

薄板で構成される立体構造の弾塑性・ 大変位離散化要素解析法

A DISCRETE ELEMENT APPROACH TO ELASTIC-PLASTIC LARGE
DISPLACEMENT ANALYSIS OF THIN SHELL STRUCTURES

吉 田 裕*・増 田 陳 紀**・松 田 隆***

By Yutaka YOSHIDA, Nobutoshi MASUDA and Takashi MATSUDA

1. はじめに

有限要素法による構造解析法の発展過程において、材料および幾何的非線形性を考慮した解析は、最重要課題の1つとして認識され、数多くの研究がなされてきた^{1)~29)}。しかし、薄肉殻構造を対象とする幾何的非線形解析の場合には、対象構造の曲面を妥当に評価する線形解析のための要素でさえいまだ模索段階にある現状において、曲面の面外変位を的確に表現し、さらにひずみ・変位関係の高次項との対応で幾何剛性マトリックスを評価し、解を求めていこうとするのであるから、信頼できる解を得るためには非常に多くの自由度を設定した要素を採用しなければならない。また、現在の一般的に行われている有限変位理論に基づく増分法による解析の場合には、その基礎式は増分前の状態から増分後の状態を評価するものであり、計算過程ではなんらかの形で線形化が必要となり、ひずみ・変位関係の相当高次の項まで考慮するとともにひずみの積分値の相対差である要素の剛体回転変位の評価能力が落ちるから、座屈点近傍や座屈後のように要素の剛体回転変位が相対的に大きくなる部分の解析過程においては、安定な収束解が得られる増分量はきわめて小さい範囲におさえられ、その結果膨大な計算時間を必要とすることになる。薄肉立体構造を対象とした非線形解析の現実の一般的な問題への適用には上述したような本質的な困難が存在し、座屈後の崩壊過程の追跡などはごく限られた対象を除いて事実上不可能なのが実状である。

著者らも、有限要素法の汎用性（対象構造の幾何的形

* 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 武蔵工業大学講師 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 (株)大林組 (研究当時 東京工業大学大学院修士課程学生)

介することなく現実の挙動を追跡することが可能で、しかも増分量のとり方に対して安定な薄肉立体構造の弾塑性・大変位解析システムを開発することを目的として、個々の問題点の解決策を模索しながら研究を積み重ねてきた^{41)~43)}。その間の具体的な解析の体験を通して得た著者らなりの帰結は、通常の正統的解析過程に基づいての抜本的改善はさしあたって考えられないこと、したがって、工学的に許容し得る範囲の信頼度の解が得られるならば、ある程度解の精度を犠牲にしても相当な増分量に対して数値的に安定な解析過程を新たな立場から構築することが必要であること、であった。上記の帰結に基づいて新たな解析過程を構成するにあたってもっとも注意しなければならないことは、解の精度をある程度犠牲にするといっても、対象構造の数式表現過程や基礎式を解く過程にあいまいさの残る簡略化が導入されると増分法による幾何的非線形解析過程の特殊性から、必ず解析を進めるにしたがって誤差が拡大し、結果として解の信頼性が完全に失われることになってしまうということである。したがって、意義のある解析過程の具体化が可能な1つの方向は、真の対象構造を理想化して実際に解析の対象とする系を設定する過程にはかなり大胆な仮定または前提を導入し、その後の設定された解析対象を数式表現する過程は微小項を含めて完全なものとする、また得られた数値式はできる限り正確に解き進むこと、である。

本論文は上述の思考経過に基づいて、以下に具体的に記述するような仮定を導入して解析対象を理想化し、特にその理想化された系を対象とした増分法による大変位場解析の数値式表現および得られた系の数値解析過程に著者ら独自の工夫を凝らした新たな過程を構成し、数多くの具体的な数値解析例を通してその実用性を実証し得た、薄肉立体構造を対象とした弾塑性・大変位解析システムについて報告するものである。解析対象を理想化するにあたって導入した基本的な仮定は、著者らの板曲げ

解析の経験^{(46),(47)}に基づく発想であるが、変位の進行に伴って変形する薄板が構成する任意の曲面を、着目する時点において常に平らな三角形の部分領域(要素に対応する)の集合として描きうると考えることである。部分(要素)領域は微小変位を前提とした線形関係が適用できる程度に平坦であると考えることによって個々の要素内においては面内応力の面外変位との連成項を無視し(複数の要素で表現される全体系では当然連成項は評価される)、またひずみは小さい範囲を対象とするものとして、三角形要素の3頂点を含む平面内に x, y 軸を設定した要素座標系に関する、要素節点力増分と要素節点変位増分とを関係づける基本的な要素剛性マトリックスは、線形解析のもの(材料非線形の場合はそれを考慮することは当然のこととして)とまったく同一のものをを用いる。したがって、大変位場の数値式表現過程はすべて要素の3頂点に設定される節点に導入される変数の要素座標系と全体座標系との間の交換過程によって処理されることになる。上述の立場に基づく定式化においては座標変換過程が重要な役割を担うことになり、基本となる要素として、先に著者らが応力仮定のハイブリッド法に基づいて誘導した、三角形要素の3つの頂点のそれぞれに節点を設け、各節点の節点変位として並進変位3成分(u, v, w)および面内回転変位成分を含む回転変位3成分($\theta_x, \theta_y, \theta_z$)の6自由度を導入した計18自由度の三角形薄板要素^{(48),(49)}が、節点変位を6成分完備している特性を最大限に発揮することになる。

相当な試行と修正を重ねてシステムを完成し、広範囲の、数多くの対象系に対して種々の角度から数値実験を行ったところ、これまでの一般的な増分の概念に比べて桁が異なるほどの超大増分量に対しても収束解が得られるという意味での数値的安定性および対象構造の理想化にあたって思いきった仮定を導入しているにもかかわらず、理想化の前の真の対象構造の解として、きわめてよい精度の解が得られるという意味での精度のよさ、の点で非常に効果的な解析過程を構成していることがわかった。

上記の特性を実証するための具体的な解析例については紙数の許す範囲でできる限り詳細に本文中に示すが、なぜこれだけ数値的に安定で、しかも精度のよい解が得られるのかという理由については、著者ら自身いまだその全体を論理的に説明するには至っていないところである。数値的に安定な過程が得られた基本的な理由として明言し得る点は、本論文で提示する過程においては、変位の進行に伴う節点の動きを、おのおのの節点で異なった原点を基準とする変位によってではなく、共通の原点に基づく座標系をのものを対象として描いており、1増分間においても、各要素の剛体変位増分と、変形に直接関

与する変位増分とを明確に分離して、微小項を含めて正確に定式化した点および計算過程における座標変換行列の増分間の変化量の独特な評価法にある、ということである。

なお、材料の非線形性の評価に際しても、計算過程が必要以上に複雑化しその結果解析に要する時間が増大することを避けるために、著者らなりに設定している目的を満たす範囲での理想化を行い、以下に具体的に記すような評価法をとっている。すなわち、2次元応力場においてパウシンガー効果を評価するために、1次元応力場におけるバイリニアモデルを2次元応力場に拡張し、初期降伏条件として von Mises の降伏条件、ひずみ硬化則として移動硬化則⁽⁵⁰⁾を採用し、降伏進展時における応力・ひずみ関係は、弾性時における関係式中の縦弾性係数を接線係数に置き換えたものによって評価している。また、要素内板厚方向の塑性域の進展を評価するために、板厚を層状に分割し各層ごとに弾塑性の判定を行い、層方向の積分の意味での総和効果として要素弾塑性剛性マトリックスを作成している。各層の面内ひずみと曲げひずみとの連成項を考慮する際には層内のひずみ分布を評価する必要が生ずるが、応力仮定のハイブリッド法においては層内のひずみ分布を直接的には評価していないために、本研究においては改めて面内ひずみについては通常のひずみ一定の要素における変位関数を、曲げひずみについては面積座標を用いた不完全3次式で表わされる変位関数を導入してひずみ分布を再現し、連成項を評価している。

2. 面内回転変位を節点変位成分として有する解析の基本となる三角形薄板要素

従来しばしば用いられている面内ひずみ一定の三角形要素に基づいて薄肉立体構造の解析を行う場合には、面内のねじり剛性に特異性が生じたり、板と板とが角度をもって交わる際の接合線上における適合条件を満足することができないといった問題が存在し、また、応力評価の精度にも問題が残る。一方、非線形解析は非常に多くの計算時間を要するものであるから、これらの問題点を解決するために徒らに要素の自由度を増すことには、付加される自由度の物理的意味が一般に不明確であるということを示し引いても限界が存在する。

このような観点から、できるだけ少ない自由度でより高い精度が得られ、かつ要素間の合理的な立体的接合が可能で、特異性を生じない要素として、本研究では、はじめにも述べたように、応力仮定のハイブリッド法に基づいて誘導された1節点6自由度計18自由度の三角形薄板要素^{(48),(49)}を解析の基本要素として採用する。なお、

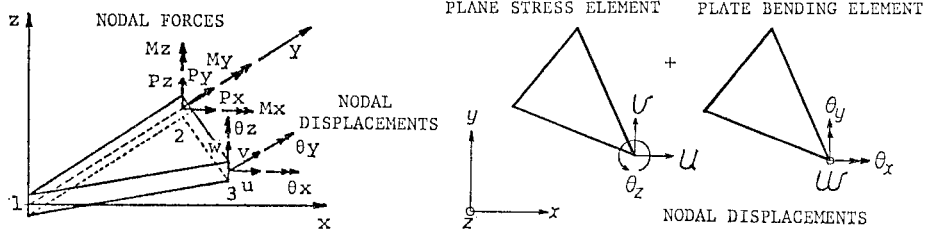


Fig. 1 Triangular Plate Element

本要素は、要素内面内応力線形分布の仮定に基づく三角形面内応力要素と要素内曲げモーメントおよびねじりモーメント線形分布の仮定に基づく三角形板曲げ要素とによって構成される要素 (Fig. 1 参照) である。

3. 全体座標系での節点変位と要素座標系での節点変位

(1) 全体座標系で表される節点の座標、節点変位および要素の剛体回転

第 n つり合い段階における全体座標系 (x, y, z -系) での要素節点座標ベクトル $\mathbf{x}_{(n)}$ を次のように定義する。

$$\mathbf{x}_{(n)}^T = \langle \mathbf{x}_1^T \ \mathbf{x}_2^T \ \mathbf{x}_3^T \rangle_{(n)} \quad (1)$$

