

任意に振動する物体まわりの粘性流の解析

NUMERICAL ANALYSIS OF UNSTEADY VISCOUS FLOW
AROUND OSCILLATING OBSTACLES

塩 尻 弘 雄*

By Hiroo SHIOJIRI

1. はじめに

構造物にとって、強風は地震とならんで最も危険な外力の一つであり、構造物の安全かつ合理的設計のためには、風荷重の的確な評価が不可欠である。

これら、構造物に対する風荷重の検討は、従来は実在構造物を利用した実測と、風洞を利用した模型実験によって行われてきた。しかしながら、実測の場合、多大の費用と労力を要し、かつ既存の施設を利用するためいろいろ条件をかえてその影響を調べることは不可能である。風洞実験でも、実測ほどではないがやはりかなりの費用、労力、時間を要し、また、使用しうる材質、風洞の能力等による制限から、パラメーターの変化には限度がある。また、構造物が大振幅で振動する場合、模型の製作、圧力の測定などに困難が増す。

それに対し、数値計算による方法は、いったんプログラムを完成させれば解をうるための労力は少なく、また流れの条件、構造物の運動等を任意に設定できるから、個々のパラメーターを独立に変化させてそれぞれの影響をみることも可能である。また、任意の点の流速、圧力等も容易に求められるから、流れの状況を詳細に検討することが可能である。しかしながら、現在の計算機の能力から、扱いうるレイノルズ数は実物よりかなり小さくとらざるを得ず、また、空間的、時間的に離散化せざるを得ないことから、乱流の微細な構造を明らかにすることはできない。また、現在のところほとんど 2 次元解析にとどまっている。したがって、数値解析による方法は、少なくとも現在のところ、実験、実測にとってかわるものとはいえないが、それらと併用することにより、構造物に対する風の影響についての研究を大きく推進しうるものと考えられ、今後計算機の能力の向上、あるいはソフトウェアの発達に伴い、ますますその比重を高め

ていくものと思われる。

従来、流体の数値解法として最も広く使われてきたのは差分法であった^{1),2)}。しかし、最近、流体問題への有限要素法の適用がなされてきた^{3)~16)}。有限要素法の特徴は現象を局所的に近似したものをよせ集めて全体の近似を行うことで、このため、不規則な形状、多連結領域、混合境界条件等の際も差分法が出会うような困難は一切ない。要素の形状、大きさも場所により任意にかえることができるため、注目する量が局所的に大きな変化を示す箇所では要素を細かくとれるので、同一の自由度では差分法より精度を上げることができる。

有限要素法は広く利用されてきたが³⁾、流体問題への適用は少し遅れた。初期の適用は、容易に等価な変分問題に帰着できるポテンシャル流への適用であった。Zienkiewicz⁷⁾らは浸透流への適用を行い、Tong⁸⁾は弾性体内の完全流体運動の解析を行った。また、微小流速に限っては、類似の方法で粘性流に対する適用も行われている⁶⁾。その後、種々の工夫、重みつき残差の概念の導入によりナビエ・ストークス方程式への適用がなされた^{7)~16)}。

さて、差分法、有限要素法を問わず、物体まわりの粘性流の解析は数多くあるが^{2),11)~26)}、そのうち運動する物体を扱ったのは薄木¹²⁾、Bratanow^{13)~16)}ら、岡島ら^{17),18)}、Lugt²⁰⁾らである。Bratanow¹⁶⁾を除きすべて 2 次元非圧縮性流体に対するナビエ・ストークス方程式に基づき、薄木以外は流れ関数を用いている。

薄木¹²⁾は、弾性支持された物体と周辺の流れの相互作用の有限要素法による解法を提唱している。この解法では最終的には圧力と流速のうち一成分についての放物型方程式の時間積分に帰着する。Bratanow らは、空間に固定したメッシュを用いた有限要素法により、任意に振動する物体まわりの流れを解いている。物体表面の境界条件はラグランジュ乗数法により満足させている。岡島らは物体とともに平行移動する曲線座標を用いて任意に

* 正会員 工修 電力中央研究所 土木技術研究所

並進回転運動する円、および任意に並進運動する楕円まわりの流れを差分法で解いている。Lugt らは物体に固定した曲線座標を用い、一定速度で回転する楕円まわりの流れを差分法で解いている。

岡島、Lugt らの方法は曲線座標を用いた差分法であるため、円、楕円以外の扱いは困難で、前者は楕円については並進運動のみ、後者は等速回転運動のみを扱っている。Bratanow らの方法は一応任意形状の物体の任意の運動が扱えるが、ラグランジュ乗数法により物体表面の境界条件がどの程度精度よく満足されるか疑問が残る、また物体の運動の振幅も限定される。薄木の方法は、流れ関数を用いる方法に比し、所要計算時間が大きくなると思われる。

ここで述べる方法は、流れ関数と渦度の方程式に対する有限要素法に基づいていて、任意の形状が扱え、比較的計算効率がよく、物体に固定したメッシュを採用して物体表面の境界条件を精度よく満足させ、かつ任意に回転並進運動を行う物体まわりの流れを扱えるものである。

2. 解析法

(1) 基礎方程式

2次元非圧縮性流体の運動方程式は次のように与えられる。

$$\frac{Dq}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 q \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 q は流速ベクトル、 t は時間、 ρ は密度、 ν は動粘性係数、 p は圧力、 ∇ はハミルトン演算子、 D/Dt は物体に追従した微分である。

空間に固定した座標系 X, Y に対し、原点の位置が位置ベクトル r_A だけ異なり、かつ角度 θ だけ傾いた物体に固定した座標系 X', Y' を考える (図-1 参照)。

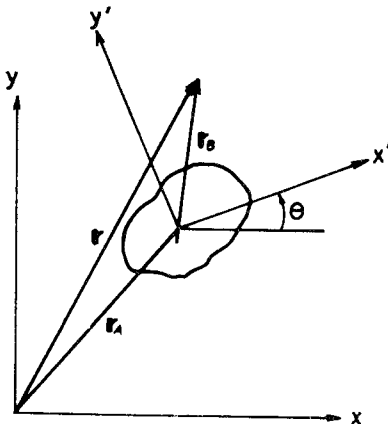


図-1 座標系

ここで、 r_A, θ は時間の関数である。 X', Y' 座標系に対する運動方程式は次式であらわされる²⁷⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_B^*}{\partial t} + q_B^* \cdot \nabla q_B^* = & -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 q_B^* - \frac{dq_A}{dt} \\ & + 2\omega \times q_B^* - \frac{d\omega}{dt} \times r_B + \omega^2 r_B \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

ここで、 $q_A = dr_A/dt$ 、 q_B^* は X', Y' 座標系からみた流速、 ω は X', Y' 座標系の回転の角速度ベクトル、 ω はその大きさ、 r_B は X', Y' 座標系原点からの位置ベクトルである。

さて、流体は非圧縮性であるから、次式が成立する。

$$\nabla \cdot q = \nabla \cdot (q_A + q_B^* + \omega \times r_B) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$\nabla \cdot q_A = 0, \nabla \cdot (\omega \times r_B) = 0$ であるから、

$$\nabla \cdot q_B^* = 0 \dots\dots\dots(4)$$

したがって、

$$q_B^* = ui + vj = (\partial\phi^*/\partial Y')i - (\partial\phi^*/\partial X')j \dots\dots\dots(5)$$

なる関係を満たす流れ関数 ϕ^* が存在する。ここで、 i, j は X', Y' 方向の単位ベクトル、 u, v はそれぞれ q_B^* の X', Y' 方向成分である。

