

土木学会論文報告集
第 288 号・1979 年 8 月

【論 文】

ワイヤラッピングされた吊橋平行線ケーブル の二次応力解析*

SECONDARY STRESS ANALYSIS ON WIRE-WRAPPED PARALLEL
WIRE CABLE FOR SUSPENSION BRIDGES

中村憲市**・新家徹***・西村昭****

By Ken-ichi NAKAMURA, Tohru SHINKE and Akira NISHIMURA

1. 緒 言

本文は、吊橋供用時における主ケーブルの応力状態を把握することを主題として、ワイヤラッピングされた平行線ケーブル（以下、ワイヤラップトケーブルと称する）の二次応力解析理論について述べるものである。

吊橋の主ケーブルは、多数の素線の集合体であるため力学的挙動の明らかにされていない点が多い。その中でも、ケーブル強度にもっとも大きな影響を与えるものひとつとして、ケーブル系の変形によって生じる断面内の不均一応力（二次応力）があげられる。ところで、主ケーブルは、ケーブル架設から吊橋完成後実用に供されるまでの間に大きく分けて、(I) 補剛桁架設時のケーブルバンドのみで締付けられた状態、および、(II) 補剛桁架設完了直後から吊橋供用時における、主として防錆のためにラッピングワイヤで締付けられた状態の 2 種の拘束状態に置かれ、それぞれまったく異質の剛性を有している。したがって、主ケーブルの合理的設計あるいは応力の安全照査の観点から、それぞれの拘束状態における主ケーブルの二次応力を明確に把握することがきわめて重要となってくる。著者らは、すでに前報¹⁾において、(I) の状態で発生する二次応力の解明を行った。本報では (II) の状態における二次応力の発生機構を明らかにする。

さて、状態 (II) における主ケーブルは、変形により容易に素線間にすべりを生じる。この素線間のすべりは、ケーブル断面の平面保持則を崩壊させ、二次応力の発生機構はきわめて複雑になる。

この問題に対する最初の理論的研究として、T.A.

Wyatt の研究²⁾が挙げられる。Wyatt は、ケーブルを 2q 枚の薄板で構成される正方形断面の積層材に置換した後、たわみを無視して軸方向のつり合い条件と適合条件のみから素線層間のすべり長を決定し、層間すべりによる二次応力の簡単な算定式を得ている。しかしながら、ケーブル断面形状の相違（正方形→円形）およびケーブル軸線のたわみ等の二次応力に与える影響が解明されていないため、Wyatt の理論は実橋にどの程度の精度で適用できるのかという疑問が残されていた。他の理論的研究としては、ケーブルに重ね板ばねの考え方を適用した研究³⁾があるが、吊橋主ケーブルの二次応力を解明するに至っていない。

また、実験的研究としては、吊橋の建設に際して行われたモデル実験の報告や^{4)~7)}、完成直前の実橋で載荷試験を行い、そのケーブルの変形と応力を測定した報告^{8)~10)}がある。これらは、二次応力解明のための貴重な資料ではあるが、吊橋の二次応力を解明する普遍的手段にはなり得ない。

本文では、ワイヤラップトケーブルの二次応力発生機構を解明するために、たわみと素線間すべりの連成効果を考慮した解析理論を展開した。たわみを無視した Wyatt の理論は本理論の特別な場合と考えることができる。ここで計算効率を上げるために、一次応力、二次応力ともにもっとも大きく生ずる塔頂近傍の主ケーブルを解析の対象とし、部分系に加える変形、すなわち塔頂回転角と主ケーブルの回転角の差は従来の慣用設計法で算定されるものとした。また、解析理論の妥当性を室内実験により検証するとともに、本解析理論により実橋計測結果⁹⁾の追跡を行って実橋への適用性を示した。

2. 解析理論

ワイヤラップトケーブルの力学的特徴を抽出してケーブルをモデル化し、素線間すべりとたわみの連成効果を

* 昭和 50, 51, 52 年度土木学会年次学術講演会にて一部発表^{(1)~(18)}

** 正会員 工修 (株)神戸製鋼所構造研究所 研究員

*** 正会員 工博 (株)神戸製鋼所構造研究所 主任研究員

**** 正会員 工博 神戸大学教授 工学部土木教室

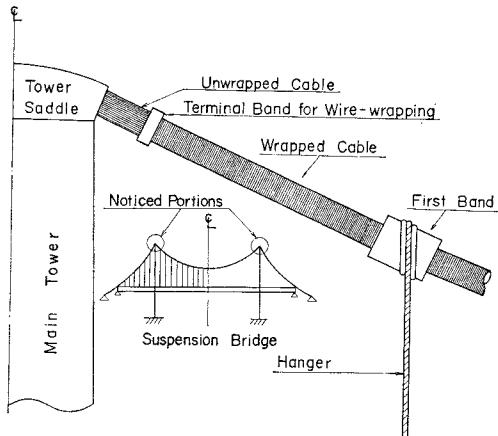


図-1 塔頂近傍のケーブル

考慮した二次応力解析理論を展開する。

(1) 解析の対象

本文は、図-1 に示すような塔頂近傍のアンラップト部分を含むケーブルの部分系の二次応力を解析の対象としたものである。二次応力は主としてケーブル系の変形と断面拘束に起因し、通常、角折れの生ずるケーブル支持断面で最大となる。この断面拘束の種類には、塔頂支持断面やケーブルバンド締付断面における素線間すべりが完全に拘束される場合とラッピングワイヤ締付断面における素線間摩擦抵抗によって素線間すべりが限定的に拘束される場合の 2 つが考えられる。本文は、後者の拘束による二次応力発生機構の解明に関するものであり、前者の拘束は、解析のうえでは素線間すべりに対する一種の境界条件に過ぎないので、問題の簡単化のため、ケーブルはバンドで締付けられていないものとした。換言すれば、本文は素線間のすべりがバンド締付部に達しない場合のケーブルを解析したものである。

(2) モデル化と仮定

解析対象の大きな特徴として次の諸点が挙げられる。

- ① ケーブルは、大きな張力を有する素線の集合体であり、ケーブルの軸線と素線の軸線は平行である。
- ② ラッピングワイヤの締付けにより素線間に側圧が導入されている。その値は軸方向にほぼ一定である。
- ③ ラッピングワイヤの直径はケーブル径に比して無

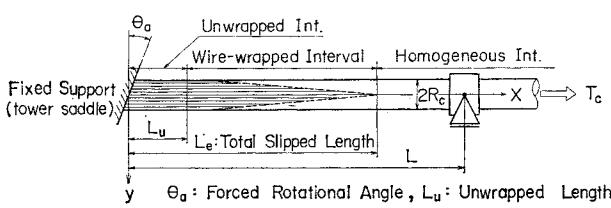
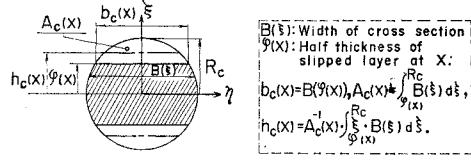
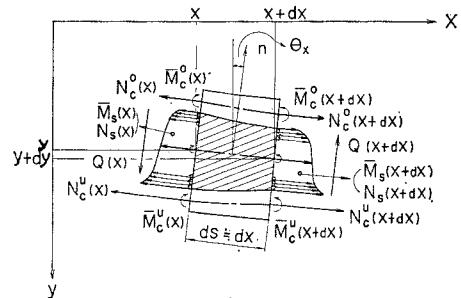


図-2 解析モデル



a. Traverse Section



b. Longitudinal Section & Applied Forces

図-3 記号と作用力系

視し得るほど小さく、隣接ワイヤ間は分離されている。

以上の特徴を具備するモデルとして、図-2 のような内部に素線間すべりを生じた部分を有する引張曲げ部材が考えられる。図中 θ_a は左支端断面に加える強制回転角であり、塔頂断面とケーブルのなす角の変化量を表わしている。図中部材内の軸方向の実線は素線にすべりを生じている部分を表わしたもので、それらの先端を結んだ破線より左側の領域をすべり領域、部材内の他の領域を無すべり領域と定義する。図-3 は図-2 に示したケーブルモデルの微小要素のつり合いと断面内のすべりの状態および断面定数の説明を行ったものである。微小変形の範囲では、部材軸 S と部材の両端を直線で結んだ部材座標 x はほぼ一致するので、 S の代りに x を用いることができる。本解析では、 x を用い、微小要素をさらに ξ 方向に細分して基礎式を誘導する。

以下に、解析に用いた仮定を列挙する(図-3 参照)。文中の S はケーブル図心を連ねた部材座標である。

- ① ケーブル断面は、 ξ 軸と η 軸に関して対称かつ軸線方向に一定。
- ② ケーブルを構成する素線の径は、ケーブル径に比し無視し得るほど小さい。
- ③ ラッピングワイヤの締付けによって生じる素線間の限界せん断応力 $\tau_{cr}(\xi)$ は、 $S-\eta$ 平面上に平行な平面上で一定かつ η 軸に対称である。
- ④ 素線間すべりは、巨視的にみて $S-\eta$ 平面上に平行な面内に生じ、すべり幅はケーブルの断面幅と一致する。
- ⑤ 変形による素線間側圧の変化が二次応力に及ぼす影響は無視できる。
- ⑥ 無すべり領域中の断面およびすべり領域中

の個々の素線断面では、平面保持則が成立する。

⑦ 変形は微小変形の範囲内で生じる。

⑧ 変形前の軸線形状は直線とする。

これらの仮定を上述のケーブルモデルに適用し、ワイヤラップトケーブルの処女変形に対する二次応力解析理論を展開する。

(3) 使用用語と記号 (図-2, 図-3 参照)

