

滑節構造物の弾塑性大変形

ELASTO-PLASTIC LARGE DEFORMATION OF PIN-JOINTED STRUCTURES

太田 俊昭*・日野 伸一**

By Toshiaki OHTA and Shinichi HINO

1. 序

構造物が外力を受け塑性変形を生じるとき、ひずみ(工学ひずみ)のオーダーが数%に達するような大きな塑性変形を生じる場合が考えられる。このような問題は、材料的非線形と幾何学的非線形の組み合わせられた、いわゆる複合非線形問題と称せられ、通常、その解析にあたっては、応力-ひずみの構成方程式として Green のひずみ-Kirchhoff の応力もしくは Euler 表示の対数ひずみ-真応力の式などが採用^{1),2)}されている。

本論で対象とする滑節骨組構造物では、構成部材は常に単純引張や単純圧縮の軸力のみを受けるので、構成方程式としては、簡単な一軸応力-ひずみのそれ、すなわち、Euler 表示の対数ひずみ-真応力の支配方程式を採用する。また、構造材料としては、金属材料の理想化モデルである硬化型弾塑性体を選び、塑性流れ時には材料の非圧縮性(ポアソン比: $\nu=1/2$, 平均塑性ひずみ増分: $d\epsilon_o^{(p)}=(d\epsilon_x^{(p)}+d\epsilon_y^{(p)}+d\epsilon_z^{(p)})/3=0$ とする)を仮定する。解析理論としては、圧縮や引張に伴う断面積の変化も厳密に考慮しうる増分理論³⁾を採用し、このような材料的非線形に幾何学的非線形³⁾⁻⁸⁾を加味した厳密な直線材の変形公式を導き、滑節構造物の安定、不安定領域における弾塑性挙動(静的挙動)を解明しうることを示すとともに、簡単な例を用いて大変形問題、特に、塑性変形時の飛移り現象などを論じることにする。

2. 解析理論

直線部材 AB の変形前の長さとして断面積を、それぞれ l_o, a_o とし、変形後のそれらを l, a とする。図-1 を

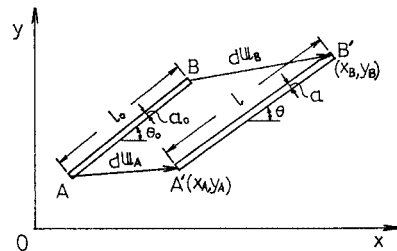


図-1 部材の変形

参照すれば次式を得る。

$$lC = u_B - u_A \dots\dots\dots(1)$$

ここに、

$$C = \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} c = \cos \theta \\ s = \sin \theta \end{matrix}$$

式(1)を増分形に改めれば、

$$dlC + l dC = du_B - du_A \dots\dots\dots(2)$$

となり、これを變形すれば、

$$dlC^T C + lC^T dC = C^T (du_B - du_A) \dots\dots\dots(3)$$

$C^T C = I$ (単位行列), $C^T dC = 0$ となることを考えれば、式(3)は、

$$dl = C^T (du_B - du_A) \dots\dots\dots(4)$$

式(2),(4)より、

$$dC = \frac{1}{l} C^* (du_B - du_A) \dots\dots\dots(5)$$

ただし、

$$C^* = \begin{bmatrix} s^2 & -sc \\ -sc & c^2 \end{bmatrix}$$

あるいは、 $ds = cd\theta$ であるので、

$$d\theta = \frac{1}{l} [-s \ c] (du_B - du_A) \dots\dots\dots(6)$$

いうまでもなく、式(5),(6)は変形に関する適合条件が増分形式で表わされたものである。

次に、材端 A に働く変形後の軸力を N , x, y 方向の成分を X_{AB}, Y_{AB} とすれば、図-2 より、

* 正会員 工博 九州大学助教授 工学部土木工学科
** 学生会員 工修 九州大学大学院工学研究科土木工学専攻 博士課程

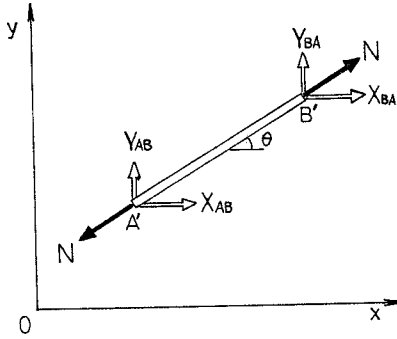


図-2 材端に働く力

$$f_{AB} = \begin{bmatrix} X_{AB} \\ Y_{AB} \end{bmatrix} = -CN \dots \dots \dots (7)$$