ここに、

$$\mathbf{x}_i^T = \langle x_i \ y_i \ z_i \rangle_{(n)} \quad (2)$$

は第 n 段階における節点 $i (i=1, 2, 3)$ の全体座標系での座標ベクトルであり、 T は転置を、 $\langle \rangle$ は行ベクトルを表すものとする。なお、以下の記述においてゴチック体はベクトルまたはマトリックスを表わし、添字 (n) および i などはそれぞれ第 (n) つり合い段階および節点 i などを表わしている。

次に、第 n つり合い段階における要素の全体座標系での節点変位ベクトル $\mathbf{u}_{(n)}$ を、並進変位成分からなるベクトル $\mathbf{u}_u(n)$ と回転変位成分からなるベクトル $\mathbf{u}_\theta(n)$ とにより次式のように定義する。すなわち、

$$\mathbf{u}_{(n)}^T = \langle \mathbf{u}_u^T \ \mathbf{u}_\theta^T \rangle_{(n)} \quad (3 \cdot a)$$

$$\mathbf{u}_u(n)^T = \langle u_{u1}^T \ u_{u2}^T \ u_{u3}^T \rangle_{(n)} \quad (3 \cdot b)$$

$$\mathbf{u}_\theta(n)^T = \langle u_{\theta1}^T \ u_{\theta2}^T \ u_{\theta3}^T \rangle_{(n)} \quad (3 \cdot c)$$

ここに、

$$u_{ui}^T = \langle u_i \ v_i \ w_i \rangle_{(n)} \quad (4 \cdot a)$$

$$u_{\theta i}^T = \langle \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} \rangle_{(n)} \quad (4 \cdot b)$$

はそれぞれ、節点 i の x, y, z 方向の変位 u, v, w および x, y, z 軸回りの回転 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ からなるベクトルである。このとき、 $\mathbf{x}_{(n)}$ は初期状態における全体座標系での要素節点座標ベクトル $\mathbf{x}_{(0)}$ 、および第 n つり合い段階の要素節点並進変位ベクトル $\mathbf{u}_u(n)$ とにより次式で与えられる。

$$\mathbf{x}_{(n)} = \mathbf{x}_{(0)} + \mathbf{u}_u(n) \quad (5)$$

また、第 n つり合い段階における要素の剛体回転の x, y, z 軸回りの 3 成分をそれぞれ $r_x(n), r_y(n), r_z(n)$ とするとき、全体座標系での要素の剛体回転ベクトル $\boldsymbol{\rho}(n)$ を次式で定義する。

$$\boldsymbol{\rho}(n)^T = \langle r_x \ r_y \ r_z \rangle_{(n)} \quad (6)$$

次に、個々の要素に対して定まる 1 組の剛体回転ベクトル $\boldsymbol{\rho}(n)$ を、3 頂点に設定した節点における節点回転変位ベクトル $\mathbf{u}_{\theta i(n)}$ ($i=1, 2, 3$) を並べた 9 成分からなる要素節点回転変位ベクトル $\mathbf{u}_\theta(n)$ (式 (3・c) 参照) と対応するように並べた 9 成分からなるベクトルを要素剛体回転ベクトルと名づけ、これを $\mathbf{R}(n)$ とかくことにすれば $\mathbf{R}(n)$ は次式のように表わされる (式 (9・b) および式 (13・b) 参照)。

$$\mathbf{R}(n)^T = \langle \boldsymbol{\rho}^T \ \boldsymbol{\rho}^T \ \boldsymbol{\rho}^T \rangle_{(n)} \quad (7)$$

(2) 要素座標系の定義と要素座標系での節点変位

いま、Fig. 2(a) に示すように要素座標系を定めるものとする。すなわち、節点 1 を原点とし、節点 1 より節点 2 の方向に y^* 軸を定め、節点 1, 2, 3 を含む面内において y^* 軸と直角に節点 3 を望む方向に x^* 軸をとり、 z^* 軸を右手系で x^*, y^* 軸と直交するように定める。

次に、要素座標系での要素節点変位ベクトル $\mathbf{u}_{(n)}^*$ を式 (3・a)~(3・c) との対応で次のように定義する (Fig. 2(b) 参照、本図は説明を明確にするためにはり要素を

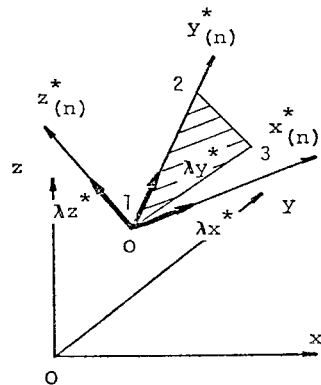


Fig. 2(a) Element Coordinates

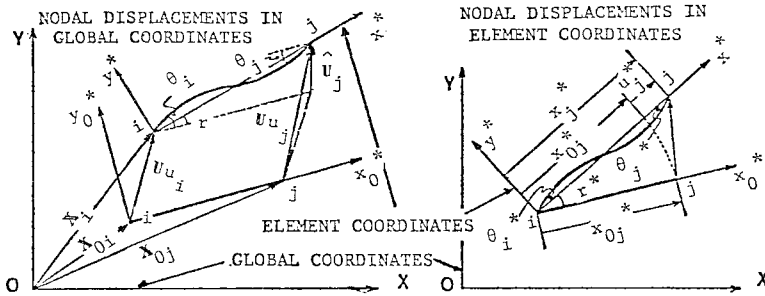


Fig. 2(b) Relation between Global Coordinates and Element Coordinates

要素節点並進変位成分ベクトル $u_{u(n)}^*$ および要素節点回転成分ベクトル $u_{\theta(n)}^*$ は、全体座標系での対応するベクトル $u_{u(n)}$, $u_{\theta(n)}$ および初期座標ベクトル $x_{(0)}$, 要素剛体回転ベクトル $R_{(n)}$ とから次式のように表わされる。

$$u_{u(n)}^* = A_{(n)} \hat{G} (u_{u(n)} + x_{(0)}) - A_{(0)} \hat{G} x_{(0)} \dots (13.a)$$

$$u_{\theta(n)}^* = A_{(n)} (u_{\theta(n)} - R_{(n)}) \dots (13.b)$$

対象としている。

$$u_{(n)}^{*T} = \langle u_{u(n)}^{*T} \ u_{\theta(n)}^{*T} \rangle_{(n)} \dots (8.a)$$

$$u_{u(n)}^{*T} = \langle u_{u1}^{*T} \ u_{u2}^{*T} \ u_{u3}^{*T} \rangle_{(n)} \dots (8.b)$$

$$u_{\theta(n)}^{*T} = \langle \theta_{\theta 1}^{*T} \ \theta_{\theta 2}^{*T} \ \theta_{\theta 3}^{*T} \rangle_{(n)} \dots (8.c)$$

ここで、節点 i の並進変位成分ベクトル $u_{ui(n)}^*$ および回転成分ベクトル $u_{\theta i(n)}^*$ はそれぞれ、第 n 通り合い状態と初期状態との要素座標系での座標の差、および第 n 通り合い状態までの節点の全回転と要素の剛体回転との要素座標系での差、である。すなわち、

$$u_{ui(n)}^{*T} = \langle u_i^* \ v_i^* \ w_i^* \rangle_{(n)} \\ = \langle \lambda \cdot \hat{x}_i \rangle_{(n)}^T - \langle \lambda \cdot \hat{x}_i \rangle_{(0)}^T \dots (9.a)$$

$$u_{\theta i(n)}^{*T} = \langle \theta_{\theta i}^* \ \theta_{y i}^* \ \theta_{z i}^* \rangle_{(n)} \\ = \langle \lambda \cdot (u_{\theta i} - \rho) \rangle_{(n)}^T \dots (9.b)$$

ただし、

$$\hat{x}_i(n) = x_{i(n)} - x_{1(n)} \dots (10)$$

は要素座標系の原点としての節点 1 を基準とした節点 i の全体座標系での座標ベクトルである。また、

$$\lambda_{(n)} = \begin{bmatrix} \cos(x^*, x) & \cos(x^*, y) & \cos(x^*, z) \\ \cos(y^*, x) & \cos(y^*, y) & \cos(y^*, z) \\ \cos(z^*, x) & \cos(z^*, y) & \cos(z^*, z) \end{bmatrix}_{(n)} \\ = \begin{bmatrix} \lambda_{x^*}^{*T} \\ \lambda_{y^*}^{*T} \\ \lambda_{z^*}^{*T} \end{bmatrix}_{(n)} \dots (11)$$

は全体座標系から第 n 通り合い段階の要素座標系への回転に関する座標変換行列であり、 λ_{x^*} は x^* 軸と x , y , z 軸とのなす角の方向余弦を成分にもつベクトルである (Fig. 2(a) 参照)。 $\lambda_{(0)}$ は同様に初期状態の要素座標系への座標変換行列である。なお、ここで定義した要素座標系に対しては常に次式が成り立つ。

$$u_{u1(n)}^{*T} = \langle 0 \ 0 \ 0 \rangle \dots (12.a)$$

$$u_{u2(n)}^{*T} = \langle 0 \ y_{2(n)}^* - y_{2(0)}^* \ 0 \rangle \dots (12.b)$$

$$u_{u3(n)}^{*T} = \langle x_{3(n)}^* - x_{3(0)}^* \ y_{3(n)}^* - y_{3(0)}^* \ 0 \rangle \dots (12.c)$$

(3) 全体座標系での節点変位、節点座標と要素座標系での節点変位

以上より、第 n 通り合い段階における要素座標系での

ここに、

$$A_{(n)} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{(n)} \dots (14.a)$$

であり、 \hat{G} は次の変換を与えるマトリックスである (式 (10) 参照)。

$$\hat{x} = \hat{G} \cdot x_{(n)} \dots (14.b)$$

式 (13.a) および (13.b) をまとめて次のように表示する。

$$u_{(n)}^* = \{T \cdot G \cdot (u + c)\}_{(n)} - \{T \cdot G \cdot d\}_{(0)} \dots (15)$$

ここに、

$$T_{(n)} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}_{(n)} \dots (16.a)$$

$$G = \begin{bmatrix} \hat{G} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dots (16.b)$$

$$c_{(n)}^T = \langle x_{(0)}^T \ -R_{(n)}^T \rangle \dots (16.c)$$

$$d_{(0)}^T = \langle x_{(0)}^T \ 0^T \rangle \dots (16.d)$$

である。ただし、 0 および I はそれぞれ適切な大きさをもつ零ベクトルまたは零マトリックスおよび単位マトリックスである。式 (15) が全体座標系での要素節点変位ベクトルから要素座標系での要素節点変位ベクトルへの変換関係を表わす式である。