諸式誘導の際の便を考え、本文で用いる用語の定義と記号の意味を本節で一括説明する。

a) 用語の定義

素線層…… $S-\eta$ 平面上に平行な薄層平板。断面は均質で、ケーブル断面と同一の充実率 j を有する。対称軸 η から等距離にある素線の列を理想化したもの。

無すべり層……無すべり領域中の一体となって挙動する素線層の集合。

無すべり断面……すべり層を含まない断面 ($L_e < x < L$) および左支持端断面 ($x=0$)。

すべり層……すべり領域中の素線層。

すべり境界……すべり領域と無すべり領域の境界を表わし、素線間すべりの先端を結ぶ滑らかな曲線で定義する。

境界曲線 $\varphi(x)$ ……断面 x におけるすべり境界を、対称軸 η からの距離で表わしたもの。すべり領域厚の半分。

変形成分……ケーブル軸線の変形によって生じる断面力の成分。天端付号 $\ddot{}$ で表わす。

すべり成分……素線間のすべりによって生じる断面力成分で、各層図心軸の伸縮を伴う。 $\ddot{}$ で表わす。

一次応力……ケーブル軸力による直応力で断面上に均一分布しているものとする。平均応力と一致。

二次応力……ケーブルの変形によって新たに生じる直応力。変形成分とすべり成分で構成される。実応力から一次応力を差し引いたもの。

b) 記号

座標と変形

x, y : 部材軸座標および部材軸のたわみ

ξ, η : 断面座標

θ : 部材軸の法線 n の回転角で $\frac{dy}{dx}$ に一致。

無すべり断面では、 θ は断面の回転角を表わす。

θ_a : 左支端断面に与えられる強制回転角。塔とケーブルのなす角の変化量を意味する。

ρ : ケーブル軸線の曲率半径

L_u, L_e : アンラップト区間長およびすべり区間長

L : ケーブルモデルの支間長

断面の属性

D_w, A_w : 素線径および素線 1 本の断面積

EI_w : 素線 1 本の曲げ剛性

R_c, A : ケーブル断面の ξ 方向半径 および 純断面積

$B(\xi)$: 図心から ξ の位置のケーブル断面の幅

j : ケーブル断面の充実率,

$$j = \left(2 \int_0^{R_c} B(\xi) d\xi \right)^{-1} A$$

$A(\xi)$: 図心から ξ 以上離れた ケーブル部分断面の断面積, $A(\xi) = \int_{\xi}^{R_c} B(\xi) d\xi$

$h(\xi)$: 図心から ξ 以上離れた ケーブル部分断面の図心の ξ 座標の値,

$$h(\xi) = A(\xi)^{-1} \int_{\xi}^{R_c} B(\xi) \xi d\xi$$

$\varphi(x)$: 断面 x におけるすべり境界位置の ξ 座標の値

$b_c(x)$: すべり境界におけるケーブル断面幅,

$$b_c(x) = B(\varphi(x))$$

$A_c(x)$: 無すべり層の断面積,

$$A_c(x) = A(\varphi(x))$$

$h_c(x)$: 無すべり層図心の座標の値,

$$h_c(x) = h(\varphi(x))$$

$EI_c(x)$: すべり層の曲げ剛性,

$$EI_c(x) = j E \int_{\varphi(x)}^{R_c} B(\xi) (\xi - h_c(x))^2 d\xi$$

d_w : 素線層の厚さ, $d_w = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot D_w$

φ_u : アンラップト区間におけるすべり境界の ξ 座標の値, $\varphi_u = R_c - d_w$

h_u : 最外縁素線層図心の ξ 座標の値,

$$h_u = h(\varphi_u)$$

q : ケーブルを素線層の積層部材とみなした場合の層数の半分, $d_w/R_c \ll 1$, だから,

$$q = R_c d_w^{-1}$$

$n(x)$: 断面 x における、すべり領域中の素線層数の半分

m : ケーブル図心から m 番目の素線層を示す符号

$\xi_{m1}, \xi_m, \xi_{m2}$: それぞれ、第 m 素線層の下縁、図心および上縁の ξ 座標の値,

$$\xi_m = \left(\int_{\xi_{m1}}^{\xi_{m2}} B(\xi) d\xi \right)^{-1} \int_{\xi_{m1}}^{\xi_{m2}} B(\xi) \xi d\xi$$

$$\xi_{11} = 0, \xi_{m2} = \xi_{m+1,1}, \xi_{n2} = \varphi(x)$$

EI_m : 素線層の曲げ剛性。形式上,

$$EI_m = j E \int_{\xi_{m1}}^{\xi_{m2}} B(\xi) (\xi - \xi_m)^2 d\xi$$

と書けるが、これは素線層に含まれる素

$$\left. \begin{aligned} jA_c(x+dx)\sigma_c(x+dx, h_c) \\ -jA_c(x)\sigma_c(x, h_c)-F(x)=0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ただし、

$$F(x)=-\int_x^{x+dx}\sigma_c(x, \varphi)jB(\varphi)\frac{d\varphi}{dx}dx + \int_x^{x+dx}S*\tau_c(x)b_c(x)dx$$

となる。ここで、 $F(x)$ は無すべり層下面に生じる軸方向力である。式(3)において、第1式第1項と $F(x)$ を x の近傍でTaylor展開し、2次以上の微小項を省略すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sigma_c(x, h_c)-S*j^{-1}A_c^{-1}b_c\tau_c \\ -\{\sigma_c(x, h_c)-\sigma_c(x, \varphi)\}A_c^{-1}b_c\frac{d\varphi}{dx}=0 \end{aligned} \dots (4)$$

となる。ところで無すべり層断面での平面保持則より、

$$\begin{aligned} \sigma_c(x, \xi)=\sigma_c(x, h_c) \\ +Ey''(\xi-h_c), \varphi \leq \xi \leq R_c \dots (5) \end{aligned}$$

また、 A_c, h_c の定義より、 $\frac{dh_c}{d\varphi}=A_c^{-1}b_c(h_c-\varphi)$ であるから、式(4)は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sigma_c(x, h_c)-S*j^{-1}A_c(x)^{-1}b_c(x)\tau_c(x) \\ -Ey''\frac{dh_c}{dx}=0 \dots (6) \end{aligned}$$

となる。これは、無すべり層図心の応力 $\sigma_c(x, h_c)$ に関する微分方程式であり、第2項はすべり成分、第3項は変形成分と考えられる。

b) すべり層微小要素のつり合い条件式

図-5は、すべり領域内の任意のすべり層の微小要素に作用する軸方向の応力のみを取り出したものである。図に従って、軸方向のつり合いを考えると、すべり層応力 $\sigma_s(x, \xi)$ に関する微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sigma_s(x, \xi)+S*j^{-1}B(\xi)^{-1}\frac{d}{d\xi}\{B(\xi)\tau_{cr}(\xi)\} \\ =0, 0 \leq \xi < \varphi \dots (7) \end{aligned}$$

ここでは層厚は考慮されていないが、層厚が本来微小であることを考えると、式(7)はすべり層図心の応力に関する方程式とみなすことができる。式(7)第2項はすべり成分であり、変形による成分は存在しない。すなわち、すべり層図心の応力は部材の局所的な変形と無関

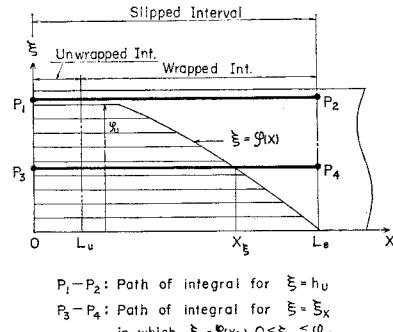
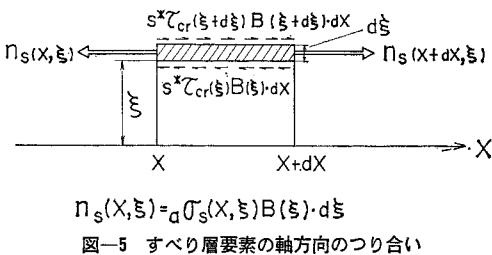


図-6 軸方向適合条件の適用経路

係である。

c) すべり境界における直応力の連続条件

すべり境界は、層間すべりの先端を結んだ解析上の境界線であり、この線上にはいかなる外力、分離点も存在しない。したがって、すべり境界で軸方向直応力は連続的に変化しなければならない。すなわち、

$$\sigma_c(x, \varphi)=\sigma_s(x, \varphi) \dots (8)$$

d) 軸方向適合条件

各層間で断面分離を生じている場合には、部材の局部変形と各層図心における直ひずみとは1対1に対応しない。したがって、変形とひずみの適合条件は、平面保持則の成立する部材断面にはさまれた区間の中で各層ごとに考える必要がある。図-6は、適合条件式をたてる際のひずみの積分経路を示したものである。本解析では、左支端断面とすべり領域先端に隣接する無すべり断面ではさまれた区間で、変形とひずみの軸方向適合条件を考えた。

さて、平面保持則の成立する断面では、断面の回転角は軸線の傾斜角と一致する。したがって、任意の素線層図心軸の区間 $0 < x < L_e$ における伸び dl は、軸線の変形より幾何学的に求めることができる。一方、この dl は直ひずみを直接積分しても得られるので、変形とひずみの適合条件より、

$$dl=\int_0^{L_e} \frac{\xi_m}{\rho} dx=\int_0^{L_e} \epsilon(x, \xi_m) dx \dots (9)$$

