

基礎-地盤系の等価ばね、等価減衰

ON THE EQUIVALENT SPRING CONSTANTS OF FOUNDATION SYSTEMS

石井 清*

By Kiyoshi ISHII

1. 目的

集中要素系モデルを用いて構造物の動的解析を行うとき、基礎-地盤系の剛性をどのように評価するかという問題がある。その剛性評価においてもっとも基本となる考え方は基礎を質量のない剛な円形基礎に、また地盤を等方均質な半無限弾性体としてモデル化し、振動モードごとに基礎-地盤系の等価剛性および等価減衰を評価することである。機械基礎の研究からは基礎の大きさが比較的小さい場合、すなわち無次元化振動数 $a_0 = \omega r / V_s = 0.0 \sim 2.0$ の範囲では実用上十分な解が与えられている。ここで、 ω および r は基礎の加振円振動数および半径であり、 V_s は地盤のせん断波速度である。しかし、近年では建築・土木構造物の中には大きな基礎を有し、かつ軟弱地盤上に計画されるものも出てきている。この場合、上記の資料から設計全般をカバーすることはできない。

本ノートでは最近の研究成果（参考文献 1)～4)）を整理し、建築・土木構造物をほぼカバーするような範囲、すなわち $a_0 = 0.0 \sim 10.0$ の範囲において基礎-地盤系の剛性評価の資料を提供する。

2. 既往の研究における参考文献 1)～4) の位置づけ

$a_0 = 0.0 \sim 10.0$ の研究すなわち本ノートでまとめる研究成果の既往の研究における位置づけおよび解析精度について簡単にふれておく。

質点系モデルを対象とした基礎-地盤系の剛性評価に関する研究はおおよそ以下のように大別される。

- (a) 地盤係数に基づく実験的な研究 (1930～)
- (b) 理想地盤による解析的研究

- (b-1) 接地圧分布を仮定する方法 (1950～)
- (b-2) 混合境界値問題としてのアプローチ (1965～)

(a) の方法では地盤のばねを地盤係数によりまた減衰効果を付加質量により考慮し、地盤係数および付加質量はさまざまの条件における実験から与える⁵⁾。この方法により地盤を含めた構造物の固有振動数だけではなくて算定できるようになり共振をさけた機械基礎の設計が可能となった。しかし付加質量という概念がはなはだいまいであること、以下に示す解析解との対応がつけてくるといいう欠点があり、いまでは古典的な方法といえよう。

(a) の方法に対し (b) の方法は地盤を半無限弾性体として弾性論を使って純理論的に解析する方法である。地盤は理論的取り扱いができるだけ簡略にするため等方等質なる半無限完全弾性体という理想地盤として仮定される。

(b-1) は地表面におかれた質量のない円形基礎について接地圧分布を仮定しその接地圧分布による基礎の変位を動的問題として解析するものである⁶⁾。したがって、仮定する接地圧分布の違いによって結果はかなり異なる。この方法の代表的研究としては Reissner および Bycroft の研究がある。(b-1) の一連の研究により理想地盤の線形解は一段落ちつき、土木・建築の分野では一般の構造物の設計に関してはほぼ十分な資料すなわち $a_0 = 0.0 \sim 2.0$ の範囲の資料が提供された。たとえば、参考文献 6) あるいは 7) では、ばね定数の a_0 に対する変化を付加質量でとらえ、ばね剛性を静的ばね定数、付加質量および減衰係数の 3 つの簡単な式により与えている。

ところで、土木・建築構造物、その中でも特に軟弱地盤に計画される大型構造物を考えると、対象となる a_0 は上記よりさらに広い範囲、すなわち $a_0 = 0.0 \sim 17.0$ 程度を考える必要がある。この場合、(b-1) の資料のみでは設計ができない。無論、 $a_0 = 0.0 \sim 17.0$ すべてにわた