(4) 要素節点変位増分

結局、第 n 通り合い段階から第 $n+1$ 通り合い段階までの要素座標系での要素節点変位増分ベクトル Δu^* は、式 (15) に基づき、次式によって与えられる。ただし、以下の記述において記号 Δ は第 n 通り合い段階から第 $n+1$ 通り合い段階までの増分を表わすものとす。

$$\Delta u^* = u_{(n+1)}^* - u_{(n)}^* \\ = \{ \{T \cdot G \cdot (u + c)\}_{(n+1)} - \{T \cdot G \cdot d\}_{(0)} \} \\ - \{ \{T \cdot G \cdot (u + c)\}_{(n)} - \{T \cdot G \cdot d\}_{(0)} \} \\ = T_{(n+1)} \cdot G \cdot (\Delta u + \Delta c) + \Delta T \cdot G \cdot (u_{(n)} + c_{(n)}) \dots (17)$$

ここに、

$$\Delta u = u_{(n+1)} - u_{(n)} \dots\dots\dots (18. a)$$

$$\Delta c^T = c_{(n+1)}^T - c_{(n)}^T = \langle 0^T \quad -\Delta R^T \rangle \dots\dots\dots (18. b)$$

$$\Delta R = R_{(n+1)} - R_{(n)} \dots\dots\dots (18. c)$$

$$\Delta T = T_{(n+1)} - T_{(n)} \dots\dots\dots (18. d)$$

である。

4. 要素座標系での節点力増分の全体座標系への変換

要素座標系での要素節点力ベクトル f^* を、 u_u^* に対応する x^* , y^* , z^* 軸方向力成分からなるベクトル f_u^* と、 u_θ^* に対応するモーメント成分からなるベクトル f_θ^* とにより次のように定義する。

$$f^{*T} = \langle f_u^{*T} \quad f_\theta^{*T} \rangle \dots\dots\dots (19. a)$$

$$f_u^{*T} = \langle f_{u1}^{*T} \quad f_{u2}^{*T} \quad f_{u3}^{*T} \rangle \dots\dots\dots (19. b)$$

$$f_\theta^{*T} = \langle f_{\theta1}^{*T} \quad f_{\theta2}^{*T} \quad f_{\theta3}^{*T} \rangle \dots\dots\dots (19. c)$$

ここに、

$$f_{ui}^{*T} = \langle P_x^* \quad P_y^* \quad P_z^* \rangle_{node\ i} \dots\dots\dots (20. a)$$

$$f_{\theta i}^{*T} = \langle M_x^* \quad M_y^* \quad M_z^* \rangle_{node\ i} \dots\dots\dots (20. b)$$

である。また、全体座標系での要素節点力ベクトル f についても同様に考えるものとする。

いま、第 n つり合い段階および第 $n+1$ つり合い段階における要素座標系での内力としての要素節点力ベクトルをそれぞれ $f_{(n)}^*$, $f_{(n+1)}^*$ とおき、対応する全体座標系での要素節点力ベクトルを $f_{(n)}$ および $f_{(n+1)}$ とする。このとき、第 n つり合い段階から第 $n+1$ つり合い段階までの増分間における全体座標系での要素節点力増分ベクトル Δf は次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_{(n+1)} - f_{(n)} \\ &= \langle \Delta f_u^T \quad \Delta f_\theta^T \rangle^T \\ &= T_{(n+1)}^T \Delta f^* + \Delta T^T \cdot f_{(n)}^* \dots\dots\dots (21. a) \end{aligned}$$

ここに、

$$\Delta f^* = f_{(n+1)}^* - f_{(n)}^* = \langle \Delta f_u^{*T} \quad \Delta f_\theta^{*T} \rangle^T \dots\dots\dots (21. b)$$

である。

5. 解析の基礎となる要素増分つり合い式

はじめにも述べたように個々の要素に関しては変形が微小であるものとするれば、内力としての要素節点力増分 Δf^* と要素座標系での要素節点変位増分 Δu^* とは、材料の非線形性を別問題とすると、要素固有の線形の剛性マトリックス k^* により、次式によって関係づけることができる。

$$\Delta f^* = k^* \cdot \Delta u^* \dots\dots\dots (22)$$

式 (17), (21. a) および (22) により、第 n つり合

い段階から第 $n+1$ つり合い段階までの増分間における、全体座標系での要素節点力増分 Δf と要素節点変位増分 Δu とを関係づける要素増分つり合い式が、増分後の座標変換行列 $T_{(n+1)}$ などを用いて次のように得られることになる。

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta T^T \cdot f_{(n)}^* + T_{(n+1)}^T \cdot k^* \cdot \Delta u^* \\ &= \Delta T^T \cdot f_{(n)}^* + T_{(n+1)}^T \cdot k^* \\ &\quad \cdot \{ \Delta T \cdot G \cdot (u_{(n)} + c_{(n)}) + T_{(n+1)} \cdot \Delta c \} \\ &\quad + T_{(n+1)}^T \cdot k^* \cdot T_{(n+1)} \cdot \Delta u \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

式 (23) において、 Δu および Δc の前の変換行列 G を省略しているが、これは線形の剛性マトリックス k^* に対しては剛体並進変位成分の有無はなんら影響を及ぼさないことを考慮して、式を簡単にしたためである。

座標変換行列 $T_{(n+1)}$, 座標変換行列の変化量 ΔT および剛体回転増分 ΔR ($\Delta c^T = \langle 0^T \quad -\Delta R^T \rangle$) は、節点変位増分 Δu の関数であり、上式は非線形の関係式である。本式の第3項の座標変換行列を $T_{(n)}$ で近似すれば、この項は通常の一増分間空間固定の座標系を用いた増分法における線形項に対応する。第2項は全体座標系での節点変位ベクトルから剛体回転成分の影響を取り除くための項であり、第1項は初期応力剛性マトリックスに対応する項である。すなわち、第 n つり合い段階でつり合い条件を満たしていた内力 $f_{(n)}^*$ が、変位増分に伴う要素の回転によって、全体座標系に対して方向変化するため生ずる付加節点力を与える項である。

6. 増分つり合い式の解析過程

式 (23) によって与えられる増分つり合い式は、すでに述べたように変位増分に関して非線形の関係式である。これを以下に述べるような反復収束計算によって解く。問題は、つ

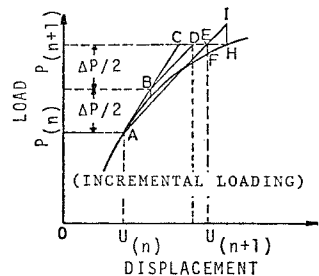


Fig. 3 Step Iterative-Corrective Procedure

り合い経路を示した Fig. 3 において、第 n 段階のつり合い状態 (点 A) が得られているとき第 $n+1$ つり合い状態 (点 H) を求めることである。

- (1) 第1近似: (ΔT , ΔR を点 A で線形化し、 $T_{(n+1)}$ を点 A で評価する)

座標変換行列の変化 ΔT および剛体回転増分 ΔR を変位増分前の状態 (点 A) で線形化し、増分後の座標変換行列 $T_{(n+1)}$ を増分前の第 n つり合い状態 (点 A) に

において評価して、変位増分の第1近似値 Δu_I を求める。すなわち、要素節点力増分～節点変位増分関係を次式で近似する。

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta T^T |_A \cdot f_{(n)}^* \\ &+ T_A^T \cdot k^* \cdot \{ \Delta T |_A \cdot G \cdot (u_{(n)} + c_{(n)}) + T_A \cdot \Delta c |_A \} \\ &+ T_A^T \cdot k^* \cdot T_A \cdot \Delta u_I \\ &= \{ k_{gfiA}^* + T_A^T \cdot k^* \cdot (l_{guA} + l_{grA}) \\ &+ T_A^T \cdot k^* \cdot T_A \} \cdot \Delta u_I \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ここに、

$$k_{gfiA}^* = [k_{gfi1}^* \dots k_{gfi18}^*]_A \dots\dots (25 \cdot a)$$

$$k_{gfiA}^* = (\partial T^T / \partial \Delta u_i) \cdot f_{(n)}^* \dots\dots\dots (25 \cdot b)$$

$$l_{guA} = [l_{gu1} \dots l_{gu18}]_A \dots\dots\dots (25 \cdot c)$$

$$l_{guiA} = (\partial T / \partial \Delta u_i) \cdot A \cdot G \cdot (u_{(n)} + c_{(n)}) \dots\dots (25 \cdot d)$$

$$l_{grA} = [l_{gr1} \dots l_{gr18}]_A \dots\dots\dots (25 \cdot e)$$

$$l_{griA} = T_A \cdot (\partial c / \partial \Delta u_i) \cdot A \dots\dots\dots (25 \cdot f)$$

であり、式 (25・a) および (25・c) による項は増分間における座標変換行列の変化 ΔT による項、式 (25・e) による項は増分間における剛体回転増分 ΔR による項である。なお、添字 A は点 A において評価される値であることを示し、 $|_A$ は点 A において線形化して評価することを意味する。また、 Δu_i ($i=1, \dots, 18$) は要素節点変位増分ベクトルの第 i 成分を表わしている。

第1近似 Δu_I に基づく第 $n+1$ つり合い状態の第1近似解は Fig. 3 において点 C に相当する。ただし、Fig. 3 は荷重制御の場合の収束過程を模式化して示したものである。

- (2) 第2近似： $(\Delta T, \Delta R)$ を点 B で線形化し、 $T_{(n+1)}$ を点 C で評価する)

次に第2近似値 Δu_{II} を求める。ここでは、増分後の座標変換行列 $T_{(n+1)}$ については第1近似による変位後の状態 (点 C) において評価し、 ΔT および ΔR の線形化にあたってはこれらの変化率が意味をもってくることから、第1近似に基づく増分間の平均的な変化率を用いて評価 (点 B で線形化) する。ここに点 B は AC の中点である。すなわち、要素節点力増分～節点変位増分関係を次式で近似する。

$$\begin{aligned} \Delta f &= \Delta T^T |_B \cdot f_{(n)}^* + T_C^T \cdot k^* \\ &\cdot \{ \Delta T |_B \cdot G \cdot (u_{(n)} + c_{(n)}) + T_C \cdot \Delta c |_B \} \\ &+ T_C^T \cdot k^* \cdot T_C \cdot \Delta u_{II} \\ &= \{ k_{gfiB}^* + T_C^T \cdot k^* \cdot (l_{guB} + l_{grB}) \\ &+ T_C^T \cdot k^* \cdot T_C \} \cdot \Delta u_{II} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ここに、 k_{gfiB}^* および l_{guB} はそれぞれ式 (25・a)、(25・b) および式 (25・c)、(25・d) において A を B に置き換えて得られるものであり、 l_{grB} は次式によって与えられるものである。

$$l_{grB} = [l_{gr1} \dots l_{gr18}]_B \dots\dots\dots (27 \cdot a)$$

$$l_{griB} = T_C \cdot (\partial c / \partial \Delta u_i) \cdot B \dots\dots\dots (27 \cdot b)$$

