

積分方程式法による表面クラック周辺の応力解析

STRESS ANALYSIS AROUND A SURFACE CRACK BY THE INTEGRAL
EQUATION METHOD

小林 昭 一*・西 村 直 志**

By Shoichi KOBAYASHI and Naoshi NISHIMURA

1. はじめに

近年、破壊力学は急速に発展し、種々の破壊現象を説明する手法として、また安全設計の基礎を与えるものとして重要視されるようになり、広く応用されようとしている。しかしながら、現段階では破壊力学の基礎をなすクラック周辺の力学特性の解析は、極めて理想化された、単純なモデルに関してしか行われておらず、複雑な境界性状を有する現実の問題に適用するためにはなお多くの研究が必要である。

従来より広く解析が行われている最も基本的な問題は、線形弾性材料の 2 次元完全偏平スリットを対象としたものであり、これらに関しては相当完備した結果が得られている¹⁾。しかしながら、より重要と考えられる 3 次元物体の表面クラック問題に関しては、実用性および精度のいずれの面からも十分といえるような解析手法がなく、また解析結果もほとんどない。この種の 3 次元問題の解析を効率よく高精度で行う手法の開発が強く要望されているのが現状である。

本論文は、以上のような観点から、クラック周辺の力学特性を解析する手法として、積分方程式法を定式化し、それを用いて任意開口度の表面クラック（切欠き）周辺の解析結果を報告したものである。

積分方程式法は、最近急速に発展し注目されるようになった有力な数値解析手法であり、境界上の積分のみに置き換えた。すなわち境界上のみに要素のある一種のスーパー・エレメント有限要素法ということもできる。したがって、解くべき未知量の数は境界上のみで規定されるので、普通の有限要素法に比して極度に減少し、また計算量が減少するのが特徴である。積分方程式法に関する詳細は適当な文献 2)～4) を参照していただくとし

て、以下では本論文に直接関係のあることを述べるにとどめる。

積分方程式法あるいは同種の方法をクラックの問題に適用した例は、いくつかみられる。極めて偏平なクラック・モデルに Somigliana の式を適用したもの^{2),3)}、スリット・モデルに体積力法（積分方程式法と本質的差異はない）を適用したもの⁴⁾、および 2 次元スリット状クラックに適用したもの⁵⁾ などである。これらの結果は、精度、手法の点で完全なものではなく、検討の余地が多分に残されている。

以下の解析では、計算時間の点で有利な一重層ポテンシャル法を適用し、積分核としては自由境界面の条件を満たしている、いわゆる Mindlin 解を用いた。また、数値計算上の精度を確保することに留意して、半無限弾性体表面の半楕円体状の開口クラック（切欠き）周辺の応力場、変位場をできるだけ詳しく解析した。なお、この極限として、スリット状クラックに関する解が求められることはいうまでもないであろう。

2. 積分方程式の構成：一重層ポテンシャル法

線形弾性問題の積分方程式への定式化については、文献 2)～4) を参照していただきたい。以下では、一重層ポテンシャルを用いて定式化したもの（簡単のために、これを一重層ポテンシャル法とよぶことにする）について要約して述べる。一重層ポテンシャル法は積分方程式法のひとつである。なお、体積力法といわれているものも、基本的にはこれと同じと考えてよいであろう。

以下では、なめらかな境界 ∂D で囲まれた線形弾性体の領域 D を対象として、外部応力境界値問題のみを考えることにする。 D は ∂D を含まないものとする。また、直交デカルト座標系 $(O-x_1, x_2, x_3)$ を基準とする。

いま、ある境界値問題の変位解が、素解 G （無限領域に関する Green 関数）と、ある密度関数 φ （これが

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学科

求めるべき未知関数となる)を用いて、次のように与えられたとしよう。

$$u(x) = \int_{\partial D} G(x; y) \cdot \varphi(y) dS_y \quad \begin{matrix} x \in D + \partial D \\ y \in \partial D \end{matrix} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 $u(x)$ は、点 $x(= (x_1, x_2, x_3))$ での変位を表わすものとする。

対応する応力解 $\tau(x)$ は、次のように表わされる。

$$\tau(x) = \int_{\partial D} S(x; y) \cdot \varphi(y) dS_y \quad \begin{matrix} x \in D \\ y \in \partial D \end{matrix} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 S は演算子

$$\Sigma_x \equiv \mu \left(\frac{2\nu}{1-2\nu} I \text{tr}(\nabla_x \cdot) + \nabla_x + (\nabla_x \cdot)^T \right)$$

を用いて、 $S(x; y) = \Sigma_x G(x; y)$ で与えられる。なお、 μ, ν はそれぞれせん断弾性係数、Poisson 比、 I は恒等テンソルである。

