

## 数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案

A MODIFIED TRANSFER MATRIX METHOD WITH IMPROVED  
ROUND OFF ERRORS

中 村 秀 治\*

By Hideharu NAKAMURA

### 1. まえがき

マトリックスのかけ算による移行計算を主体とした伝達マトリックス法は、構造要素の常微分方程式の一般解を基礎にしており、理論体系の明確さと計算法の容易さという点から、興味深い構造解析法の一つである。変位法、応力法に属する他の方法と比較して、解くべき連立一次方程式の元数は著しく少なく、振動、安定問題への適用まで拡張されており、単純な不静定はりから骨組、板、シェル、具体的構造物としては吊橋主塔、配管系、船体、オイルタンクその他多方面の解析に用いられている。

しかし、上記の優れた特性を有する反面、伝達計算過程での桁落ちとそれに伴う精度の著しい低下の問題がつきまとつことも周知の事実である。そこで、通常次の対策が施されている。

- ① 単精度でなく倍精度あるいは 4 倍精度で計算する。
  - ② 物理量を無次元化 レスケーリング（基準化）して<sup>1), 9)</sup>、数値の大きさをそろえる。
- これらの精度改善に対する効果は誤差論の立場からも立証されており<sup>2)</sup>、伝達マトリックス法で計算する場合の常識といえる。
- しかしこれらの対策を施してもなお、多層ラーメン、格子桁、板、シェルなどに適用したとき、満足な解の得られないことは多いように思われる。そのような場合、①、②に加えて、
- ③ 全体の伝達区間を数分割して、各区間で伝達計算する。各区間両端の物理量は未知量として残されているが、それらは境界条件を考慮し、逆行列計算で求められる。全物理量は各区間端部から逐次求める。を併用することが考えられる。伝達マトリックス法によ

る通常の計算では精度低下の著しい問題に対し、この方法の有効なことは原理的に明らかであり、H. Kraus<sup>3)</sup>は軸対称シェルの解析に適用して良好な解を得ている。ただし、この方法では条件数<sup>2), 4)</sup>が高く、もともと数値的に条件の悪い、また一格点当たりの自由度が変位法・応力法に比べて 2 倍であるところから次元の高くなりやすい連立一次方程式を解く必要が生じる。この連立一次方程式はマトリックス表示した場合、非対称のため反復解法に属するほとんどの数値計算法は効率が悪いだけでなく、精度も上がらないことが多い。また、掃き出し法で逆行列計算するとしても、ユニット分割法など有限要素法に関連して開発された方法が利用できないため、倍精度計算でも経験的に 200 元が限度と思われる。したがって、この方法にもおのずから限界がある。

そこで、成岡・中川<sup>5)</sup>および成岡・遠田<sup>6)</sup>は、①、②に加えて次の方法を組み合わせるのが精度的に良く、有効であると述べている。

- ④ 伝達マトリックス法と変位法による逐次代入計算の概念を組み合わせて伝達計算を進める。

文献 1) と 5) では逐次代入の手順に若干の相違があると思われるが、基本的な考え方には変わりはない。伝達計算が通常の方法に比べて複雑にはなるが、③におけるように連立一次方程式の次数が高くなることもなく、これにより成功した計算例も多い<sup>6)</sup>。

筆者は、この方法に注目し、具体的に数値をあてはめつつ数値計算上有する利点を詳細に検討した後、記述の一般化、格間伝達マトリックスの特性を検討する過程で一つの新しい伝達マトリックス法に到達した。本方法は格点の物理量を逐次伝達するのではなく、各格点物理量の間の関係式を伝達する。当初から数値誤差の改善を目的として考えられたものであるため精度低下の著しい構造物に対して、一つの解決策として使用できるものであろう。

2. では提案する方法の概略を述べ、3. で本方法が数

\* 正会員 工修 電力中央研究所 土木技術研究所

値計算上有利な根拠を述べるが、その際、誤差論<sup>2)</sup>には限界があり、伝達マトリックス法で起きる数値的現象を説明しきれないため、物理的考察をまじえて考察を進めた。4. では簡単な不静定はりを例にとり具体的計算手順を示した後、2., 3. で述べた事項を計算例で実証するため、多層ラーメンと薄肉円筒殻を取り上げ、通常の計算法と本計算法で比較検討し、本方法において計算精度の改善される様子を示した。

## 2. 提案する一種の伝達マトリックス法

各格点で物理量は偶数個（ $2n$  個）存在するので、それらを適当に半分ずつ 2 組に分け、 $n$  元のベクトル  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$  で表わす。分け方はまったく任意であり、定められた方法はない。次に、 $(n \times n)$  のマトリックスを  $\alpha, \beta, n$  元のベクトルを  $\gamma$  とすれば、各格点の物理量  $\mathbf{y}$  と  $\mathbf{z}$  の間に次式が成立する。

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{\alpha}\mathbf{y} + \overrightarrow{\beta}\mathbf{z} = \overrightarrow{\gamma} \\ \overleftarrow{\alpha}\mathbf{y} + \overleftarrow{\beta}\mathbf{z} = \overleftarrow{\gamma} \end{array} \right\} \quad (1)$$

任意点の物理量は端点の物理量を初期値として定められるが、端点の物理量の半分は境界条件で与えられるため、残り半分は消去可能となり、境界条件は両端に存在するので、式(1)の関係が一般に成立する。本方法ではこの関係式、すなわち  $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}, \overleftarrow{\alpha}, \overleftarrow{\beta}, \overleftarrow{\gamma}$  を始点から終点まで伝達して求めることになる。矢印  $\rightarrow$  は左から右への伝達を意味しており、 $\leftarrow$  は逆方向への伝達計算を意味する。 $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}, \overleftarrow{\alpha}, \overleftarrow{\beta}, \overleftarrow{\gamma}$  は伝達計算始点の境界条件、 $\mathbf{y}$  および  $\mathbf{z}$  の物理量の組み合わせにより異なり、 $(n \times n)$  マトリックスと  $n$  元ベクトルであること以外、何もいえることはない。各格点の全物理量は両方向からの伝達計算で求められた  $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}, \overleftarrow{\alpha}, \overleftarrow{\beta}, \overleftarrow{\gamma}$  を用いて逆行列計算で求められる。

伝達計算過程では、当然  $\alpha, \beta, \gamma$  の成分の絶対値が増大するので、適切な判定基準に従い、途中で式(1)の両辺に  $\overrightarrow{\alpha}^{-1}, \overleftarrow{\alpha}^{-1}$  あるいは  $\overrightarrow{\beta}^{-1}, \overleftarrow{\beta}^{-1}$  をかけて新たに  $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}, \overleftarrow{\alpha}, \overleftarrow{\beta}, \overleftarrow{\gamma}$  と置きなおし、 $\alpha, \beta, \gamma$  のノルムを下げることが必要である。

格間伝達、格点伝達の方法、境界条件の与え方、 $\alpha, \beta, \gamma$  のノルムの下げ方、格点における全物理量の決定方法などについて以下に述べる。

### (1) 格間伝達法

構造要素の常微分方程式

$$\frac{dY}{dx} = AY + Q(x) \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{Y}$ ：未知の物理量ベクトル ( $2n$ )

$A$ ：係数マトリックス ( $2n \times 2n$ )

$Q$ ：荷重ベクトル ( $2n$ )

の初期値問題の一般解

$$Y(x) = e^{Ax}Y(0) + e^{Ax} \int_0^x e^{-As}Q(s)ds \dots (3)$$

の漸化式表示は

$$Y(x+4x) = e^{A4x}Y(x) + e^{A4x} \int_0^{4x} e^{-As}Q(x+s)ds \dots (4)$$

である<sup>7), 8)</sup>。

そこで、

$$Y = \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} \dots (5)$$

$$e^{A4x} = \begin{bmatrix} A(4x) & B(4x) \\ C(4x) & D(4x) \end{bmatrix} \dots (6)$$

$$\int_0^{4x} e^{-As}Q(x+s)ds = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(x) \\ \mathbf{r}(x) \end{Bmatrix} \dots (7)$$

ここで、 $\mathbf{y}, \mathbf{z}$  は  $n$  次元の未知物理量ベクトル

$A(4x), B(4x), C(4x), D(4x)$  は  $(n \times n)$  のマトリックス

$\mathbf{q}(x), \mathbf{r}(x)$  は  $n$  次元のベクトル

と置きなおす。

式(5), (6), (7)を式(4)へ代入し、両辺に  $e^{-A4x}$  をかければ、

$$\begin{bmatrix} A(-4x) & B(-4x) \\ C(-4x) & D(-4x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}(x+4x) \\ \mathbf{z}(x+4x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}(x) \\ \mathbf{z}(x) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(x) \\ \mathbf{r}(x) \end{Bmatrix} \dots (8)$$