第2近似値 Δu_{II} に基づく第 $n+1$ つり合い状態の第2近似解は Fig. 3 において点 E に相当する。

- (3) 第3近似以降の第 $k+1$ 近似： $(\Delta T, \Delta R, T_{(n+1)})$ ともに第 k 近似点で評価する)

第1および第2近似においては、 ΔT および ΔR で表わされる非線形項を線形化して評価したが、これらの項は Δu の項に比して Δu の誤差に対して鈍感であり、 Δu の正解に対する近似度が高ければ、 ΔT および ΔR の項は十分に正解に収束したとみなし得るという考察に基づき、第3近似以降においては、これらの項は各近似段階では既知の量として左辺に移項し、 Δu 自身の項のみを右辺に残して、変位増分の第 $k+1$ 近似値 Δu_{k+1} を求める。すなわち、第 $k+1$ 近似における要素節点力増分 Δf と要素節点変位増分 Δu_{k+1} との関係として次式を与える。

$$\Delta f - h_k = T_k^T \cdot k^* \cdot T_k \cdot \Delta u_{k+1} \dots\dots\dots (28 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} h_k &= \Delta T_k^T \cdot f_{(n)}^* + T_k^T \cdot k^* \\ &\cdot \{ \Delta T_k \cdot G \cdot (u_{(n)} + c_{(n)}) + T_k \cdot \Delta c_k \} \\ &\dots\dots\dots (28 \cdot b) \end{aligned}$$

ここに、 k および $k+1$ は第 k 近似および第 $k+1$ 近似を表わす。また、座標変換行列の変化 ΔT_k および剛体回転増分 ΔR_k は、

$$\Delta T_k = T_k - T_{(n)} \dots\dots\dots (29 \cdot a)$$

$$\Delta R_k = R_k - R_{(n)} \dots\dots\dots (29 \cdot b)$$

により評価するものであり、ここでは変化率に基づいて評価されるのではなく、変化量そのものである。

(4) 収束判定

収束判定基準として以下の (i)～(iv) の4通りの基準を併用、ないしは選択して用いる。

- (i) 不つり合い力のノルムと外力増分のノルムとの比
- (ii) 荷重パラメーター増分の漸近度 (荷重モードは一定とする)
- (iii) 反力増分ノルムの漸近度
- (iv) 変位増分ノルムの漸近度

ただし、漸近度とは連続する近似段階における変化量の現近似値に対する比を意味する。また、実際の計算においては、種々の誤りあるいは特殊な問題などの場合における不経済な演算時間の浪費を防ぐために、反復回数に対して上限値を与えている。

(5) 誤差の累積防止のための処置

非線形挙動を追跡する場合には多数の増分段階に対する計算を行う必要があるが、各増分段階において収束し

た値は設定した収束基準に応じた誤差を含んでおり、増分段階の進行に伴う誤差の累積を防ぐために前つり合い状態における不つり合い力を次増分段階へ送り込む。すなわち、第 $n+1$ 段階のつり合い状態が求まったときの、第 n つり合い段階から第 $n+1$ つり合い段階までの増分間における不つり合い力を \bar{q} とするとき、第 $n+1$ つり合い段階から第 $n+2$ つり合い段階までの増分区間に対する荷重項は次式で与えられる。

$$\Delta\lambda \cdot \bar{p} + \bar{q} = \Delta\bar{f} \dots \dots \dots (30)$$

ただし、 \bar{p} は荷重モードベクトル、 $\Delta\bar{f}$ は構造全体系の節点力増分ベクトル、 $\Delta\lambda$ は荷重増分パラメーターである。

(6) 増分制御方法

増分制御の方法としては、問題に応じてその荷重・変位挙動の特性を考慮に入れた方法を用いることができれば、個々の問題を実際に解く際に効率のよい計算を行うことが可能となる。たとえば、荷重・変位挙動において挙動が荷重に対して一価である部分については荷重制御、挙動が変位に対して一価である部分については変位制御が有効であることは当然である。また、外圧を受ける円筒殻の荷重・容積挙動のように挙動が容積変化に対して一価であるような場合には、容積制御が有効となる。

荷重制御については特別の問題は生じないが、変位制御あるいは容積制御の場合には、系の係数行列の帯行列としての特性を失わせないために次のような手順に従って計算を行う。

変位制御の場合を例にとりて示す。解くべき方程式は次式の形式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{\alpha\alpha} & \tilde{k}_{\alpha\beta} \\ \tilde{k}_{\beta\alpha} & \tilde{k}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta\tilde{u}_\alpha \\ \Delta\tilde{u}_\beta \end{Bmatrix} = \Delta\lambda \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{p}_\alpha \\ \tilde{p}_\beta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{h}_\alpha \\ \tilde{h}_\beta \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (31)$$

ここに、 $\tilde{k}_{\beta\beta}$ 、 $\Delta\tilde{u}_\beta$ 、 $\Delta\lambda$ 、 \tilde{p}_β 、 \tilde{h}_β はスカラーであり、 $\{ \}$ は列ベクトル、 $[]$ はマトリックスを表すものとする。

問題は $\Delta\tilde{u}_\beta$ が指定されたときの未知変位 $\Delta\tilde{u}_\alpha$ および未知荷重パラメーター $\Delta\lambda$ を求めることである。単に $\Delta\lambda$ の項 (荷重項) と $\Delta\tilde{u}_\beta$ の項 $\langle \tilde{k}_{\alpha\beta}^T \tilde{k}_{\beta\beta} \rangle^T$ とを入れ換えたのでは帯行列としての特性が失われるために、式(31)を次の2つの式に分離する。

$$\tilde{k}_{\alpha\alpha} \cdot \Delta\tilde{u}_\alpha = \Delta\lambda \cdot \tilde{p}_\alpha + \tilde{h}_\alpha - \Delta\tilde{u}_\beta \cdot \tilde{k}_{\alpha\beta} \dots \dots \dots (32 \cdot a)$$

$$\tilde{k}_{\beta\alpha} \cdot \Delta\tilde{u}_\alpha = \Delta\lambda \cdot \tilde{p}_\beta + \tilde{h}_\beta - \Delta\tilde{u}_\beta \cdot \tilde{k}_{\beta\beta} \dots \dots \dots (32 \cdot b)$$

式 (32・a) より次式を得る。

$$\Delta\tilde{u}_\alpha = \tilde{k}_{\alpha\alpha}^{-1} \cdot \{ \Delta\lambda \cdot \tilde{p}_\alpha + \tilde{h}_\alpha - \Delta\tilde{u}_\beta \cdot \tilde{k}_{\alpha\beta} \} \dots \dots \dots (33)$$

式 (33) を式 (32・b) に代入することにより $\Delta\lambda$ が次のように求まる。

$$\Delta\lambda = \frac{-\tilde{k}_{\beta\alpha} \cdot \tilde{k}_{\alpha\alpha}^{-1} \cdot \{ \tilde{h}_\alpha - \Delta\tilde{u}_\beta \cdot \tilde{k}_{\alpha\beta} \} + \{ \tilde{h}_\beta - \Delta\tilde{u}_\beta \cdot \tilde{k}_{\beta\beta} \}}{\tilde{k}_{\beta\alpha} \cdot \tilde{k}_{\alpha\alpha}^{-1} \cdot \tilde{p}_\alpha - \tilde{p}_\beta}$$

$$\dots \dots \dots (34)$$

式 (34) を式 (32・a) に代入すれば、帯行列としての特性を失わずに未知変位 $\Delta\tilde{u}_\alpha$ が得られることになる。

変形後のつり合い条件を満たす増分式に基づいた本解析法の特性より、変位制御を用いる方が計算効率は高くなる。

なお、6. において述べた反復収束計算過程の流れ図を Fig. 4 に示す。

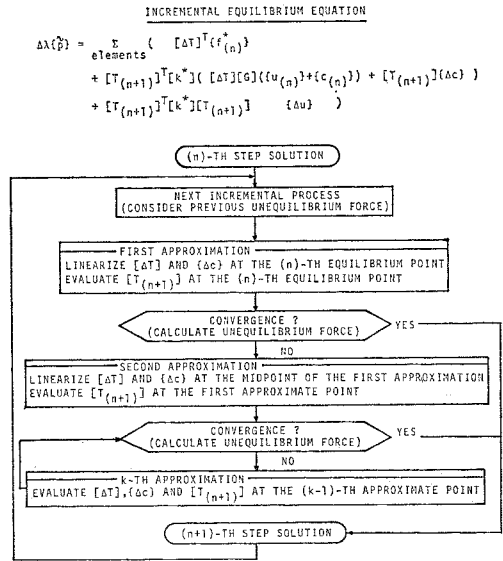


Fig. 4 Flow Chart of Step Iterative-Corrective Solution Procedure

7. 材料非線形性の評価法と弾塑性剛性マトリックス

材料非線形性の取り扱い方に対する基本的な考え方についてははじめに述べたとおりであり、ここでは具体的な内容について説明する。

(1) 弾塑性の判定

Ziegler²¹⁾ によれば、材料の塑性挙動は次の特性によって表わされる。すなわち、

- ① 材料の弾性限界を決定する初期降伏条件、
- ② 塑性ひずみ増分と応力および応力増分とを関係づける流れ則、
- ③ 塑性応力状態からの降伏進展の条件を与えるひずみ硬化則、

である。ここでは、

(i) 初期降伏条件として、平面応力場における von Mises の降伏条件

$$f(\sigma) = \sigma_Y \dots \dots \dots (35 \cdot a)$$

$$\sigma^T = \langle \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \tau_{xy} \rangle \dots \dots \dots (35 \cdot b)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \left[\frac{1}{2} \{ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + 6\tau_{xy}^2 \} \right]^{1/2} \dots\dots\dots(35 \cdot c)$$

を採用する。ただし、 σ_Y は一軸応力状態の初期降伏応力である。また、

(ii) 流れ則としては、金属の塑性変形は体積変化を伴わないという仮定とは相反するが、塑性ひずみ増分 $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$ は応力増分 $d\boldsymbol{\sigma}$ に比例するものとする。すなわち、