いま、点 x が領域 D から ∂D に近づいた極限を考えると、境界上での応力ベクトル t は次のように表わされる (なお、領域 D から外向きの法線ベクトルを正とした)。

$$\begin{aligned} t(x) &= \lim_{\bar{x} \rightarrow x} \int_{\partial D} T(\bar{x}; y) \cdot \varphi(y) dS_y \\ &= \frac{\varphi(x)}{2} + \text{V.P.} \int_{\partial D} T(x; y) \cdot \varphi(y) dS_y \\ &\quad \bar{x} \in D, x, y \in \partial D \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここに、 $\overset{n}{T}_x \equiv n \cdot \Sigma_x, t = \overset{n}{T}_x u, T = \overset{n}{T}_x G(x; y)$ であり、V.P. は主値をとることを意味している。

外部応力境界値問題では、境界上で応力ベクトルが与えられているので、それと式 (3) による $t(x)$ とが一致するように境界上だけで $\varphi(y)$ を決定することに帰着される。この積分方程式 (3) の可解性と解の一意性は保証されている²⁾ ので、実際に解が得られる。その解 φ を式 (1), (2) に代入すれば、任意点の変位および応力が求められることになる。

3. 数値解法

積分方程式 (3) を解析的に解くことはほとんど不可能であり、数値的に近似解を求めざるを得ない。数値解法の概略については、文献 4) を参照されたい。

以下では、ここで用いた近似数値解析法について簡単にふれるだけにしたい。

いま、境界 ∂D を有有限個の部分に分け、それらを ∂D_i とし、また、 φ は ∂D_i 上で一定と仮定しよう。こうすると式 (3) は、 ∂D_i 上に取った代表点 x_i に関して、次のように変形される。

$$t(x_i) = \sum_j \lim_{\bar{x} \rightarrow x_i} \int_{\partial D_j} T(\bar{x}; y) dS_y \cdot \varphi(x_j)$$

$$\bar{x} \in D, x_j \in \partial D \dots\dots\dots (4)$$

これは、 $\varphi(x_j)$ に関する連立一次方程式である。これより $\varphi(x_j)$ が求められる。式 (1), (2) を同様に近似すれば、各点の変位、応力が $\varphi(x_j)$ の線形結合として求められる。

なお、これらの解析のためには、次の積分

$$\left. \begin{aligned} &\int_{\partial D_i} G(x; y) dS_y, \int_{\partial D_i} S(x; y) dS_y, \\ &\int_{\partial D_i} T(x; y) dS_y, \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

を精度よく求めることが望まれる。

以上では、比較的一般的なことを述べてきたけれども、個々の境界値問題を扱う際には、種々の改良を加えることにより高精度の解を得ることが期待できる。特に、以下で扱うような半無限弾性体表面のクラックの問題に関しては、半無限面上の境界条件を満たす解を基本解として選べば、満足すべき残りの境界条件が少なくなり好都合であるうえ、より高精度の解が期待できる。したがって、以下では基本解として、半無限平面上の応力成分が零という条件を満たす、いわゆる Mindlin 解³⁾ を用いることにした。

さて、このように Mindlin 解を基本解 G として、式 (5) の積分を評価するわけであるが、これらを厳密に計算することは困難であるので、以下の方法により近似的に評価した。すなわち、

① ∂D_i としては、三角形および四角形平面要素を用いる。

② ① の各要素について、図心 x_i から測って要素の最長辺の 5 倍より近い点 x では、式 (5) 中の Kelvin 解に相当する特異項を文献 4) の方法で厳密に評価し、その他の非特異項は Gauss 積分で評価する。

③ ② の計算は非常に時間を要するので、② の条件に該当しない点 x については、 $G \approx 1/r, S \approx 1/r^2$ を考慮して、 $\int_{\partial D_i} G(x; y) dS_y$ などを $G(x; x_i) |\partial D_i|$ など で評価する。

具体的には、このような近似法により、式 (4) を連立一次方程式に表現し、SOR 法を用いて解いて $\varphi(x_i)$ を求めた。また、この $\varphi(x_i)$ および式 (5) を用いて、式 (1) および式 (2) を離散化して、変位および応力を算定した。

なお、上述の積分評価法は、多くの場合について必要な積分を ②, ③ の方法 で求めて比較検討し、演算速度と精度のバランスを考慮して決定した。より精密な計算を実行するうえでは、何種類もの異なった精度を有する数値積分ルーチンを用意し、必要に応じて適宜組み合わせればよいであろう。Lachat ら¹¹⁾ は、数値積分の誤差評価法を利用して、実際にそのようなアルゴリズムを提