* 正会員 工修 清水建設(株)研究所 研究員

ってばね剛性を検討する必要はない。それは、 $a_0 > 10.0$ では加振振動数 ω が高いため運動方程式は基礎の質量に支配され基礎-地盤系のばね剛性の影響は小さく、また、 $5.0 < a_0 < 10.0$ でも運動方程式は基礎の質量および基礎-地盤系の減衰係数に支配され、ばね定数の影響はほとんどないことによる。減衰係数は後で示すが、うまいことに a_0 の広い範囲にわたって比較的安定している。したがって、 $a_0 \geq 2.0$ のばね剛性の評価においては、 a_0 に対する減衰係数の収束性および $2.0 < a_0 < 5.0$ のばね定数の値が重要な意味をもつ。

このような要求のもとにでてきたのが (b-1) よりも厳密な振動解を与える (b-2) の方法である。(b-2) の研究のはじりは Lysmer による上下動に対する定式化である。Lysmer の方法は ring method とよばれ円形基礎を同心円のリングに分割し各リングの中では接地圧分布が等しいとして境界条件、力のつり合いを満足する基礎の動的変位を求めるものであり、 $a_0=0.0 \sim 8.0$ の広い範囲で解を与えており、この定式化は分割数 n を ∞ としたとき第1種のフレドホルム積分方程式となる。また、Elorduy らはほぼ同時期に Lysmer と同様の手法により円形・矩形基礎の上下・回転動の解 ($a_0=0.0 \sim 2.0$) を求めている⁸⁾。この解法は考え方が直感的でシンプルであるのに反し解析に導入される変位関数の制約から特定のポアソン比しか解くことができない。このことから変位関数を未知関数におく、以下のアプローチを考えられた。すなわち、運動方程式を満足する変位関数を仮定しその変位関数が境界条件および力のつり合い条件を満足するように決定してやる方法である。この方法は積分方程式により混合境界値問題として数学的に定式化され数値解析法により連立代数方程式として解かれる。このアプローチの主要な定式化は Robertson⁹⁾ (ねじり・上下動)、Gradwell¹⁰⁾ (回転・水平動) および Luco (水平) らによる第2種のフレドホルムの積分方程式としての定式化である。これらの定式化を基本とした $a_0 > 2$ における数値解析は、その難しさから、参考文献 2) ~ 4) の3編に限られ表-1 に示す振動モードの解が与えられているにすぎない。また、解の精度は a_0 が小さい (≤ 2) 範囲において (b-1) の振動解と一致することが確認されており、 $a_0 > 2.0$ の範囲ではポアソン比 $\nu =$

表-1 既往の研究の対象振動モード

研究者	振動モード				備考
	上	下	水平	回転	
J. Lysmer	○				
P.M. Shah	○				
J.E. Luco					
R.A. Westmann	○	○	○	○	
A.S. Veltosos	○	○	○		
Y.T. Wei					

$1/2$ を除けば a_0 が大きくなるにつれて誤差は増す。Shah は $a_0=1, 5, 10$ において解の収束性を確認している。

なお、上記3編および Lysmer の結果の間には数値的にかなり隔りがあるものがあり、この処理が本ノートの主題である。

3. 等価ばね定数・等価減衰係数

基礎-地盤系の相互作用の表示は複素ばねによるものと基礎を1自由度系として等価なばね定数 K および減衰係数* C により示す方法がある。本ノートでは設計に便利なように等価ばねおよび等価減衰係数の表示を用いるがその間の関係を明確にしておこう。基礎-地盤の相互作用により、基礎の変位 u は周期的な外力 $Fe^{i\omega t}$ に對して、

$$u = F_0 \frac{1}{k_{st}} (f_1 + if_2) e^{i\omega t} \quad \dots \dots \dots (1)$$

と表わされる。ここで、 $k_{st}/(f_1 + if_2)$ は基礎と地盤を結ぶ動的複素ばねであり静的なばね定数 k_{st} と無次元化振動数 a_0 とポアソン比 ν の関数である複素ばねの実部 f_1 、虚部 f_2 より表わされる。

なお、 $(f_1 + if_2)$ は以下のように変形できる。

$$f_1 + if_2 = 1 / \left(\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} - i \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