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = (1/H_0) \mathbf{D}_0^{-1} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \dots\dots\dots(36)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{pT} = \langle \varepsilon_{xx}^p \ \varepsilon_{yy}^p \ \gamma_{xy}^p \rangle \dots\dots\dots(37 \cdot a)$$

$$\mathbf{D}_0 = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(37 \cdot b)$$

であり、 ν はポアソン比である。また、 H_0 はひずみ硬化率であり、縦弾性係数 E および接線係数 E_t と次の関係がある (Fig. 5 参照)。

$$H_0 = E \cdot E_t / (E - E_t) \dots\dots\dots(37 \cdot c)$$

(iii) ひずみ硬化則としては、移動硬化則を導入し塑性応力状態からの降伏進展の条件を次式によって与える。

$$f(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\alpha}) \geq \sigma_Y \dots\dots\dots(38)$$

ここで、 $\boldsymbol{\alpha}$ は降伏曲面の原点移動量を表わし、ここでは次のように塑性時の応力増分の総和として評価する。

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{\text{plastic}} d\boldsymbol{\alpha} \dots\dots\dots(39)$$

ただし、 \sum_{plastic} は第1増分段階から第 n 増分段階 (現段階) までの増分段階の中で、塑性として計算を行った増分段階に関する総和を表わす。応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma}$ は現段

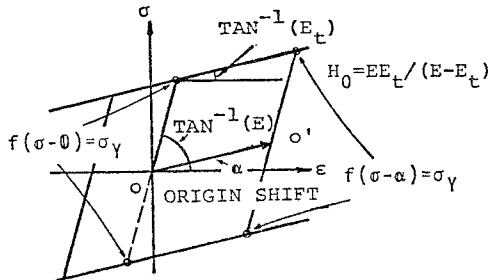


Fig. 5(a) Uni-Axial Stress-Strain Curve

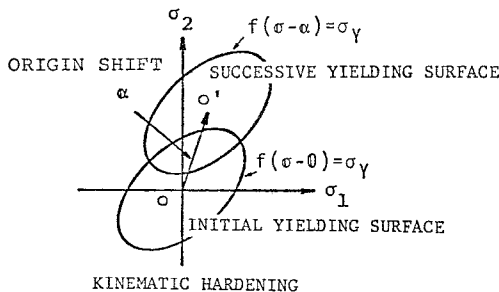


Fig. 5(b) Two Dimensional Yielding Surface

階までの各増分段階での応力増分ベクトル $d\boldsymbol{\sigma}$ の総和として評価し、 $d\boldsymbol{\sigma}$ は後述する式 (41) で与えられるひずみ増分ベクトル $d\boldsymbol{\varepsilon}_m$ および $d\boldsymbol{\varepsilon}_b$ に基づいて評価する。

(2) 弾塑性剛性マトリックス

要素座標系におけるひずみ・変位関係を線形に評価するものとすれば、第 n つり合い段階から第 $n+1$ つり合い段階までの増分間の要素剛性マトリックスは次式で与えられる要素ひずみエネルギー増分にに基づいて評価することができる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= \sum_{j=1}^N \Delta U_j \\ \Delta U_j &= \frac{1}{2} \int_{-t/2N}^{t/2N} \int_A \{ d\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \cdot \mathbf{D}_{(n)j} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_m \\ &\quad + (\eta_j + \xi_j) (d\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \cdot \mathbf{D}_{(n)j} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_b \\ &\quad + d\boldsymbol{\varepsilon}_b^T \cdot \mathbf{D}_{(n)j} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_m) \\ &\quad + (\eta_j + \xi_j)^2 \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_b^T \cdot \mathbf{D}_{(n)j} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}_b \} dA d\xi_j \\ &= \Delta U_{mmj} + (\Delta U_{mbj} + \Delta U_{bmj}) + \Delta U_{bbj} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

ただし、 $\mathbf{D}_{(n)j}$ は第 n つり合い段階における j 層の応力・ひずみマトリックスであり、 η_j, ξ_j は j 層の z 座標および j 層内の点の j 層中心面からの板厚方向座標である (Fig. 6 参照)。また、 N は層数、 t および A は板厚および要素面積である。なお、 $d\boldsymbol{\varepsilon}_m$ および $d\boldsymbol{\varepsilon}_b$ は要素の面内ひずみ増分ベクトルおよび曲げひずみ増分ベクトルである。

a) 非連成項の評価

式 (40) において ΔU_{mmj} および ΔU_{bbj} の項によって与えられる剛性マトリックスは、応力・ひずみマトリックスを弾性時におけるその係数倍で評価するものとすれば、要素の平面応力の剛性マトリックスおよび板曲げの剛性マトリックスにおいて縦弾性係数を E_t に置き換え、板厚を t/N とし、要素中心面からの j 層の偏心 η_j に関わる係数を乗ずることによって得ることができる。それぞれの項に対応する剛性マトリックスを k_{mmj}^* および k_{bbj}^* とおく。

b) 連成項の評価

一方、 ΔU_{mbj} および ΔU_{bmj} の項で与えられる面内ひずみと曲げひずみとの連成項については、変位仮定の手

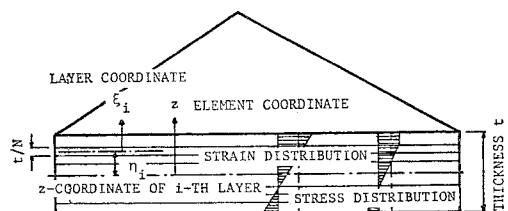


Fig. 6 Lamination and Layer Coordinate

法に従って取り扱う。すなわち、要素内におけるひずみ分布を面内ひずみについては通常の要素内ひずみ一定の要素における変位関数を用い、曲げひずみについては面積座標を用いた不完全3次式(項数9)で表わされる変位関数を用い次のように評価する。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{B}_m \cdot \Delta \mathbf{u}^* \dots \dots \dots (41 \cdot a)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{B}_b \cdot \Delta \mathbf{u}^* \dots \dots \dots (41 \cdot b)$$

式(41・a)、(41・b)を式(40)の ΔU_{mbj} 、 ΔU_{bjm} に代入すれば、これらの項によって与えられる剛性マトリックス \mathbf{k}_{mbj}^* および \mathbf{k}_{bjm}^* が次のように評価できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{mbj}^* &= \mathbf{k}_{bjm}^{*T} = \int_{-l/2N}^{l/2N} \int_A (\eta_j + \xi_j) \\ &\quad \cdot \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D}_{(n)j} \cdot \mathbf{B}_b dA d\xi_j \\ &= \frac{t}{N} \cdot \eta_j \cdot \left(\mathbf{B}_m \cdot \mathbf{D}_{(n)j} \cdot \int_A \mathbf{B}_b dA \right) \dots \dots (42) \end{aligned}$$

e) 要素の弾塑性剛性マトリックス

以上より、弾塑性状態における要素増分剛性マトリックス $\mathbf{k}^{e,p*}$ が、次のように層剛性マトリックスの和として得られる。

$$\Delta \mathbf{f}^* = \mathbf{k}^{e,p*} \cdot \Delta \mathbf{u}^* \dots \dots \dots (43 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{e,p*} &= \mathbf{k}_{mm}^* + \mathbf{k}_{mb}^* + \mathbf{k}_{bm}^* + \mathbf{k}_{bb}^* \\ &= \sum_{j=1}^N \mathbf{k}_{mmj}^* + \sum_{j=1}^N \mathbf{k}_{mbj}^* \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \mathbf{k}_{bjm}^* + \sum_{j=1}^N \mathbf{k}_{bbj}^* \dots \dots \dots (43 \cdot b) \end{aligned}$$

全層が弾性状態にあれば、連成項 \mathbf{k}_{mb}^* および \mathbf{k}_{bm}^* は消滅し式(43)で与えられる要素増分剛性マトリックス $\mathbf{k}^{e,p*}$ は弾性の要素増分剛性マトリックス \mathbf{k}^* と一致する。

8. 提案する解析法の特性を検証するための数値実験

ここに詳細を提示した薄肉立体構造を対象とした弾塑性・大変位解析法は、真の対象構造を理想化して実際に解析の対象とする系を構成する過程にかなり大胆な仮定を導入したものである。したがって、この解析法の適用限界、特性などを明確にすることを目的として数多くの対象に対して種々の条件下で実際に解析を行い検討を加えた。その結果、ここに提案する解析法には卓抜した特性がそなわっていることが明らかになった。以下に解析法の特性を実証するためのいくつかの解析例を示す。

(1) 大変位解析法としての解の精度と増分のとり方に対する解法の安定性の検証

a) 軸方向荷重を受ける一端固定、他端自由の部材に対応する問題の解析

初期たわみ形状を正弦波形で与え、部材長 $L=100\text{ cm}$

に対し荷重点の初期横たわみ δ_0 を 1 cm および 0.1 cm の2通りにとり解析した結果のうち荷重-荷重点横たわみの関係を、楕円積分²²⁾と比較して描いたものがFig. 7(a)である。本解析法はあくまでも薄板を対象とするものであるが、大変位解析に関する研究でよく対象とされる問題として選んだものであり、図中に示したように薄板要素(三角形要素により構成される四角形要素)を幅方向に1要素、長さ方向に8要素用いて一軸部材に対応するモデルを構成し、一軸部材に対応する境界条件のもとで解析を行ったものである。

図中に記入した○印および●印は解析過程で用いた変位増分に対応する結果をすべて記入したものである。ここに提示する解析法では、図中に S_A 、 S_B などの記号で記入した非常に大きな変形状態に対応する解をただ1回の増分で求めることができる。 S_A 、 S_B それぞれの点に相当する変位増分(S_A に対しては横たわみ、 S_B に対しては鉛直変位)を1回で与え計算を行い、得られた解が収束していく状況を図に示したものがFig. 7(b)である。図中の変形図に付記した番号は、6.に説明した解法の近似段階を示している。 S_A に対応する図では第4近似の変形図が、 S_B に対応する図では第5近似の変形図が、図では区別できない程度に収束解に達している。なお、 S_B に対応する図における第1近似の結果は、図示できない程度に横変位が大きくなっているのに記入していない。

b) 浅いアーチの飛び移りおよび分岐座屈に対応する問題の解析

初期形状が正弦波形で与えられている浅いアーチの飛び移りおよび分岐座屈の計算結果をFig. 8に示す。この問題もa)と同様に本来一軸部材に関する問題であるが、ここでは、薄板要素を幅方向に1要素、部材軸方向に16要素(対称条件を考慮した場合には8要素)用いて対象系を構成し、一軸部材に対応する条件のもとで計算している。図は計算結果からクラウンの変形後のライズと初期ライズの比を横軸に、変形後も初期形状と同じ正弦波形を維持するものとした場合の座屈荷重³²⁾に対する荷重の比を縦軸にとった荷重・変位関係を描いたものである。実線は対称条件を考慮して計算した結果であり、一点鎖線はアーチ全体を解析し、左側半スパンに作用等分布荷重の1/100の外乱荷重を付加して計算した結果で、分岐座屈を示している。破線は前述した変形後も初期形状と同じ正弦波形を維持するものとした場合の級数解である。なお、図中には飛び移りおよび分岐座屈の場合の変形形状の推移をあわせて示している(図中に記入した記号 S_i は荷重・変位図中の同じ記号と対応している。また、ライズをスパンに比し20倍に拡大して図示している)。また、計算はいずれの場合についてもク