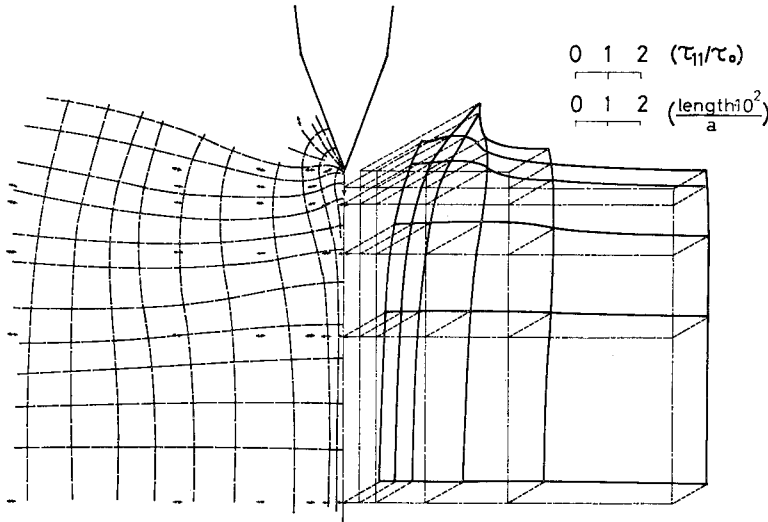


Fig. 4 Stress component τ_{11} and stress trajectory at a crack tip.

ば、結果がモデルに依存する度合は小さいようである。

積分方程式法では、いかなる数値解も場の方程式を厳密

に満たし、境界条件は少なくとも選点においては数値誤差の範囲で満足していることから、このことは想像できよう。なお以下では断らない限り、解析には Fig. 2(a) に示すモデルを用いる。

さて、次にこのような一般的な性質を把握したうえで、クラックの形状が周辺応力状態に及ぼす影響について検討してみよう。

(3) クラック偏平度の影響

無限遠から一様応力 $\tau_{11}=\tau_0$ を受ける表面クラックについて、Fig. 1 で $a:b=20:5$ と固定し、 w を $w/b=0.20, 0.15, 0.10$ と変化させた場合の周辺応力場の変化について調べる。なお、ポアソン比 $\nu=0.2$ とした。

Fig. 5 に自由表面の

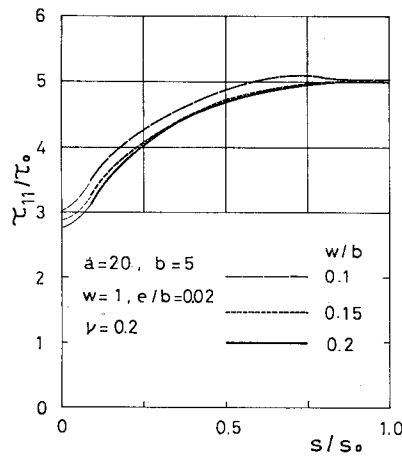
0 1 2 (τ_{11}/τ_0)
0 1 2 ($\frac{\text{length} \times 10^2}{a}$)

クラック・チップからクラック周縁に沿って測った距離 (s) を横軸に取って、応力の変化を示した。なお、 e は x_2x_3 -平面内でクラック周縁から垂直に測った距離である (Fig. 1 参照)。応力 τ_{11}, τ_{15} はそれぞれ Fig. 1 に示したように、 x_1 -軸方向、 x_2x_3 -平面内のクラック周縁に平行な方向の直応力成分を表わしている。

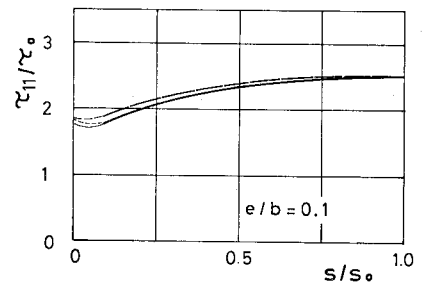
τ_{11} は、 s が大きくなるにつれて、すなわち中央 ($x_2=0$) に近づくにつれて、大きくなり、 e が大きくなるにつれて急激に減少することがわかる。 w が小さくなると、すなわちクラック

がより偏平になると、 τ_{11} は若干増大するようである。

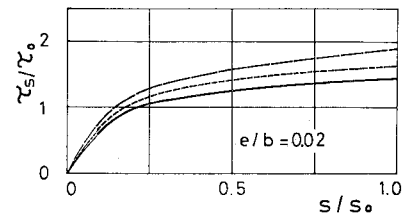
τ_{15} は、自由表面のクラック・チップでは当然零である



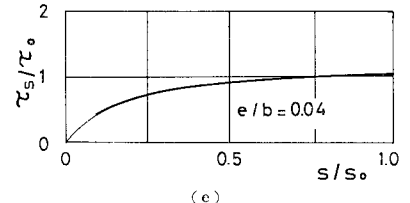
(a)



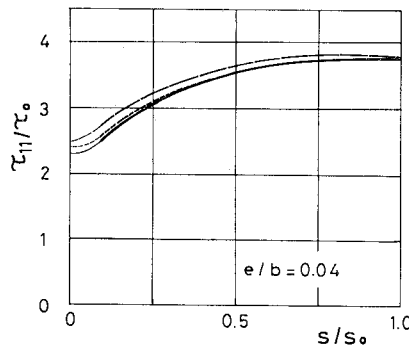
(c)



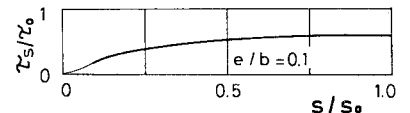
(d)



(e)



(b)



(f)

Fig. 5 Effect of crack opening on stresses along the periphery of a crack.

