関数となる。このように問題 $[P]$ は凸計画問題であり、したがって、 $[P]$ の局所的最適解は大局的最適解に一致する。

さて、問題 $[P]$ の最適解 x^* は、Kuhn-Tucker 条件を満足する必要がある。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{j \in L} \delta_{j,r} B_j(y_j^*) - \sum_{k \in R} \delta_{k,r} g_k(y_k^*) \\ & - \sum_{j \in L} \delta_{j,r} \lambda_j = 0, \quad x_r^* > 0 \\ & \geq 0, \quad x_r^* = 0 \\ & \lambda_j(b_j - \sum_{r=1}^m \delta_{j,r} x_r^*) = 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad j \in L \\ & \sum_{r=1}^m \delta_{j,r} x_r^* \leq b_j, \quad j \in L \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

ここに, $\lambda_j (j \in L)$ は Kuhn-Tucker 乗数, また, y_j^*
 $= \sum_{r=1}^m \delta_{j,r} x_r^* (j \in L')$ とおいている. しかし, 式 (17)
 が成立するためには, それを保証する Kuhn-Tucker 乗
 数ベクトル λ の存在が必要である. その点に関し, もし
 リンク容量制約を犯さない x が存在するならば, slater
 制約想定を満足し, 一意的な λ の存在が保証できる.
 このことは次のことからも明らかである. すなわち, 式
 (17)において,

$\sum_{r=1}^m \delta_{j,r} x_r^* < b_j, \quad j \in L$ ならば, $\lambda_j = 0, \quad j \in L$

よって、 $\sum_{j \in J} \lambda_j \delta_{j,r} = 0$ が一意的にいえる.

以上のことより

- (i) リンク交通量がすべて容量以下となるような x^* が求め得る.

- (ii) リンク容量が十分大きく、あらゆるリンク交通量を収容し得る。

という仮定のどちらかが受け入れられるならば、そのとき、

$$\begin{aligned} \sum_{j \in L} \delta_{j,r} B_j(y_j^*) - \sum_{k \in R} \delta_{k,r} g_k(y_k^*) \\ = 0, \quad x_r^* > 0 \\ \geq 0, \quad x_r^* = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

が成立する。

式(18)より、需要均衡流は次のようなフロー・パターンを与える。すなわち、(i) 利用されている経路 ($x_r^* > 0$) については、交通費用(利用者に知覚される費用)は等しく、トリップ費用(トリップに際し支払ってもよいと考える費用)に一致する。また、(ii) 利用されていない経路 ($x_r^* = 0$) の費用はトリップ費用よりも高いかせいぜい等しい。

(2) 解の一意性に関する考察

式(15)では詳細な吟味なしに等号を加えたが、 Δ 行列が正定値であることがいえれば目的関数は厳密な凸関数ということができ、解は一意的に存在する。そのためには、式(14)において $z = \mathbf{0}$ に対して以外は $\sum_{j \in L'} \delta_{j,r} z_r = 0$ でなければならない。しかし、サーキット行列 Δ の列ベクトル Δ_r ($r=1, 2, \dots, m$) が 1 次従属ならば、 $z \neq \mathbf{0}$ に対しても $\sum_{j \in L'} \delta_{j,r} z_r = 0$ となる。したがって、 Δ_r が 1 次独立であることがいえれば、解は一意的に存在する。

ここで、 δ を次のように構成する。各 OD ペアにつき再帰リンクとサーキットを構成する 1 本の経路のみを選び出し、 δ_q^1 ($q=1, 2, \dots, r$) とする。残りのサーキットを形成する経路については、 δ_q^2 ($q=r+1, \dots, m$) に配置する。すなわち、OD 間に等費用経路が 2 個以上存在する場合、 $\delta_{i,j} = 1$ ($i, j \in R$) となる要素が δ^1 と δ^2 に

存在し、したがって、 $\delta_{j,q^2}=0$ ($j \in R$) となるように δ が再構成できる。

$$\mathbf{d} = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\mathbf{I}}^r & \overbrace{\mathbf{O}}^{m-r} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{array} \right]_{l-r} \}$$

ここに、

I : 单位行列

A : 第1次経路のパス行列

B : 第1次経路と第n次($n \geq 2$)経路によって構成されるサイクルを表わすサイクル行列でユニモジュラー行列である.