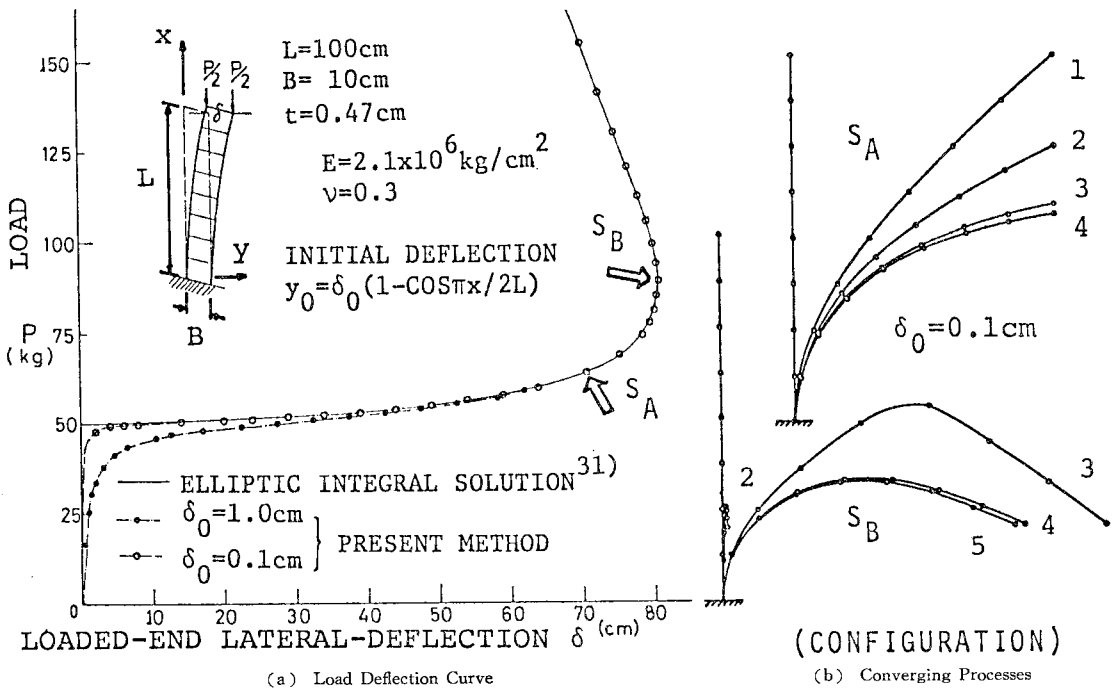


Fig. 7 Elastica

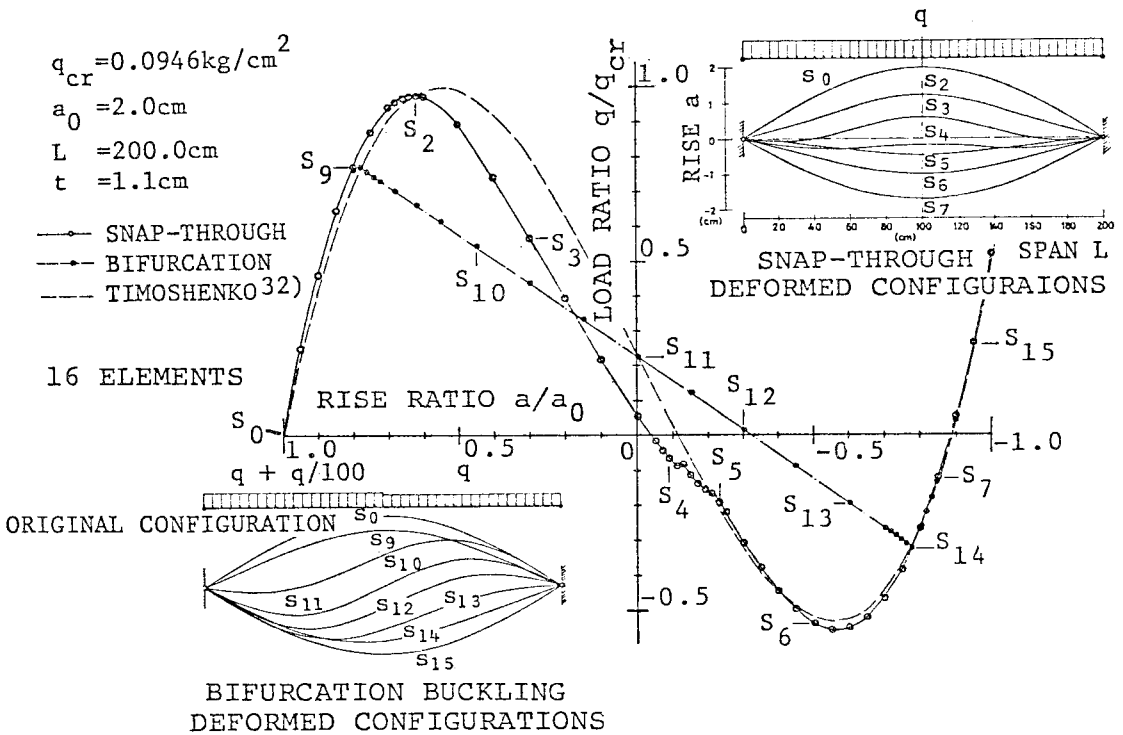


Fig. 8 Snap-Through and Bifurcation Buckling of Flat Arch (Rise/Span Ratio : 1/100)

ラウンの鉛直方向変位を制御して行った。

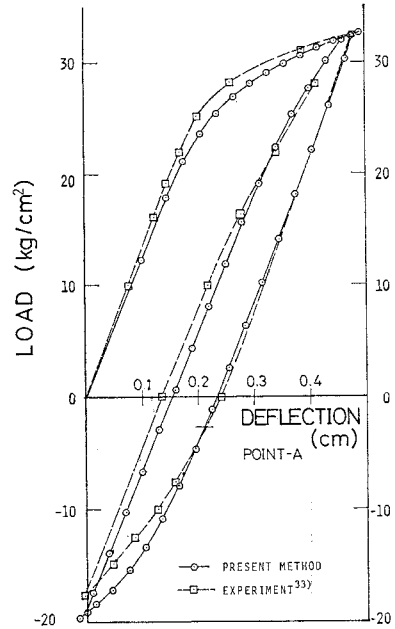
(2) 材料の弾塑性特性の考慮の仕方の妥当性の検証

a) 繰り返し荷重を受ける周辺単純支持された円板の解析

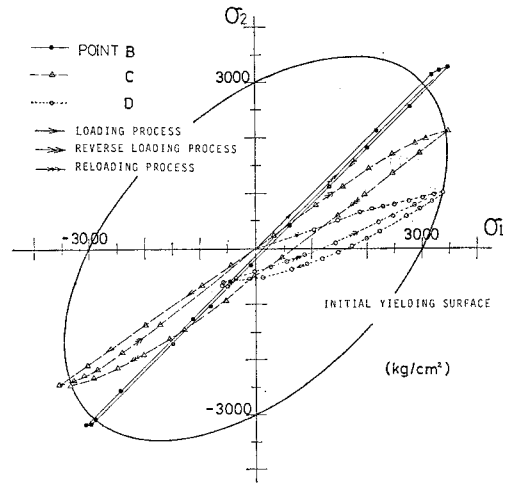
周辺を単純支持された円板が交番等分布横荷重を受けるときの弾塑性計算結果を大橋らによる実測結果³³⁾と比較して Fig. 9 に示す。解析は Fig. 9(a) に示すような 1/4 対称部分を対象としており、要素分割は図中に示すとおりである。また、板厚は 10 層に分割している。材料の諸定数は図中に示すような値とした。すなわち、軟鋼を対象としていることから縦弾性係数を $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ とし、接線係数については、ここでは $E_t = E/100$ と仮定した。せん断弾性係数 G 、降伏応力 σ_y については文献 33) 中において実測結果に基づいて与えられている値を採用し、ポアソン比 ν はこれらの値から逆算して与えた。中央点たわみを制御して計算を行った結果得られた荷重～中央点たわみ曲線を大橋らによる実測値³³⁾と比較して Fig. 9(b) に示している。なお、Fig. 9(c) は解析過程で得られた Fig. 9(a) の図中の点 B, C および D における 2 軸応力状態の推移を 2 次元主応力面上に描いたものである。

b) 軸圧縮力を受ける H 型鋼柱の解析

軸圧縮力を受ける H 型鋼柱の弾塑性座屈解析を行った結果を、藤田らによる実測結果³⁴⁾と比較して Fig. 10 に示す。要素分割は図中に描いたとおりである。材料定数は文献 34) 中に実測結果に基づいて与えられている値を採用し、図中に示した。Fig. 10(a) は中央断面のウェブとフランジの交点の断面強軸方向のたわみと荷重の関係を表わしたものであり、解析では図中に示したような正弦波形の初期変形を与えている。また、Fig. 10(b)



(b) Load-Central Deflection Curve



(c) Stress Paths

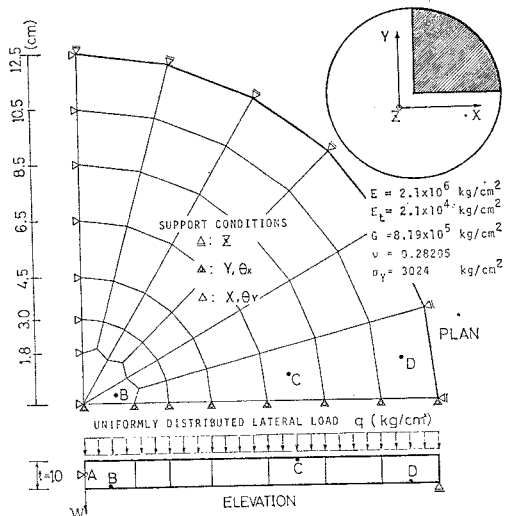
Fig. 9 Elasto-Plastic Analysis of a Circular Plate under Cyclic Loading