式(8)の両辺に  $[\overrightarrow{\alpha}(x) \overrightarrow{\beta}(x)]$  をかけて整理すれば、

$$\begin{aligned} & [\overrightarrow{\alpha}(x)A(-4x) + \overrightarrow{\beta}(x)C(-4x)]\mathbf{y}(x+4x) \\ & + [\overrightarrow{\alpha}(x)B(-4x) + \overrightarrow{\beta}(x)D(-4x)]\mathbf{z}(x+4x) \\ & = \overrightarrow{\gamma}(x) + \overrightarrow{\alpha}(x)\mathbf{q}(x) + \overrightarrow{\beta}(x)\mathbf{r}(x) \end{aligned} \dots (9)$$

すなわち、式(9)より  $\overrightarrow{\alpha}(x), \overrightarrow{\beta}(x), \overrightarrow{\gamma}(x)$  と  $\overrightarrow{\alpha}(x+4x), \overrightarrow{\beta}(x+4x), \overrightarrow{\gamma}(x+4x)$  の間に次式の成立することがわかる。

$$[\overrightarrow{\alpha}(x+4x) \overrightarrow{\beta}(x+4x)] = [\overrightarrow{\alpha}(x) \overrightarrow{\beta}(x)]e^{-A4x} \dots (10)$$

$$\overrightarrow{\gamma}(x+4x) = \overrightarrow{\gamma}(x) + [\overrightarrow{\alpha}(x) \overrightarrow{\beta}(x)] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(x) \\ \mathbf{r}(x) \end{Bmatrix} \dots (11)$$

逆方向からの伝達の場合も同様に、 $\overleftarrow{\alpha}(x-4x), \overleftarrow{\beta}(x-4x), \overleftarrow{\gamma}(x-4x)$  と  $\overleftarrow{\alpha}(x), \overleftarrow{\beta}(x), \overleftarrow{\gamma}(x)$  の間には次式が成立する。

$$[\overleftarrow{\alpha}(x-4x) \overleftarrow{\beta}(x-4x)] = [\overleftarrow{\alpha}(x) \overleftarrow{\beta}(x)]e^{A4x} \dots (12)$$

$$\overleftarrow{\gamma}(x-4x) = \overleftarrow{\gamma}(x) + [\overleftarrow{\alpha}(x) \overleftarrow{\beta}(x)] \begin{Bmatrix} \mathbf{s}(x) \\ \mathbf{t}(x) \end{Bmatrix} \dots (13)$$

ここで、

$$-\int_0^{4x} e^{As} \mathbf{Q}(x-s) ds = \begin{cases} \mathbf{s}(x) \\ \mathbf{t}(x) \end{cases} \quad \dots \dots \dots (14)$$

(ただし、 $4x$  は常に正の値をとるものとする)  
とする。以上、式(7)、(10)～(14)が格間伝達に用いる関係式である。

## (2) 格点伝達法

格点伝達計算は、中間格点の支持条件により生じる飛躍的な物理量変化を導入するために行う。通常の方法と提案する方法の間に大きな相違点はないが、格点物理量  $\mathbf{Y}$  の  $y, z$  への分割が格点伝達マトリックスにも若干の記述上の違いを生じる。

支点上以外(自由点)，あるいは弾性支点上に中間格点  $i$  をとり格点伝達する場合(図-1)，格点  $i$  の左側物理量  $\mathbf{Y}_{i,L}$  右側物理量  $\mathbf{Y}_{i,R}$  の間に次式

$$\mathbf{Y}_{i,R} = \mathbf{K}_i \mathbf{Y}_{i,L} + \mathbf{F}_i \quad \dots \dots \dots (15)$$

が成り立つ。ここで、 $\mathbf{K}_i$  は弾性支点  $i$  のばね定数を含む( $2n \times 2n$ )のマトリックスであり、 $\mathbf{F}_i$  は点  $i$  に作用する集中荷重を表わす  $2n$  元のベクトルである。式(15)の  $\mathbf{Y}_{i,L}, \mathbf{Y}_{i,R}$  を  $\mathbf{y}_{i,L}, \mathbf{z}_{i,L}$  および  $\mathbf{y}_{i,R}, \mathbf{z}_{i,R}$  で置換して得られた関係式を

$$\vec{\alpha}_{i,L} \mathbf{y}_{i,L} + \vec{\beta}_{i,L} \mathbf{z}_{i,L} = \vec{\gamma}_{i,L} \quad \dots \dots \dots (16)$$

あるいは逆方向の伝達式

$$\vec{\alpha}_{i,R} \mathbf{y}_{i,R} + \vec{\beta}_{i,R} \mathbf{z}_{i,R} = \vec{\gamma}_{i,R} \quad \dots \dots \dots (17)$$

へ代入すれば、ただちに格点伝達されて

$$\vec{\alpha}_{i,R} \mathbf{y}_{i,R} + \vec{\beta}_{i,R} \mathbf{z}_{i,R} = \vec{\gamma}_{i,R} \quad \dots \dots \dots (18)$$

あるいは、

$$\vec{\alpha}_{i,L} \mathbf{y}_{i,L} + \vec{\beta}_{i,L} \mathbf{z}_{i,L} = \vec{\gamma}_{i,L} \quad \dots \dots \dots (19)$$

となる。

単純支持上あるいはヒンジが中間格点  $i$  である場合(図-2)，未知反力または勾配の飛躍量をベクトル  $\mathbf{R}_i$  で表わせば、 $\mathbf{Y}_{i,L}, \mathbf{Y}_{i,R}$  および  $\mathbf{R}_i$  の間に次式が成り立つ。

$$\mathbf{Y}_{i,R} = \mathbf{Y}_{i,L} + \mathbf{R}_i \quad \dots \dots \dots (20)$$

$\mathbf{Y}_{i,L}, \mathbf{Y}_{i,R}$  の成分のいくつかが固定条件等により 0 となるが、0 成分と同じ個数の未知反力、未知の勾配飛躍量等が  $\mathbf{R}_i$  成分として含まれている。したがって、このような中間格点を伝達するときは、一時的に  $\mathbf{Y}_{i,L}, \mathbf{Y}_{i,R}$  成分の組み換えを行う。つまり、固定条件より 0 になる物理量は除外し、未知量をかわりに入れておく。続いて

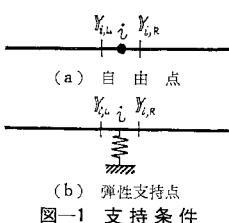


図-1 支持条件

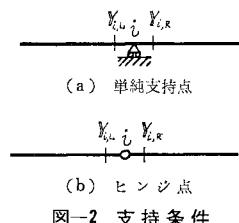


図-2 支持条件

行われる格間伝達では、式(7)、(10)～(14)が適用できないため漸化式(4)を用いるが、次の格点に伝達したときには未知量を消去し、物理量ベクトルの成分は元にもどすことが可能である。

以上の格間伝達、格点伝達に関する具体的計算例は不静定はりを取り上げ、4.(1)で示すこととする。

## (3) 境界条件の与え方

始点における  $\alpha, \beta, \gamma$  により境界条件は与えられる。特定の決め方はないが、たとえば、始点で境界条件が

$$\mathbf{y}=0, \mathbf{z}=\text{未知} \quad \dots \dots \dots (21)$$

であれば、 $\mathbf{I}$  を単位マトリックス( $n \times n$ )として、

$$\left. \begin{array}{l} \alpha=\mathbf{I} \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots (22)$$

とすればよい。 $\mathbf{y}, \mathbf{z}$  の一部が 0 で、一部が未知の場合でも、 $\alpha, \beta, \gamma$  により境界条件が適切に表わされればよい。具体的な例は 4.(1) で示す。

## (4) 伝達計算過程で $\alpha, \beta, \gamma$ 成分の絶対値を下げる方法

式(1)の関係を始点から終点まで伝達する過程で、 $\alpha, \beta, \gamma$  成分の絶対値は増大する。増大する割合は構造物により異なるが、一般に単純なはりでは顕著でなく、多層ラーメン、板、シェルなどでは急激である。

$\alpha, \beta, \gamma$  成分の絶対値、すなわちノルムが増大すれば、次章で考察するとおり、桁落ちによる誤差が発生しやすくなる。そこで、 $\alpha, \beta$  のノルムを調べつつ伝達計算を行い、ノルムがある基準値を超えたとき、それを下げるこことを考える。方法は一通りではないが、最も簡単かつ根拠の明確なのは、式(1)の両辺に  $\vec{\alpha}^{-1}, \vec{\alpha}^{-1}$  あるいは  $\vec{\beta}^{-1}, \vec{\beta}^{-1}$  をかけて