を得る。これは、局部変形とひずみの適合条件式(2)の両辺を、区間 $0 < x < L_e$ にわたって積分したものと一致している。式(9)に式(1)および $\frac{1}{\rho}=y''$ を代入すると、次の2種類の基礎方程式を得る。

$$\begin{aligned} (\theta_e-\theta_a)h_u-E^{-1}\int_0^{L_e} \sigma_c(x, h_u) dx=0, \\ \xi=h_u \text{ (Path, } P_1-P_2) \dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\theta_e-\theta_a)\xi_x-E^{-1}\left\{ \int_0^{\xi_x} \sigma_s(x, \xi_x) dx \right. \\ \left. + \int_{x_\xi}^{L_e} \sigma_c(x, \xi_x) dx \right\}=0, \end{aligned}$$

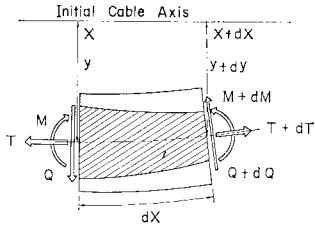


図-7 ケーブル要素のつり合い

$$0 \leq \xi_x \leq \varphi_u \quad (\text{Path, } P_3 - P_4) \quad \dots \dots \dots (11)$$

ただし, $\theta_a = y'(0)$, $\theta_e = y'(L_e)$, $\xi_x = \varphi(x_i)$

式 (10), (11) は, それぞれ無すべり層およびすべり層に対する軸方向適合条件式である.

e) 部材要素のつり合い条件式

図-7 は, 図-2 で示した部材要素のつり合いを部材断面力の形で簡単に表わしたものである. 図より次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM(x)}{dx} &= -Q(x) \\ \frac{dQ(x)}{dx} &= Ty'' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

f) 断面力と応力の関係

断面力はすべて断面に生じる応力で構成される.

$$\left. \begin{aligned} M(x) &= -2j \int_0^{R_e} \sigma(x, \xi) B(\xi) \xi d\xi \\ \text{ただし } \left\{ \begin{aligned} \sigma(x, \xi) &= \sigma_s(x, \xi), \quad 0 < \xi < \varphi \\ \sigma(x, \xi) &= \sigma_c(x, \xi), \quad \varphi \leq \xi < R_e \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

$$Q(x) = 2 \int_0^{R_e} \tau(x, \xi) B(\xi) d\xi \dots \dots \dots (14)$$

式 (14) の $\tau(x, \xi)$ は各層断面内のせん断応力である. $\tau(x, \xi)$ は, 後述するように, 各層内の微小要素のつり合いを考えることにより, 軸応力 $\sigma(x, \xi)$ と関係付けられている.

以上, a)~f) で誘導した基礎方程式を連立させて解けば, 線間にすべりを生じているワイヤラップトケーブルのすべりとたわみの連成を考慮した二次応力が求まる.

(5) 解析へのアプローチ

(4) で得られた基礎方程式に基づいて, 二次応力式, たわみ解析方程式およびすべり境界決定方程式を誘導し, これらを組み合わせて二次応力の解析を行う.

a) 応力解析

ここでは, 部材の変形後の状態がすべり境界曲線 $\varphi(x)$ とたわみ y で表わされている場合の, 部材断面任意位置における二次応力式を誘導する. その後, 各層断面内の微小要素のつり合い条件を用いて, 各層断面のせん断応力式および層間圧力式を誘導する. これらの式は, たわみ解析および仮定⑤の理論的検証に使用される.

(i) 無すべり層二次応力

無すべり層図心応力 $\sigma_c(x, h_c)$ に関する微分方程式 (6) の両辺を x で積分すると,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c(x, h_c) &= \sigma_c(0, h_u) + S^* j^{-1} \int_0^x A_c^{-1} b_c \tau_c dx \\ &\quad + \int_0^x E y'' h_c' dx, \quad h_u = h_c(0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

ただし, $\sigma_c(0, h_u)$ は積分定数であり, 支持端断面の最外縁素線層図心での二次応力, すなわち局部曲げを除いた最大二次応力を表わす重要な記号である. ところで, アンラップト区間では, $\tau_{cr}(\xi) = 0$ であるから,

$$\tau_c(x) = 0, \quad h_c(x) = h_u, \quad 0 \leq x < L_u \dots \dots \dots (16)$$

したがって, 無すべり層図心応力は,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c(x, h_c) &= \sigma_c(0, h_u), \quad 0 \leq x < L_u \\ \sigma_c(x, h_c) &= \sigma_c(0, h_u) + S^* j^{-1} \int_{L_u}^x A_c^{-1} b_c \tau_c dx \\ &\quad + \int_{L_u}^x E y'' h_c' dx + E y''(L_u) \\ &\quad \times \{h_c(L_u) - h_u\}, \quad L_u \leq x \leq L_e \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

となる. 式 (17) の第2式, 右辺第4項は, $h_c(x)$ の $x = L_u$ における不連続性, $h_c(L_u - 0) = h_u \neq h_c(L_u + 0)$ による項である. さて, 積分定数 $\sigma_c(0, h_u)$ は, 無すべり領域内の $\xi = h_u$ における軸方向適合条件式 (10) に式 (17) を代入すると得られる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c(0, h_u) &= EL_e^{-1} \left[\{y'(L_u) - \theta_a\} h_u \right. \\ &\quad \left. - y''(L_u) (L_e - L_u) \{h_c(L_u) - h_u\} \right. \\ &\quad \left. - \int_{L_u}^{L_e} \left(E^{-1} S^* \int_{L_u}^x j^{-1} A_c^{-1} b_c \tau_c dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{L_u}^x y'' h_c' dt - y'' h_c \right) dx \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

無すべり層断面内の任意点の直応力は, 式 (5) と式 (7) より,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_c(x, \xi) &= \sigma_c(0, h_u) + S^* j^{-1} \int_{L_u}^x A_c^{-1} b_c \tau_c dx \\ &\quad + \int_{L_u}^x E y'' h_c' dx + E y''(L_u) \{h_c(L_u) \\ &\quad - h_u\} + E y''(\xi - h_c), \quad L_u \leq x \leq L_e \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

で表わされる.

(ii) すべり層二次応力

すべり層図心応力 $\sigma_s(x, \xi)$ に関する微分方程式 (7) の両辺を x で積分すると, 式 (16) を考慮して,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s(x, \xi) &= \sigma_s(0, \xi), \quad 0 \leq x < L_u \\ \sigma_s(x, \xi) &= \sigma_s(0, \xi) - S^* j^{-1} B(\xi)^{-1} \\ &\quad \times \frac{d}{d\xi} \{B(\xi) \tau_{cr}(\xi)\} (x - L_u), \quad L_u \leq x \leq L_\xi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

となる。ただし、 $\sigma_s(0, \xi)$ は積分定数で、支持端断面におけるすべり層図心の直応力、すなわち局部曲げを除いたすべり層の最大二次応力を表わしている。 $\sigma_s(0, \xi)$ を決定する方法は 2 つある。すなわち、無すべり断面間の軸方向適合条件式 (11) を用いる方法と、すべり境界における直応力の連続条件式 (8) を用いる方法である。これらの異なる 2 つの方法で求めた $\sigma_s(0, \xi)$ の値は一致しなければならない。ここでは式 (11) を $\sigma_s(0, \xi)$ の決定に用い、式 (8) はすべり境界線 $\varphi(x)$ の決定条件に使用する。式 (20) を式 (11) に代入すると、

$$\sigma_s(0, \xi) = L_\xi^{-1} \left[(\theta_e - \theta_a) E_\xi + \frac{1}{2} S^* j^{-1} B(\xi)^{-1} \times \frac{d}{d\xi} \{B(\xi) \tau_{cr}(\xi)\} (L_\xi - L_u)^2 - \int_{L_\xi}^{L_e} \sigma_c(x, \xi) dx \right] \dots \quad (21)$$

ただし, $L_\xi = \text{arc } \varphi(\xi)$, すなわち, $\xi = \varphi(L_\xi)$

式(21)の右辺第3項中の $\sigma_c(x, \xi)$ はすでに求まっているので、式(20), (21)より、すべり領域内の任意点の軸方向直応力が求まる。ただし、すべり層内の応力分布を知る必要がある場合には、すべり層断面の平面保持則と式(20)より、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s(x, \xi) &= \sigma_s(0, \xi_m) + E y'(\xi - \xi_m), \\ 0 \leq x < L_u, \quad \xi_{m1} < \xi < \xi_{m2} \\ \sigma_s(x, \xi) &= \sigma_s(0, \xi_m) - S * j^{-1} B(\xi)^{-1} \\ &\quad \times \frac{d}{d\xi} \{B(\xi) \tau_{cr}(\xi)\}_{\xi=\xi_m} (x - L_u) \\ &\quad + E y'(\xi - \xi_m), \\ L_u \leq x &\leq L_e, \quad \xi_{m1} < \xi < \xi_{m2} \end{aligned} \right\} (22)$$

ここで、 ξ_{m_1} , ξ_m , ξ_{m_2} はそれぞれ素線層 m の下縁と図心および上縁の座標である。

(iii) すべり層内のせん断応力と \pm 方向直応力

図-8は、無すべり層内の微小薄層要素を取り出して、 ξ 方向のつり合いを考えたものである。図中、 $\tau(x, \xi)$ はせん断応力、 $\sigma_d(x, \xi)$ は法線方向直応力の変化量である。実際には、一次応力 σ_1 およびワイヤラッピングによる内圧 σ_g が存在するが、これらは変形前後で自己つり合い系を構成するので、ここでは無視した、この

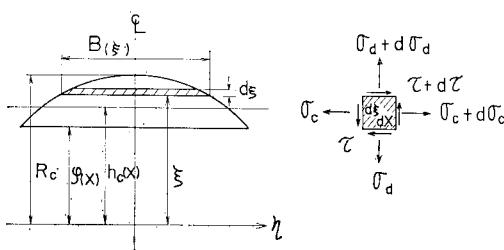


図-8 無すべり層内の微小要素のつり合い

とき、図より、

$$\left. \begin{aligned} jB(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \sigma_c(x, \xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} \{B(\xi) \tau(x, \xi)\} &= 0 \\ B(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \tau(x, \xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} \{B(\xi) \sigma_d(x, \xi)\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$\varphi \leq \xi < R_c$