が、 s の増大とともに増大し、中央部で最大となる。また、クラックが扁平になるほど、クラック周縁部の応力値は高くなるが、 e が少し大きくなると急激にその効果は減少する。一般に、開口度にかかわらず、 τ_s は τ_{11} に比べて、はるかに小さい。

なお、自由表面のクラック・チップ周辺の応力成分の計算精度は他の部分に比して若干劣るかも知れないので、図では x_2 座標が $x_2=0.95a$ (離心角約 18°) の点より自由面側では細線で示しておいた。0.95 という値は自由面側に近いということによって便宜上選んだ。自由表面のクラック・チップ周辺での挙動については、文献 9) でも、共役勾配法の収束パラメータの選び方によって解が相当変動すると述べていることなどから推しても、正確に把握することは困難であり、この解析にも数値計算上の誤差が微妙に影響しているであろうことは否定できない。

(4) クラック長さの影響

無限遠から $\tau_{11}=\tau_0$ を受ける表面クラックについて、Fig. 1 で $b:w=5:1$ と固定して、 $b/a=1.00, 0.50, 0.33, 0.25$ と変化させたときの周辺応力場の変化につい

て調べた。なお、この場合にも、ポアソン比 $\nu=0.2$ とした。

応力 τ_{11}, τ_s を s を横軸に取り、クラック長さをパラメーターとして、Fig. 6 に示す。 τ_{11} は、自由表面のクラック・チップ周辺を除けば、自由面からみたクラック長さ $2a$ が大となるほど、すなわち、クラックが細長くなるほど大きな値をとる。また、 $b/a=1.00$, すなわち、円形に近い場合を除いて、 s が増大するほど、 τ_{11} も大きくなる。円形の場合のみが、自由表面境界より少し内側で最大の τ_{11} を示しているのは、表面の効果によるものとして興味深い。表面の効果という推論は、無限物体中の円形状クラック (いわゆるペニー・シェイプド・クラック (Penny-shaped crack)) であれば、 τ_{11} は s に無関係に一定値に定まるはずであるので、図中に最大値が現われた理由は、表面の効果 (もちろんポアソン比によって異なる) によると考えざるを得ないということによっている。さらにもう一つ注目すべき点は、自由表面のクラック・チップ周辺の応力状態が、クラック長さによって余り変わらないことである。これは、この周辺の応力状態が主として局所的な条件に支配され、全体的な形状の影響を余り受けにくいことを示唆していて興味深い。

τ_s は、自由表面のクラック・チップでは零であるが、円形状のクラックの場合を除いて、 s が増大するとともに増大し、またクラック長さが大きいほど応力値も大きくなる。なお、クラック長さにかかわらず、 τ_s は τ_{11} よりはるかに小さい。

(5) ポアソン比の影響

無限遠から $\tau_{11}=\tau_0$ の一様応力を受ける表面クラック ($a:b:w=20:5:1$) について、ポアソン比 $\nu=0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ の5ケースに変化させた場合の周辺応力場の変化を調べた。解析結果を Fig. 7 に示す。 τ_{11} は、自由表面のクラック・チップ周辺を除けば、ポアソン比の影響をほとんど受けにくいことがわかる。