ところで、 δ_r ($r=1, \dots, m$) が 1 次独立であるための必要十分条件は $\det \delta \neq 0$ となることであるが、それには行列 B の列ベクトル B_i の 1 次独立性がかかわっていることを示そう。まず $m > l$ の場合について、 $\text{rank}(\delta) \leq l$ であり、1 次独立な列ベクトルはたかだか l 個であり、 δ_r は 1 次従属となる。次に $m \leq l$ の場合について考えてみる。 δ_r が 1 次独立であるためには、その小行列 δ' ($m \times m$ 行列) について $\det \delta' \neq 0$ であることを示せばよい。 B' を $(m-r) \times (m-r)$ の行列とするとき、行列式に関するラプラス展開定理より、

$$\det \boldsymbol{\delta}' = \det \boldsymbol{I} \cdot \det \boldsymbol{B}'$$

となる。もし、 B の列ベクトルが 1 次独立ならば、そのとき $\det B' \neq 0$ であり、したがって、 δ' の列ベクトルは 1 次独立となる。また、その逆についても成立する。

このように、経路交通量を変数にした場合、需要均衡流が一意的に定まるのは、 $m \leq l$ で、しかも B_i が 1 次独立の場合に限る。ただし、リンク交通量 $y_j (j \in L')$ を変数にした場合には、式 (14) から明らかのようにヘルツ行列は正定値となり、解の一意性は保証される。

6. 勾配法による需要均衡問題の解法

まず、リンク容量が十分大きい場合について考える。このとき、リンク供給関数に関する仮定式(6)の第3式は冗長となり、制約領域は $S = \{x | x_r \geq 0, x_r \in R^n\}$ となる。また、解集合を次のように定義する。

$$\varrho = \{x | \nabla f(x) = 0, x \in S\}$$

このとき、問題 $[P]$ は次の最小化問題 $[P_1]$ となる。

最小化： $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S$ (19)

問題 [P1] を解くため、制約条件なしの場合の最適化技法として知られている勾配法を利用する。これは、点 $x^{(k)} \in R^n$ において方向ベクトル $d^{(k)} \in R^n$ を定め、スカラー $\alpha \in R^+$ によって次の点 $x^{(k+1)} \in R^n$ を

に従って生成するアルゴリズムで、 $d^{(k)}$ を求めるのに

$\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$ を利用する方法である。添字 k は反復回数を示す非負整数值である。しかし、問題 [P1] を解くにあたっては、通常の勾配法をそのまま適用するわけにはいかない。なぜなら、得られる点列 $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ が常に $\mathbf{x}^{(k)} \in S$ となることを保証しなければならず、また、利用可能集合に属する経路を列挙することは事実上不可能なので、各回での方向ベクトル $\mathbf{d}^{(k)}$ を知ることができないためである。以下に述べるアルゴリズムは方向ベクトルとして $\nabla f(\mathbf{x})$ を使うという意味で基本的には勾配法であるが、上述の点を解決するよう工夫されたものである。

(1) 方向ベクトル $d^{(k)}$ の決定法

任意の点 $\mathbf{x}^{(k)} \in S$ が得られたものとし、この点での方向ベクトルを $\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{z} - \mathbf{x}^{(k)}$ とおく。 $\mathbf{x}^{(k)}$ で目的関数をテイラー展開し、その 1 次項までをとると、

$$f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla^t f(\mathbf{x}^{(k)}) (\mathbf{z} - \mathbf{x}^{(k)}) \dots \dots (21)$$

を得る. 式 (21)において $\mathbf{x}^{(k)}$ は既知量であり, したがって, $f(\mathbf{x}^{(k)})$, $\nabla^T f(\mathbf{x}^{(k)})$ は定数であることに注意する. このとき, 問題 [P1] に対する次の子問題 [P2] を得る.

$$\text{最小化: } f(z) = \nabla^T f(x^{(k)}) (z - x^{(k)}), \quad z \in S$$

.....(22)