次に渦度 ζ^* を次のように定義する。

$$\zeta^* = \partial v / \partial X' - \partial u / \partial Y' = -\nabla^2 \phi^* \dots\dots\dots(6)$$

式 (2) の両辺のローテーションをとれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta^*}{\partial t} + \nabla \times (q_B^* \cdot \nabla q_B^*) = & \nu \nabla^2 \zeta^* - \nabla \times (2\omega \times q_B^*) \\ & - \nabla \times \left(\frac{d\omega}{dt} \times r_B \right) - \nabla \times (\omega^2 r_B) \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

ところで、

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times (q_B^* \cdot \nabla q_B^*) = q_B^* \cdot \nabla \zeta^*, \nabla \times (2\omega \times q_B^*) = 0 \\ \nabla \times \left(\frac{d\omega}{dt} \times r_B \right) = 2 \frac{d\omega}{dt}, \nabla \times (\omega^2 r_B) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

式 (7)、(8) より次式を得る。

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} + q_B^* \cdot \nabla \zeta^* + 2 \frac{d\omega}{dt} = \nu \nabla^2 \zeta^* \dots\dots\dots(9)$$

ここで、流れ関数の大きさが場所により大きく異なりけた落ち誤差を増大させることを防ぐため、Lugt²⁸⁾ にならない、次の変換を行う。

$$\left. \begin{aligned} q_B = q_B^* + \omega \times r_B \\ \phi = \phi^* - (1/2) r_B^2 \omega \\ \zeta = \zeta^* + 2\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 r_B は r_B の大きさである。

これらを式 (6)、(9) に代入すると次の式を得る。

$$\zeta = -\nabla^2 \phi \dots\dots\dots(11)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + (q_B - \omega \times r_B) \cdot \nabla \zeta = \nu \nabla^2 \zeta \dots\dots\dots(12 \cdot a)$$

あるいは、

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi^*}{\partial Y'} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial X'} - \frac{\partial \phi^*}{\partial X'} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial Y'} = \nu \nabla^2 \zeta \dots\dots\dots(12 \cdot b)$$

結局、式 (11) と (12・a) あるいは (12・b) を連立して解いてゆけばよい。

(2) 有限要素法の適用

式 (11), (12・b) を有限要素近似により解く。Smith¹¹⁾らの方法に従って定式化する。有限要素法は変分原理に基づいているため境界条件は自然境界条件と束縛境界条件に分類される。通常束縛境界条件は境界での値を指定し、自然境界条件は境界での法線方向の微係数を指定するものである。さて、自然境界条件が次のように与えられるものとする。

$$\left. \begin{array}{l} \text{境界 } S_\zeta \text{ で, } \partial\zeta/\partial n = q_\zeta \\ \text{境界 } S_\phi \text{ で, } \partial\phi/\partial n = q_\phi \end{array} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

ここで、 n は法線方向長さである。式 (11), (12・b), (13) をガレルキン型変分形式で書くと次のようになる。

$$\iint \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\phi^*}{\partial Y'} \frac{\partial\zeta}{\partial X'} - \frac{\partial\phi^*}{\partial X'} \frac{\partial\zeta}{\partial Y'} - \nu \nabla^2 \zeta \right) \delta\zeta dX' dY' \\ = \nu \int_{S_\zeta} \left(q_\zeta - \frac{\partial\zeta}{\partial n} \right) \delta\zeta ds \dots\dots\dots(14 \cdot a)$$

$$\iint (\nabla^2 \phi + \zeta) \delta\phi dX' dY' = \int_{S_\phi} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} - q_\phi \right) \delta\phi ds \\ \dots\dots\dots(14 \cdot b)$$

ここで、 s は境界にそった長さである。 ∇^2 の項を部分積分すれば次式を得る。

$$\iint \left\{ \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\phi^*}{\partial Y'} \frac{\partial\zeta}{\partial X'} - \frac{\partial\phi^*}{\partial X'} \frac{\partial\zeta}{\partial Y'} \right) \delta\zeta \right. \\ \left. + \nu \left(\frac{\partial\delta\zeta}{\partial X'} \frac{\partial\zeta}{\partial X'} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial Y'} \frac{\partial\zeta}{\partial Y'} \right) \right\} dX' dY' \\ = \int_{S_\zeta} q_\zeta \delta\zeta ds \dots\dots\dots(15)$$

$$\iint \left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial X'} \frac{\partial\phi}{\partial X'} + \frac{\partial\delta\phi}{\partial Y'} \frac{\partial\phi}{\partial Y'} - \zeta \delta\phi \right) dX' dY' \\ = - \int_{S_\phi} q_\phi \delta\phi ds \dots\dots\dots(16)$$

さて、領域を3節点の三角形要素で分割するものとする。各要素内で ϕ, ζ, ϕ^* はそれぞれ次のように近似できるものとする。

$$\phi^* = \phi \cdot \phi_n^*, \quad \zeta = \phi \cdot \zeta_n, \quad \phi = \phi \cdot \phi_n \dots\dots\dots(17)$$

ここで、 ϕ は内挿関数ベクトル、 $\phi_n^*, \zeta_n, \phi_n$ はそれぞれ ϕ^*, ζ, ϕ の節点での値を示すベクトルである。今回 ϕ は三角形の面積座標に等しくとった。式 (17) を式 (15), (16) に代入すると次式を得る。

$$\left. \begin{array}{l} \delta\zeta_n^t (M_e \dot{\zeta}_n + A_e \zeta_n + \nu K_e \zeta_n - B_{\zeta,e}) = 0 \\ \delta\phi_n^t (K_e \phi_n - B_{\phi,e} - M_e \zeta_n) = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

ここで、

$$M_e = \iint \phi \phi^t dX' dY' \dots\dots\dots(19 \cdot a)$$

$$A_e = \iint \phi \left(\frac{\partial\phi^t}{\partial Y'} \phi_n^* \frac{\partial\phi^t}{\partial X'} - \frac{\partial\phi^t}{\partial X'} \phi_n^* \frac{\partial\phi^t}{\partial Y'} \right) dX' dY' \\ \dots\dots\dots(19 \cdot b)$$

$$K_e = \iint \left(\frac{\partial\phi}{\partial X'} \frac{\partial\phi^t}{\partial X'} + \frac{\partial\phi}{\partial Y'} \frac{\partial\phi^t}{\partial Y'} \right) dX' dY' \\ \dots\dots\dots(19 \cdot c)$$

$$B_{\zeta,e} = \nu \int_{S_\zeta} \phi q_\zeta ds, \quad B_{\phi,e} = \int_{S_\phi} \phi q_\phi ds \dots\dots\dots(19 \cdot d)$$

式 (18) は任意の $\delta\zeta_n, \delta\phi_n$ について成立しなければならないから、一要素の節点について次式が成立する。

$$\left. \begin{array}{l} M_e \dot{\zeta}_n + A_e \zeta_n + \nu K_e \zeta_n = B_{\zeta,e} \\ K_e \phi_n = B_{\phi,e} + M_e \zeta_n \end{array} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

ここで、計算量を少なくするため、 M_e の非対角項を M_e の対角項に加えて対角化したもの、すなわちランプトマスマトリックス M_e^* を使用するものとする次式を得る。

$$\left. \begin{array}{l} M_e^* \dot{\zeta}_n + A_e \zeta_n + \nu K_e \zeta_n = B_{\zeta,e} \\ K_e \phi_n = B_{\phi,e} + M_e^* \zeta_n \end{array} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