ここで、 $\tau(x, \xi)$ と $\sigma_d(x, \xi)$ の境界条件は、

$$\tau(x, R_c) = 0, \quad \sigma_d(x, R_c) = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (24)$$

だから、式 (24) を考慮して式 (23) を ξ に関して積分すると、

となる. 式 (25) に式 (19) を代入して整理すると,

$$\begin{aligned} \tau(x, \xi) = & B(\xi)^{-1} A(\xi) [S^* A_c(x)^{-1} b_c(x) \tau_c(x) \\ & + jE y''' \{ h(\xi) - h_c \}], \quad \varphi \leq \xi \leq R_c \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (27)$$

が得られる. ここで, $\xi = \varphi(x)$ における値を求めるとき,

$$\begin{aligned}\tau(x, \varphi) = & B(\varphi)^{-1} A(\varphi) [S^* A_c(x)^{-1} b_c(x) \tau_c(x) \\ & + jE y''' \{h(\varphi) - h_c\}] = S^* \tau_c(x)\end{aligned}$$

であり、式(25)で表わされる $\tau(x, \xi)$ は、 $\xi = \varphi$ における境界条件を満足している。式(27)を式(26)に代入して、

ここで、

$$j \int_{\xi}^{R_c} A(\xi) h(\xi) d\xi = j \int_{\xi}^{R_c} \left(\int_{\xi}^{R_c} B(t) dt \right) d\xi$$

$$= I_{\xi} + j A(\xi) h(\xi) (h(\xi) - \xi)$$

ただし、

$$I_{\xi} = j \int_{\xi}^{R_c} B(t) (t - h(\xi))^2 dt$$

であるから、

$$\begin{aligned}\sigma_d(x, \xi) = & B(\xi)^{-1} [\{ S^*(A_c^{-1} b_c \tau_c)' + j E y''' h_c' \\ & + j E y'''' (h(\xi) - h_c) \} A(\xi) (h(\xi) - \xi) \\ & + EI_\xi y''''], \quad \varphi \leq \xi \leq R_c \dots \dots \dots (29)\end{aligned}$$

となる。したがって、すべり境界 $\varphi(x)$ における層間圧力の変化量 $\sigma_d(x, \varphi)$ は次式で表わされる。

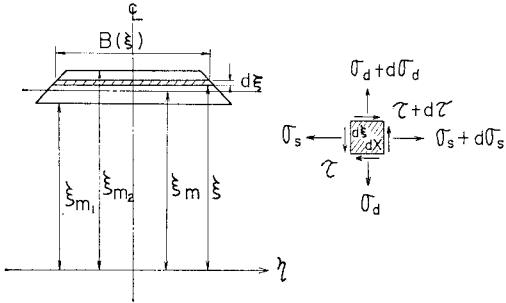


図-9 すべり層内の微小要素のつり合い

(iv) すべり層内のせん断応力と ϑ 方向直応力

図-9 は、すべり層内の微小薄層要素を取り出して、そのつり合いを考えたものである。図中の記号の意味および一次応力 σ_T と内圧 σ_q の取扱いは、(iii) に準じる。このとき、図より、

$$\left. \begin{aligned} jB(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \sigma_s(x, \xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} \{B(\xi)\tau(x, \xi)\} &= 0 \\ B(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \tau(x, \xi) + \frac{\partial}{\partial \xi} \{B(\xi)\sigma_d(x, \xi)\} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \xi_{m1} < \xi < \xi_{m2}, \dots \quad (31)$$

ここで、すべり層内せん断応力の境界条件は、

$$\tau(x, \xi_{m_1}) = S^* \tau_{cr}(\xi_{m_1}),$$

$$\tau(x, \xi_{m2}) = S * \tau_{cr}(\xi_{m2})$$

であるから、 $\xi = \xi_{m_2}$ において境界条件が満たされるように式(31)の第(1)式を ξ に関して積分すると、

$$\tau(x, \xi) = S * \tau_{cr}(\xi_m)$$

$$- j B(\xi)^{-1} \int_{\xi}^{\xi_m} B(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{\xi}(x, \xi) d\xi,$$

$$\xi_m < \xi < \xi_m \dots \dots \dots \quad (32)$$

となる。式(22)を式(32)に代入すると、せん断応力式は、

$$\tau(x, \xi) = S * \tau_{cr}(\xi)$$

$$+ jE y''' B(\xi)^{-1} \int_{\xi}^{\xi_{m2}} B(\xi) (\xi - \xi_m) d\xi,$$

$$\xi_{m1} \leq \xi < \xi_{m2} \dots \dots \dots \quad (33)$$

$$\tau(x, \xi_m) = S^* \tau_{cr}(\xi_m)$$

$$\tau(x, \xi_m) = S * \tau_{cr}(\xi_m)$$

$$+ j E y''' B(\xi_m)^{-1} \int_{\xi_m}^{\xi_m} B(\xi) (\xi - \xi_m) d\xi$$

となり、式(33)は、 $\xi = \xi_{m1}$ における境界条件も満たしている。ところで、式(31)の第2式より、

$$\sigma_d(x, \xi) = \sigma_d(x, \xi_{m^2}) - B(\xi)^{-1} \int_{\xi}^{\xi_{m^2}} B(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \tau(x, \xi) d\xi$$

..... (34)

ゆえに、式 (33) を式 (34) に代入すると、 ξ 方向直応力の変化量 $\sigma_d(x, \xi)$ の式が得られる.

$$\sigma_d(x, \xi) = \sigma_d(x, \xi_{m1}) + jE y''' \int_{\xi}^{\xi_{m2}} B(\xi) (\xi - \xi_{m1}) d\xi, \\ \xi_{m1} < \xi < \xi_{m2} \dots \dots \dots \quad (35)$$

式(35)より、 $\sigma_d(x, \xi_{m1}) = \sigma_d(x, \xi_{m2})$ である。すなわち、同一断面では、層間圧力の変化量は一定であり、その値は式(30)で表わされる。

b) たわみ解析

ここでは、部材の変形後の状態がすべり境界曲線 $\varphi(x)$ と断面の応力で表わされている場合の、たわみ解析を行う。まず、断面応力より部材断面力を計算した後、それらを変形成分とすべり成分に分離し、部材のつり合い条件式に代入してたわみ（変形）に関する微分方程式を誘導する。

(i) モーメント

断面 x のモーメントは、式 (13) より、

$$M(x) = -2 \int_0^{\varphi} \sigma_s(x, \xi) B(\xi) \xi d\xi \\ -2 \int_{\varphi}^{R_c} \sigma_c(x, \xi) B(\xi) \xi d\xi \dots \dots \dots (36)$$

式 (36) の右辺第 1 項に式 (22), 第 2 項に式 (19) を代入すると,

$$M(x) = -2j \sum_{m=1}^n \left\{ \sigma_s(x, \xi_m) \int_{\xi_{m1}}^{\xi_{m2}} B(\xi) \xi d\xi \right. \\ \left. + E y'' \int_{\xi_{m1}}^{\xi_{m2}} B(\xi) (\xi - \xi_m) \xi d\xi \right\} \\ - 2j \left\{ \int_{\varphi}^{R_c} \sigma_c(x, h_c) B(\xi) \xi d\xi \right. \\ \left. + E y'' \int_{\varphi}^{R_c} B(\xi) (\xi - h_c) \xi d\xi \right\} (37)$$

となる。ところで、素線層厚とケーブル半径の比 κ は、仮定(2)より、 $\kappa = (\xi_{m_2} - \xi_{m_1})/R_c \ll 1$ 、であるから、

$$\sum_{m=1}^n \sigma_s(x, \xi_m) \int_{\xi_{m_1}}^{\xi_{m_2}} B(\xi) \xi d\xi \doteq \int_0^q \sigma_s(x, \xi) B(\xi) \xi d\xi \quad \dots \quad (38)$$

七

$$\begin{aligned} j \int_{\xi_m}^{\xi_m} B(\xi) (\xi - \xi_m) \xi d\xi &= j \int_{\xi_m}^{\xi_m} B(\xi) (\xi - \xi_m)^2 d\xi \\ &= I_m \quad (\text{図-9 参照}) \\ j \int_{\varphi}^{R_c} B(\xi) (\xi - h_c) \xi d\xi &= j \int_{\varphi}^{R_c} B(\xi) (\xi - h_c)^2 d\xi \\ &= I_c \quad (\text{図-3 参照}) \end{aligned}$$

であるから、断面モーメント式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} M(x) &= -2 j \int_0^q \sigma_s(x, \xi) B(\xi) \xi d\xi \\ &\quad - 2 j \int_{\eta}^{R_c} \sigma_c(x, h_c) B(\xi) \xi d\xi - E(I_s + 2 I_c) y'' \\ &= -EI(x) y'' - 2 j \left\{ A_c h_c \sigma_c(x, h_c) \right\} \end{aligned}$$

$$+ \int_0^\varphi \sigma_s(x, \xi) B(\xi) \xi d\xi \Big\} = \bar{M}(x) + \tilde{M}(x) \quad \dots \dots \dots (39)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}(x) &= -EI(x)y'', \\ \tilde{M}(x) &= -2j \left\{ A_c h_c \sigma_c(x, h_c) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\varphi \sigma_s(x, \xi) B(\xi) \xi d\xi \right\} \\ I(x) &= I_s + 2I_c = 2j \int_\varphi^{R_c} B(\xi) (\xi - h_c)^2 d\xi \\ &\quad + A_w^{-1} (A - 2jA_c(x)) EI_w \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (40)$$