これを書き

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{r \in P_k} \left\{ \sum_{j \in L} \delta_{j,r} B_j(y_j^{(k)}) - \sum_{k' \in R} \delta_{k',r} g_k(y_{k'}^{(k)}) \right\} (\mathbf{z}_r - x_r^{(k)}), \quad z_r \geq 0$$

(22)

という問題を得る。式(23)は、フローが増加するのは、
 $\sum_{j \in L} \delta_{j,r} B_j(y_j^{(k)}) - \sum_{k \in R} \delta_{k,r} g_k(y_k^{(k)})$ が負となる方向で
 あり、しかも負の値の最も大きくなる経路のフローを増
 加させることを意味する。したがって、毎回最短経路を
 探索し、新しい経路が出現するたびに、その経路を有効
 経路として E_k に含め、それらに対する負の勾配をその
 経路変数の方向 $d_r^{(k)}$ とおけば、それは目的関数を減少
 させるような方向ベクトルを与える。また、
 $\sum_{j \in L} \delta_{j,r} B_j(y_j^{(k)}) - \sum_{k \in R} \delta_{k,r} g_k(y_k^{(k)})$ が正で、しかも $x_r^{(k)} > 0$
 の経路に対しては $z_r - x_r(k) < 0$ となるように z_r を
 与えればよい。以上のことより、新しいフロー z_r は次
 のように求められる。

$r \in E_k$ かつ $\frac{\partial f}{\partial x_r}(\mathbf{x}) > 0$ ならば、 $z_r = 0$

$r \notin E_k$ かつ $\frac{\partial f}{\partial x_r}(\mathbf{x}) \leq 0$ ならば、

$$z_r = x_r^{(k)} + \alpha d_r^{(k)}$$

$r \in E_k$ かつ $\frac{\partial f}{\partial x_r}(\mathbf{x}) > 0$ ならば、

$$\begin{aligned} & \text{ただし, } z_r < 0 \text{ となるならば } z_r = 0 \\ & r \in E_k \text{ かつ } \frac{\partial f}{\partial x_r}(\mathbf{x}) < 0 \text{ ならば,} \\ & z_r = x_r^{(k)} + \alpha d_r^{(k)} \end{aligned} \quad (24)$$

このようにして得られる方向ベクトル $\mathbf{d}^{(k)}$ に対し、
 $\nabla^T f(\mathbf{x}^{(k)}) \mathbf{d}^{(k)} < 0$ となり、降下方向であるから、ステップ幅 $\alpha^{(k)}$ を
 $f(\mathbf{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \mathbf{d}^{(k)}) < f(\mathbf{x})$
となるように選ぶことができる。

(2) ステップ幅 $\alpha^{(k)}$ の決定

ステップ幅 $\alpha^{(k)}$ の決定には Almijo の方法を用いる。Almijo の方法による最適な α の決定過程は次のようにある²⁰⁾。

に対し、次の手順を繰り返す。

スラップ O : $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1)$, $l=0$ とおく.

ステップ A : $\theta \leq 0$ ならば停止

ステップ[°] $B : l = l + 1$ とおいてステップ[°] A へ

方向ベクトル決定のアルゴリズム式(24)と Almijo の方法は、大域的収束性に関する条件²³⁾を満足するので、上述の方法によって生成される点列 $\{x^{(k)}\}$ は最適解 x^* へ収束する。

(3) 均衡流の計算法

ここで、具体的な均衡流計算の手順を述べよう。

ステップ 0: 初期値 $x^{(0)}$ を与える.

ステップ^①: 式(10)により $y^{(k)}$ を求め、対応する
 $B_j(y_j^{(k)}) (j \in L), g_k(y_k^{(k)}) (k \in R)$ を
求める。

ステップ 2：最短経路探索を行い、得られた経路がすでに求められている経路かどうかを判別し、新しい経路ならば有効経路集合 E に含める。また、 $\sum_{j \in L} \delta_{j,r} B_j(y_j^{(k)}) - \sum_{k \in R} \delta_{k,r} g_k(y_k^{(k)}) = -d_{r,(k)} (r \in E_k)$ を求め、 $\max_r |d_{r,(k)}| \leq \epsilon$ ならば停止。 ϵ は適当な正の小数。