式 (21) をすべての要素について重ね合わせるにより、全体に対する方程式として次式を得る。

$$M\dot{\zeta} + A\zeta + \nu K\zeta = B_\zeta \dots\dots\dots(22)$$

$$K\phi = B_\phi + M\zeta \dots\dots\dots(23)$$

ここで、 A, M, K, B_ϕ, B_ζ はそれぞれ $A_e, M_e^*, K_e, B_{\phi,e}, B_{\zeta,e}$ をすべての要素について重ね合わせたもの、 ζ, ϕ は全節点における ζ, ϕ の値を示すベクトルである。式 (22) の積分に対して最も簡単なオイラー法を用いるものとするれば次のようになる。

$$\zeta_{t+dt} = \zeta_t + dt M^{-1} (-A_t \zeta_t - \nu K_t \zeta_t + B_{\zeta,t}) \\ \dots\dots\dots(24)$$

ここで、 dt は時間刻み、下つきの添字 $t, t+dt$ はそれぞれ時刻 $t, t+dt$ における値を示す。なお、ベクトル $A_t \zeta_t$ は実際の計算では次のようにして求めた。要素行列 A_e の時刻 t における値 $A_{e,t}$ は式 (19・b) より求まるが、三角形要素で線形の内挿関数を使用する場合、具体的には次式で与えられる。

$$A_{e,t} = D \{ C^t \phi_{n,t}^* b^t - b^t \phi_{n,t}^* C^t \} \dots\dots\dots(19 \cdot b')$$

ここで、 $D = (1/3) (A, A, A)^t, b = (1/2 A) (b_1, b_2, b_3)^t, C = (1/2 A) (C_1, C_2, C_3)^t, A$ は三角形要素の面積、 $b_1 = y_2' - y_3', b_2 = y_3' - y_1', b_3 = y_1' - y_2', C_1 = x_3' - x_2', C_2 = x_1' - x_3', C_3 = x_2' - x_1'$ で、 $x_1', x_2', x_3', y_1', y_2', y_3'$ は要素の3節点での X', Y' 座標値で、 $\phi_{n,t}^*$ は時刻 t における3節点での ϕ^* の値からなるベクトルである。 $\zeta_{n,t}$ を時刻 t における3節点での ζ の値からなるベクトルとすれば次式が成立する。

$$A_{e,t} \zeta_{n,t} = \{ (C^t \phi_{n,t}^*) (b^t \zeta_{n,t}) + (b^t \phi_{n,t}^*) (C^t \zeta_{n,t}) \} D \\ \dots\dots\dots(19 \cdot b'')$$

ベクトル $A_t \zeta_t$ は、 $A_{e,t} \zeta_{n,t}$ をすべての要素について重ね合わせるによって得られる。 ϕ_{t+dt} は次式から求まる。

$$K\phi_{t+dt} = B_{\phi,t+dt} + M_{t+dt} \zeta_{t+dt} \dots\dots\dots(25)$$

(3) 境界条件

物体表面での流体速度は物体の速度と一致する。物体に固定した座標系では物体表面で流速0である。したがって物体表面で流れ関数

$$\phi^*_{\text{wall}}=0 \quad \dots\dots\dots(26)$$

としてよく、表面の渦度は、渦度が三角形要素内で線形に変化するとして次式で与えられる。

$$\zeta^*_{\text{wall}}=-\{3(\phi_l^*-\phi^*_{\text{wall}})/l^2+\zeta_l^*/2\} \quad \dots\dots(27)$$

ここで、下つき添字 wall および l はそれぞれ物体表面上および表面より垂直距離 l だけ離れた点での値を示す。式(10)を式(26)、(27)に代入し、結局次の式を得る。

$$\begin{aligned} \phi_{\text{wall}} &= -(1/2)(X'^2_{\text{wall}}+Y'^2_{\text{wall}})\omega \quad \dots\dots(28) \\ \zeta_{\text{wall}} &= -\{3(\phi_l-\phi_{\text{wall}})/l^2+\zeta_l/2\} \\ &\quad +3\omega\{1-(X'^2_{\text{wall}}+Y'^2_{\text{wall}})/2l^2 \\ &\quad + (X_l'^2+Y_l'^2)/2l^2\} \quad \dots\dots(29) \end{aligned}$$

次に、物体から遠く離れた領域での境界条件を考える。岡島¹⁶⁾らは、Osceenの近似解による解を境界条件とすることを提唱し、かつ、境界を物体の代表長(楕円の場合半翼弦長)の百倍以上にとるとOsceenの近似式で抗力係数、揚力係数を0にとって差し支えない、すなわち乱れない流れの条件を与えて差し支えないとしている。Lugt²⁰⁾らは、一様な角速度で回転する楕円まわりの流れの解析に際して、上流側では、

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= 0 \\ \partial\phi/\partial r_B &= -V_{C\theta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(30)$$

下流側では、

$$\left. \begin{aligned} \partial\zeta/\partial t + \mathbf{V}_C \cdot \nabla \zeta &= 0 \\ \left[\frac{\partial \mathbf{q}_B^*}{\partial t} + \mathbf{V}_C \cdot \nabla \mathbf{q}_B^* + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_B^* - \omega^2 \mathbf{r}_B \right]_s &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(31)$$

を提唱している。 \mathbf{V}_C は乱されない流れの流速で $V_{C\theta}$ はその θ 方向成分(θ については図-1参照)、 $[\]_s$ も、 θ 方向成分をあらわす。物体が任意に並進、回転運動する場合に拡張すると次のようになる。

上流側で

$$\zeta=0 \quad \dots\dots\dots(32\cdot a)$$

$$\partial\phi/\partial r_B = -V_{C\theta} \quad \dots\dots\dots(32\cdot b)$$

下流側で

$$\partial\zeta/\partial t + \mathbf{V}_C \cdot \nabla \zeta = 0 \quad \dots\dots\dots(33\cdot a)$$

$$\left[\frac{d\mathbf{q}_A}{dt} + \frac{\partial \mathbf{q}_B^*}{\partial t} + \mathbf{V}_C \cdot \nabla \mathbf{q}_B^* + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}_B^* + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_B - \omega^2 \mathbf{r}_B \right]_s = 0 \quad \dots\dots\dots(33\cdot b)$$

ここでは、式(32・a)、(32・b)、(33・a)、(33・b)と、式(33・b)のかわりに式(32・b)を使用したものと2通りの計算を行った。

(4) 物体表面の圧力の計算法

式(2)、(6)、(10)と、物体表面で $\mathbf{q}_B^*=\mathbf{0}$ であることから、物体表面で次の式が成立する。

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = -\nu \frac{\partial \zeta}{\partial n} - \left[\frac{d\mathbf{q}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_B - \omega^2 \mathbf{r}_B \right]_s \quad \dots\dots\dots(34)$$

ここで、 s, n はそれぞれ物体表面にそった長さ、および物体表面に垂直外向きに測った長さであり、 $[\]_s$ は s 方向成分をあらわす。また、物体表面に作用するせん断力 τ は次式であらわされる。

$$\frac{\tau}{\rho} = -\nu \left[\frac{\partial \mathbf{q}_B^*}{\partial n} \right]_s = -\nu(\zeta - 2\omega) \quad \dots\dots\dots(35)$$