ここに、軸力 N は直応力 σ を用いて、

$$N = a\sigma \dots \dots \dots (8)$$

式 (7), (8) より

$$f_{AB} = -C a \sigma \dots \dots \dots (9)$$

上式を増分形に改めれば、

$$df_{AB} = -C(a d\sigma + \sigma da) - a \sigma dC \dots \dots \dots (10)$$

さて、硬化型弾塑性体の一軸応力-ひずみ方程式は、一般に、

$$d\sigma = E(\alpha) d\varepsilon \dots \dots \dots (11)$$

ただし、 $E(\alpha)$ は、弾性時にヤング率 E 、硬化域では $E(\alpha) = E_s$ (接線係数) となり、線形硬化材料では周知のように $E_s = \mu_s E$ (μ_s : 一定) となる。

また、ひずみ増分 $d\varepsilon$ は、対数ひずみで定義すれば次式で示される。

$$d\varepsilon = \frac{dl}{l} \dots \dots \dots (12)$$

いま、部材の材軸方向に z' 軸を、それに直交する 2 軸方向に x' , y' 軸を 図-3 のようにとれば、断面の微小面積 δa は、

$$\delta a = \delta x' \delta y' \dots \dots \dots (13)$$

$$\therefore d(\delta a) = d(\delta x') \delta y' + d(\delta y') \delta x' \dots \dots \dots (14)$$

ポアソン比を ν とすれば、

$$\frac{d(\delta x')}{\delta x'} = \frac{d(\delta y')}{\delta y'} = -\nu d\varepsilon \dots \dots \dots (15)$$

式 (14), (15) より

$$d(\delta a) = \delta(da) = -2\nu d\varepsilon \delta a \dots \dots \dots (16)$$

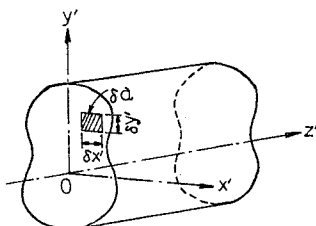


図-3 横断面の座標 (x' , y' , z')

よって、

$$da = \int_a \delta(da) = -2\nu d\varepsilon \int_a \delta a = -2\nu d\varepsilon a \dots \dots \dots (17)$$

上式を変形して、次の関係を得る¹⁾。

$$\frac{da}{a} = -2\nu d\varepsilon = -2\nu \frac{dl}{l} \dots \dots \dots (18)$$

$$\therefore \ln \frac{a}{a_0} = -2\nu \ln \frac{l}{l_0}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{あるいは,} \\ a = a_0 \left(\frac{l_0}{l} \right)^{2\nu} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

式 (10) に、式 (8), (11), (12) および式 (18) を代入すれば、

$$df_{AB} = -C \left\{ a E(\alpha) \frac{dl}{l} - 2\nu N \frac{dl}{l} \right\} - NdC \dots \dots \dots (20)$$

さらに、式 (4), (5) を代入して整理すれば、結局、次の変形法公式を得る。

$$\left. \begin{aligned} df_{AB} &= (k_0 + k_\theta + k_1)(du_A - du_B) \\ \text{同様にして,} \\ df_{BA} &= (k_0 + k_\theta + k_1)(du_B - du_A) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \frac{aE(\alpha)}{l} CC^T, k_\theta = \frac{N}{l} C^*, \\ k_1 &= -\frac{2\nu N}{l} CC^T \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