なお、自由表面のクラッ

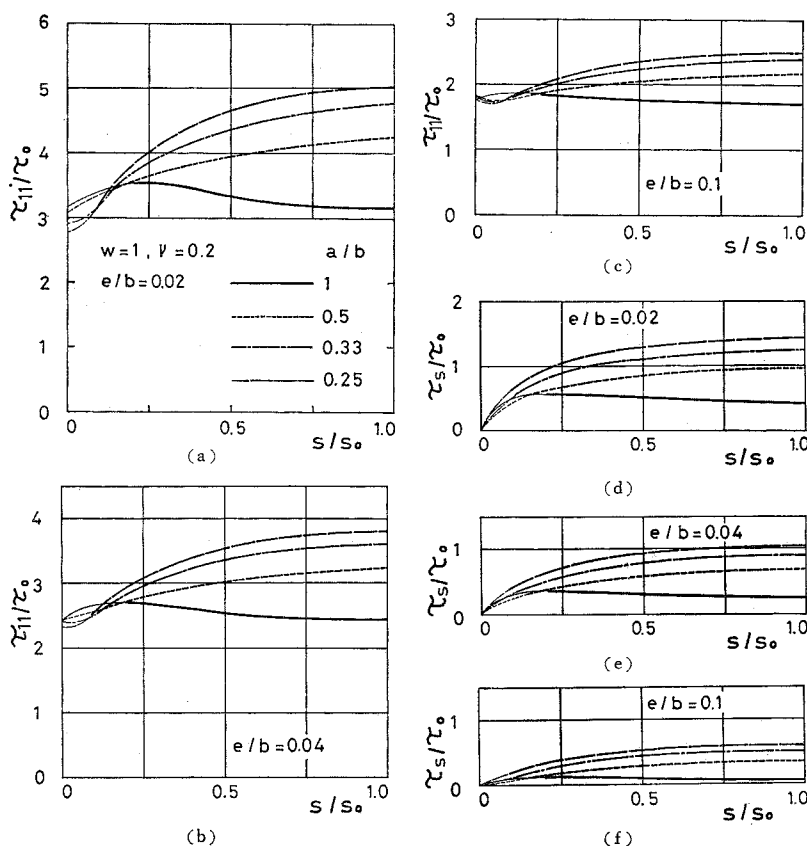
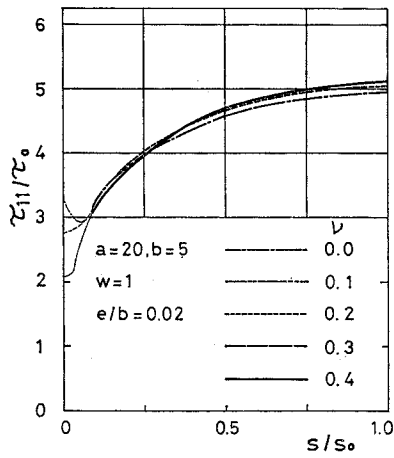
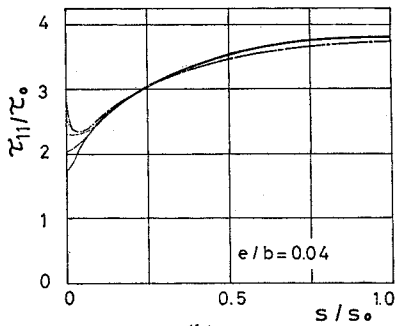


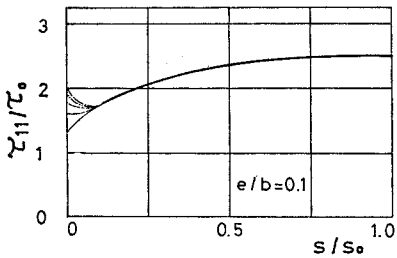
Fig. 6 Effect of crack length on stresses along the periphery of a crack.



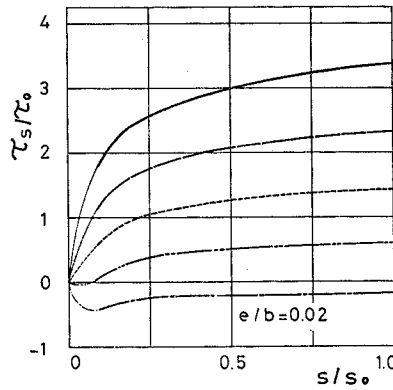
(a)



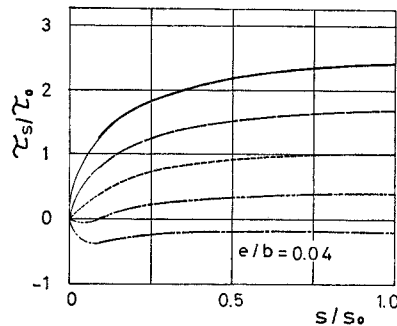
(b)



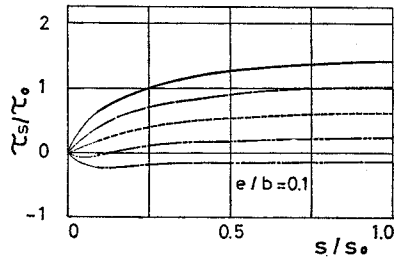
(c)



(d)

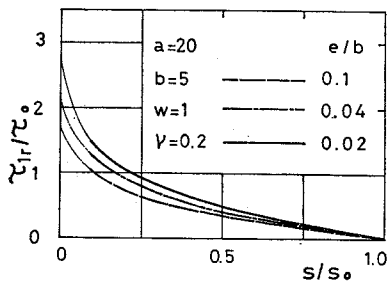


(e)

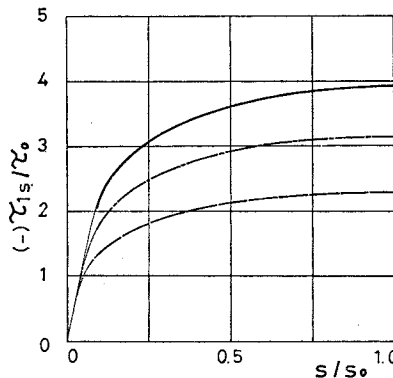


(f)

Fig. 7 Effect of Poisson's ratio on stresses along the periphery of a crack.