物体に作用する圧力に基づく力 \mathbf{D}_p は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_p &= -\int_0^L \mathbf{n} p ds = -\int_0^L \mathbf{n} \left[\int_0^s \frac{\partial p}{\partial s'} ds' \right] ds \\ &= -\int_0^L \frac{\partial p}{\partial s} ds \int_s^L \mathbf{n} ds' \\ &= -\int_0^L \frac{\partial p}{\partial s} \left\{ \begin{aligned} -Y'(L) + Y'(s) \\ X'(L) - X'(s) \end{aligned} \right\} ds \quad \dots\dots(36) \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{n} は法線方向単位ベクトル、 L は物体の周長、 $X'(s), Y'(s)$ はそれぞれ基準点から物体周辺にそった長さが s の点の X', Y' 座標値であり、積分は物体周辺にそって行われる。

物体に作用するせん断力に基づく力 \mathbf{D}_τ は、次式で与えられる。

$$\mathbf{D}_\tau = \rho \nu \int_0^L \mathbf{s}(-\zeta + 2\omega) ds \quad \dots\dots\dots(37)$$

ここで、 \mathbf{s} は s 方向単位ベクトルである。

物体に作用する圧力に基づくモーメント M_p 、せん断力に基づくモーメント M_τ は、それぞれ次のように与えられる。

$$\begin{aligned} M_p &= -\int_0^L (\mathbf{r}_B \times \mathbf{n}) p ds = -\int_0^L (\mathbf{r}_B \times \mathbf{n}) \left(\int_0^s \frac{\partial p}{\partial s'} ds' \right) ds \\ &= -\int_0^L \frac{\partial p}{\partial s} ds \int_s^L (\mathbf{r}_B \times \mathbf{n}) ds' = -\int_0^L \frac{\partial p}{\partial s} \frac{1}{2} \\ &\quad \cdot \{X'^2(L) + Y'^2(L) - X'^2(s) - Y'^2(s)\} ds \\ &\quad \dots\dots\dots(38) \end{aligned}$$

$$M_\tau = \rho \nu \int_0^L \mathbf{r}_B \times \mathbf{s}(-\zeta + 2\omega) ds \quad \dots\dots\dots(39)$$

物体表面を図-2のように多角形で近似し、各辺、各節点に番号づけるものとする。表面の節点数を N とする。 ζ が辺上で線形に変化し、 $\partial\zeta/\partial n$ が辺上で一定と仮定すれば第 i 節点上の圧力 $p_i, \mathbf{D}_p, \mathbf{D}_\tau, M_p, M_\tau$ らは以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} p_i - p_1 &= \rho \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ -\frac{E_j}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial n} \right) - \frac{d\mathbf{q}_A X}{dt} (dX)_j \right. \\ &\quad \left. - \frac{d\mathbf{q}_A Y}{dt} (dY)_j + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} (Y_j' X'_{j+1} - X_j' Y'_{j+1}) \right\} \end{aligned}$$

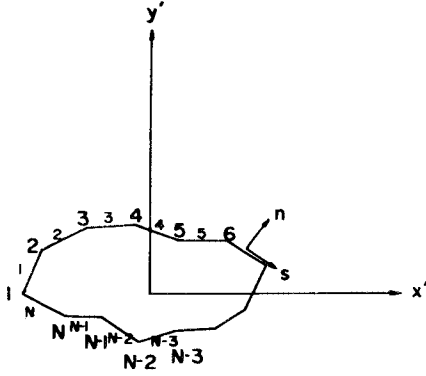


図-2 物体表面の多角形近似

$$+ \frac{\rho\omega^2}{2}(X_i'^2 + Y_i'^2 - X_1'^2 - Y_1'^2) \dots \dots \dots (40)$$

$$D_p = \rho \sum_{j=1}^N \left[\nu \frac{E_j}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial n} \right)_j \left\{ \frac{(1/2)(Y'_{j+1} + Y'_j)}{(1/2)(X'_{j+1} + X'_j)} \right\} + \left\{ \frac{dq_{AX}}{dt} (\Delta X)_j + \frac{dq_{AY}}{dt} (\Delta Y)_j \right\} \times \left\{ \frac{(1/2)(Y'_{j+1} + Y'_j)}{-(1/2)(X'_{j+1} + X'_j)} \right\} + \frac{d\omega}{dt} \left\{ -I^j_Y (\Delta X)_j + I^j_{XY} (\Delta Y)_j \right\} - \omega^2 \left\{ I^j_{XY} (\Delta X)_j + I^j_Y (\Delta Y)_j \right\} \right] \dots \dots \dots (41)$$

$$D_c = -\rho \nu \sum_{j=1}^N \frac{\zeta_j + \zeta_{j+1}}{2} \left\{ \frac{(\Delta X)_j}{(\Delta Y)_j} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

$$M_p = -\rho \sum_{j=1}^N \left[\nu \left(\frac{\partial \zeta}{\partial n} \right)_j E_j \frac{I^j_X + I^j_Y}{2} + \frac{dq_{AX}}{dt} (\Delta X)_j + \frac{dq_{AY}}{dt} (\Delta Y)_j + \frac{d\omega}{dt} \left\{ -J^j_Y (\Delta X)_j + J^j_X (\Delta Y)_j \right\} - \omega^2 \left\{ J^j_X (\Delta X)_j + J^j_Y (\Delta Y)_j \right\} \right] \dots \dots \dots (43)$$

$$M_c = -\rho \nu \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\zeta_j + \zeta_{j+1}}{2} - 2\omega \right) (X'_j Y'_{j+1} - X'_{j+1} Y'_j) \right] \dots \dots \dots (44)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} E_j &= \sqrt{(X'_{j+1} - X'_j)^2 + (Y'_{j+1} - Y'_j)^2} \\ (\Delta X)_j &= X'_{j+1} - X'_j \\ (\Delta Y)_j &= Y'_{j+1} - Y'_j \\ I^j_X &= (1/3)(X'^2_j + X'_j X'_{j+1} + X'^2_{j+1}) \\ I^j_Y &= (1/3)(Y'^2_j + Y'_j Y'_{j+1} + Y'^2_{j+1}) \\ I^j_{XY} &= (1/6)(2 Y_j X_j + Y_j X_{j+1} + Y_{j+1} X_j + 2 Y_{j+1} X_{j+1}) \\ J^j_X &= (1/8)(Y'^3_{j+1} + Y'^2_{j+1} Y'_j + Y'_{j+1} Y'^2_j + Y'^3_j) + (1/24)(3 X'_j Y'^2_j + 2 X'_j Y'_j Y'_{j+1} + X'^2_j Y'^2_{j+1} + X'_{j+1} Y'^2_j + 2 X'_{j+1} Y'_j Y'^2_{j+1} + 3 X'^2_{j+1} Y'^2_j) \\ J^j_Y &= (1/8)(X'^3_{j+1} + X'^2_{j+1} X'_j + X'_{j+1} X'^2_j \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ X'^2_j) + (1/24)(3 Y'_j X'^2_j \\ &+ 2 Y'_j X'_j X'_{j+1} + Y'^2_j X'^2_{j+1} + Y'_{j+1} X'^2_j \\ &+ 2 Y'_{j+1} X'_j X'^2_{j+1} + 3 Y'^2_{j+1} X'^2_j) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

X'_j, Y'_j, ζ_j はそれぞれ節点 j 上の X', Y', ζ の値 ($\partial \zeta / \partial n$) $_j$ は辺 j 上の $\partial \zeta / \partial n$ の値である. ($\partial \zeta / \partial n$) は境界上の値 ζ_{wall} と, 境界から垂直距離 l だけ離れた点での値 ζ_l から,

$$\partial \zeta / \partial n = (\zeta_l - \zeta_{wall}) / l \dots \dots \dots (46)$$

と求まる. また, q_{AX}, q_{AY} はそれぞれ q_A の X', Y' 方向成分である.