ステップ 3: 式(24)に従って新しいフロー z を求め
る。リンク交通量を累積する。

ステップ 4：式(25)を満足するステップ幅 α^l を決定し対応する z を求め、リンク交通量を更新する

ステップ 5: z を $\mathbf{r}^{(k+1)}$ におけるステップ 1 ~

容量制約をもつ場合には、目的関数 f を式(16)で定

義される \tilde{f} に置き換えて考えることによって同様のアルゴリズムが適用できる。すなわち、 k 回目時点で得られた $\mathbf{x}^{(k)}$ が $\mathbf{x}^{(k)} \in S$ とすると、 $f(\mathbf{x}^{(k)}) < \infty$ であり、また降下方向に沿って $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$ となるような任意に動かすことのできる量 $(z - \mathbf{x}^{(k)})$ を得ることができる。いま、あるステップ幅 α^l に対応して求められるリンク交通量 $y_j^{(k+1)}$ が $y_j^{(k+1)} \geq b_j$ となるならば、 $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) \rightarrow \infty$ 。よって、式(25)を満足する l は存在しないので、 $l = l + 1$ と繰り返すことによって、容量制約を犯すことのない領域に $\mathbf{x}^{(k+1)}$ を閉じこめることができる。

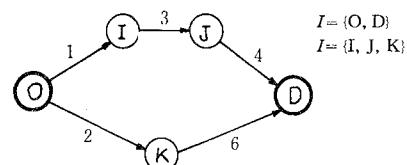
上記のアルゴリズムを大規模ネットワークに適用する際問題となるのは、パス行列(サーキット行列 δ の $j \in R$ となる行を除いて得られる行列)の記憶方法である。記憶容量を節約するため、通過するノードあるいはリンクだけの系列を記憶するのが一般的な方法であるが、それでも各 OD 間の何本もの経路を記憶するためには膨大な容量を必要とする。ここで提案する方法は、通過するリンクあるいはノードの番号を 2 進数に等価な値に変換して記憶しようとするもので、変換された値は各経路と 1 対 1 に対応しており多くの経路を少ない容量で記憶することが可能である。経路 γ に対し、そのリンク系列で経路を記憶しようとする場合には、次式で与えられる値 w を記憶すればよい。

$$w = \sum_{j \in p_L} 2^{j-1}$$

たとえば、図-3 に示された経路は、

$$w_1 = 2^0 + 2^2 + 2^3 = 13$$

$$w_2 = 2^1 + 2^5 = 34$$



图—3

という数値に変換される。この方法を用いるならば、ステップ2の新規経路の判別も容易に行える。また、もとのリンク番号への変換は w の値を2進変換すればよい。ただし、計算機では 2^w の n の上限値があり、したがって、 n を分割して記憶するなどのプログラム上の工夫が必要となり、その効力も半減するが、それでも大規模ネットワークにおいては通常の方法よりも少ない記憶容量ですむ。

7. 計 算 例

例題計算に用いたネットワークを図-4 に示す。図に

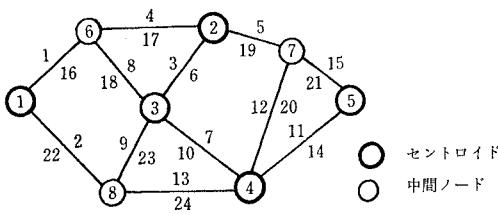


図-4 対象ネットワーク

おいて、

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \bar{I} = \{6, 7, 8\}$$

であり、また、互いに逆向きの有向リンクを無向リンクとして表示している。逆需要関数は線形関数を用い、リンク供給関数には Davidson 関数²⁴⁾を用いた。

逆需要関数：

$$g_k(y_k) = a_k - e_k y_k, e_k = 0.1, k \in R$$

供給関数：

$$B_j(y_j) = B_j(0) \frac{b_j - (1-J)y_j}{b_j - y_j}, y_j < b_j, 0 < J \leq 1, j \in L$$

$a_k, B_j(0)$ は表-1 および表-2 に与える。また、リンク容量 b_j の値については、計算例 1, 2 に対応させて表-2 に示す。計算例 1, 2 を通して、 $J=1.0$ としており、また交通費用は所要時間のみで代表させている。