(a)



(b)

Fig. 8 Shearing stresses along the periphery of a crack.

ク・チップ周辺では、4. (3) の最後で述べたように、若干の数値計算誤差が含まれているかも知れない。

τ_s は、クラック周縁全域にわたって、ポアソン比の影響を大きく受け、ポアソン比にほぼ比例した値となる。このことは、クラック周縁方向のひずみが x_1 方向ひずみにほぼ比例して生じていること、すなわち、当然のことではあるが周縁方向への変形拘束が大きいことを示唆している。なお、自由表面の近くではこの変形拘束は急激に弱くなり、したがって、周縁に沿うひずみ、応力 τ_s はクラック・チップで零となるように急激に変化する。

(6) 一様せん断応力場での応力状態

半無限平面にある半楕円体表面クラック (Fig. 1 参照) に、無限遠から一様なせん断応力 $\tau_{12} = \tau_0$ が作用する場合について考える。この場合には、逆対称問題となり、全体の 1/4 のみを解析対象とすればよい。

解析結果の例 ($a:b:w = 20:5:1$, $\nu = 0.2$) を Fig. 8 に示す。なお、応力成分 τ_{1r} および τ_{1s} は、クラック縁の接線方向 s 、主法線方向 r および x_1 方向よりなる直交曲線座標系 (r, s, x_1) (右手系) においてそれぞれ x_1 方向に垂直な面内で、周縁に直角な方向に作用

するせん断応力, および周縁に沿った方向のせん断応力である. すなわち, 破壊力学の言葉を借りれば, τ_{1r} および τ_{1s} は, それぞれ, 破壊モード II 型および III 型を引き起こすせん断応力である. 当然のことではあるが, τ_{1r} は自由表面で最大で, クラック中央では零となる. これに対して, τ_{1s} は逆にクラック中央で最大で, 自由表面で零となる.

なお, クラック軸に対して任意の方向から作用する一様応力の下でのクラック周辺の最大応力状態は, 4.(3) ($\tau_{11}=\tau_0$ が作用する場合の解析) と 4.(6) ($\tau_{12}=\tau_0$ が作用する場合の解析) の結果, および無限遠から $\tau_{22}=\tau_0$ が作用する場合の応力状態, すなわち, $\tau_{22}=\tau_0$, それ以外の成分は零 (数値計算結果による) を用いて近似的に容易に求めることができる.

5. 半円形表面クラックの応力拡大係数

破壊力学では, 応力拡大係数 (Stress Intensity Factor; S.I.F.) または K 値というパラメータを用いて, クラック周辺の応力の大きさを表わすのが普通である. このパラメータは, クラック・チップでの応力状態の特性を表わすものと解釈され, 一般にクラックの形状と応力場の関数である. したがって, 逆に, クラック形状と応力場が定まっていれば, K 値は線形弾性体の範囲内では, 一義的に定められる. 2次元問題の K 値に関しては相当完備した結果が得られているようであるが, 3次元問題に関しては不十分であり, なお高精度で実用的な解析が必要である. 以下では, この種の問題の手がかりとして, 半円形表面のクラックの問題を積分方程式法で解いた結果について述べる. なお, 開口のある半円形クラックの応力状態は, すでに, 4.(4)でも $b/a=1.0$ の場合として述べてあるけれども, 以下では改めてさらに高精度の解析結果について述べる.

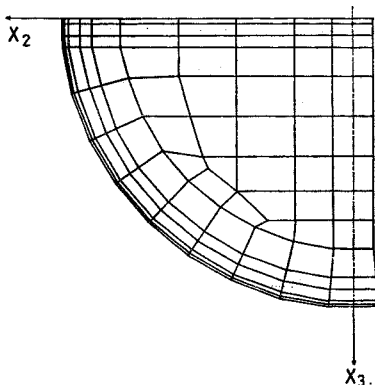


Fig. 9 Model of a semi-circular shaped open crack.

対象としたクラック形状は, Fig. 1 において, $b/a=1.0$ とし, 開口度 w/a をパラメータとして変化させたものである. 解析には, Fig. 9 に示すように四角形平面要素で近似したモデルを用い, その面積がクラック面の面積と等しくなるように調整した. また, ポアソン比を $\nu=0.25$ とし (これは文献 10) と比較のため, 無限遠から $\tau_{11}=\tau_0$ が作用する場合だけを数値解析した.