(ii) せん断力

式(14)をすべり領域と無すべり領域に分けて積分すると、式(27), (33)より、

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \tau(x, \xi) B(\xi) d\xi &= S^* \int_0^\varphi \tau_{cr}(\xi) B(\xi) d\xi \\ &\quad + jEy''' \sum_{m=1}^n \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \left(\int_{\xi}^{\xi_{m+1}} B(t) (t - \xi_m) dt \right) d\xi \\ &= S^* \int_0^\varphi \tau_{cr}(\xi) B(\xi) d\xi + \frac{1}{2} Ey''' I_s(x) \\ \int_\varphi^{R_c} \tau(x, \xi) B(\xi) d\xi &= S^* A_c^{-1} b_c \tau_c \int_\varphi^{R_c} A(\xi) d\xi \\ &\quad + jEy''' \int_\varphi^{R_c} A(\xi) (h(\xi) - h_c) d\xi \\ &= S^* b_c (h_c - \varphi) \tau_c + EI_c(x) y''' \end{aligned}$$

であるから、部材せん断力 $Q(x)$ は、

$$\begin{aligned} Q(x) &= EI(x) y''' \\ &\quad + 2S^* \left\{ b_c (h_c - \varphi) \tau_c + \int_0^\varphi B(\xi) \tau_{cr}(\xi) d\xi \right\} \\ &= \bar{Q}(x) + \tilde{Q}(x) \quad \dots \dots \dots (41) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}(x) &= EI(x) y''', \\ \tilde{Q}(x) &= 2S^* \left\{ b_c (h_c - \varphi) \tau_c + \int_0^\varphi B(\xi) \tau_{cr}(\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (42)$$

(iii) たわみ解析基礎式

部材の断面力は、式(39)と式(41)から明らかのように、変形成分とすべり成分に明確に分解することができる。ここでは、すべり成分を既知としてたわみ y に関する方程式を誘導する。

まず、式(39)と式(41)を部材要素のつり合い式(12)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{M}(x)}{dx} &= -\bar{Q}(x) - \frac{d\tilde{M}(x)}{dx} - \tilde{Q}(x) \\ \frac{d\bar{Q}(x)}{dx} &= Ty'' - \frac{d\tilde{Q}(x)}{dx} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (43)$$

ところで、式(40)の第2式と式(42)の第2式を x に

関して微分し整理すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{M}(x)}{dx} &= -\tilde{Q}(x) - 2jb_c(h_c - \varphi) \\ &\quad \times \{ \sigma_c(x, h_c) - \sigma_s(x, \varphi) \} \frac{d\varphi}{dx} \\ \frac{d\tilde{Q}(x)}{dx} &= 2S^*(h_c - \varphi) \\ &\quad \times \left\{ A_c^{-1} b_c^2 \tau_c + \frac{d}{d\varphi} (b_c \tau_c) \right\} \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (44)$$

式(44)を式(43)に代入し、式(40)の第1式を連立させると、断面力の変形成分に関する連立微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}(x) &= -EI(x)y''(x) \\ \frac{d\bar{M}(x)}{dx} &= -\bar{Q}(x) + f(x) \\ \frac{d\bar{Q}(x)}{dx} &= Ty''(x) + g(x) \\ \text{ただし}, \quad \begin{aligned} f(x) &= 2jb_c(h_c - \varphi) \{ \sigma_c(x, h_c) \\ &\quad - \sigma_s(x, \varphi) \} \frac{d\varphi}{dx} \\ g(x) &= -2S^*(h_c - \varphi) \\ &\quad \times \left\{ A_c^{-1} b_c^2 \tau_c + \frac{d}{d\varphi} (b_c \tau_c) \right\} \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (45)$$

式(45)に式(19)と式(20), (21)を代入して応力を消去し、さらに、断面力を消去すると、たわみ y と境界曲線 $\varphi(x)$ の関係式

$$\begin{aligned} EIy'''' + 2E \left\{ I' - jb_c(h_c - \varphi)^2 \frac{d\varphi}{dx} \right\} y''' \\ + \left[T + EI'' - 2jE \left\{ b_c(h_c - \varphi)^2 \frac{d\varphi}{dx} \right\}' \right] y'' \\ - 2S^*(h_c - \varphi) \left\{ A_c^{-1} b_c^2 \tau_c + \frac{d}{d\varphi} (b_c \tau_c) \right\} \frac{d\varphi}{dx} \\ = 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (46)$$

が得られる。式(46)は、すべり境界 $\varphi(x)$ が存在する場合に、たわみ y が満足すべき微分方程式である。ところで、式(45)は、 $f(x)$ と $g(x)$ が既知の場合、軸力 T と分布荷重 $f(x)$, $g(x)$ が作用している均質な変断面ばかりのたわみの微分方程式と同等である。本解析では、煩雑な式(46)の代りに、 $f(x)$ と $g(x)$ を既知として式(45)をたわみ解析の基礎式とし、通常行われている不連続近似(すべり区間をいくつかに分割し、分割された区間内で I_x 一定、しかも分布荷重を格点集中荷重に置換する近似)を行って、たわみ解析を容易にした。この際、断面の不連続点である格点では、たわみ y の2次以上の高次導関数が不連続となるので、これらに對しては、1次低位の導関数の2次の補間曲線より求めている。

c) すべり解析

繰り返し計算途中における近似解 y と $\varphi(x)$ に基づいて計算される二次応力は、一般に、すべり境界で直応力の連続条件式(8)を満足しない。ここでは、たわみと境界曲線の近似解、 y と $\varphi(x)$ が与えられた場合に、たわみ y を固定した状態で条件式(8)を満たすような $\varphi(x)$ の修正方法を考える。

(i) 境界曲線 $\varphi(x)$ の決定方程式

直応力の連続条件式(8)に式(18)～(21)を代入すると、

$$\sigma_c(x, \varphi) - \sigma_s(x, \varphi)$$

$$\begin{aligned} &= Ex^{-1} \left[(y'(L_u) - \theta_a) h_u \right. \\ &\quad + y''(L_u) L_u (h_c(L_u) - h_u) \\ &\quad - (y' - \theta_a) \varphi + xy''(\varphi - h_c) \\ &\quad - \int_{L_u}^x \left\{ \int_{L_u}^t (S * E^{-1} j^{-1} A_c^{-1} b_c \tau_c \right. \\ &\quad \left. + y'' h_c') dt - y'' h_c \right\} dt \left. \right] \\ &\quad + \int_{L_u}^x (S * j^{-1} A_c^{-1} b_c \tau_c + E y'' h_c') dt \\ &\quad + \frac{x^2 - L_u^2}{2x} S * j^{-1} b_c^{-1} \frac{d}{d\xi} \{B(\xi) \tau_{cr}(\xi)\}_{\xi=\varphi} \dots (47) \end{aligned}$$

が得られる。式(47)は、たわみと境界曲線だけで表されたすべり境界位置における軸方向直応力の連続条件式であり、本来、式(46)と連立させて解かれるべきである。しかしながら式(46)と式(47)は、互いにたわみ y と境界曲線 $\varphi(x)$ が複雑に絡み合った連立非線形微積分方程式を構成しており、これを直接解くのはきわめて困難である。著者らは、式(47)とは別に、式(8)の両辺を x で微分することにより、積分項を含まない比較的簡単な方程式を誘導した。すなわち、式(19)より、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sigma_c(x, \varphi) &= S * j^{-1} A_c^{-1} b_c \tau_c \\ &\quad + E y'''(\varphi - h_c) + E y'' \varphi' \end{aligned}$$

また、式(20)と(21)より、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sigma_s(x, \varphi) &= x^{-1} \{ \sigma_c(x, \varphi) - \sigma_s(x, \varphi) \} - G(\varphi) \\ &\quad + \left\{ x^{-1} (y' - \theta_a) E - \frac{x^2 - L_u^2}{2x} \frac{d}{d\xi} G(\varphi) \right\} \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned}$$

ただし、

$$G(\varphi) = S * j^{-1} B(\varphi)^{-1} \frac{d}{d\xi} \{B(\xi) \tau_{cr}(\xi)\}_{\xi=\varphi}$$

したがって、

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x} \right) (\sigma_c(x, \varphi) - \sigma_s(x, \varphi)) \\ &= S * j^{-1} A_c^{-1} b_c \tau_c + G(\varphi) \\ &\quad + E y'''(\varphi - h_c) + \left[E \left(y'' - \frac{y' - \theta_a}{x} \right) \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{x^2 - L_u^2}{2x} \frac{d}{d\xi} G(\varphi) \left. \right] \frac{d\varphi}{dx} = 0 \dots (48)$$

ゆえに、 $L_u \leq x \leq L_e$ の範囲の φ に対して、式(47)の代りに、

$$\begin{aligned} &S * j^{-1} A(\varphi)^{-1} B(\varphi) \tau_{cr}(\varphi) + G(\varphi) \\ &+ E y'''(\varphi - h(\varphi)) + \left[E \left(y'' - \frac{y' - \theta_a}{x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^2 - L_u^2}{2x} \frac{d}{d\xi} G(\varphi) \right] \frac{d\varphi}{dx} = 0 \dots (49) \end{aligned}$$

が得られる。式(49)は、たわみ y 、すなわち y' 、 y'' 、 y''' を固定すれば、境界曲線 $\varphi(x)$ の x に関する一階非線形微分方程式であり、容易に解くことができる。本解析では、すべり境界における軸方向応力の連続条件式として、必要十分条件式であるがきわめて複雑な式(47)の代りに、比較的簡単な必要条件式(49)を採用する。ただし、次に述べる境界点においては必要十分条件式(47)を使用するので、全体として式(47)を満足する解が得られる。