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{I}\mathbf{y} + \vec{\alpha}^{-1} \vec{\beta} \mathbf{z} = \vec{\alpha}^{-1} \vec{\gamma} \\ \mathbf{I}\mathbf{y} + \vec{\alpha}^{-1} \vec{\beta} \mathbf{z} = \vec{\beta}^{-1} \vec{\gamma} \end{array} \right\} (\mathbf{I} \text{ は単位マトリックス}) \quad \dots \dots \dots (23)$$

あるいは、

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\beta}^{-1} \vec{\alpha} \mathbf{y} + \mathbf{I} \mathbf{z} = \vec{\beta}^{-1} \vec{\gamma} \\ \vec{\beta}^{-1} \vec{\alpha} \mathbf{y} + \mathbf{I} \mathbf{z} = \vec{\beta}^{-1} \vec{\gamma} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots (24)$$

とし、 $\mathbf{I}, \vec{\alpha}^{-1} \vec{\beta}, \vec{\alpha}^{-1} \vec{\gamma}, \dots$  を新たに  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \dots$  と置きなおすことである。

本方法の重要な事項の一つはこの置きなおしであり、 $\alpha, \beta, \gamma$  のノルムが低下し、有利に計算を進められる根拠については 3. で考察している。

## (5) 格点 $i$ の全物理量を求める方法

左端より伝達計算し、

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\alpha}_{i,L} \mathbf{y}_{i,L} + \vec{\beta}_{i,L} \mathbf{z}_{i,L} = \vec{\gamma}_{i,L} \\ \vec{\alpha}_{i,R} \mathbf{y}_{i,R} + \vec{\beta}_{i,R} \mathbf{z}_{i,R} = \vec{\gamma}_{i,R} \end{array} \right\} \quad \dots \dots \dots (25)$$

右端より伝達計算し、

$$\begin{cases} \overleftarrow{\alpha}_{i,R} \overrightarrow{y}_{i,R} + \overleftarrow{\beta}_{i,R} z_{i,R} = \overleftarrow{\gamma}_{i,R} \\ \overleftarrow{\alpha}_{i,L} \overrightarrow{y}_{i,L} + \overleftarrow{\beta}_{i,L} z_{i,L} = \overleftarrow{\gamma}_{i,L} \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad (26)$$

が全格点について求まれば、

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\alpha}_{i,L} & \overrightarrow{\beta}_{i,L} \\ \overleftarrow{\alpha}_{i,L} & \overleftarrow{\beta}_{i,L} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{y}_{i,L} \\ \overrightarrow{z}_{i,L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\gamma}_{i,L} \\ \overleftarrow{\gamma}_{i,L} \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overrightarrow{\alpha}_{i,R} & \overrightarrow{\beta}_{i,R} \\ \overleftarrow{\alpha}_{i,R} & \overleftarrow{\beta}_{i,R} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{y}_{i,R} \\ \overrightarrow{z}_{i,R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\gamma}_{i,R} \\ \overleftarrow{\gamma}_{i,R} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \dots \dots \dots \quad (27)$$

を解くことにより、格点  $i$  の両側の全物理量が求められる。固定支持上あるいはヒンジの左右両側では、固定条件等から 0 になるところを未知反力などで置き換え、それに従って、 $\overrightarrow{\alpha}$ ,  $\overrightarrow{\beta}$  あるいは  $\overleftarrow{\alpha}$ ,  $\overleftarrow{\beta}$  に若干の組み換えを施せばよい。式 (27) を解くためには逆行列計算が必要であるが、サイズが小さいので計算量の問題は生じないであろう。

### 3. 本方法の数値計算精度上有利な根拠

伝達マトリックス法では、格間伝達と格点伝達を交互に繰り返して始点から終点に到達し、両端物理量の関係を求め境界条件を考え合わせて解を得る。格点伝達マトリックスが、格点の支持条件、荷重条件あるいは從部材との結合による不連続物理量を導入するものであるのに対し、格間伝達マトリックスは主部材の部材両端物理量の関係を与えるもので、主部材の常微分方程式の一般解として求められる。

この両伝達マトリックスについては、通常の方法と本論文で提案する方法の間に本質的な違いはない。格点伝達マトリックスはまったく同じものであり、格間伝達マトリックスは、式 (6), (7), (10)～(14) から明らかなように、逆マトリックスの関係にあるだけである。

通常の伝達マトリックス法において、多層ラーメン、格子桁などの骨組構造物を除いて精度低下をもたらす主要因は、構造系自体の特性を表わす格間伝達マトリックスにあり、特に常微分方程式の同次解から得られた部分にある。骨組構造物では、格間、格点両伝達マトリックスの積を新たに格間伝達マトリックスと考えることにより、以下に述べることが傾向的にあてはまる。中井・事口<sup>9)</sup>、柴田<sup>10)</sup>が指摘しているように、同次解が指数関数あるいは  $\cosh$ ,  $\sinh$  などの双曲線関数を有するとき、伝達マトリックス法では精度低下が生じやすい。

周知のとおり、双曲線関数には次式、

$$\cosh^2 \lambda - \sinh^2 \lambda = 1 \quad \dots \dots \dots \quad (28)$$

の関係がある。しかし、かりに 7 桁の計算機で計算すれば 表-1 の現象が生じる<sup>11)</sup>。

$\lambda \geq 8$  では、双曲線関数（指数関数）の入る計算は桁落ちによる精度低下が予想される。

表-1 双曲線関数  $\cosh$ ,  $\sinh$  の値 (7 桁)

$\lambda$	$\cosh \lambda$	$\sinh \lambda$	$\cosh^2 \lambda - \sinh^2 \lambda$
0	1.000 000	0.000 000	1.000 000
1	1.543 081	1.175 201	1.000 002
2	3.762 196	3.626 860	1.000 01
3	10.067 66	10.017 87	1.000 1
4	27.308 23	27.289 92	0.999 7
5	74.209 95	74.203 21	1.001
6	201.715 6	201.713 2	0.96
7	548.317 0	548.316 1	1.
8	1490.479	1490.479	0.
9	4051.542	4051.542	0.
10	11013.23	11013.23	0.

伝達計算過程で、次々にマトリックスの積を計算するとき、マトリックス成分には絶対値の似かよった符号のみ異なる成分の組が表われてくる。絶対値がある値以上あるいは以下になったとき、計算機の有する桁数では似かよった成分どうしの差異を識別できなくなり、精度低下を生じることが現象的に観察される。しかし、このような現象の説明にあたって数学的な誤差論のみでは不十分である。

本章では、物理的考察に基づいて上記の現象の説明を試み、本論文で提案する方法の数値計算上有利な根拠を述べる。

格間伝達マトリックスの主要部分（常微分方程式の同次解）は、式 (3), (4) から明らかなどおり、係数マトリックス  $A$  の指數関数  $e^{At}$  (ただし、 $t$  は部材長) である。

係数マトリックス  $A$  は、文献 8) で指摘したとおり、等断面の構造物では固有値 0 を持ち、縮重している。しかし、固有値 0 が数値計算上顕著な悪影響を与えないことは自明である。0 以外の固有値は、等断面であれば部材の左端、右端どちらの側から見ても同じ物理的性質を有するところから、固有値  $\lambda_i$  に対して  $-\lambda_i$  が必ず存在する。また一般に、 $A$  の実数非対称性から  $\lambda_i$ ,  $-\lambda_i$  に対する共役複素数の固有値  $\bar{\lambda}_i$ ,  $-\bar{\lambda}_i$  も存在する。

固有ベクトルについては、縮重固有値 0 に対して実数の固有ベクトルと從属する主要ベクトルが存在し<sup>8)</sup>、 $A$  のサイズを  $2n$  としたとき、固有、主要ベクトルの  $n$  個の成分は 0 であることが観察される。固有値  $\lambda_i$  と  $-\lambda_i$  に対しては、部材の両端どちら側から見ても物理的性質が等しいところから、固有ベクトル成分の絶対値は両者等しくなければならない。ただしサイズ  $2n$  のうち、 $n$  個の成分の符号は両者で異なるはずである。たとえば、 $x$  座標軸に直角方向の変位  $w$  に対する成分の符号は両者等しいが、 $dw/dx$  は異なり、また  $d^2w/dx^2$  は等しく、 $d^3w/dx^3$  は異なる。なお、 $A$  の実数非対称性により、 $\lambda_i$ ,  $-\lambda_i$  の固有ベクトルに対して  $\bar{\lambda}_i$ ,  $-\bar{\lambda}_i$  の固有ベクトルは複素共役である。ペアで {固有値、固有ベクトル} のように記述すれば上記事項は、

$$\left\{ \lambda_i, \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \right\}, \left\{ -\lambda_i, \begin{pmatrix} -u_i \\ v_i \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \bar{\lambda}_i, \begin{pmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{pmatrix} \right\}, \\ \left\{ -\bar{\lambda}_i, \begin{pmatrix} -\bar{u}_i \\ \bar{v}_i \end{pmatrix} \right\}$$