表-1 需要曲線の係数： a_k

D O	2	3	4	5
1	47	55	70	62
2		40	60	34
3			53	50
4				48

表-2 リンク供給曲線の係数： $B_j(0), b_j$

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
リンク番号	1,16	2,22	3,6	4,17	5,19	7,10	8,18	9,23	11,14	12,20	13,24	15,21
$B_j(0)$	4.1	29.0	6.6	3.4	4.0	17.8	17.0	7.5	5.3	22.0	5.8	1.0
リンク容量 (計算例 1)	600	300	500	500	800	300	300	800	200	400	700	
リンク容量 (計算例 2)	450	150	350	350	650	150	150	650	50	250	550	

表-3 経路交通量と経路所要時間 (計算例 1)

経路番号	ODペア	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	所要時間	26.9	45.2	64.5	48.3	18.3	37.6	21.4	28.3	39.7	16.2
	経路交通量	200.8	0.0	0.0	136.8	216.9	220.9	125.9	135.6	102.9	317.6
	勾配	0.0	1.5	5.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	所要時間		43.7	59.4			37.6		28.3	44.5	
	経路交通量	—	112.9	105.8	—	—	3.2	—	111.4	0.0	—
	勾配	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	4.8	—	
	OD交通量	200.8	112.9	105.8	136.8	216.9	224.1	125.9	246.9	102.9	317.6

表-4 リンク交通量とリンク所要時間 (計算例 1)

リンク番号	1,16	2,22	3,6	4,17	5,19	7,10	8,18	9,23	11,14	12,20	13,24	15,21
y_j	450.5	105.8	319.8	337.6	589.8	111.4	112.9	135.6	538.6	3.2	241.4	586.6
$B_j(y_j)$	16.5	44.8	18.3	10.5	15.2	28.3	27.3	13.7	16.2	22.4	14.6	6.2

(1) 計算例 1

計算例 1 はリンク容量を十分受け入れられるほどのリンク容量を仮定して計算したもので、結果を表-3, 4 に与える。この場合には、リンク供給関数に関する仮定式(6)の第3式が不用になるので、わざわざ Davidson 関数を用いる必要もないが、計算例 2との比較のため同じ関数を用いた。等時間経路は OD ペア 6 と 8 に存在する。これを図-5 に示す。また、OD ペア 2, 3 の第1経路および OD ペア 9 の第2経路は計算過程の途中で最短経路として選ばれたが、均衡状態ではフローが消滅したことを表わしている。このことからも IA 法のように最短経路に常にフローを負荷していく方法は、必ずしも均衡フロー・パターンを再現しえないことが理解できよう。

(2) 計算例 2

計算例 1 の結果をもとに、リンク 1,16 および 15,21 のリンク交通量以下におのおのの容量を設定し、計算を試みたものである。その結果を表-5, 6 に示す。等時間経路は前回と同様 OD ペア 6, 8 に存在する。リンク容

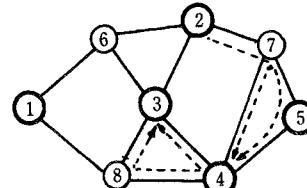


図-5 等時間フロー・パターン

表-5 経路交通量と経路所要時間（計算例2）

経路番号	ODペア	ODペア									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	所要時間	30.3	52.2	71.3	52.1	21.9	40.9	21.7	35.9	43.6	19.2
	経路交通量	166.6	0.0	0.0	99.4	180.9	183.0	122.5	95.2	63.7	287.7
	勾配	0.0	4.2	7.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	所要時間	—	48.0	64.0	83.2	—	40.9	—	35.9	55.1	—
	経路交通量	—	69.9	60.5	0.0	—	7.6	—	75.7	0.0	—
	勾配	—	0.0	0.0	31.1	—	0.0	—	0.0	11.5	—
	OD交通量	166.6	69.9	60.5	99.4	180.9	190.7	122.5	170.9	63.7	287.7

表-6 リンク交通量とリンク所要時間（計算例2）

リンク番号	1,16	2,22	3,6	4,17	5,19	7,10	8,18	9,23	11,13	12,20	13,24	15,21
y_i	335.9	60.5	244.6	266.0	476.3	75.7	69.9	95.2	470.7	7.6	155.7	468.6
$B_j(y_j)$	16.2	48.6	21.9	14.2	15.0	35.9	31.8	20.5	19.2	26.0	15.4	6.8