(ii) 境界点 (L_u, φ_1) あるいは (x_1, φ_u) における決定方程式

$x=L_u+0$ における境界曲線の値 $\varphi_1=\varphi(L_u+0)$ が $\varphi_1 < \varphi_u$ の場合には、境界点 (L_u, φ_1) で成立すべき軸方向応力の連続条件式(47)は比較的簡単な形となる。また、 $\varphi_1 > \varphi_u$ の場合にも、 $\varphi(x)$ が φ_u と一致する境界点 (x_1, φ_u) で式(47)は簡単な形になる。

3. 特別な場合の解析解

非線形方程式を解く場合には、一般に、ある適当な既知の近似解を出発点として未知量に関する局所線形関係式あるいは逐次近似法等を用いて原式を満足する解を求める方法がとられている。ところで、非線形性の大きな方程式を解く場合には、出発点となる近似解の良否により解の収束性が大きく左右される。したがって、第1近似解をどのように決定するかという問題が非常に重要なってくる。本文では、吊橋の主ケーブルは常に大きな張力を受けていること、素線間すべりの生じているケーブルの応力解析を主眼としていること、およびその場合の解析的に求まる唯一の解であることなどの理由から、第1近似解として張力無限大の正方形断面ケーブルの端面に強制回転角 θ_a を与えた場合の解を採用した。以下この解析解を誘導する。

正方形断面の場合は、

$$B(\xi) = 2 R_c, \tau_{cr}(\xi) = \tau_{cr}(\text{一定}) \dots (50)$$

であり、張力無限大ではたわみは無限小となる。すなわち、 $0 < x \leq L$ で、

$$y=0, y'=0, y''=0, y'''=0, y''''=0 \dots (51)$$

式(50)、(51)を式(49)に代入すると、次の全微分方程式を得る。

$$(R_c - \varphi) d\varphi + \frac{S^* \tau_{cr}}{j E \theta_a} x dx = 0 \quad \dots \dots \dots (52)$$

この一般解は、

$$-(R_c - \varphi)^2 + \frac{S^* \tau_{cr}}{j E \theta_a} x^2 = C, \quad C \text{ は積分定数} \quad \dots \dots \dots (53)$$

ここで、式(47)より $\varphi(L_u) = R_c$ ので $C = \frac{S^* \tau_{cr}}{j E \theta_a} L_u^2$

となる。ゆえに、境界曲線 $\varphi(x)$ の解析解は次のように表わされる。

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(x) = R_c - K_1 (x^2 - L_u^2)^{1/2} \\ \text{ただし,} \\ K_1 = (S^* j E \theta_a)^{-1/2} \tau_{cr}^{1/2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (54)$$

いま、素線層厚を有限として d_w で表わすと、 $\varphi(x)$ には、
 $0 \leq \varphi(x) \leq R_c - d_w = \varphi_u$

なる制限が課せられる。すなわち、解析上得られた $\varphi(x)$ が φ_u を越えるところでは、素線層厚を考慮すると $\varphi(x) = \varphi_u$ となる。いま、 $\varphi(x) = \varphi_u$ となる一番右側の座標を x_1 、 $\varphi(x) = 0$ となる座標を L_e とすると、式(54)より、

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = (L_u^2 + K_1^{-2} d_w^2)^{1/2}, \\ L_e = (L_u^2 + K_1^{-2} R_c^2)^{1/2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (55)$$

と表わされる。さて、アンラップト区間における境界曲線は、最外縁素線層の厚さ d_w を考慮すると $\varphi(x) = \varphi_u$ だから、 $0 < x < x_1$ に対して $\varphi(x) = \varphi_u$ が成立する。したがって、二次応力 σ_c および σ_s は、式(18)～(21)に式(50), (51), (54), (55)を代入して整理すると次のように表わされる。

無すべり層応力

$$(\varphi(x) \leq \xi \leq R_c, \quad K_2 = j^{1/2} (S^* E \tau_{cr} \theta_a)^{1/2})$$

最大応力

$$\begin{aligned} \sigma_c(0, h_u) &= -S^* j^{-1} d_w^{-1} (x_1 - L_u) \tau_{cr} \\ &\quad - K_2 (\text{arc cosh } L_u^{-1} x_1 \\ &\quad - \text{arc cosh } L_u^{-1} L_e) \end{aligned}$$

$0 < x < L_u$ で

$$\sigma_c(x, \xi) = \sigma_c(0, h_u)$$

$L_u \leq x < x_1$ で

$$\begin{aligned} \sigma_c(x, \xi) &= -S^* j^{-1} d_w^{-1} (x_1 - x) \tau_{cr} \\ &\quad + K_2 (\text{arc cosh } L_u^{-1} x \\ &\quad - \text{arc cosh } L_u^{-1} L_e) \end{aligned}$$

$x_1 \leq x \leq L_e$ で

$$\begin{aligned} \sigma_c(x, \xi) &= K_2 (\text{arc cosh } L_u^{-1} x \\ &\quad - \text{arc cosh } L_u^{-1} L_e) \end{aligned}$$

すべり層応力

$$(0 \leq \xi < \varphi_u, \quad 0 \leq x < x_\xi = \varphi^{-1}(\xi))$$

$$\sigma_s(x, \xi) = \sigma_s(0, \xi) = \sigma_c(x_\xi, \xi)$$

..... (56)

さらに、式(54)と(56)を式(36)に代入すると、強制回転角 θ_a を与えることによって生じる $x=0$ の断面

の素線軸力による抵抗モーメント $\tilde{M}(0)$ が得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{M}(0) &= -K_1^2 K_2 R_c L_u^2 (\text{arc cosh } L_u^{-1} L_e \\ &\quad - \text{arc cosh } L_u^{-1} x_1) - K_1 K_2 R_c (d_w x_1 \\ &\quad - 3 R_c L_e - 2 d_w L_e + 4 R_c L_e) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (57)$$

以上で得られた解析解のうち式(51)と式(54)～(56)を本解析の第1近似解とする。

(1) $L_u = 0$ の場合

アンラップト区間がない場合、すなわち、 $L_u = 0$ の場合には式(56), (57)において $L_u \rightarrow 0$ なる極限を取ることにより、次の解析式が得られる。

境界曲線

$$\left. \begin{array}{l} 0 < x < x_1 \text{ で } \varphi(x) = \varphi_u, \\ x_1 \leq x \leq L_e \text{ で } \varphi(x) = R_c - K_1 x \end{array} \right\}$$

無すべり層応力 ($\varphi(x) \leq \xi \leq R_c$)

最大応力

$$\sigma_c(0, h_u) = -K_2 \left(1 + \log \frac{d_w}{R_c} \right)$$

$0 < x < x_1$ で

$$\begin{aligned} \sigma_c(x, \xi) &= -S^* j^{-1} d_w (x_1 - x) \\ &\quad + K_2 \log (1 - \varphi(x)/R_c) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (58)$$

$x_1 \leq x \leq L_e$ で

$$\sigma_c(x, \xi) = K_2 \log (1 - \varphi(x)/R_c)$$

すべり層応力 ($0 \leq \xi < \varphi_u$)

$0 < x < x_\xi = \varphi^{-1}(\xi)$ で

$$\sigma_s(x, \xi) = \sigma_s(0, \xi) = \sigma_c(x_\xi, \xi)$$

$x=0$ におけるモーメント $\tilde{M}(0)$

$$\tilde{M}(0) = 3 R_c^3 K_2 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{R_c}{d_w} \right)^2 \right\}$$

のように表わされる。ところで、式(58)の最大応力式で $\frac{2 R_c}{d_w}$ を素線層数 $2q$ におきかえると、これは Wyatt の誘導した式(文献2), 109頁, 式(19))と符号が異なるだけで完全に一致する。

したがって、素線層数を無限として境界曲線を求め、二次応力を求める段階で素線層厚を考慮する本法は、最初から素線層厚を考えながら線間すべりを決定し二次応力を求めていく方法と結果的に一致することがわかる。換言すれば、ケーブル張力が無限大の場合には、すなわち、たわみが無視できる場合には、境界曲線は素線層数あるいは素線層厚と無関係に決定されることがわかる。

4. 解析手順

解析上の厳密性を追求する場合には、たわみ解析の基礎式(46)とすべり解析の基礎式(47)との連立方程式を解かねばならない。しかしながら、これらの式にみるとたわみ y と境界曲線 $\varphi(x)$ が複雑に絡み合って

おり、 y と φ を同時に未知数とする連立方程式を一挙に解くのは非常に困難である。本解析では、たわみ解析においては境界曲線と内力が既知、すべり解析においてはたわみと内力が既知として、たわみ解析とすべり解析を交互に行う逐次近似法を用いた。もちろん、内力、すなわち二次応力の解析においては、たわみと境界曲線は既知である。以下、図-10 に示す流れに従い、円形断面のケーブルについて解析手順を説明する。

(i) 均質ばかりのたわみ解析

ワイヤラップト区間 ($L_u \leq x \leq L$) の部分をすべりの生じない均質なはり ($\tau_{cr} = \infty$) とみなし、式(46)に基づいてたわみの解析を行う。この結果より、 $x=L_u+0$ における断面の最大せん断応力 $\tau(L_u, 0)$ を求め、この値と限界せん断応力 $\tau_{cr}(0)$ との比較を行う。 $\tau(L_u, 0) \leq \tau_{cr}(0)$ であれば、すべりは発生せず解析終了。 $\tau(L_u, 0) > \tau_{cr}(0)$ の場合、部材内部にすべりを含む引張曲げ部材の解析へ進む。