式 (21), (22) の k_0 は弾塑性剛性行列であり、 k_θ は幾何剛性行列、さらに、 k_1 は断面変化を考慮することによる補正行列である。

特に、断面の変化を無視し、公称応力-工学ひずみの Lagrange 表示を用いれば、 $k_1 = 0$, $a = a_0$ となり、式 (21) は文献 5) と合致し、さらに、応力状態を常に弾性とすれば、式 (21) は $E(\alpha) = E$ とする後藤^{3), 4)} の導いた式と一致することになる。

3. 解析例

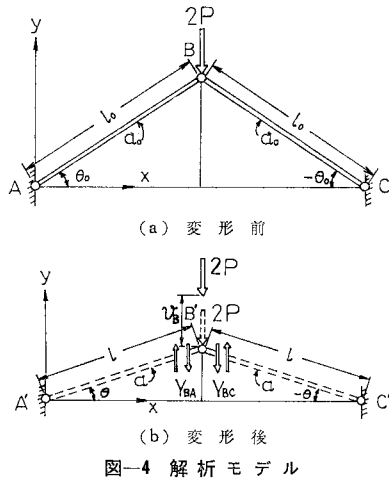
図-4 に示す骨組構造物^{1), 8)} の弾塑性大たわみ解析について述べる。図-4 の記号を用いて、材端 B の y 方向の力 dY_{BA} , dY_{BC} を求めれば、対称性を考慮して、

$$dY_{BA} = dY_{BC} = \left(\frac{aE(\alpha)}{l} s^2 + \frac{N}{l} c^2 - \frac{2\nu N}{l} s^2 \right) dv_B \dots \dots \dots (23)$$

力のつり合い条件より

$$2dP + dY_{BA} + dY_{BC} = 0 \dots \dots \dots (24)$$

$$\therefore -dP = \left(\frac{aE(\alpha)}{l} s^2 + \frac{N}{l} c^2 - \frac{2\nu N}{l} s^2 \right) dv_B \dots \dots \dots (25)$$



上式は、 $E(\alpha) = E$ とおくことにより、文献 1) の理論解 (弾性解) と一致する。

上式を、変位増分 dv_B を与えて解けば、 θ, l, σ は、前段階のそれらをそれぞれ θ', l', σ' とすることにより次式で求められる。

$$\theta = \theta' + d\theta, \quad l = l' + dl, \quad \sigma = \sigma' + d\sigma \dots \dots (26)$$

ここで、

$$dl = s dv_B, \quad d\theta = \frac{c}{l} dv_B, \quad d\sigma = E(\alpha) \frac{dl}{l}.$$

図-5 は、以上の式を用いて、 $\theta_0 = 30^\circ, E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \sigma_Y = 3150 \text{ kg/cm}^2$ とし、 $\mu_s = E_s/E = 0.1, 0.05, 0.01$ と変化させたときの $P/Ea_0 - \theta$ 曲線を示したものである。図中、黒丸実線は厳密解を示し、白丸破線は断面変化を無視した解を示す。ただし、本計算では、変位の刻みを $dv_B/l = 0.01$ として各変形段階の断面変化や応力状態を追跡した (なお、本例題では、対称条件より変位に関する独立変数が 1 個で、しかもこれを既知数として与えるため、単に応力状態の判定に留意すればよく、収束計算を要することなく解が機械的に得られることに留意されたい)。

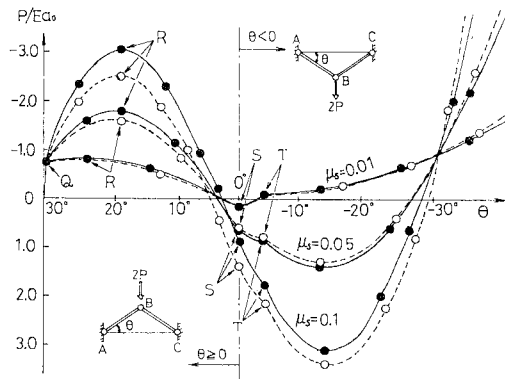


図-5 荷重 (P/Ea_0) -変形 (θ) 曲線

この図より、次のことがわかる。

(1) 弾性限界 (図-5 中、Q 点) より塑性流動が始まり、最高荷重 (図-5 中、R 点) に達したのち、荷重 P の絶対値が減少する不安定領域に移行し、さらに変形は、 $\theta = 0$ の点を越えて負の側に移る、いわゆる飛移り現象がみられる (なお、図-5 において、 $S \sim T$ 区間は、この変形過程において応力状態が一時的に弾性にもどる区間であり、このとき、部材剛性は $k_0 = aECC^T/l$ ($\neq aE_sCC^T/l$) に変化するため、曲線に折れ曲がりを生じることになる)。