解析結果を, 開口度に対して, 切欠き (クラック) 底

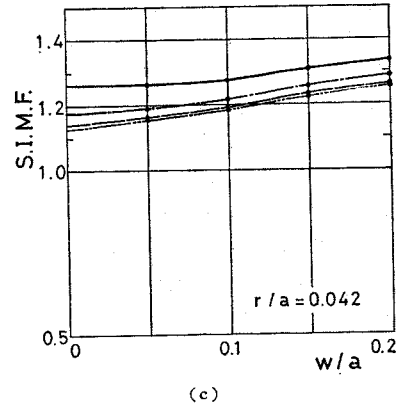
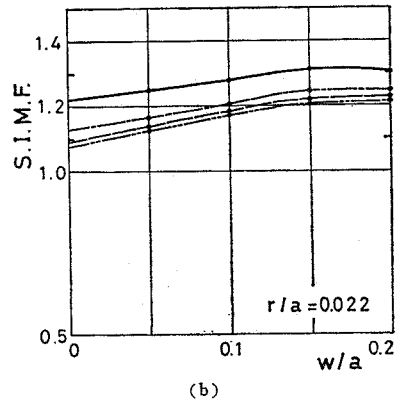
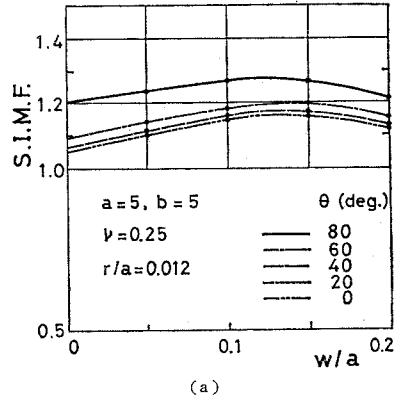


Fig. 10 Equivalent stress intensity magnification factor versus crack opening (calculated by stress method).

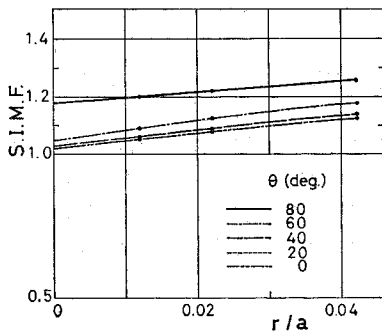


Fig. 11 Equivalent stress intensity magnification factor versus distance inward from the periphery of a crack.

から r だけ離れた点での K_I 相当量 $\tau_{11}\sqrt{2\pi r}$ を、無限体中の円形偏平クラックの解 $K_I^0 = 2\tau_0\sqrt{a/\pi}$ で割って無次元化した応力拡大係数相当量 (S.I.M.F. 相当量) としてプロットすると Fig. 10 のようになる。ここに θ は原点 O と解析した点を結ぶ直線と x_3 軸とのなす角である (以下の図も同様)。ここで用いた応力拡大係数相当量は、偏平なクラックの場合に、クラック・チップ近傍で近似的に成立する応力拡大係数の表示式を開口幅をもった3次元クラックの計算結果の整理にそのまま利用したもので厳密には応力拡大係数としての意味をもたないが、開口度に対してプロットした結果は変化が緩やかなので $w/a \rightarrow 0$ とし、外挿で開口のない偏平クラックの応力拡大係数相当量を求めることができる。その結果を、 r/a に対してプロットすると Fig. 11 のようである。この結果は、ほぼ直線に載っているので、外挿により $r=0$ での値、すなわち、通常の応力拡大係数を求めることができる。このようにして得られた応力拡大係数を Fig. 12 に、応力法 (stress method) とよんで示した。この結果は、完全に偏平な半円形表面クラックを、無限体中の円形クラックの解と平面に作用する荷重による解をイテレーティブに重ね合せて解いた文献 (10) による結果ともよく一致している。

次に、クラック先端付近の変位は、局所的に平面ひずみ状態であると仮定して、変位量から応力拡大係数を推定してみる。このような仮定は、自由表面近くを除けば一応妥当であろう。さて、いま2次元平面ひずみ状態での偏平クラックに対して求まる応力拡大係数

$$K_I = 2\mu\sqrt{\frac{2\pi}{r}}u_1 \left\{ \sin \frac{\varphi}{2} \left(4 - 4\nu - 2\cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right\}^{-1}$$

(ここに、 r, φ はクラック先端を原点とし、クラック方向から反時計方向に測った角を φ とする極座標 (r, φ) を意味する) を借用して、解析結果を整理すると Fig. 13 のようになる。このようにして求めた値は厳密な意味での応力拡大係数ではないので、応力拡大係数相当量