(ii) 第1近似解

第1近似解として、正方形断面で $T=\infty$ の場合の解析解を用いる。式(51), (54)。

(iii) 円形断面で $T=\infty$ の解

正方形断面で $T=\infty$ の解、式(56)を第1近似解として、 $T=\infty$ 、すなわち $y=0$ for $0 < x \leq L$ の条件のもとにすべりの決定方程式(49)を解く。 $x=L_u+0$ における φ の値は、式(47)より無限層として、 $\varphi(L_u+0)$

$= R_c - 0$ であるから、式(49)より Newton-Raphson 法を用いて容易に $\varphi(x)$ が求まる。この解を φ_1 とし、 $y=0$ と φ_1 を式(18)～(21)に代入して二次応力を求める。これを σ_{c1}, σ_{s1} とする。

(iv) 円形断面で所定の張力 T^o の場合の解

(iii) の解に非常に近い解を有する十分大きなケーブル張力 T_1 を考え、 T_1 から次第に張力を減じて所定の張力 T^o に至るまでたわみとすべりの解析を交互に繰り返して解を求める。まず、ケーブル張力を T_1 として、(iii) の解 $(\varphi_1, \sigma_{c1}, \sigma_{s1})$ を式(45)に代入してたわみの解析を行う。この解を y_1 とし、 $(y_1, \sigma_{c1}, \sigma_{s1})$ を式(47)と(49)に代入してすべりの解析を行う。この解を φ_2 とする。さらに、 (y_1, φ_2) を式(18)～(21)に代入して二次応力 $(\sigma_{c2}, \sigma_{s2})$ を求める。以上、一連の解析操作を単位手続きとして、ケーブル張力を $T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots T_n = T^o$ と順次低下させつつ、それぞれの張力段階で単位手続きを実行する。第 n 回目以後の単位手続きでは張力 $T=T^o$ を固定し、連続した単位手続き間の境界曲線の差が許容値以内に納まるまで繰り返す。このとき得られる収束解は、式(46)と式(47)の連立方程式の逐次近似法による解と考えられる。

5. 理論の検証

本解析理論の妥当性を模型実験により検証し、あわせ

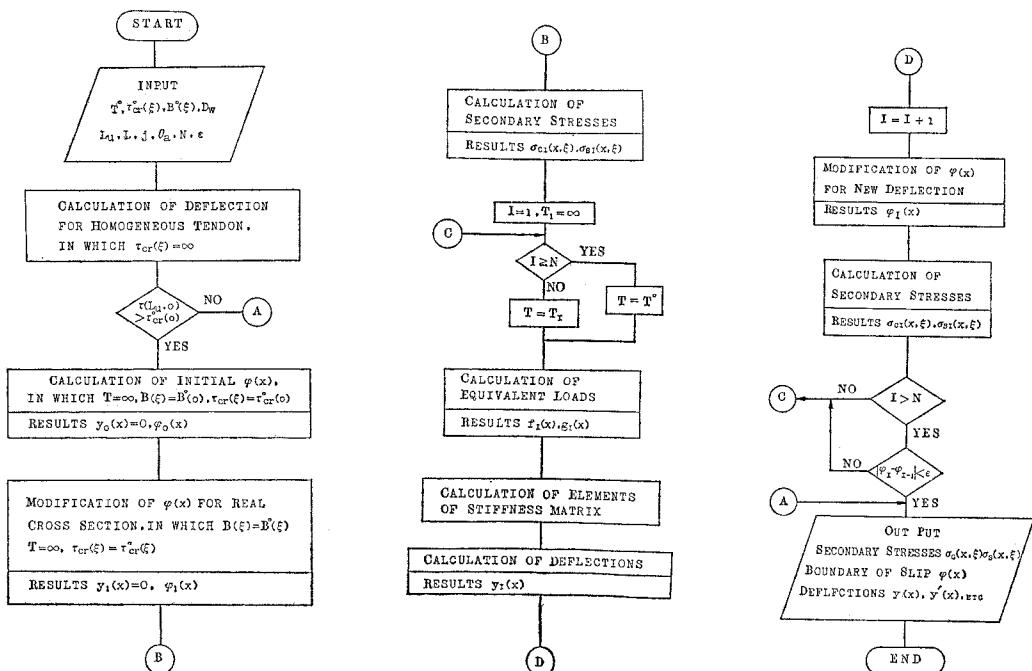


図-10 解析手順

て実橋での測定結果の理論的追跡を行った。

(1) 室内実験

吊橋主ケーブルを模して、ワイヤラッピングを施した平行線ストランドに引張力を掛けた状態で曲げ実験を行った。

(i) 実験装置および供試体

実験装置は文献 1) に報告したものと同一の装置を使用した。供試体は、直径 5 mm の亜鉛メッキピアノ線 217 本で構成される平行線ケーブル (PWS 217) にワイヤラッピングを施したものである。ケーブルのラッピングには、ケーブルを自転させ直径 1.9 mm のラッピング

ワイヤを一定の張力 (26 kg) をかけながら巻付ける方法をとった。

(ii) 実験方法

実験の手順は、まず油圧ジャッキ (容量 100 t) 2 台を用いてケーブルに張力 $T_c = 85.3 \text{ t}$ ($\sigma_T = 20 \text{ kg/mm}^2$) を導入する。その後、3 つの支点と各パネル中央にバンドを取り付け、十分締付けてこの部分では素線間および素線とバンド間にすべりが生じないようにした。各支点におけるバンドの拘束状態は回転のみ自由である。このケーブル模型の中央バンドに外力モーメントを加え、ケーブルの変形と A, B 両断面の二次応力を測定した。ここで、外力のモーメントは、中央バンドに固定された 32 cm のアームを介して油圧ジャッキ (容量 20 t) により与えた。ケーブルの鉛直変位ならびに各ケーブルバンドの回転角の測定には、摺動型トランス変位計を使用し、ケーブル応力の測定にはひずみゲージを用いた。

なお、ケーブル軸力 T_c の導入に伴うラッピング張力 T_w の減少量を知るために、同一のモデルについて別途実験を行い、 $T_c = 85.3 \text{ t}$ 導入時には、ラッピングワイヤの張力は、 $T_w = 20.9 \text{ kg}$ になることを把握した。

(iii) 計算モデル

計算モデルの諸元を図-11 の上部に示す。バンドの締付効果を考慮するため、素線間すべりはバンド B-2 およびバンド B-4 の断面で完全に阻止されるものとした。また、B-1 と B-2 間および B-4 と B-5 間のケーブル

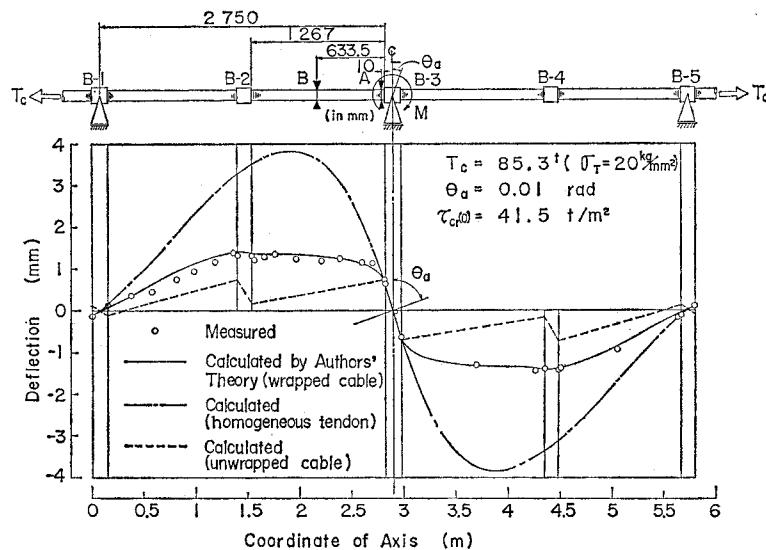


図-11 たわみ曲線（室内実験）

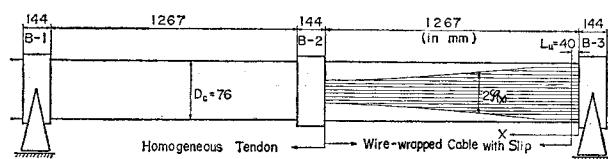


図-12 理論上の素線間すべりの状態

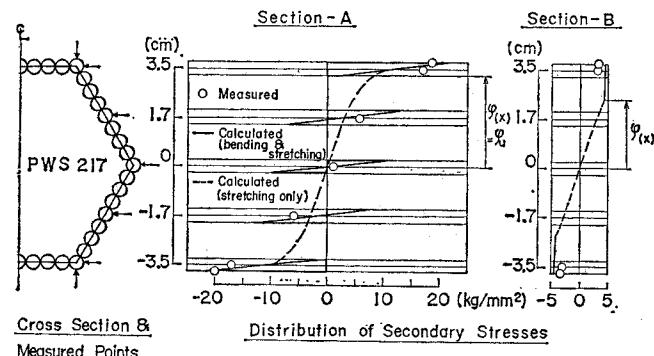


図-13 断面方向の二次応力分布（室内実験）

はバンド B-2 あるいはバンド B-4 となす角が約 $1/1000$ rad (実験値) と非常に小さく、はりと同一の挙動をするものと考えられるので、この間の部材はバンドを含めてはりと仮定した。なお、素線間限界せん断応力 $\tau_{cr}(\xi)$ の計算に用いた素線間摩擦係数の値は、 $\mu = 0.18$ である。

(iv) 結果と考察

図-11 は、中央バンドの回転角 θ_a が 0.01 rad のときのケーブルのたわみ図である。図中、○印は測定値、実線は本理論による計算値、そして一点鎖線はラッピング