(2) $\theta \leq -30^\circ$ の状態のトラスは、荷重 $2P$ が上側に作用した状態 (引張力が作用する) と同じであり、したがって、この場合には不安定現象は生ぜず、最終的には部材の引張破断によって壊れる。

(3) 断面の変化 k_1 の効果は、 μ_s が大きい場合 (アルミニウムや銅などに相当) に大となるが、 μ_s が小さく塑性流れが著しい場合 (軟鋼などに相当) には比較的小さいことがわかる。

なお、 $\mu_s = 1$ とすれば部材を弾性と仮定した解¹⁾ が得られ、また、その結果は $k = Ea/l$ のばね定数をもつ同一トラスに対して導かれている理論解^{10), 11)} とも合致する。

4. 結 び

本法によれば、トラスなどの滑節骨組構造物やケーブル (ケーブル素線が平行) 構造物^{1), 9)} などに対して、軸荷重下の弾塑性大変形問題を一般的に明らかにすることができる。

しかし、前者については、実際には曲げモーメントやねじりモーメントが付加されるため、このような問題をさらに一般的に論じるには、組み合わせ負荷に対する 3 次元的解析が必要であり、また、後者に対しても、ケーブル素線の複合作用 (たとえば、しまりなど) などの効果も考慮しなければならないなど、本理論をそのまま適用するにはまだ問題があるといえる。しかし、一軸応力下の複合非線形問題の解としては厳密であるので、このような問題を単純化した場合の上述の構造物に対する安定ならびに不安定領域での種々の挙動が、変形法という手慣れた手法によって比較的平易に解明できることはひとつの利点といえよう。

参 考 文 献

- 1) 山田嘉昭: 塑性・粘弾性、コンピューターによる構造工学講座 II-2-A、培風館、pp. 103~109, 1972.
- 2) 成岡昌夫・中村恒善: 骨組構造解析法要覧、培風館、pp. 160~181, 1976.
- 3) 後藤茂夫: 有限変形法に関する 2, 3 の考察、土木学会論文報告集、第 163 号、pp. 61~66, 1969.

- 4) 後藤茂夫ほか3名：非線形有限変形法（大変形法）によるトラスの大変形解析とその応用プログラム，土木学会論文報告集，第194号，pp. 55～69，1971.
- 5) Ohta, T., Kuroki, T. and N. Ogata : Elasto-plastic analysis of long span suspension bridges considering the effect of finite deformation, Proc. of the 26th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1976, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 26, pp. 191～200, 1978.
- 6) 三本木茂夫：梁および板の非線形解析，日本鋼構造協会第5回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集，pp. 186～193，1971.
- 7) 半谷裕彦・川股重也：立体トラスの非線形解析，日本鋼構造協会第5回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集，pp. 237～244，1971.
- 8) Oliveira, E.R.A : A method of fictitious forces for the geometrically nonlinear analysis of structures, Computational methods in nonlinear mechanics, Organizing Committee, U.S. National Science Found., Texas Inst. Co., pp. 383～403, 1974.
- 9) 村田重之・太田俊昭：吊橋の弾塑性大たわみ解析（第1報），九州大学工学集報，第45巻，第4号，pp. 489～494，1972.
- 10) Thompson, J.M.T. and G.W. Hunt : A General Theory of Elastic Stability, John Wiley, pp. 1～5, 1973.
- 11) Huseyin, K. : Nonlinear Theory of Elastic Stability, Noordhoff, pp. 61～64, 1975.

(1978.5.18・受付)