量が前の計算例より小さく設定しているため、全体的に所要時間が高く、そのためOD交通量は計算例1に比べ減少している。また、リンク1,16および15,21はリンク容量制約を満足するフローを得ている。

なお、予備計算の結果より、上記2計算例ともB行列の列ベクトルが1次独立で経路交通量が一意的に定まることがわかったので、停止規準には次式を用いた。

$$\sum_{j \in L} B_j(y_j^{(k)}) |y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}| \leq \epsilon_1$$

上述の計算例を通していえることは、計算の後半では、方向ベクトルのノルムが小さくなること、および経路が固定していくことで最短経路探索が冗長になることなどの理由で計算効率が落ちることである。したがって、ある程度の反復回数後は経路を固定し、最短経路探索を省略することが肝要である。また、実用上問題のない程度の結果を得るよう停止規準を大きくとることなども必要であろう。

なお、本計算例は名古屋大学大型計算機センターのFACOM 230-75を用いて計算したもので、 $\epsilon_1=0.5$ までの実計算時間は両計算例とも1秒程度であった。また、 $\epsilon_1=5.0$ とすることにより計算時間は半分に短縮し、結果も等時間経路の所要時間差が0.1分ほど違うのみであった。

8. あとがき

本研究は需要均衡流の推定法に関し、数理計画的手法に基づく厳密解を得ようとしたものである。需要均衡流の計算法については、わが国ではほとんど研究例がなく、したがって、2. では需要均衡モデルとこれまでに提案された計算法の概要を述べた。ところで、Wardrop均衡を解く計算法は、少し変更するだけで需要均衡問題に適用できる場合が多く、またわが国でも Wardrop均衡の解法には、いくつかのアルゴリズムが提案されてい

る。したがって、需要均衡流の計算法に関する研究が少ないことは、本質的には計算アルゴリズムよりも需要推定法に関する立場の違いということが大きく起因しているように思われる。その点に関し、需要均衡モデルで重要な役割を果たす需要モデルについては、本研究はほとんど触れていない。しかし、非集計需要モデルの発見によって、最近の需要モデルの発展にはめざましいものがあり、均衡流の推定法の確立が急がれる。この見地から本研究はまとめられた。

最後に、本研究で提案したアルゴリズムの利点、欠点についてまとめると、次のようである。

利 点

(1) 経路交通量を変数としているので、経路制御とか交通環境政策に対応して、運転者がどのように経路を変えていくのかを知ることができる。また、経路交通量調査を実行することによって、現在の交通量配分の基本原則となっている最短経路原則の妥当性を検定することができる。

(2) 適当な需要モデルを与えることによって、交通サービスに応じ需要量がどう変化するのかを知ることができる。

(3) 等時間フロー・パターンの厳密な値を求めることができる。

(4) 利用可能な経路をすべて列挙する必要がない。

(5) 目的関数を線形近似することによって、直線探索における繰り返し計算が容易に行える。また、Almijoの方法を採用することによって、直線探索の労力が激減する。

上記(1),(2)は、従来の設計指向型モデルから分析指向型、あるいは政策指向型モデルを区別する要因を与えている。

欠 点

(1) 経路交通量を変数としているので、解が一意的

に求まらない場合がある。

(2) 経路行列を記憶するのに大きな計算機容量を必要とする。

(3) 逆需要関数、リンク容量関数に関し、定義域での連続性、微分可能性を仮定している。現実に求められる関数は、不連続であったり微分可能性が仮定できない場合も多い。

(4) 繰り返し回数が増加するにつれて計算効率が悪くなる。

(5) 繰り返し計算のたびに最短経路探索を必要とする。

上記(1)については、解を一意的に得るために別の最適化規準を必要としよう。リンク交通量、OD交通量については一意的に求められるので従来の方法と変わらないが、経路情報を失うことは利点(1)を損う。(3)については、微分可能性を仮定しない数理計画理論を導入することが考えられる。また、(2)、(4)、(5)については、その改善策について本論文中で触れた。