(5) 安定性の検討

式 (24) を積分するにあたって dt を決定せねばならないが, dt は打切り誤差と安定性から決定される. 通常安定性による制限の方が厳しく, 安定限界を知ることが必要である. 安定性の解析としては差分法については Perturbation 法, Von Neumann 法, Hirt の方法等が著名である¹⁾. しかし有限要素法では差分法のように整然としたメッシュを使用しないので上記の方法は適用が困難である. けれども構造解析に用いられる有限要素法には安定解析がなされており²⁸⁾, 同様の方法を流体問題に使用することは可能である¹⁵⁾. 安定性は式 (24) のいわゆる輸送項 $dtM^{-1}A$, 拡散項 $\nu dtM^{-1}K$ などとともに境界条件によって支配される. 境界条件の影響の理論的解明は困難なので今後にゆずり, ここでは輸送項, 拡散項の影響のみを調べる. 式 (24) の安定性を確保するためには行列 $\{I - dtM^{-1}(A + \nu K)\}$ の固有値 λ の絶対値が 1 を越えてはならない²⁸⁾. ここで I は単位行列である. ところで λ は, 要素についての行列 $\{I - dtM^{-1}e^* (A_e + \nu K_e)\}$ の固有値 λ_e の絶対値の最大のものを越えない^{15), 28)}. Bratanow ら¹⁵⁾ は流れ関数について三次の内挿関数, 渦度について一次の内挿関数を用いたが, 二等辺三角形要素について要素内の流速を仮定することにより λ_e の値を求めた. 今回の場合, 任意形状の要素, 任意の流速について λ_e は次のように与えられる.

$$\lambda_e = 1, 1 - \frac{3 dt\nu}{4 A_e e^2} \left\{ \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}{2} \pm \sqrt{l_1^4 + l_2^4 + l_3^4 - l_1^2 l_2^2 - l_2^2 l_3^2 - l_3^2 l_1^2} \right\} \dots \dots \dots (47 \cdot a)$$

あるいは,

$$\lambda_e = 1, 1 - 3 dt\nu \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{h_1^4} + \frac{1}{h_2^4} + \frac{1}{h_3^4} - \frac{1}{h_1^2 h_2^2} - \frac{1}{h_2^2 h_3^2} - \frac{1}{h_3^2 h_1^2}} \right\} \dots \dots \dots (47 \cdot b)$$

ここで, l_1, l_2, l_3 は三角形の三辺の長さ, h_1, h_2, h_3 は三角形の三垂線の長さ, A_e は三角形の面積である.

すべての要素について $|\lambda_e|$ が 1 を越えなければ $|\lambda| \leq 1$ となる. これから Δt について次の条件を得る.

$$\Delta t \leq \frac{2}{3\nu} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} \right) + \sqrt{\frac{1}{h_1^4} + \frac{1}{h_2^4} + \frac{1}{h_3^4} - \frac{1}{h_1^2 h_2^2} - \frac{1}{h_2^2 h_3^2} - \frac{1}{h_3^2 h_1^2}} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

もし over shoot せぬことを求めるならば, 式 (48) の右辺は 1/2 倍せねばならない. 式 (48) から Δt は最小要素の代表長の 2 乗に比例するといえる. 流速の影響, したがってレイノルズ数の影響は直接にはあらわれてこないが, 境界条件への影響は考えられる. また, レイノルズ数が増加すると境界層が薄くなり, それに伴ってメッシュを細かくとらねばならないのでそれによる間接的影響は存在する.

(6) 計算の効率化

計算量の大部分は式 (24), (25) を解くことに費やされる. 特に式 (25) の計算量が多い. 差分法の場合, メッシュが整然としていることから, F.F.T. 法等の効率のよい解法が可能である^{1), 19), 29), 30)}. しかし有限要素法の場合, いまのところコレツキー法等のバンドアルゴリズムを利用するしかない³⁰⁾. メッシュはある程度細かくらねば信頼しうる値は得られないし, 領域は十分広くとらねば外部の境界条件が精度よくあてはまらない. したがって節点数はかなり多くなり (1000 節点以上), 各時間刻みごとに式 (24), (25) を解くのは相当の計算量となる. 物体が 2 軸対称の場合, 次のようにして計算量をかなり減らすことができる.

図-3 に示すように, 物体の対称軸を X' 軸, Y' 軸と一致させて X' 軸, Y' 軸で分割された領域をそれぞれ I, II, III, IV とし, 対応する ζ, ψ をそれぞれ $\zeta_1, \zeta_{II}, \zeta_{III}, \zeta_{IV}, \psi_1, \psi_{II}, \psi_{III}, \psi_{IV}$ とする. ここで次の量を定義する.

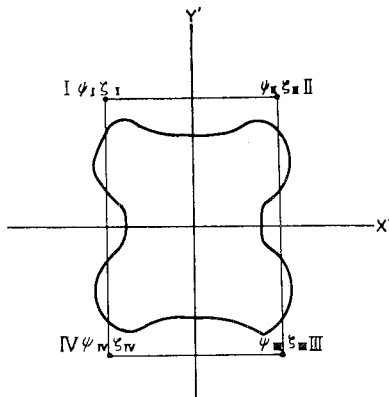


図-3 2 軸対称物体

$$\left. \begin{aligned} \phi^{II} &= (1/4)(\phi_I + \phi_{II} + \phi_{III} + \phi_{IV}) \\ \phi^{I0} &= (1/4)(\phi_I - \phi_{II} - \phi_{III} + \phi_{IV}) \\ \phi^{00} &= (1/4)(\phi_I - \phi_{II} + \phi_{III} - \phi_{IV}) \\ \phi^{0I} &= (1/4)(\phi_I + \phi_{II} - \phi_{III} - \phi_{IV}) \\ \zeta^{II} &= (1/4)(\zeta_I + \zeta_{II} + \zeta_{III} + \zeta_{IV}) \\ \zeta^{I0} &= (1/4)(\zeta_I - \zeta_{II} - \zeta_{III} + \zeta_{IV}) \\ \zeta^{00} &= (1/4)(\zeta_I - \zeta_{II} + \zeta_{III} - \zeta_{IV}) \\ \zeta^{0I} &= (1/4)(\zeta_I + \zeta_{II} - \zeta_{III} - \zeta_{IV}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

領域 I に属する要素のみについて M_e^*, A_e, K_e 等を重ね合わせる. このとき, 式 (24), (25) と等価な次式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{I+dt}^{II} &= \zeta_I^{II} + \Delta t M_I^{-1} (-A_{I,t}^{00} \zeta_I^{II} - A_{I,t}^{0I} \zeta_I^{I0} - A_{I,t}^{I0} \zeta_I^{I0} - A_{I,t}^{II} \zeta_I^{00} - \nu K_I \zeta_I^{II} + B_{\zeta,t}^{II}) \\ \zeta_{I+dt}^{I0} &= \zeta_I^{I0} + \Delta t M_I^{-1} (-A_{I,t}^{00} \zeta_I^{I0} - A_{I,t}^{0I} \zeta_I^{I0} - A_{I,t}^{I0} \zeta_I^{II} - A_{I,t}^{II} \zeta_I^{I0} - \nu K_I \zeta_I^{I0} + B_{\zeta,t}^{I0}) \\ \zeta_{I+dt}^{00} &= \zeta_I^{00} + \Delta t M_I^{-1} (-A_{I,t}^{00} \zeta_I^{00} - A_{I,t}^{0I} \zeta_I^{00} - A_{I,t}^{I0} \zeta_I^{00} - A_{I,t}^{II} \zeta_I^{00} - \nu K_I \zeta_I^{00} + B_{\zeta,t}^{00}) \\ \zeta_{I+dt}^{0I} &= \zeta_I^{0I} + \Delta t M_I^{-1} (-A_{I,t}^{00} \zeta_I^{0I} - A_{I,t}^{0I} \zeta_I^{0I} - A_{I,t}^{I0} \zeta_I^{0I} - A_{I,t}^{II} \zeta_I^{0I} - \nu K_I \zeta_I^{0I} + B_{\zeta,t}^{0I}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