一方、ばね定数 K 、減衰係数 C によって支えられた質量のない基礎の変位は運動方程式の解から、

$$u = \frac{F_0}{K + i\omega C} e^{i\omega t} \dots \dots \dots (3)$$

と表示できる。したがって、式 (2), (3) より、

$$K = k_{st} \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} = k_{st} \cdot k_1 \dots \dots \dots (4)$$

$$C = \frac{k_{st}}{\omega} \cdot \frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2} = \frac{k_{st}}{(V_s/r)} \cdot \frac{-f_2/a_0}{f_1^2 + f_2^2} = c_{st} \cdot c_1 \dots \dots \dots (5)$$

となる。ここで、 k_{st} は静的ばね定数、 c_{st} は基準となる減衰係数であり $k_{st}/(V_s/r)$ として与えられる。また、 k_1, c_1 は a_0 により変化する等価ばね、等価減衰の補正係数と考えることができる。本レポートではこの k_1, c_1 を用いて資料を整理する。なお、上下・水平・回転およびねじり動に対する円形基礎の剛基礎分布による静的ばね定数 k_{st} は以下のとおりである。

上下動: $4 \mu r/(1-\nu)$ 水平動: $8 \mu r/(2-\nu)$

回転動: $8 \mu r^3/3(1-\nu)$ ねじり動: $8 \mu r^3/3(1-\nu)$

ここで、 μ はせん断剛性係数である。

* 減衰係数 C は viscous damping coefficient あるいは dashpot factor を意味する。

4. 数値結果の比較

数値結果を整理し各研究結果を比較しよう。ここでボアン比 ν は各研究に共通な $\nu=1/3, 1/2$ とする。

ここで、Luco の結果は直接数値結果が入手できなかつたので参考文献 3) の図より f_1, f_2 を読みとり整理した。以下、結果と簡単な考察を記す。

(1) 上下動の k_1, c_1 —図-1, 2

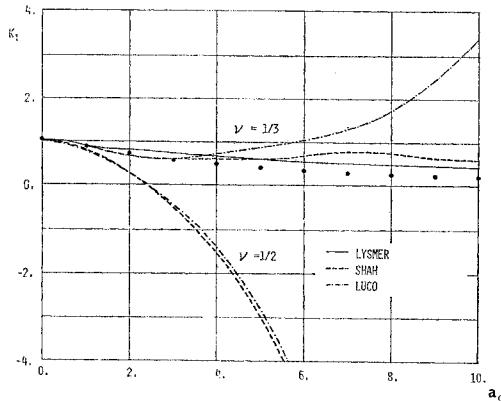


図-1 上下動の k_1

① k_1 については Shah および Lysmer の結果がよい一致を示し、 $a_0 \rightarrow$ 大で $k_1 \rightarrow 0$ へと一様収束している。それに反し $\nu=1/3$ の Luco の結果は $a_0 > 8$ でかなり発散している。これは数値解析の精度によろう。