は中央断面フランジ部の圧縮縁および引張縁の面外変位と荷重の関係を示したものである。なお、計算は荷重点の軸方向圧縮変位を制御して行った。

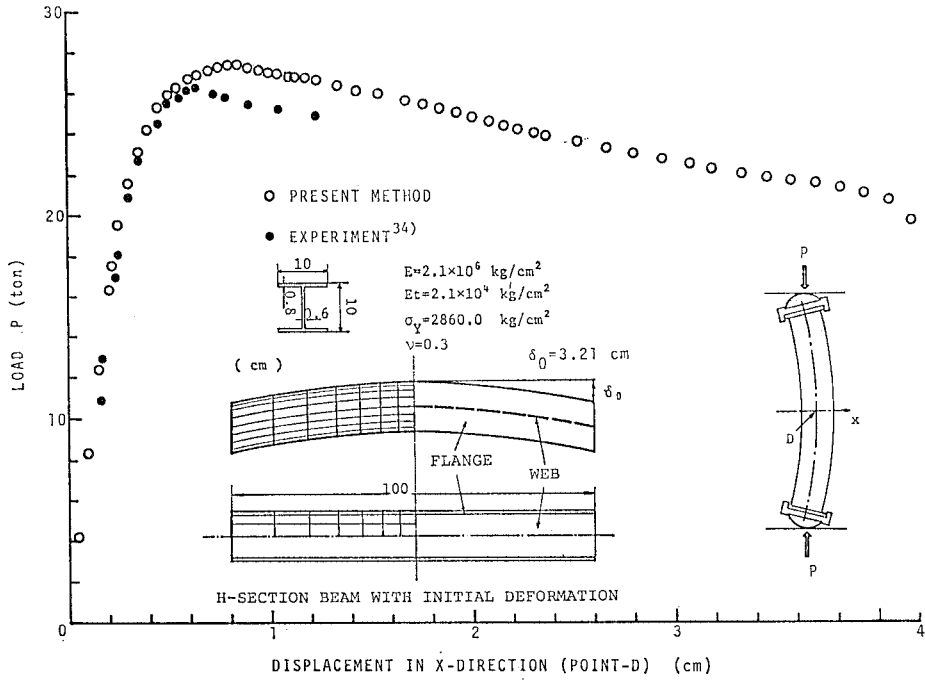
(3) 解析の適用範囲を検証するための計算例

a) 正方形板の非常に大きな変形の計算

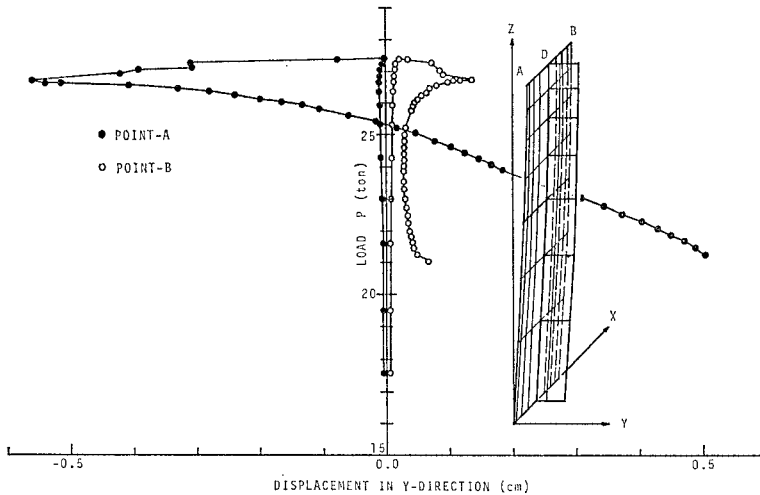
周辺単純支持（面内方向には自由）の正方形板の一組の対辺が等変位の軸圧縮を受ける場合の大変位解析結果を Fig. 11 に示す。Fig. 11(a) は荷重～中央点横たわみ図であり、Fig. 11(b) に Fig. 11(a) の一部（板厚 t



(a) Model for Analysis



(a) Load-Displacement Curve



(b) Load-Displacement Curves

Fig. 10 Materially and Geometrically Nonlinear Analysis of a H-Section Beam

に対する全横たわみ(初期たわみ $W_0 (=0.1t)$ + 付加たわみ W_c) の比が2の領域まで)を拡大して級数解³⁵⁾と比較して示している. Fig. 11(c) は変形状の推移を表わしたもので、板幅と変位とは同一の縮尺で描いている。また、図中の格子は採用した要素分割型を示している。

骨組部材の大変位問題は多くの計算例が報告されているが、板を対象とした場合にはこのような大きな変形までを追跡した例はほとんど報告されていないので、ここではあえて材料の非線形性は考慮せずに、幾何的非線形問題として解析を行ったものについて示している。

Fig. 11(c) において一直線を維持している対辺が圧縮を受けている辺であり、計算は1/4 対称部分を対象として、圧縮辺の圧縮変位を制御して行ったものである。

b) 軸圧縮力を受ける円筒殻の計算

薄肉円筒殻の軸圧縮による座屈および座屈後の挙動の解析を行った結果を Fig. 12 に示す。計算は1/8 対称部分を軸方向6要素、円周方向9要素に分割し、周縁の軸方向圧縮変位を制御して行っている。Fig. 12(a) は荷重～軸方向変位関係を表わしたものであり、図中に一点鎖線で示した値はいわゆる古典座屈荷重³⁶⁾である。

計算結果は、初期たわみとして、振幅 a (板厚に対する比)、全長あたりの軸方向半波数 m 、全周あたりの周方向波数 n の二重級数波形を与えたときのものであり、 a, m, n は図中に示した値を用いている。Fig. 12(b) は Fig. 12(a) 中の◎印に対応する計算結果における変形状の推移を変形を誇張せずに実比で描いたものである。

ここで対象とした円筒殻の座屈波形はダイヤモンド型と通称されるように、その峰または谷の部分は本来急激な曲率変化を伴うものであり、それを妥当に評価し得る

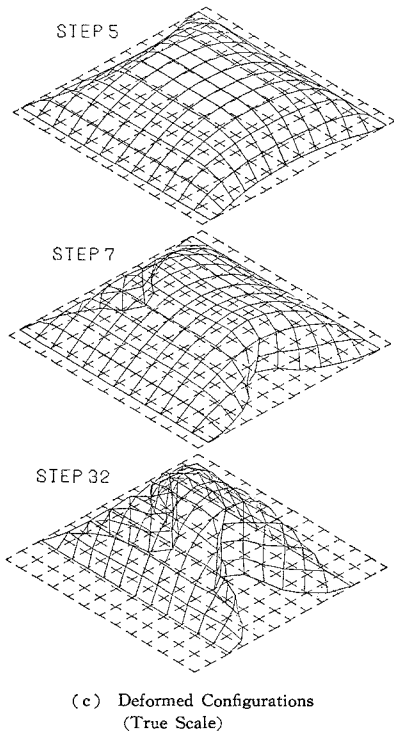
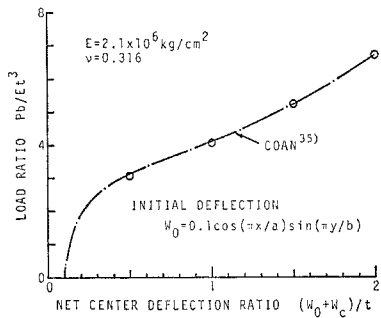
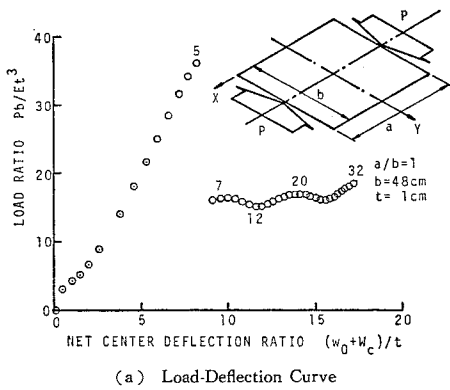


Fig. 11 Large Deflection Analysis of Square Plate Loaded in Edge Compressor

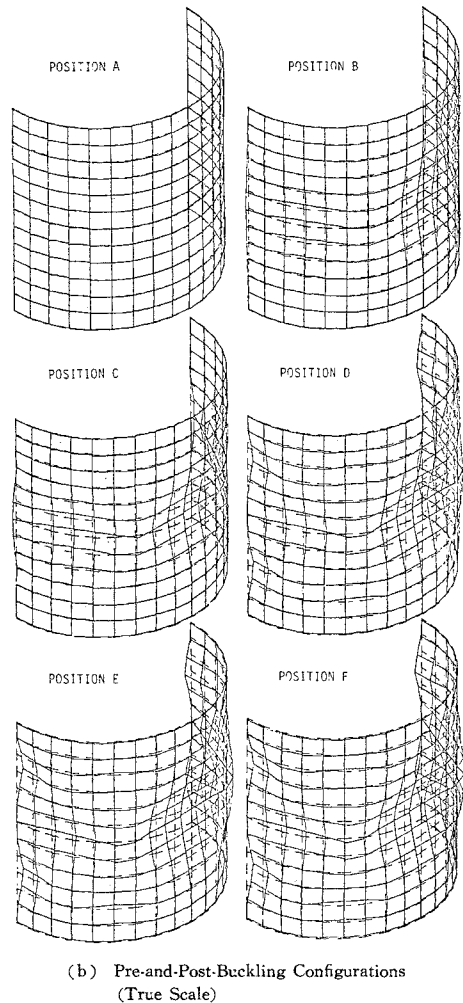
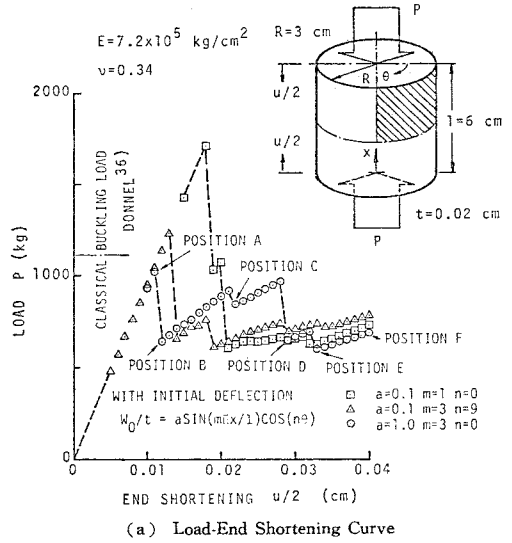