$$\left. \begin{aligned} K_I \phi_{I+dt}^{II} &= B_{\phi,t+dt}^{II} + M_I \zeta_{I+dt}^{II} \\ K_I \phi_{I+dt}^{I0} &= B_{\phi,t+dt}^{I0} + M_I \zeta_{I+dt}^{I0} \\ K_I \phi_{I+dt}^{00} &= B_{\phi,t+dt}^{00} + M_I \zeta_{I+dt}^{00} \\ K_I \phi_{I+dt}^{0I} &= B_{\phi,t+dt}^{0I} + M_I \zeta_{I+dt}^{0I} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

ここで, M_I, K_I は M_e^*, K_e を領域 I について重ね合わせたもの, $A_{I,t}^{00}, A_{I,t}^{0I}, A_{I,t}^{I0}, A_{I,t}^{II}$ 等は式 (19・b) で, ψ_n^* のかわりにそれぞれ $\phi^{00}, \phi^{0I}, \phi^{I0}, \phi^{II} + (1/2)r_B^2$ の節点値からなるベクトルを代入し, 領域 I について重ね合わせたもの, $B_{\zeta,t}^{00}, B_{\phi,t}^{00}$ 等は, それぞれ B_{ζ}, B_{ϕ} から式 (49), (50) と同様な関係式で定義されるベクトル, ζ^{00}, ϕ^{00} 等は, ζ^{00}, ϕ^{00} 等の節点における値を示すベクトルである. 下付き添字 $t, t + \Delta t$ はそれぞれ時刻 $t, t + \Delta t$ における値を示す.

束縛境界条件は次のように与えられる.

物体表面で, $\phi^{I0} = \phi^{0I} = \phi^{00} = 0, \phi^{II} = (1/2)r_B^2 \omega$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{\text{wall}}^{00} &= -\{3(\phi_I^{00} - \phi_{\text{wall}}^{00})/l^2 + (1/2)\zeta_I^{00}\} \\ \zeta_{\text{wall}}^{0I} &= -\{3(\phi_I^{0I} - \phi_{\text{wall}}^{0I})/l^2 + (1/2)\zeta_I^{0I}\} \\ \zeta_{\text{wall}}^{I0} &= -\{3(\phi_I^{I0} - \phi_{\text{wall}}^{I0})/l^2 + (1/2)\zeta_I^{I0}\} \\ \zeta_{\text{wall}}^{II} &= -\{3(\phi_I^{II} - \phi_{\text{wall}}^{II})/l^2 + (1/2)\zeta_I^{II}\} \\ &+ 3\omega \{1 + (X'^2 + Y'^2 - X'_{\text{wall}}^2 - Y'_{\text{wall}}^2)/(2l^2)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} X' \text{ 軸上で } \phi_{0I} &= \phi_{00} = \zeta_{0I} = \zeta_{00} = 0 \\ Y' \text{ 軸上で } \phi_{I0} &= \phi_{00} = \zeta_{I0} = \zeta_{00} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53 \cdot b)$$

外部の境界上では, 式 (32・a), (33・a) と, 式 (50) から ζ^{00} 等の値が求まる. 式 (24), (25) と式 (51), (52) を比べると, 式 (24) と式 (51) ではあまり計算量の差はないが, 式 (25) と (52) では後者の計算量は前者の

1/4 強であり、所要コアメモリ数、けた落ち誤差の点でも後者の方が有利である。著者の経験では、2 軸対称の場合、節点数 1600 (バンド幅 40)、すべて倍長で計算するとして約 400 kB あればコア内のみで計算可能で、計算時間は HITAC-8500 を使用した場合、1 時間刻み当り約 5 秒であった。

3. 計算例

円および楕円について計算を行ったが、節点座標 (X', Y') は次のようにとった。

$$\left. \begin{aligned} X' &= (A \cosh \eta + B \sinh \eta) \cos \varphi \\ Y' &= (A \sinh \eta + B \cosh \eta) \sin \varphi \\ A &\geq B > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(54 \cdot a)$$

$$\varphi = i \Delta \varphi, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_\varphi, \quad \Delta \varphi = 2\pi/N_\varphi \dots\dots(54 \cdot b)$$

$$\eta = (j-1) \Delta \eta / 2, \quad j = 1, 2, \dots, M \dots\dots(54 \cdot c)$$

ここで、式 (54.c) の j は、1~ M_1 までは 1 つずつ増加し、それ以後は 2 つずつ増加するものとする。図-4 に $N_\varphi=40, M_1=9, B/A=1$, および $N_\varphi=40, M_1=9, B/A=0.5$ のメッシュの一部を示した。

まず、外部との境界をどの程度遠くにとればよいか知るため、 $B/A=1, M_1=6, N_\varphi=36$, レイノルズ数 $R_e=40$ の条件で、外部との境界の半径 R と A の比を種々かえて抗力を計算した結果を表-1 に示した。レイノルズ数は乱されない流れの流速を u として、 $R_e=(2Au)/\nu$ と定義した。抗力係数 C_D は、抗力 D_X から、 $C_D=D_X/\{(1/2)\rho u^2\}$ と定義した。下流側の条件に式 (32.b) を使用している。初期条件としては、渦度 ζ はいたるところ 0、上下流境界での接線方向の流速は乱されない流れの接線方向流速に等しくとった。したがって流れが時刻 t で静止状態から瞬間的に加速されたと同じ状態となる。無次元時間 $t'=t/(A/u)=7.5$ の際の値を比較

している。なお、他の計算例でも初期条件は同一である。表-1 から、 R/A が 100 以上では抗力係数の変化がほとんどなく、 R/A を 100 程度にとればよいと判断される。

次に、下流側条件として式 (32.b) を使用した場合と式 (33.b) を使用した場合について、上下に $q_{AY}/u=0.2 \sin \pi t^*$ なる速度で振動する円柱まわりの圧力分布を計算した。式 (34) を物体表面にそって一周積分した値 $4p=p(L)-p(0)$ は、理論上は 0 となるはずであるが、数値計算上は 0 にならず、その大きさが精度の一つのめやすになると考えられる。表-2 に t^* の種々の値における $4p$ の値を示した。この結果式 (32.b) を使用した方がよい精度が得られると判断された。

表-3 にはメッシュの細かさによる差を示した。揚力係数 C_L は、揚力 D_L から、 $C_L=D_L/\{(1/2)\rho u^2\}$ で定義した。 C_L の値は、 t^* が 0 から 15 までの絶対値の平均値で示した。メッシュを細かくとるほど揚力が増加する傾向がうかがわれる。