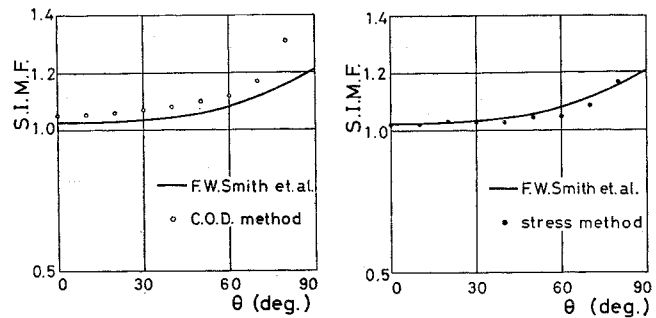


Fig. 12 Stress intensity magnification factor versus angle measured from the center-line of a semi-circular crack.

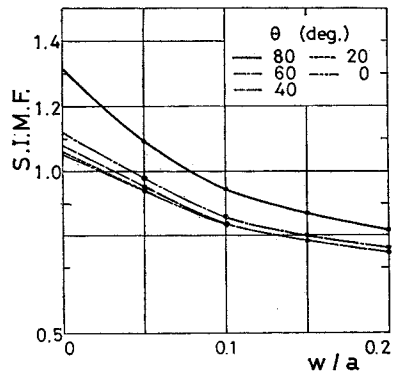


Fig. 13 Equivalent stress intensity magnification factor versus crack opening (calculated by crack opening displacement method).

とよぶことにする。Fig. 13 は、開口度に対してプロットしてあるので、 $w/a \rightarrow 0$ の極限として、応力拡大係数を外挿により求めることができる。このようにして求めた応力拡大係数を、開口変位法 (Crack Opening Displacement Method) とよんで、Fig. 12 に示した。この場合には、若干大きい値が得られている。

なお、ここで述べた手順では、有限要素法などを用いた場合に通常いわれていることとは逆に、開口変位法によるより応力法による方が良好な結果を得た。この原因は、主として応力法による場合、変位法に比して、外挿されるべき量の変化が緩やかであり、その結果、外挿の際に生じる誤差も小さくなったことによると考えられよう。

以上の解析手法は、正確さよりもむしろ簡単さを目標としたものであるが、一応の精度も保証されているようであり、十分実用的な解法といってもよいであろう。なお、計算時間は、FACOM M-190 を用いて、最長のものでも4分30秒程度であった。

6. おわりに

表面クラックの問題を積分方程式法によって解析する手法を述べ、半楕円体ないし円形状開口表面クラック周辺の応力状態を解析し、特に後者については、応力拡大係数を推定した。以上のことから、積分方程式法は、この種の問題に対しては、特に有効であると結論されよう。今後、積分方程式法は、種々の形状の3次元クラックの解析とか応力拡大係数の算定にも、広く用いられることが期待される。

ここで行った数値計算には、京都大学大型計算機センターの FACOM M-190 を用いたことを付記する。

参 考 文 献

- 1) たとえば、石田 誠：き裂の弾性解析と応力拡大係数，培風館，1976。
- 2) Kupradze, V.D. : Potential Methods in the Theory of Elasticity, (transl. by H. Gutfreund), Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1965.
- 3) Cruse, T.A. : An Improved Boundary Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Stress Analysis, Computers & Structures, Vol. 4, pp. 741~754, 1974.
- 4) 丹羽義次・小林昭一・福井卓雄：積分方程式法による空洞周辺の三次元応力解析，土木学会論文報告集，第 266号，pp. 25~37, 1977.
- 5) Cruse, T.A. : Application of the Boundary Integral Equation Method to Three Dimensional Stress Analysis, Computers & Structures, Vol. 3, pp. 509~527, 1973.
- 6) Nishitani, H. and Y. Murakami : Stress intensity factors of an elliptical crack or a semi-elliptical crack subject to tension, Int. J. of Fracture, Vol. 10, pp. 353~368, 1974.
- 7) Snyder, M.D. and T.A. Cruse : Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates, Int. J. of Fracture, Vol. 11, pp. 315~328, 1975.
- 8) 土木学会編：構造力学公式集，pp. 424~425, 昭和 49 年。
- 9) Miyamoto, H. and T. Miyoshi : Analysis of Stress Intensity Factor for Surface-flamed Tension Plate, High-speed computing of elastic structures, Proc. IUTAM sympo., pp. 137~155, 1971.
- 10) Smith, F.W., A.F. Emery and A.S. Kobayashi : Stress Intensity Factors for Semi-Circular Cracks, Part 2—Semi-Infinite Solid, J. Appl. Mech., Vol. 34, pp. 953~959, 1967.
- 11) Lachat, J.C. and J.O. Watson : Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations; a Formulation for Three-Dimensional Elastostatics, Int. J. Num. Meth. in Eng., Vol. 10, pp. 991~1005, 1976.

(1978.7.21・受付)