参考文献

- 1) Whol, M. and B.V. Martin : Traffic system analysis for engineers and planners, McGraw-Hill, New York, pp. 117~132, 1967.
- 2) Manheim, M.L., E.R. Ruiter and K.U. Bhatt : Search and choice in transport systems planning; summary report, Dept. of Civil Eng., M.I.T., Cambridge, Vol. I, Research Rept., R 68-40, pp. 27~35, 1968.
- 3) 加藤 晃・宮城俊彦・佐藤祐二：Beckmann モデルによる均衡交通量の推定法、土木学会中部支部昭和 51 年度研究発表会講演概要集、1977 年 1 月。
- 4) Pigou, A.C. : The economics of welfare, First Edition, Macmillan, London, pp. 197, 1920.
- 5) Knight, F.H. : Some fallacies in the interpretation of social cost, Quarterly Journal of Economics, 38, pp. 582~606, 1924.
- 6) Wardrop, J.G. : Some theoretical aspects of road traffic research, Proc. Inst. Civil Engineers, Part II, Vol. 1, pp. 325~378, 1952.
- 7) Jorgensen, N.O. : Some aspects of the urban traffic assignment problem, Graduate Report, Institute of Transportation and Traffic Engineering, University of California, Berkeley, 1963.
- 8) Beckmann, M.J., C.B. McGuire and C.B. Winsten : Studies in the economics and transportation, Yale University Press, pp. 46~101, 1956.
- 9) Hall, M.A., and E.L. Peterson : Traffic equilibria analysed via geometric programming, Proc. Intern. Symposium on Traffic Equilibrium Methods, Montreal (M. Florian, Ed.), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 118, Springer-Verlag, pp. 382~395, 1976.
- 10) Martin, B.V. and Manheim, M.L. : A research program for comparison of traffic assignment techniques, Highway Research Record 88, pp. 69~84, 1965.
- 11) 杉恵頼寧：增加分配法の実用化に関する研究、土木学会論文報告集、第 204 号, pp. 83~93, 1972.8.
- 12) Ferland, J.A., M. Florian and C. Achim : On incremental methods for traffic assignment, Trans. Res., Vol. 9, pp. 237~239, 1975.
- 13) 日本オペレーションズ・リサーチ学会：新手法による高速道路交通量の推計、報文シリーズ・T-73-2, pp. 19~20, 昭和 48 年 2 月。
- 14) Gibert, A. : A method for the traffic assignment when demand is elastic, LBS-TNT-85, Transport Network Theory Unit, London Business School, London, 1968.
- 15) Murchland, J.D. : Road network traffic distribution in equilibrium, paper presented at the conference "Mathematical Method in the Economic Science", Mathematisches Forshungsinstitut, Oberwolfach, 1969.
- 16) Ruiter, E.R. : Implementation of operational network equilibrium procedures, Trans. Res. Record 491, pp. 40~51, 1974.
- 17) Gartner, N.H. : Analysis and control of transportation networks by Frank-Wolfe decomposition, Proc. of the 7th International Symposium on Transportation and Traffic theory (Sasaki, T. and T. Yamaoka, Ed.), The Institute of System Science Research, Kyoto, pp. 591~623, 1977.
- 18) Wilkie, D.F. and R.G. Stefanek : Precise determination of equilibrium in travel forecasting problems using numerical optimization techniques, Highway Research Record 369, pp. 239~252, 1971.
- 19) Florian, M. and S. Nguyen : A method for computing network equilibrium with elastic demand, Trans. Sci. 8, pp. 321~332, 1974.
- 20) Nguyen, S. : A unified approach to equilibrium methods for traffic assignment, Reference (9), pp. 382~395, 1976.
- 21) Evans, S.P. : Derivation and analysis of some models for combined trip distribution and assignment, Trans. Res., Vol. 10, pp. 37~57, 1976.
- 22) Heggie, I.G. : Transport engineering economics, McGraw-Hill, London, pp. 170~172, 1972.
- 23) 今野 浩・山下 浩：非線形計画法、日科技連、1978.3.
- 24) Daganzo, C.F. : On the traffic assignment problem with flow dependent cost-I, Trans. Res., Vol. 11, pp. 433~437, 1977.

(1978.5.23・受付)