となる。ただし、 $u_i, v_i$  は互いに一次独立な  $n$  次元のベクトルとし、 $\bar{u}_i, \bar{v}_i$  は  $u_i, v_i$  に複素共役なベクトルとする。

縮重固有値 0 とその固有ベクトル、主要ベクトルは前に述べたとおり相対的にそれほど数値計算上悪影響を与えるものではない。そこで、以下の考察から除外し、0 以外の固有値と対応する固有ベクトルから成るマトリックス  $\tilde{A}$  を考える。 $\tilde{A}$  は  $A$  に類似したマトリックスであるが、固有値 0 の成分を除外したという違いを明確にするため～をつけて区別している。マトリックスの対角化と、関連する若干の知識により、 $\tilde{A}$  は次式を満足するマトリックス  $A_i$  の和に等しいことがいえる。

$$\begin{bmatrix} u_i & -u_i & \bar{u}_i & -\bar{u}_i \\ v_i & \bar{v}_i & \bar{v}_i & \bar{v}_i \end{bmatrix}_{2n \times 4} \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ -\lambda_i & \bar{\lambda}_i \\ 0 & -\bar{\lambda}_i \end{bmatrix}_{4 \times 4} \\ = [A_i]_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} u_i & -u_i & \bar{u}_i & -\bar{u}_i \\ v_i & \bar{v}_i & \bar{v}_i & \bar{v}_i \end{bmatrix}_{2n \times 4} \quad \dots \quad (29)$$

ここで、

$$A_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \quad \dots \quad (30)$$

(ただし、 $a_i, b_i, c_i, d_i$  は  $n \times n$  マトリックス) と置き、式(29)を  $a_i, b_i, c_i, d_i$  に関する連立一次方程式と考えると、

$$\begin{cases} a_i u_i = 0, & a_i \bar{u}_i = 0 \\ b_i v_i = \lambda_i u_i, & b_i \bar{v}_i = \bar{\lambda}_i \bar{u}_i \\ c_i u_i = \lambda_i v_i, & c_i \bar{u}_i = \bar{\lambda}_i \bar{v}_i \\ d_i v_i = 0, & d_i \bar{v}_i = 0 \end{cases} \quad \dots \quad (31)$$

となる。 $a_i, d_i$  に関する方程式は、 $u_i, \bar{u}_i, v_i, \bar{v}_i$  に一次独立の仮定を置けば、

$$\begin{cases} a_i = 0 \\ d_i = 0 \end{cases} \quad \dots \quad (32)$$

となる。すなわち、 $A_i$  および  $A_i$  の和から成るマトリックス  $\tilde{A}$  は図-3 に示すような石だたみ型のマトリックスである。もし、固有値  $\lambda_i$  が 0 以外の実数あるいは純虚数の場合も同様の関係式が成り立ち、 $A_i$  および  $A$

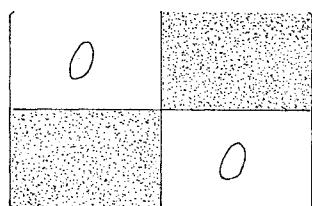


図-3 石だたみ型マトリックス

の石だたみ型であることがいえる。したがって、 $\tilde{A}$  と類似のマトリックス  $A$  も図-3 に示す石だたみ型あるいはそれに近いマトリックスである。

次に、石だたみ型マトリックス  $\tilde{A}$  から作られる  $e^{\tilde{A}l}$  および  $e^{-\tilde{A}l}$  がどのような性質を有するかを考える。

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (33)$$

(ただし、 $b, c$  は  $n \times n$  マトリックス)

より、

$$e^{\tilde{A}l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tilde{A}l)^n}{n!} \\ = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bcl^2)^n}{(2n)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bcl^2)^n}{(2n+1)!} bl \\ cl \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bcl^2)^n}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cbl^2)^n}{(2n)!} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (34)$$

$$e^{-\tilde{A}l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tilde{A}l)^n}{n!} \\ = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bcl^2)^n}{(2n)!} & -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bcl^2)^n}{(2n+1)!} bl \\ -cl \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bcl^2)^n}{(2n+1)!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cbl^2)^n}{(2n)!} \end{bmatrix} \quad \dots \quad (35)$$

となる。

$\tilde{A}$  の固有値を  $\lambda_i, -\lambda_i, \bar{\lambda}_i, -\bar{\lambda}_i, \dots$  としたとき、 $bc$  と  $c b$  の固有値は等しく  $\lambda_i^2, \bar{\lambda}_i^2, \dots$  である。そこで、 $\lambda_i, \bar{\lambda}_i, \dots$  を対角成分を持つ対角マトリックスを  $A$  と定め、 $bc$  を対角化するための適当な正則マトリックスを  $p$  とすれば、

$$p^{-1}(bc)p = A^2 \quad \dots \quad (36)$$

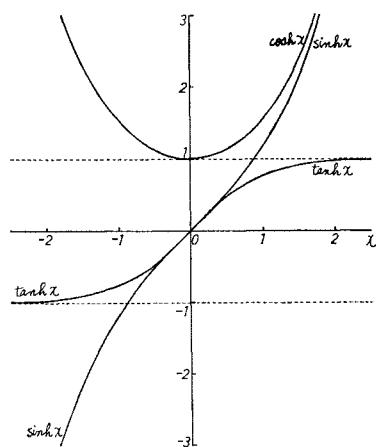
となる。この  $p, A$  を用いて  $e^{\tilde{A}l}$  をさらに変形すれば、

$$e^{\tilde{A}l} = p \begin{bmatrix} \cosh Al & \\ p^{-1}cpA^{-1} \sinh Al & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sinh Al & p^{-1}bpA^{-1} \\ p^{-1}cp \{ \cosh Al \} p^{-1}c^{-1}p & \end{bmatrix} p^{-1} \quad \dots \quad (37)$$

$$e^{-\tilde{A}l} = p \begin{bmatrix} \cosh Al & \\ -p^{-1}cpA^{-1} \sinh Al & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sinh Al & p^{-1}bpA^{-1} \\ p^{-1}cp \{ \cosh Al \} p^{-1}c^{-1}p & \end{bmatrix} p^{-1} \quad \dots \quad (38)$$

である。同様の関係式は  $\tilde{A}$  が固有値として 0 以外の実数あるいは純虚数を持つ場合にも成り立つ。

式(37), (38)より、 $e^{\tilde{A}l}, e^{-\tilde{A}l}$  成分の絶対値は部材間距離  $l$  が長くなり、伝達計算区間が長くなるとき、 $\sinh, \cosh$  の双曲線関数的に増大することが明らかになった。したがって、表-1 に示したように、固有値実部の絶対値の最大値と長さ  $l$  の積が 8 度以上の場合、7 枠の計算機では精度をまったく維持できないことが容易に推測される。



#### 図-4 双曲線関数

では、本論文で提案する方法はなぜ数値計算上有利であろうか。係数マトリックス  $A$  は  $\tilde{A}$  に近い性質を有するので、図-3 に示すような石だたみ型あるいはそれに近い形になるように格点物理量ベクトルの配列順序を変え、マトリックス成分の配置もそれに従って変更すれば、格間伝達マトリックス  $eAl$ ,  $e^{-Al}$  は式(37), (38) の形になる。始点の境界条件が、格点物理量ベクトルの上半分 0, あるいは下半分 0 で与えられる場合、 $I$  を単位マトリックスとすれば、→方向伝達のとき、 $x=0$  で、

$$\vec{\alpha} = I, \vec{\beta} = 0, \vec{\gamma} = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (39)$$

あるいは、

である。

$x=l$  では

あるいは、

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\alpha} = -c p A^{-1} \{ \sinh A l \} p^{-1} \\ \vec{\beta} = c p \{ \cosh A l \} p^{-1} c^{-1} \\ \vec{\gamma} = r \end{array} \right\} \dots \dots \dots \quad (42)$$

である。ここで、 $q$ ,  $r$  は外的な荷重条件から決まり、式(7)で計算し求められる。

逆方向に伝達する場合も同様である。

$\alpha, \beta$  成分の絶対値は通常の伝達マトリックス法における格間、格点伝達マトリックスの積と同様、 $\sinh, \cosh$  の双曲線関数的に増大するが、あまり増大しないうちに適当に  $\alpha^{-1}$  または  $\beta^{-1}$  を格点物理量の関係式両辺にかけて、 $I, \alpha^{-1}\beta, \alpha^{-1}\gamma$  または  $\beta^{-1}\alpha, I, \beta^{-1}\gamma$  を新しく  $\alpha, \beta, \gamma$  と置き直せば、常に  $\alpha, \beta$  を  $I$  と  $\tanh Al$  あるいは  $I$  と  $(1/\tanh Al)$  的なマトリックスにすることができる。 $\gamma$  を置き直すことは、 $q, r$  に  $(1/\cosh$