② c_1 に関しては三者とも収束している。Lysmer の結果はピークではかのものより 2 割方大きい。

(2) 水平動の k_1, c_1 —図-3, 4

① k_1 は Veletsos の結果の方が Luco の結果と比較してばらつきが少ない。Veletsos の結果は a_0 によ

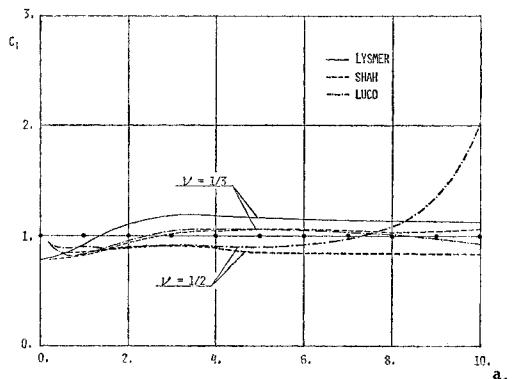


図-2 上下動の c_1

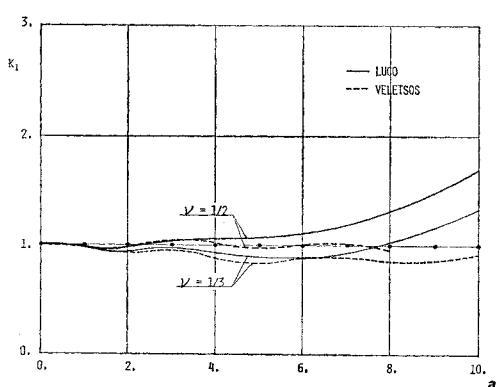


図-3 水平動の k_1

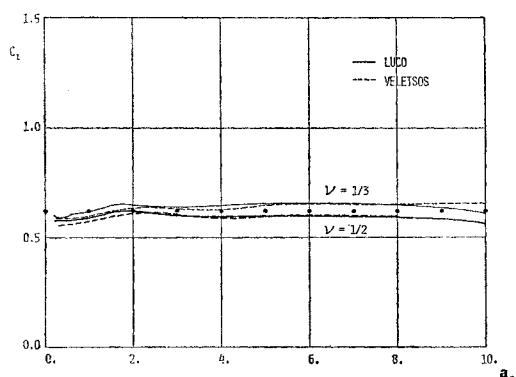


図-4 水平動の c_1

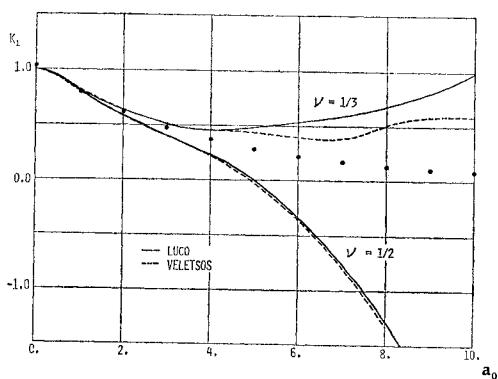


図-5 回転動の k_1

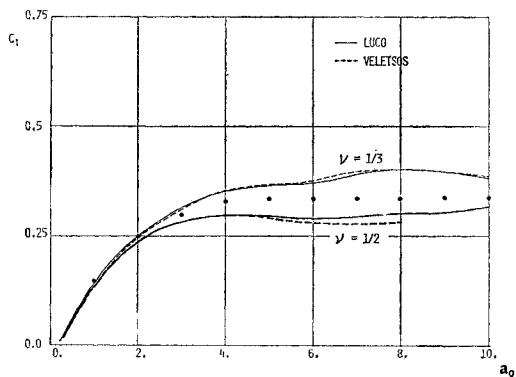
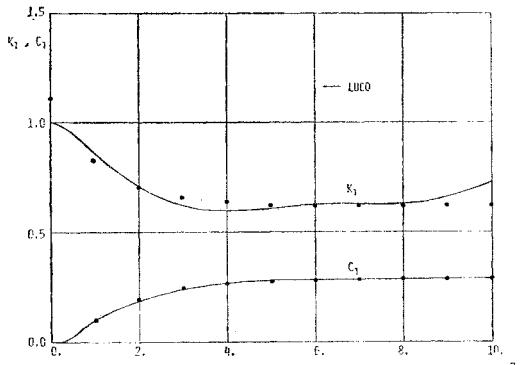


図-6 回転動の c_1

図-7 ねじり動の k_1 , c_1

らずほぼ定数である。

② c_1 に関しては両者の値は等しく収束もよい。

(3) 回転動の k_1 , c_1 —(図-5, 6)

① k_1 に関しては Luco と Veletsos の傾向はよく一致している。すなわち、 $\nu=1/3$ では正の領域に、 $\nu=1/2$ では負に発散している。Luco の結果では $\nu=1/3$ で a_0 が大きくなると k_1 が正に発散する傾向を示しておりこの点 Veletsos の結果の方が収束がよいといえよう。

② c_1 については両者は十分収束しており、かつ値も一致している。

(4) ねじり動の k_1 , c_1 —(図-7)

① ねじり動に関しては Luco の結果しかないが k_1 , c_1 の値は $a_0 > 4.0$ でほぼ収束しており解の信頼性は十分高い。

5. 設計用の等価ばね定数、等価減衰定数

4. で示したように k_1 , c_1 にはほぼ同様のアプローチをとってさえ結果にかなりの差がある。ここでは、4. の結果を参考として設計用の k_1 および c_1 を決定しよう。設計用の k_1 , c_1 の決定にあたって以下の点を考慮した。