Fig. 12 Axial Compression of Cylindrical Shell

かどうかは要素分割の仕方に大きく支配されるものと考えられる。したがって、Fig. 12(a) に示した結果の荷重～変位曲線もここで採用した要素分割で得られた結果というほどの意味でとらえるべきものである。この図では、荷重～変位曲線そのものよりもむしろ、増分による計算のみで座屈および座屈後の挙動を連続的に追跡することができ、Fig. 12(b) に示したように、それに対応するモードが得られる、という本論文で提示した解析過程の実効性を示すものとしてみていただきたい。

9. おわりに

以上に、面内回転変位成分を節点変位成分として有する1節点6自由度、計18自由度の三角形薄板要素を基本要素とした薄肉立体構造の弾塑性・大変位解析過程を提示し、具体的な計算例を通じて提案する解法の特性および有効性を明らかにした。

本解析法の基本となる三角形要素は節点変位として、 x, y, z 方向の変位 u, v, w および x, y, z 軸回りの回転変位 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ のみを有し、したがって、物理的に不明確な節点力の導入の必要はなく、また、立体的に構成される要素間の合理的な接合が可能であり、3次元骨組要素との接合も容易である。本解析法においては、幾何的非線形性を節点変位、節点力、座標、などすべて節点における値の座標変換過程によって評価しており、この面からもここに導入した要素が節点変位成分を6成分完備している特性が有効になる。

各増分段階における第1近似および第2近似を求めるための連立方程式の係数行列は非対称になるが、ここに提示した増分つり合い方程式は、反復収束計算過程とあいまって、非常に大きな増分に対しても発散することがなく平衡な解を与える。

また、弾塑性計算では、1次元のパイリニアモデルを2次元に拡張したある程度簡略化した手法を用いているが、円板の弾塑性解析結果にみられるように、構造物の設計などに対応する工学的な目的に対しては満足することのできる結果が得られていると判断している。

なお、本論文中の計算はすべて、東京工業大学総合情報処理センターの計算機 M-180 によった。また、本研究に対して、文部省科学研究費補助金の交付を受けた。ここに記して深甚の謝意を表します。解析システムの開発過程で東京工業大学大学院修士課程の学生（現・東洋エンジニアリング勤務）である上野高志君の絶大な協力を得た。ここに感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Turner, M.J., E.H. Dill, H.C. Martin and R.J. Melosh: Large deflection of structures subjected to

- heating and external loads, *J. Aero. Sci.*, Vol. 27, pp. 97~106, 1960.
- 2) Argyris, J.H.: Continuum and discontinuum, *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. Tech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, pp. 151~169, 1965.
- 3) Yamada, Y., N. Yoshimura and T. Sakurai: Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 10, pp. 343~354, 1968.
- 4) Mallet, R.H. and P.V. Marçal: Finite element analysis of non-linear structures, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, Vol. 94, ST 9, pp. 2081~2105, Sept., 1968.
- 5) Walker, A.C.: A nonlinear finite element analysis of shallow circular arches, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 5, pp. 97~107, 1969.
- 6) Brebbia, C.A. and J. Connor: Geometrically nonlinear finite element analysis, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, Vol. 95, EM 2, pp. 463~483, Feb., 1969.
- 7) Murray, D.W. and E.L. Wilson: Finite element post-buckling analysis of thin elastic plates, *J.A.I.A.A.*, Vol. 7, No. 10, pp. 1915~1920, Oct., 1969.
- 8) Hibbit, H.D., P.V. Marçal and J.R. Rice: A finite element formulation for problems of large strain and large displacement, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 6, pp. 1069~1086, 1970.
- 9) Martin, H.C.: Finite elements and the analysis of geometrically nonlinear problems, *Recent Advances in Matrix Methods and Structural Analysis and Design*, Univ. of Alabama Press, pp. 343~381, 1971.
- 10) Zienkiewicz, O.C. and G.C. Nayak: A general approach to problems of plasticity and large deformation using isoparametric elements, *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1971.
- 11) Roberts, T.M. and D.G. Ashwell: The use of finite element mid-increment stiffness matrices in the post-buckling analysis of imperfect structures, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 7, pp. 805~823, 1971.
- 12) Stricklin, J.A., W.A. von Riesenmann, J.R. Tillerson and W.E. Haisler: Static geometric and material nonlinear analysis, *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, Univ. of Alabama Press, pp. 301~324, 1972.
- 13) Armen, H., A. Pifco and H.S. Levine: Plasticity theory and finite element application, *ibid.*, pp. 393~437.
- 14) Przemieniecki, J.S.: Finite element structural analysis of local instability, *J.A.I.A.A.*, Vol. 11, No. 1, pp. 33~39, Jan., 1973.
- 15) Bergan, P.G. and R.W. Clough: Large deflection analysis of plate and shallow shells using finite element method, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 5, pp. 543~556, 1973.
- 16) Oran, C.: Tangent stiffness in space frames, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, Vol. 99, ST 6, pp. 987~1001, June, 1973.
- 17) Hangai, Y. and S. Kawamata: Analysis of geometrically nonlinear and stability problems by static perturbation method, *Report of the Inst. of Industrial Science, the Univ. of Tokyo*, Vol. 22, No. 5 (Serial No. 143), 1973.

- 18) 小久保邦雄・山本善之：外圧を受ける球殻の座屈，日本造船学会論文集，第133号，pp. 143~151，1973年6月。
- 19) Gallagher, R.H. : Finite element analysis of geometrically nonlinear problems, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, Proc. 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis, pp. 109~123, 1973.
- 20) McMeeking, R.M. and J.R. Rice : Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation, Int. J. Solids Struct., Vol. 11, pp. 601~616, 1975.
- 21) Da Deppo, D.A. and R. Schmidt : Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., pp. 894~896, Dec., 1975.
- 22) 後藤茂夫・羽根信郎・田中達朗：接線剛性法による骨組構造物の大変形解析，土木学会論文報告集，第238号，pp. 31~42，1975年6月。
- 23) 小松定夫・北田俊行・宮崎清司：残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析，土木学会論文報告集，第244号，pp. 1~14，1975年12月。
- 24) Matsui, T. and O. Matsuoka : A new finite element scheme for instability analysis of thin shells, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10, pp. 145~170, 1976.
- 25) 前田幸雄・林 正：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，第253号，pp. 13~27，1976年9月。
- 26) 上田幸雄・安川 度・矢尾哲也・池上 博・大南亮一：圧縮を受ける正方形板の最終強度に関する研究(第1報)，日本造船学会論文報告集，第137号，pp. 210~221，1975年6月；(第2報)，第140号，pp. 205~209，1976年12月。
- 27) 阿井正博・西岡 隆・奥村敏恵：ケーブル構造に関する一理論解析，土木学会論文報告集，第260号，pp. 17~32，1977年4月。
- 28) Argyris, J.H., P.C. Dunne, G.A. Malejannakis and E. Schelkle : A simple triangular facet shell element with applications to linear and non-linear equilibrium and elastic stability problems, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 10, pp. 339~371, 1977 and Vol. 11, pp. 97~131, 1977.
- 29) Oden, J.T., E.B. Becker, R.R. Craig, R.S. Dunham, C.P. Johnson and W.L. Oberkampf (eds.) : Proc. of the International Conf. on Computational Methods in Nonlinear Mechanics, the Univ. of Texas, 1974.
- 30) Y.C. ファン(大橋義夫・村上澄男・神谷紀生共訳)：固体の力学/理論，培風館，pp. 149~152，1970年。
- 31) Shield, R.T. and H. Ziegler : On Prager's hardening rule, ZAMP, Vol. IXa, pp. 260~276, 1958.
- 32) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere : Theory of Elastic Stability, Second Edition, pp. 76~82 and pp. 305~310, McGraw-Hill, 1961.
- 33) 大橋義夫・川嶋紘一郎：弾塑性曲げを受けた軟鋼円板の逆負荷および再負荷過程の曲げ解析，日本機械学会論文集，第38巻，第316号，pp. 3091~3099，1972年12月。
- 34) 藤田 讀・吉田宏一郎・高沢 誠：不整量を有する構造物の強度について(その1)―初期たわみを有する柱の座屈強度―，日本造船学会論文集，第132号，pp. 299~306，1973年。
- 35) Coan, J.M. : Large-deflection theory for plates with small initial curvature loaded in edge compression, J. Appl. Mech., pp. 143~151, June, 1951.
- 36) Donnel, L.H. : A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., Vol. 56, pp. 795~806, 1934.
- 37) Oden, J.T. : Finite Element of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, 1972.
- 38) 山田嘉昭：塑性・粘弾性，コンピュータによる構造工学講座 II-2-A，培風館，1972年。
- 39) 川井忠彦：座屈問題解析，コンピュータによる構造工学講座 II-6-B，培風館，1974年。
- 40) Zienkiewicz, O.C. : The Finite Element Method, the third edition, Chs. 18~19, McGraw-Hill, 1977.
- 41) 吉田 裕・増田陳紀：水圧下にある薄肉シェルの有限要素法による幾何的非線形解析，第28回土木学会全国大会講演概要集，I-45，1973年10月。
- 42) 吉田 裕・増田陳紀：有限要素法による薄肉立体構造の非線形解析法に関する研究，第29回土木学会全国大会講演概要集，I-60，1974年10月。
- 43) 吉田 裕・増田陳紀：薄肉立体構造の非線形解析における数値計算法，日本鋼構造協会第9回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集，pp. 227~232，1975年6月。
- 44) 松田 隆・吉田 裕・増田陳紀：薄肉立体構造の弾塑性・大変形解析，第32回土木学会全国大会講演概要集，I-100，1977年10月。
- 45) 増田陳紀・吉田 裕・松田 隆：移動座標系に基づく大変位有限要素解析，第33回土木学会全国大会講演概要集，I-66，1978年9月。
- 46) 久保慶三郎・吉田 裕：任意形状の平板曲げの数値解析法，土木学会論文報告集，第167号，pp. 9~22，1969年7月。
- 47) Yoshida, Y. : Discrete triangular approximation of moment and displacement surfaces for plate bending analysis, Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Univ. of Alabama Press, pp. 139~181, 1971.
- 48) 吉田 裕・雨宮栄一郎・増田陳紀：立体構造解析のための薄板有限要素，土木学会論文報告集，第211号，pp. 19~28，1973年3月。
- 49) Yoshida, Y. : A hybrid stress element for thin shell analysis, Finite Element Methods in Engineering, Proc. of the 1974 International Conf. on Finite Element Methods in Engineering, Unisearch, pp. 271~284, 1974.