$A\ell$  または  $(1/\sinh A\ell)$  をかけることに相当する。 $\tanh A\ell$  は図-4に示すような関数であり有界である。したがって、 $A$  の固有値の実部絶対値の最大値と長さ  $\ell$  の積が非常に大きくなった場合でも、 $\tanh A\ell$  の成分の絶対値は一定値を超えることはない。 $1/\tanh A\ell$  の成分の絶対値は、 $A$  の固有値実部の絶対値と  $\ell$  の積が小さいとき、非常に大きくなることが考えられる。しかし、それは  $\alpha, \beta$  の成分の絶対値が小さく、新たに上述の置き換えを必要としない場合である。

逆方向からの伝達計算も含めて、もし、始点の境界条件が式(39)あるいは式(40)で表わされる以外の場合、 $\alpha, \beta$  を  $\tanh$  の双曲線関数に押さえ込める明確な根拠はない。しかし、はり、骨組、板、シェル等に関して経験的に類推する限り、各格点における  $\alpha, \beta, \gamma$  の関係が始点の条件に大きく影響されるのは、始点のごく近傍のみである。特に、伝達マトリックス法で精度低下の著しい構造物ほどその傾向は著しいと思われる。したがって、 $\alpha, \beta, \gamma$  成分の絶対値に及ぼす境界条件の影響は小さいのであるから、種々の始点の境界条件に対しても大きな問題を生じることなく、提案する伝達マトリックス法は実行できるものと思われる。

荷重項, すなわち  $r$  は構造系の特性にも無関係ではないが, 主として外的条件から定まり, 誤差の見積りは難しい. しかし,  $\alpha, \beta, r$  は各格点における物理量の関係を与えるものであり,  $\alpha, \beta$  成分の絶対値が 1 に近いとき,  $r$  成分の絶対値のみが無制限に大きい, あるいは小さいことはあり得ない.  $\alpha, \beta$  の置き換えと同時に,  $1/\cosh Al$  または  $1/\sinh Al$  をかけることにより行われる  $r$  の変換は, 数値計算上特に悪い性質を与えるものであってはならないはずである.

最後に、もし、 $A$  の固有値として純虚数  $\pm \mu j$  ( $\mu$  は実数,  $j = \sqrt{-1}$ ) がある場合、 $e^{At}, e^{-At}$  の成分の一部は、 $\sinh, \cosh$  でなく、 $\sin, \cos$  の三角関数的な挙動をもつ。

$$\mu l = \begin{cases} m\pi \\ \frac{\pi}{2}(1+2m) \end{cases} \quad (\text{ただし, } m \text{ は整数}) \cdots (43)$$

のとき、 $\alpha, \beta$  が特異になり、必ずしも逆行列計算できない場合のあることを指摘したい。ただし、固有値が純虚数ということは、物理量の  $x$  軸方向変化が無減衰振動波形と同じであることを意味しており、経験的にはそのような純虚数という固有値は存在しないものと思われる。

#### 4. 数値計算例

2、3で述べた事項を実証するため、3つの計算例を

行った。(1)では簡単な不静定はりについて、境界条件、伝達計算により  $\alpha, \beta, \gamma$  がどのように計算されるかを示し、提案する方法の手順を具体的に数値を用いて示した。(2), (3)では本方法の利点を強調するため、多層ラーメンと薄肉円筒殻を取り上げ、通常の伝達マトリックス法による計算結果と本方法による結果および他の解法による結果とを比較検討し、本方法の有効性を確認する。

### (1) 不静定はりの場合

図-5に図示した不静定はりを例に取り上げ、2.で述べた計算法を具体的に数値で示す。モデルの寸法と外荷重は次のとおりである。

$$EI = 2 \times 10^3 \text{ ton} \cdot \text{m}^2, l = 6 \text{ m}, k = 500 \text{ ton/m}, \\ p = 2 \text{ ton/m}, P_0 = 4 \text{ ton}$$

座標系の定め方および変数の無次元化(基準化)の方法はすべて文献1)に従うものとする。

はりの曲げたわみの式

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x) \quad (\text{ただし, } w \text{ はたわみを表す})$$

は、 $' = d/dx$  とすれば、次に示す正規形常微分方程式に変換される。

$$\frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ w''' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ w''' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p/EI \end{Bmatrix}$$

漸化式表示すると、

$$\begin{Bmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ w''' \end{Bmatrix}_{x+dx} = \begin{Bmatrix} 1 & 4x & 4x^2/2 & 4x^3/6 \\ 0 & 1 & 4x & 4x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ w''' \end{Bmatrix}_x + \begin{Bmatrix} 1 & 4x & 4x^2/2 & 4x^3/6 \\ 0 & 1 & 4x & 4x^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ w''' \end{Bmatrix}_x + \int_0^{dx} \begin{Bmatrix} 1 & -s & s^2/2 & -s^3/6 \\ 0 & 1 & -s & s^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & -s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p/EI \end{Bmatrix} ds$$

文献1)の座標系および記号  $w, \phi, M, Q$  は

$$w=w, \phi=-w', M=EIw'', Q=EIw'''$$

であり、基準定数  $EI_0, l_0, P_0$  を用いて  $w, \phi, M, Q, k$  ( $k$  は支点のばね定数) の無次元化を行う。

$$\bar{w} = w \frac{EI_0}{P_0 l_0^3}, \bar{\phi} = \phi \frac{EI_0}{P_0 l_0^2}, \bar{M} = M \frac{1}{P_0 l_0},$$

$$\bar{Q} = Q \frac{1}{P_0}, \bar{k} = k \frac{l_0^3}{EI_0}$$

本節では、 $-$ は無次元化された量を表わすこととする。

この例題において、基準定数を

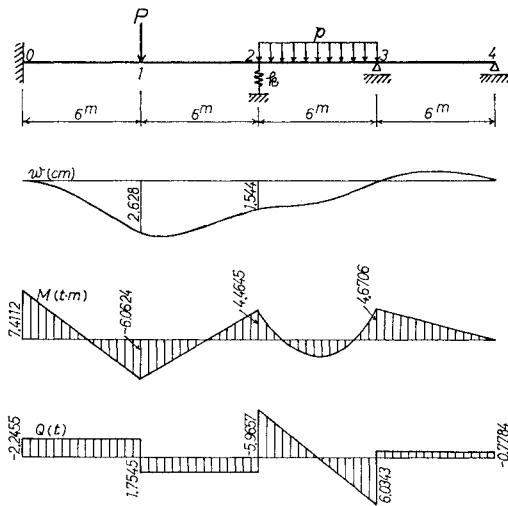


図-5 不静定はりの計算モデルと計算結果

$$EI_0 = 6 EI, l_0 = l = 4x, P_0 = 1 \text{ ton}$$

とすれば、計算に用いる具体的なマトリックスは、

$$e^{A4x} = e^{At} = \begin{Bmatrix} \bar{w} & \bar{\phi} & \bar{M} & \bar{Q} \\ \bar{w} & 1 & -1 & 3 & 1 \\ \bar{\phi} & 0 & 1 & -6 & -3 \\ \bar{M} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \bar{Q} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$e^{-A4x} = e^{-At} = \begin{Bmatrix} \bar{w} & \bar{\phi} & \bar{M} & \bar{Q} \\ \bar{w} & 1 & 1 & 3 & -1 \\ \bar{\phi} & 0 & 1 & 6 & -3 \\ \bar{M} & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \bar{Q} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

であり、分布荷重  $p = 2 \text{ ton/m}$  (一定) が載荷される距離  $l$  の区間では、

$$\int_0^l e^{-As} \bar{Q} ds = \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\phi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -3 \\ -12 \\ -6 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

$$-\int_0^l e^{As} \bar{Q} ds = \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\phi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -3 \\ 12 \\ -6 \\ -12 \end{Bmatrix}$$

となる。なお、無次元化されたばね定数  $\bar{k}$  および荷重  $\bar{P}$  は

$$\bar{k} = (l_0^3/EI_0)k = 9$$

$$\bar{P} = (1/P_0)P = 4$$

である。

以上求められた  $e^{A4x}, e^{-A4x}, \int_0^l e^{-As} \bar{Q} ds, -\int_0^l e^{As} \bar{Q} ds, \bar{k}, \bar{P}$  を用いて、表-2のとおり系統的に計算することができる。