表-1 境界半径と抗力係数

R/A	25.25	50.75	102.0	144.6	205.1
C_D	1.685	1.700	1.703	1.704	1.704

$R_e=40, t^*=7.5$

表-2 境界条件と圧力誤差

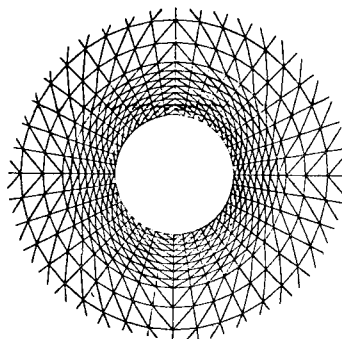
t^*	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
$4p/(1/2)\rho u^2$ 33 b	0.186	0.235	0.046	-0.186	-0.234	-0.086	-0.161
32 b	0.003	-0.001	-0.004	-0.003	0.000	0.003	0.003

$R_e=40, B/A=1.0, M_1=6, N_\varphi=36, R/A=144.6,$
 $q_{AY}/u=0.2 \sin \pi t^*$

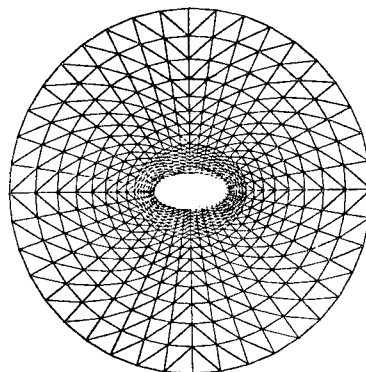
表-3 メッシュワイズと揚力係数

MESH	$N_\varphi=28$ $M_1=1$	$N_\varphi=32$ $M_1=1$	$N_\varphi=36$ $M_1=1$	$N_\varphi=36$ $M_1=1$
$ C_L $	0.489	0.496	0.499	0.503

$R_e=40, q_{AY}/u=0.06963 \sin 0.16 \pi t^*$



B/A=1.0



B/A=0.5

図-4 有限要素メッシュの一部

図-5 には静止した円の、 $Re=40$ と 80 の場合の抗力係数 C_d を既存の計算値、実験値とともに示した ($N_p=40, M_1=9$)。

図-6 には $Re=40$ の場合の圧力分布を示した。停留点での圧力係数 $C_p [= p/(1/2 \rho u^2)]$ は、 $C_p=(1+8/Re)$ より求めた²²⁾。ともに既存の結果と良好な一致を示している。

図-7 に、 $A\omega/u=0.2 \sin(2\pi/10)t^*$ なる回転運動する円に作用する揚力の時間歴、図-8 には流線を示した。 $Re=40$ では通常はカルマン渦は発生しないが、回転運動に励起されて渦が発生している。図-9 には回転

運動する楕円まわりの流線を示した。回転する円についての結果は岡島¹⁷⁾の計算結果とほぼ一致している。

図-10 には静止円まわりの流れを示した ($N_p=40, M_1=9$)。ストローハル数は 0.12 、揚力の振幅は $|C_L|=0.165$ 程度であるが、過去の実験値、計算値のばらつきの中に入っている³⁴⁾。

図-11 には Y 方向に強制振動させた場合の揚力時間歴を示した。岡島の計算結果と、波の形状は相似であるが、振幅はやや小さい。

図-12 には振幅を種々にかえた際の揚力の時間歴、図-13, 14 には流れの状態を示した。揚力は振幅の増

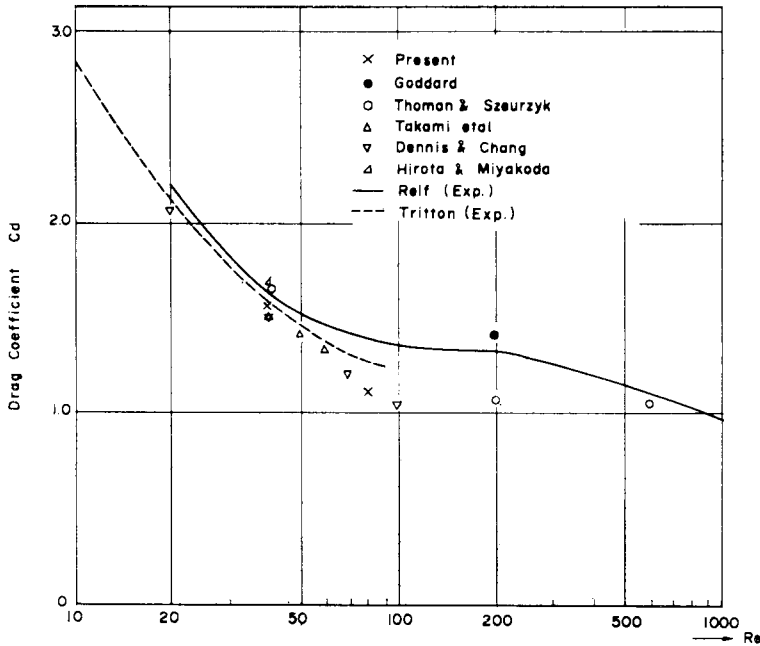


図-5 レイノルズ数と抗力係数

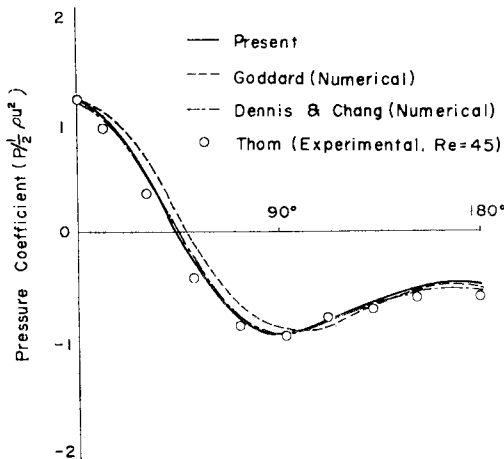


図-6 円まわりの圧力分布 ($Re=40$)

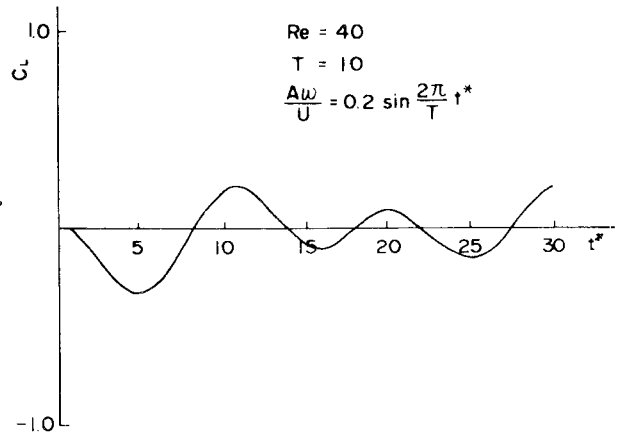


図-7 回転する円に対する揚力係数

加につれ増大するが、振幅が大きくなると、カルマン渦の周期と強制振動の周期とのずれが大きくなり揚力波形が乱れる。振動振幅が増加するとカルマン渦の周期が長くなることは実験的にも知られている²⁵⁾。

なお、時間刻みについては、式(48)で与えられるが、境界条件の影響等の不確定要素のあることを考慮し、式(48)の値の0.8倍程度で計算を行ったが、安定な解が得られた。

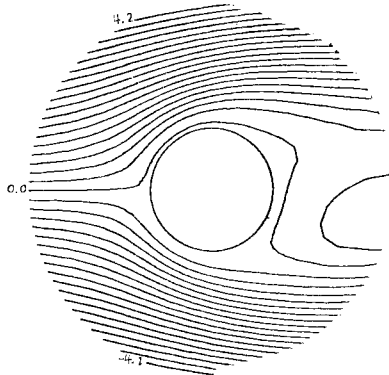


図-8 回転する円まわりの流れ
 $(Re=40, T=10, \frac{A\omega}{u} = 0.2 \sin \frac{2\pi}{T} t^*)$