(1) 第1は設計が安全側となる。すなわち、基礎の応答がいくぶん大きくなるように決定することである。このことから k_1 , c_1 は 4. の数値結果の中で小さい値を採用する。むろん、 k_1 および c_1 は周期との関係があるので小さい値とすれば常に安全側とはいえない場合がある。しかし、一般的には k_1 , c_1 に小さい値を用いればほぼ安全側の結果となろう。

(2) 通常の設計では地盤のポアソン比 ν は、 $1/3 \sim 0.4$ 程度を採用している。ここでは基本的には安全側の値として $\nu=0.4$ を採用する。

(3) しかし、上下・回転動の k_1 はポアソン比によ

り大きく変動するので $\nu=1/3$ の結果を参考として $a_0=10$ で k_1 はほぼ零となる関数として与える。なお、 $\nu=1/2$ のばね定数が周波数に対して2次曲線的に減少し負値を取るようになるのは地盤の付加質量の効果が發揮していると考えることもでき、ばね定数が負の値となってもおかしくはない。しかし、設計では負のばねの取り扱いは面倒であり、さらに精度的につくても $a_0 > 6$ のばね定数はあまり重要でないことから、ここではあえて $a_0 \gg 0$ において0に収束する関数を設計用に提案した。

(4) なお、各種モードの k_1 , c_1 は電算機に利用しやすいように適當な関数で近似する。設計用 k_1 , c_1 は図中黒丸に示される以下の式により近似できよう。ただし、 $k_1 \leq 1.0$, $c_1 \geq 0.0$.

$$\text{上 下 動: } k_1 = 0.094 + 0.960(0.798)^{a_0}, \quad c_1 = 1.000$$

$$\text{水 平 動: } k_1 = 1.000, \quad c_1 = 0.620$$

$$\text{回 転 動: } k_1 = 0.009 + 1.024(0.769)^{a_0}$$

$$c_1 = 0.348 - 0.406(0.495)^{a_0}$$

$$\text{ねじり動: } k_1 = 0.620 + 0.495(0.415)^{a_0}$$

$$c_1 = 0.285 - 0.389(0.483)^{a_0}$$

参 考 文 献

- 1) Lysmer, J. and F.E. Richart : Dynamic Response of Footings to Vertical Loading., ASCE, Vol. 92, No. SM 1, pp. 65~91, Jan. 1966.
- 2) Shah, P.M. : On the Dynamic Response of Foundation Systems., A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in Univ. of Rice, 1968.
- 3) Luco, J.E. and R.A. Westmann : Dynamic Response of Circular Footings., ASCE, Vol. 97, No. EM 5, pp. 1381~1395, Oct. 1971.
- 4) Veletsos, A.S. and Y.T. Wei : Lateral and Rocking Vibration of Footings., ASCE, Vol. 97, No. SM 9, pp. 1227~1249, Sept. 1971.
- 5) 山原 浩 : 環境保全のための防振設計, 第3章, pp. 103~106, 靖国社, 1974.
- 6) Newmark, N.M. and E. Rosenblueth : Fundamentals of Earthquake Engineering., Prentice-Hall, p. 98, 1971.
- 7) Clough, P.W. and J. Penzien : Dynamics of Structures., McGraw-Hill, p. 591, 1975 (邦訳: 大崎・渡辺・片山訳, 構造物の動的解析, 科学技術出版社, 1978).
- 8) Elorduy, J., Neito, J.A. and E.M. Szekely : Dynamic Response of Bases of Arbitrary Shape Subjected to Periodic Vertical Loading., Proc. of International Symp. on Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Univ. of New Mexico, 1967.
- 9) Robertson, I.A. : Forced Vertical Vibration of a Rigid Circular Disc on a Semi-Infinite Elastic Solid., Proc. of Camb. Phil. Soc., Vol. 62, Series. A, 1966.
- 10) Gradwell, G.M. : Forced Tangential and Rotatory Vibration of a Rigid Circular Disc on a Semi-Finite Solid., International Journal of Engineering Science, Vol. 6, pp. 591~607, 1968.

(1978.9.14・受付)