グ部分を均質なはりと仮定した場合の計算値を参考のために示したものである。測定値ははり理論による計算値と大きく異なっており、ラッピングされたケーブルは、素線間すべりを生じるため、はりはまったく異なる挙動を示すことが明らかである。一方、素線間すべりを考慮した本理論による計算値は測定値とよく一致しており、本理論は素線間すべりを含むラッピングされたケーブルのたわみ挙動をよく説明できることを示している。

なお、破線は、バンドだけで締付けられたケーブルの計算値である（文献 1）参照）。図にみるように、実線と破線で示される変形特性の差異は明瞭であり、ラッピングワイヤの締付効果の大きなことがわかる。

図-12 は、図-11 に示した変形状態における素線間すべりの解析結果を示したものである。すべり境界線 $\varphi(x)$ で囲まれたすべり領域内の細い実線は、素線間すべりの状態を模式的に描いたものである。このように、本理論解においては、素線間すべりをバンド位置で完全に拘束し、バンドの締付効果を考慮した。

図-13 は、左から順に、測定断面におけるひずみゲージの貼付位置、断面 A および断面 B の二次応力を示したものである。図中、○印は実測値、実線は本理論による計算値である。ここで、点線は素線団心における二次応力の値を結んだものであり、これにケーブル軸線の曲率変化によって生じる曲げ応力を加えると図中の実線で示した二次応力の分布曲線が得られる。断面 A はアンラップト区間に存在するので、当然素線間にすべりが生じているが、実測値と計算値はよい一致を示している。断面 B では、計算値が実測値より 30% ほど大きな

値となっている。B 断面近傍では、ケーブルのひずみを測定するために 2 cm ほどラッピングワイヤが取り除かれた状態になっており、そのためにこの部分で下に凸な局部的変形が生じ B 断面の応力の測定値を減じたものと思われる。したがって、B 断面の応力は検証用としては不適当であるが、A 断面における実測値と計算値はよい一致を示し、応力の面でも本理論の妥当性が立証されたといえよう。

図-14 は、中央バンド B-3 に加える外力モーメントと中央バンド B-3 の回転角の関係を示したものである。実験では既知の外力モーメントを加えて中央バンドの回転角を測定し、計算では中央バンドに既知の回転角を与えて内力から反力モーメントを求めた。中央バンドは回転自由であるから、この外力モーメントと反力モーメントは一致しなければならない。図中、○印は測定値、実線は本理論による計算値、一点鎖線はラッピング部分を均質なはりとした計算値である。図より明らかに、ワイヤラップトケーブルは、変形の小さな間は均質なはりと同一の挙動を示しているが、変形が大きくなると測定値は一点鎖線から離れ剛性が低下している。この場合にも測定値と理論値は非常によく一致しており、この剛性の低下はラッピング部分に生じた素線間すべりによるものであることがわかる。なお、図中の点線はバンドだけで締付けられたケーブルの計算値である。実線で示されるケーブル剛性は点線で示されるケーブル剛性に比べて倍以上高く、ここでもラッピングワイヤの締付効果が明瞭に現われている。

以上、たわみと応力およびモーメントについて測定値と理論値との比較を行ったが、いずれの場合にも両者は非常によい一致を示し、本理論の妥当性が確認された。

(2) 実橋での計算値と測定値の比較

本州四国連絡橋公団により実施されたワイヤラッピング施工後のケーブルの活荷重による二次応力測定調査^{8), 9)}の結果の一部について本理論による追跡を試みた。実験の詳細は文献 8), 9) を参照されたい。ここでは、塔頂近傍の部分系に加えられる変形と二次応力応答という形で述べる。

(i) 部分系諸元

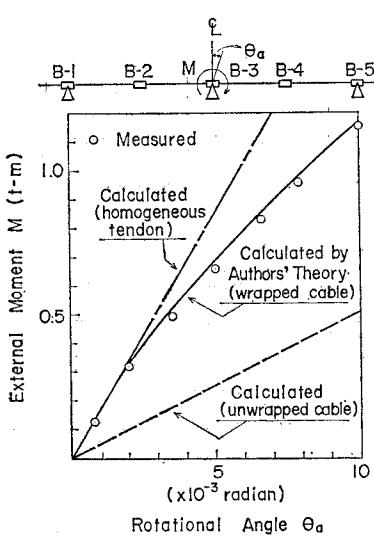


図-14 中央バンド B-3 に作用する外力モーメント M とバンド回転角 θ_a の関係（室内実験）

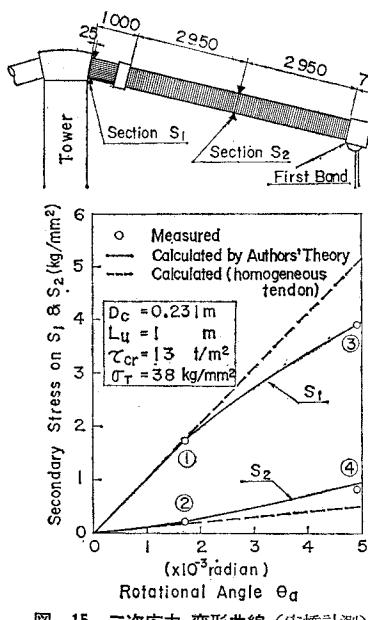


図-15 二次応力-変形曲線（実橋計測）

部分系の諸元は 図-15 に示すとおりである。

(ii) 計算モデル

図-15において塔頂から 70 cm 離れた位置にある断面整形用端バンドの締付け力は通常非常に小さいので、本計算ではこれを無視した。また、第1バンド以後のケーブルですべりは生じないものとして、その剛性を考慮した。図-15 中の τ_{cr} の値は、実測不可能なので τ_{cr} を種々変動させて本理論による計算を行い、二次応力の理論値が測定番号 ③ の測定値と一致するときの値である。

(iii) 結果と考察

図-15において二次応力とは、断面 S_1 および断面 S_2 における最外縁の二次応力である。図中 ○印は測定値、実線は理論値である。なお比較のため、アンラップト区間を除いて素線間すべりは生じないと仮定した場合の計算結果を点線で図示した。変形の小さな間は3者とも非常によく一致しているが、変形が大きくなるにつれて素線間すべりの影響が大きくなり、測定値ははりの計算値と大きく相違してくる。この場合にも理論値と測定値(測定番号 ①, ②, ④)はよい一致を示している。

このように実橋での測定データに対しても本理論を適用できることができることが明らかとなった。

6. 結 言

吊橋供用時における主ケーブルを対象として、ラッピングワイヤのみで締付けられた平行線ケーブルの二次応力発生機構を明らかにし、その変形と応力および素線間すべりの解析手法について述べた。また、実験により本理論の妥当性を検証した。たわみを無視した Wyatt の理論は本理論の特別な場合と考えることができる。本解析手法を用いることにより、従来ほとんど不明のまま残されていた吊橋供用時におけるラッピング施工後のケーブルの挙動を精度よく推定することができる。ただし、長大橋においては素線間すべりの領域が長く、すべり領域内にバンドが存在する場合がある。このような場合には、本文で誘導した基礎式に加え、バンドの影響を考慮

した解析を行う必要がある。これについては機会を改めて報告したい。

本研究を進めるにあたり、終始暖かい激励をいただいた本州四国連絡橋公団設計第一部長の田島二郎博士ならびに関係各位に深甚の謝意を表します。また、共同研究者として実験を担当していただいた神戸製鋼所土居憲司氏に深謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 西村 昭・新家 徹・中村憲市・土居憲司：吊橋架設途中における平行線ケーブルの変形と二次応力解析、土木学会論文報告集、第 260 号、pp. 1~15、1977 年、4 月。
- 2) Wyatt, T.A. : Secondary Stresses in Parallel Wire Suspension Cables, Trans. A.S.C.E., Vol. 128, Paper No. 3402, 1963.
- 3) 西村 昭・飛岡博明・山本俊二：ラッピング集成材の曲げについて、土木学会関西支部年次学術講演会概要集、pp. 351~353、1968 年、5 月。
- 4) Final Report of the Board of Engineers to the Delaware River Bridge, Joint Commission of the States of Pennsylvania and New Jersey, 1927.
- 5) John A. Roebling and Sons Company : Construction of Parallel Wire Cables for Suspension Bridges, Trenton, New Jersey, Nov. 21, 1963.
- 6) 西村 昭・飛岡博明・島田巖乃：吊橋用平行線ケーブルに関する基礎実験、(財)建設工学研究所報告、No. 11, pp. 43~52, 1968.
- 7) 渋 理宙：吊橋用平行線ケーブルに関する実物大実験、神戸製鋼所技報 R & D, No. 2, pp. 29~36, 1968.
- 8) 北川 信・田島二郎・沢井広之：ケーブル 2 次応力に関する実橋実験について、第 31 回土木学会年次学術講演会概要集、pp. 389~390, 1974.
- 9) 北川 信：東大維橋におけるケーブル応力の測定調査、本四技報、Vol. 1, No. 1, pp. 10~18, 1977 年、7 月。
- 10) 北川 信：吊橋 ケーブルの二次応力測定(平戸大橋)、本四技報、Vol. 2, No. 3, pp. 8~13, 1978 年、1 月。
- 11) 新家 徹・広中邦汎・土居憲司：吊橋平行線ケーブルの二次応力実験(その 2)、第 30 回土木学会年次学術講演会概要集、pp. 427~428, 1975 年。
- 12) 中村憲市・広中邦汎・新家 徹：吊橋平行線ケーブルの 2 次応力解析(その 3)、第 31 回土木学会年次学術講演会概要集、pp. 131~132, 1976 年。
- 13) 中村憲市・広中邦汎・新家 徹：吊橋平行線ケーブルの 2 次応力解析(その 4)、第 32 回土木学会年次学術講演会概要集、pp. 253~254, 1977 年。

(1978.7.21・受付)