格点1の左側から右側へ格点伝達するためには、

表-2 不静定はりに関する計算結果のまとめ

格点	$\vec{\alpha}$		$\vec{\beta}$		$\vec{r}$		$\overleftarrow{\alpha}$		$\overleftarrow{\beta}$		$\overleftarrow{r}$			
0, R	1	0	$\bar{w}$	0	0	$\bar{M}$	0	37	-74	$\bar{w}$	439	282	$\bar{M}$	-91
	0	1	$\bar{\phi}$	0	0	$\bar{Q}$	0	45	-89	$\bar{\phi}$	520	327	$\bar{Q}$	-92
1, L	1	1	$\bar{w}$	3	-1	$\bar{M}$	0	37	-37	$\bar{w}$	106	28	$\bar{M}$	-91
	0	1	$\bar{\phi}$	6	-3	$\bar{Q}$	0	45	-44	$\bar{\phi}$	121	29	$\bar{Q}$	-92
1, R	1	1	$\bar{w}$	3	-1	$\bar{M}$	-4	37	-37	$\bar{w}$	106	28	$\bar{M}$	21
	0	1	$\bar{\phi}$	6	-3	$\bar{Q}$	-12	45	-44	$\bar{\phi}$	121	29	$\bar{Q}$	24
2, L	1	2	$\bar{w}$	12	-8	$\bar{M}$	-4	37	0	$\bar{w}$	-5	-4	$\bar{M}$	21
	0	1	$\bar{\phi}$	12	-12	$\bar{Q}$	-12	45	1	$\bar{\phi}$	-8	-5	$\bar{Q}$	24
2, R	-71	2	$\bar{w}$	12	-8	$\bar{M}$	-4	1	0	$\bar{w}$	-5	-4	$\bar{M}$	21
	-108	1	$\bar{\phi}$	12	-12	$\bar{Q}$	-12	0	1	$\bar{\phi}$	-8	-5	$\bar{Q}$	24
3, L	-71	-69	$\bar{w}$	-189	45	$\bar{M}$	17	-1	-1	$\bar{R}_e$	3	1	$\bar{M}$	0
	-108	-107	$\bar{\phi}$	-306	81	$\bar{Q}$	84	-1	0	$\bar{\phi}$	1	1	$\bar{Q}$	0
3, R	45	-69	$\bar{R}_e$	-189	45	$\bar{M}$	17	1	-1	$\bar{w}$	3	1	$\bar{M}$	0
	81	-107	$\bar{\phi}$	-306	81	$\bar{Q}$	84	0	0	$\bar{\phi}$	1	1	$\bar{Q}$	0
4, L	$\frac{429}{600}$	$\frac{343}{600}$	$\bar{w}$	1	0	$\bar{M}$	$\frac{89}{200}$	1	0	$\bar{w}$	0	0	$\bar{M}$	0
	$\frac{687}{600}$	$\frac{429}{600}$	$\bar{\phi}$	0	1	$\bar{Q}$	$\frac{267}{200}$	0	0	$\bar{\phi}$	1	0	$\bar{Q}$	0

$$\begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\phi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix}_{1,R} = \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\phi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix}_{1,L} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

を用い、格点2の左側から右側へ格点伝達するためには

$$\begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\phi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix}_{2,R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\phi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix}_{2,L}$$

を用いればよい。

格点3の左側から右側へ格点伝達するためには、固定条件と無次元化された未知反応  $\bar{R}_e$  を含めた次の関係式を用いればよい。表-2には  $\bar{w}=0$  (既知) により  $\bar{w}$  を省き、未知反応  $\bar{R}_e$  をかわりに置いている。

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\phi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix}_{3,R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{\phi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix}_{3,L} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{R}_e \end{Bmatrix}$$

格点3の右側から格点4の左側へ格点伝達するときは、格点3右側の  $\bar{R}_e$  を含んだ関係式と次の漸化式

$$\begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\phi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix}_{4,L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w} \\ \bar{\phi} \\ \bar{M} \\ \bar{Q} \end{Bmatrix}_{3,R} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

を用いて、格点3右側の物理量を消去すればよい。消去法は一通りではないが、その一例は表-2に示したとおりである。

逆方向への伝達計算にも上記の式がそのまま用いられ、表-2の  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\overleftarrow{\alpha}$ ,  $\overleftarrow{\beta}$ ,  $\overleftarrow{r}$  を用い、各格点で式(27)を解けば全物理量が求められる。結果は図-5の

とおりである。

## (2) 多層ラーメンに横方向荷重が作用する場合

図-6に20層ラーメンを図示したが、5, 10, 15, 20の各層までの場合、合計4ケースを3種類の方法で計算する。載荷点は5, 10, 15, 20層目の左端のみとし、等荷重  $P$  が載荷されるものとする。計算に用いた寸法、材料定数、無次元化のための基準定数は次のとおりであり、無次元化の方法は文献1)に従った。

$$EI_v = 2.10 \times 10^4 t \cdot m^2$$

(縦部材の曲げ剛性)

$$EI_h = 1.26 \times 10^4 t \cdot m^2$$

(水平部材の曲げ剛性)

$$EF_v = 4.20 \times 10^5 t$$

(縦部材のヤング率と断面積の積)

$$EF_h = 3.15 \times 10^5 t$$

(水平部材のヤング率と断面積の積)

$$l = 5.0 m$$

$$h = 3.0 m$$

$$P = 25 t$$

$$EI_0 = 3 EI$$
 (基準定数)

$$l_0 = l$$
 (基準定数)

$$P_0 = P$$
 (基準定数)

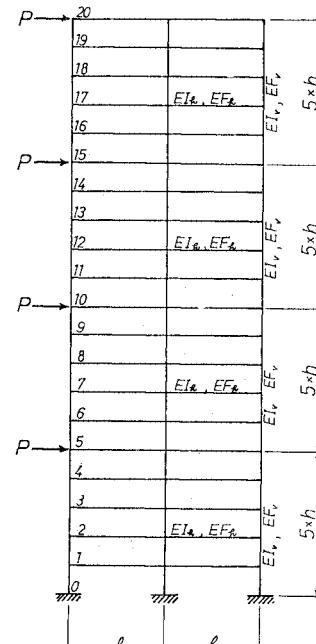


図-6 多層ラーメンの計算モデル

表-3 に5層までの場合について、各層一番左側の格点における変位( $w, u, \phi$ はそれぞれ水平方向変位、垂直方向変位、回転変位)を示した。同様に表-4, 5, 6には10, 15, 20層までの場合の計算結果をまとめた。マトリックス変位法は要素剛性マトリックスの重ね合わせにより得られた全体系の剛性マトリックスを逆行列計算して解を得たものである。マトリックスサイズはそれぞれ45, 90, 135, 180であり、逆行列計算にはユニット分割法を併用した。一方、通常の伝達マトリックス法および提案する方法で扱ったマトリックスサイズは18である。

表-3~6より明らかなとおり、5層までは通常の伝達マトリックス法で精度良く計算できるが、それ以上の場合は他の2つの方法と比較して相当大きい誤差を生じている。変位の絶対値が非常に大きいだけでなく、符号が逆転するなど、この計算モデルでは生じ得ない結果を

与えている。提案する方法では、5層計算するごとに $\alpha, \beta, \gamma$ の置き換えを行っているが、変位法による計算結果と5桁完全に一致している。表からは除外したが、モーメントとせん断力、軸力もすべて同様である。本方法により伝達マトリックス計算の精度は大幅に改善されているといえるであろう。

### (3) 両端単純支持の薄肉円筒殻中央断面に上下逆方向の集中荷重が作用する場合

図-7の計算モデルはYuanら<sup>12)</sup>により、Donnellの簡略化された理論解精度を検討するために使われた。Flüggeの理論式によるかなり精度の高い解(2重Fourier級数解)と通常の伝達マトリックス法および提案する方法による解を比較検討する。計算に用いる基本的な式は文献13)に示したとおりであり、円周方向Fourier

表-3 ケース1, 5層までとしたときの計算結果

層番号	通常の伝達マトリックス法			提案する方法			変位法		
	$w$ (cm)	$u$ (cm)	$\phi (\times 10^{-3})$	$w$ (cm)	$u$ (cm)	$\phi (\times 10^{-3})$	$w$ (cm)	$u$ (cm)	$\phi (\times 10^{-3})$
5	2.0957	0.06624	-1.0755	2.0957	0.06624	-1.0755	2.0957	0.06624	-1.0755
4	1.6532	0.06291	-1.3805	1.6532	0.06291	-1.3805	1.6532	0.06291	-1.3805
3	1.1677	0.05464	-1.4073	1.1677	0.05464	-1.4073	1.1677	0.05464	-1.4073
2	0.68396	0.04119	-1.3540	0.68396	0.04119	-1.3540	0.68396	0.04119	-1.3540
1	0.24494	0.02268	-1.1028	0.24494	0.02268	-1.1028	0.24494	0.02268	-1.1028

表-4 ケース2, 10層までとしたときの計算結果

層番号	通常の伝達マトリックス法			提案する方法			変位法		
	$w$ (cm)	$u$ (cm)	$\phi (\times 10^{-3})$	$w$ (cm)	$u$ (cm)	$\phi (\times 10^{-3})$	$w$ (cm)	$u$ (cm)	$\phi (\times 10^{-3})$
10	5153.9	-3.4583	-59.985	7.7596	0.33350	-1.6113	7.7596	0.33350	-1.6113
9	-176.96	0.44073	2138.8	7.1561	0.33018	-1.9190	7.1561	0.33018	-1.9190
8	12.667	0.29385	-78.166	6.5069	0.32189	-1.9612	6.5069	0.32189	-1.9612
7	5.2766	0.28646	-0.90838	5.8463	0.30835	-1.9855	5.8463	0.30835	-1.9855
6	4.9049	0.26898	-1.9407	5.1757	0.28937	-2.0101	5.1757	0.28937	-2.0101
5	4.2179	0.24634	-2.3693	4.4415	0.26456	-2.5350	4.4415	0.26456	-2.5350
4	3.2822	0.21621	-2.8833	3.4512	0.23175	-3.0397	3.4512	0.23175	-3.0397
3	2.2945	0.17643	-2.8428	2.4112	0.18880	-2.9920	2.4112	0.18880	-2.9920
2	1.3335	0.12672	-2.6808	1.4007	0.13541	-2.8181	1.4007	0.13541	-2.8181
1	0.47427	0.06733	-2.1510	0.49800	0.07187	-2.2594	0.49800	0.07187	-2.2594

表-5 ケース3, 15層までとしたときの計算結果

層番号	通常の伝達マトリックス法			提案する方法			変位法		
	$w$ (cm)	$u$ (cm)	$\phi (\times 10^{-3})$	$w$ (cm)	$u$ (cm)	$\phi (\times 10^{-3})$	$w$ (cm)	$u$ (cm)	$\phi (\times 10^{-3})$
15	$3.9589 \times 10^3$	$-2.8983 \times 10^0$	$-4.6140 \times 10^4$	19.107	0.93443	-2.8132	19.107	0.93443	-2.8132
14	$-1.4127 \times 10^{12}$	$1.0343 \times 10^3$	$1.6465 \times 10^3$	18.143	0.93110	-3.1208	18.143	0.93110	-3.1208
13	$5.0414 \times 10^{10}$	$-3.6908 \times 10^7$	$-5.8757 \times 10^{11}$	17.133	0.92281	-3.1630	17.133	0.92281	-3.1630
12	$-1.7990 \times 10^9$	$1.3171 \times 10^6$	$2.0968 \times 10^{10}$	16.112	0.90928	-3.1874	16.112	0.90928	-3.1874
11	$6.4198 \times 10^7$	$-4.7000 \times 10^4$	$-7.4823 \times 10^8$	15.081	0.89030	-3.2122	15.081	0.89030	-3.2122
10	$-2.2909 \times 10^6$	$1.6766 \times 10^8$	$2.6701 \times 10^7$	13.986	0.86550	-3.7383	13.986	0.86550	-3.7383
9	$8.1754 \times 10^4$	$-6.0322 \times 10^4$	$-9.5287 \times 10^5$	12.634	0.83268	-4.2487	12.634	0.83268	-4.2487
8	$-2.9192 \times 10^3$	1.6914	$3.4007 \times 10^4$	11.227	0.78970	-4.2264	11.227	0.78970	-4.2264
7	$1.0323 \times 10^2$	$-4.7447 \times 10^{-1}$	$-1.2118 \times 10^3$	9.8290	0.73615	-4.1784	9.8290	0.73615	-4.1784
6	-4.1880	$-3.4473 \times 10^{-1}$	$4.4369 \times 10^1$	8.4450	0.67182	-4.1131	8.4450	0.67182	-4.1131
5	$1.4723 \times 10^{-2}$	$-2.9220 \times 10^{-1}$	$-8.7789 \times 10^{-1}$	7.0263	0.59631	-4.5364	7.0263	0.59631	-4.5364
4	$-2.7524 \times 10^{-2}$	$-2.3413 \times 10^{-1}$	$1.3908 \times 10^{-1}$	5.3837	0.50746	-4.9269	5.3837	0.50746	-4.9269
3	$-3.4835 \times 10^{-3}$	$-1.7568 \times 10^{-1}$	$2.6953 \times 10^{-2}$	3.7285	0.40314	-4.7460	3.7285	0.40314	-4.7460
2	$2.3722 \times 10^{-4}$	$-1.1713 \times 10^{-1}$	$1.9426 \times 10^{-3}$	2.1497	0.28309	-4.3905	2.1497	0.28309	-4.3905
1	$1.9988 \times 10^{-4}$	$-5.8563 \times 10^{-2}$	$-9.5076 \times 10^{-4}$	0.75912	0.14780	-3.4698	0.75912	0.14780	-3.4698

表-6 ケース 4, 20 層までとしたときの計算結果

層番号	通常の伝達マトリックス法			提案する方法			変位法		
	w (cm)	u (cm)	$\phi (\times 10^{-3})$	w (cm)	u (cm)	$\phi (\times 10^{-3})$	w (cm)	u (cm)	$\phi (\times 10^{-3})$
20	$-1.3175 \times 10^{20}$	$9.6452 \times 10^{16}$	$1.5355 \times 10^{21}$	39.542	2.0027	-4.9496	39.542	2.0027	-4.9496
19	$4.7015 \times 10^{18}$	$-3.4419 \times 10^{15}$	$-5.4795 \times 10^{19}$	37.937	1.9993	-5.2573	37.937	1.9993	-5.2573
18	$-1.6777 \times 10^{17}$	$1.2283 \times 10^{14}$	$1.9554 \times 10^{18}$	36.286	1.9910	-5.2995	36.286	1.9910	-5.2995
17	$5.9870 \times 10^{15}$	$-4.3831 \times 10^{12}$	$-6.9778 \times 10^{16}$	34.624	1.9775	-5.3238	34.624	1.9775	-5.3238
16	$-2.1365 \times 10^{14}$	$1.5641 \times 10^{11}$	$2.4901 \times 10^{15}$	32.952	1.9585	-5.3487	32.952	1.9585	-5.3487
15	$7.6241 \times 10^{12}$	$-5.5816 \times 10^9$	$-8.8858 \times 10^{13}$	31.216	1.9337	-5.8748	31.216	1.9337	-5.8748
14	$-2.7207 \times 10^{11}$	$1.9918 \times 10^8$	$3.1709 \times 10^{12}$	29.223	1.9009	-6.3851	29.223	1.9009	-6.3851
13	$9.7088 \times 10^8$	$-7.1077 \times 10^6$	$-1.1316 \times 10^{11}$	27.176	1.8579	-6.3629	27.176	1.8579	-6.3629
12	$-3.4646 \times 10^8$	$2.5364 \times 10^6$	$4.0380 \times 10^9$	25.137	1.8044	-6.3150	25.137	1.8044	-6.3150
11	$1.2364 \times 10^7$	$-9.0506 \times 10^5$	$-1.4410 \times 10^8$	23.112	1.7401	-6.2501	23.112	1.7401	-6.2501
10	$-4.4122 \times 10^6$	$3.2323 \times 10^2$	$5.1422 \times 10^6$	21.052	1.6645	-6.6750	21.052	1.6645	-6.6750
9	$1.5739 \times 10^4$	$-1.1430 \times 10^1$	$-1.8346 \times 10^5$	18.767	1.5757	-7.0733	18.767	1.5757	-7.0733
8	$-5.6349 \times 10^3$	$4.7650 \times 10^{-1}$	$6.5486 \times 10^3$	16.462	1.4713	-6.9283	16.462	1.4713	-6.9283
7	$1.8973 \times 10^1$	$2.9683 \times 10^{-2}$	$-2.3178 \times 10^2$	14.205	1.3510	-6.7467	14.205	1.3510	-6.7467
6	$-1.2324$	$3.1554 \times 10^{-2}$	$9.7198$	12.003	1.2146	-6.5371	12.003	1.2146	-6.5371
5	$-1.0015 \times 10^{-1}$	$2.3111 \times 10^{-2}$	$3.8366 \times 10^{-1}$	9.8113	1.0617	-6.8051	9.8113	1.0617	-6.8051
4	$-2.7084 \times 10^{-2}$	$1.7990 \times 10^{-2}$	$1.0306 \times 10^{-1}$	7.4444	0.89006	-7.0277	7.4444	0.89006	-7.0277
3	$-5.0029 \times 10^{-3}$	$1.3377 \times 10^{-2}$	$3.1464 \times 10^{-2}$	5.1180	0.69764	-6.6604	5.1180	0.69764	-6.6604
2	$-3.1925 \times 10^{-4}$	$8.8982 \times 10^{-3}$	$3.1541 \times 10^{-3}$	2.9308	0.48421	-6.0697	2.9308	0.48421	-6.0697
1	$4.8024 \times 10^{-5}$	$4.4466 \times 10^{-3}$	$-3.1567 \times 10^{-4}$	1.0282	0.25044	-4.7337	1.0282	0.25044	-4.7337

級数展開により導かれている。

円周方向 Fourier 級数展開は 20 項までとし、計算結果は集中荷重点における半径方向変位  $w$  とスパン長  $l$  の関係で整理する。  $E$  をヤング率、  $h$  を板厚、  $P$  を荷重、  $a$  を断面半径としたとき、半径方向変位とスパン長

は、それぞれ  $(Ehw/P)$ ,  $(l/a)$  で無次元化される。

計算にあたって実際に用いた値は、  $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $h=0.1 \text{ cm}$ ,  $P=1 \text{ kg}$ ,  $a=10 \text{ cm}$  であり、変数の無次元化には  $EI_0=1000 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$ ,  $l_0=1 \text{ cm}$ ,  $P_0=1 \text{ kg}$  を用い、変位は  $EI_0/P_0 l_0^3$ , 傾きは  $EI_0/P_0 l_0^2$ , 単位幅当り合力は  $l_0/P_0$ , 単位幅当りモーメントは  $1/P_0$  をかけることにより行った。

計算結果（倍精度）は図-8 に示したとおりである。一般に薄肉構造物を伝達マトリックス法で解く場合、極度に発散的傾向が見られるため、提案する方法では  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  の  $I$ ,  $\alpha^{-1}\beta$ ,  $\alpha^{-1}\gamma$  あるいは  $\beta^{-1}\alpha$ ,  $I$ ,  $\beta^{-1}\gamma$  への置き換え基準を同時に検討した。  $\alpha$ ,  $\beta$  どちらか一方のユークリッドノルム

$$\|\alpha\| = \left( \sum_i \sum_j |\alpha_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|\beta\| = \left( \sum_i \sum_j |\beta_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

が一定値  $\mu$  を超えたとき、置き換えるものとした。

本例題の場合、通常の伝達マトリックス法では、スパン長  $l/a$  が 5 以上になると著しく精度低下するだけではなく、15 以上では計算すること 자체が不可能になる。提案する方法では  $\mu$  を  $10^5$ ,  $10^7$ ,  $10^9$ ,  $10^{11}$ ,  $10^{13}$ ,  $10^{15}$ ,  $10^{17}$  として 7 ケース試みたが、 $10^{13}$  以下の場合、Flügge の解と良く一致することが確認された。 $10^{15}$ ,  $10^{17}$  の結果は明らかに誤差を含んでいる。

ユークリッドノルムに限らず、 $\alpha$ ,  $\beta$  に関するなんらかのノルムで置き換えを判定しつつ本方法を適用すれば、板、シェル等にも安定で高精度の計算が可能になることが理解できる。なお、本計

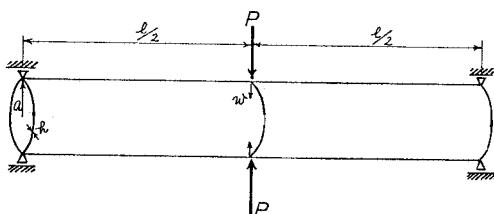


図-7 円筒殻の計算モデル

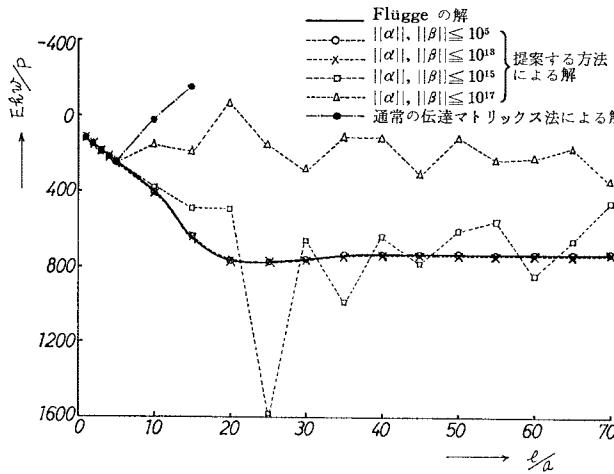


図-8 円筒殻の計算結果、スパン長と荷重点における半径方向変位の関係

算例では集中荷重点を中心に左右対称形であるため、左半分のみで計算している。

## 5. 結 論

以上、通常用いられる伝達マトリックス法の問題点を指摘し、それに対して採られる対策を略述した。それらの中で筆者は、“逐次代入の概念を組み合わせた伝達マトリックス法”に注目し、そのアルゴリズムが数値計算上どのような利点を有するかを詳細に検討する過程で、一つの新しい伝達マトリックス法に到達した。本方法では、通常の伝達マトリックス法で精度上問題の生じやすい構造物を対象とし、精度の改善を主目的にしている。

得られた結果を要約すると次のとおりである。

(1) 本方法では、格点物理量を始点から終点に伝達するのではなく、格点物理量の間の関係式を伝達する。両方向からの伝達計算により、マトリックス  $\alpha, \beta, \gamma$ , ベクトル  $r, \dot{r}$  が各格点について求められ、逆行列計算で全物理量が計算される。伝達計算過程で  $\alpha, \beta, r$  成分の絶対値は、 $\sinh, \cosh$  の双曲線関数的に増大するが、 $\alpha^{-1}$  あるいは  $\beta^{-1}$  をかけて新たに  $\alpha, \beta, r$  と置き直おし、 $\tanh$  のような性質の良いマトリックスに変換しつつ計算を進めることができる。その根拠は、部材の基本的な常微分方程式の係数マトリックスを考察することにより明らかにされる。

(2) 20 層までの多層ラーメン、薄肉円筒殻を例に取り上げて数値計算し、通常の伝達マトリックス法、本論文で提案する方法、その他の方法による結果を比較、検討したところ、特に伝達距離が長くなったとき、本方法によって伝達マトリックス解の精度は著しく改善されることが明らかになった。

本論文では静的解析のみに限定して記述したが、動的解析、安定解析の場合も、固有周期  $\omega$  および座屈荷重  $P_{cr}$  を仮定し、試行錯誤で正解を見出す限り、なんら説明を必要としないであろう。

なお、数値計算には電力中央研究所非線形シミュレーター室の HITAC 8500 を用い、すべて倍精度で計算したことを付記する。

**謝 辞：**本研究を行うにあたり、多くの有益な助言をいただいた電力中央研究所情報処理研究所 池田 勉氏、同土木技術研究所 塩尻弘雄氏に深く感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) 成岡昌夫・遠田良喜：伝達マトリックス法、コンピューターによる構造工学講座 I-2-B, 培風館, 1970.
- 2) 山本善之・山田善一：マトリックス構造解析の誤差論、コンピューターによる構造工学講座 II-5-B, 培風館, 1972.
- 3) Kraus, H. : Thin Elastic Shells, John Wiley & Sons, pp. 419~430, 1967.
- 4) 山本善之：有限要素法の条件数、日本鋼構造協会第5回大会研究集会、マトリックス構造解析法研究発表論文集, 1971.
- 5) 成岡昌夫・中川建治：変形法と Reduction 法との相互関係について、土木学会論文集, 第 141 号, 1967.5.
- 6) Withum, D. : Eine Problem-orientierte Sprache zur Elektronischen Berechnung räumlicher Stabwerke (RASTA), Mitteilungen des Instituts für Statik der T.H. Hannover, Nr. 11, 1966.
- 7) Pestel, E.C. and F.A. Leckie : Matrix Methods in Elastomechanics, McGraw-Hill, 1963.
- 8) 中村秀治：管路、薄肉はりなどの線形常微分方程式の一数値解析法、土木学会論文報告集 No. 271, 1978 年 3 月.
- 9) 中井博・事口寿男：伝達マトリックス法による曲げねじりを受ける薄肉直線桁橋の解析と断面力、変形量に関する研究、土木学会論文報告集, 第 233 号, 1975 年 1 月.
- 10) 山田嘉昭編：マトリックス法の応用、6 章動的解析への応用（柴田 碧）, pp. 221~224, 東大出版会, 1972.
- 11) 林 桂一・森口繁一：高等関数表、第 2 版、岩波書店, 1967.
- 12) Yuan, S.W. and L. Ting : Radial Deflections of a Cylinder Subjected to Equal and Opposite Concentrated Radial Loads, Journal of Applied Mechanics, pp. 270 ~281, June, 1957.
- 13) 中村秀治：固有値解析に基づく長い円筒殻の応力解析法、土木学会第 33 回年次学術講演会講演概要集, 1978.  
中村秀治：円筒、円錐形状を持つ管路のシェルとしての応力解析、土木学会論文報告集, 第 285 号, 1979 年 5 月.

(1978.8.18・受付)