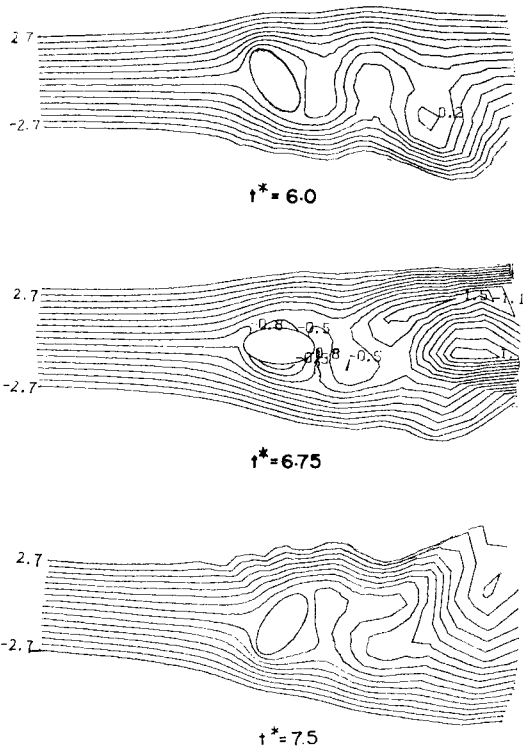


図-9 回転する楕円まわりの流れ
 $(Re=80, T=3, \theta = -\cos \frac{2\pi}{T} t^*)$

4. 結 論

以上に、任意に振動する物体まわりの粘性流に対する解析法と解析結果について述べた。これらの結果を要約

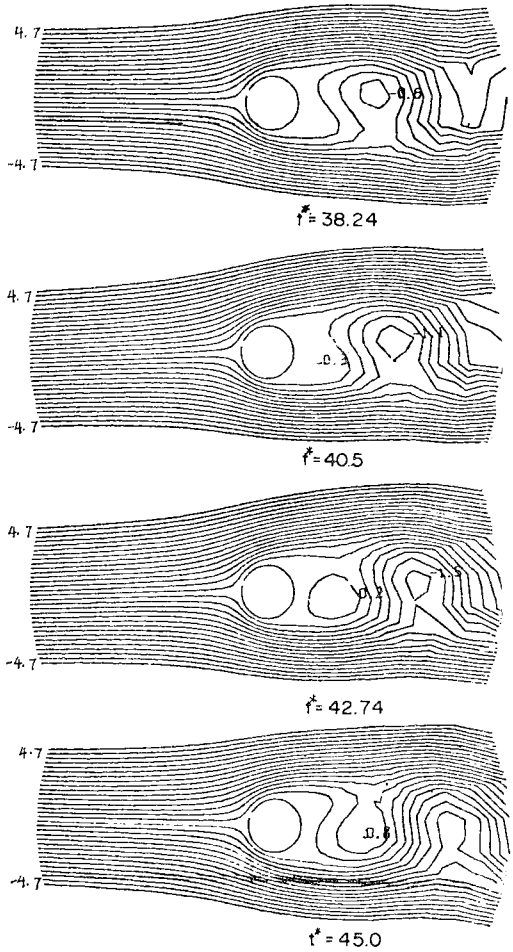


図-10 静止円まわりの流れ ($Re=80$)

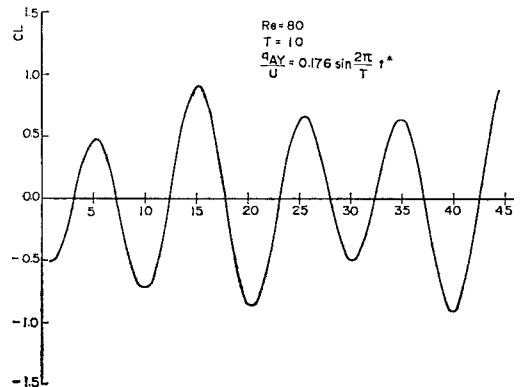


図-11 上下運動する円に対する揚力係数

すると以下ようになる。

(1) 有限要素法に基づく、任意に回転、並進運動する任意形状の物体まわりの2次元粘性流の解析法を開発した。計算効率、精度を比較的高く保ちながら汎用性を広げようとしたものである。

(2) 外部との境界条件を検討したが、物体半径の

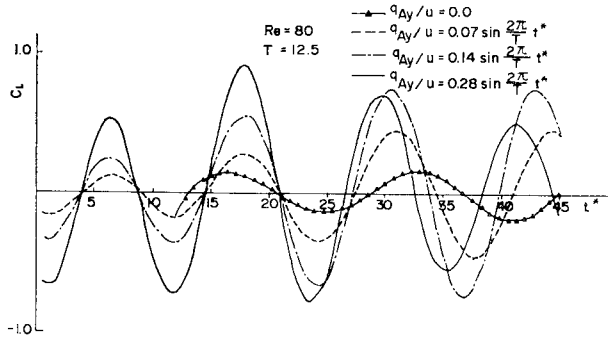


図-12 上下振動する円に対する揚力係数

100 倍程度離して、流れ関数については上流・下流境界とも式 (32・b)、渦度については上流側は式 (32・a)、下流側は式 (33・a) を使用すればよい。

(3) 安定性の解析を行い、安定限界を求める式を誘導した。

(4) 物体が2軸対称の場合の解法を示したが、これによりかなり効率が向上することは明らかである。

(5) 静止した円に適用して、抗力、圧力分布、ストローハル数等を既存の結果と比較したが、すべて既存の結果のばらつきの範囲内に入っている。

(6) 回転、上下運動する円、回転運動する楕円について適用した。円についての結果は、岡島ら^{17)・18)}の結果とほぼ一致している。

なお、ここで述べた方法に基づき開発したプロ

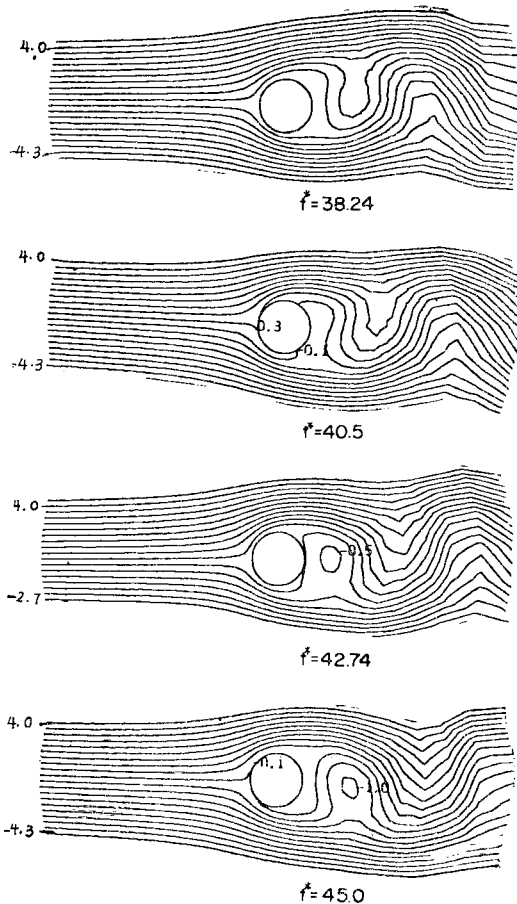


図-13 上下運動する円まわりの流れ

$$\left(Re=80, T=12.5, q_{Ay}/u=0.07 \sin \frac{2\pi}{T} t^* \right)$$

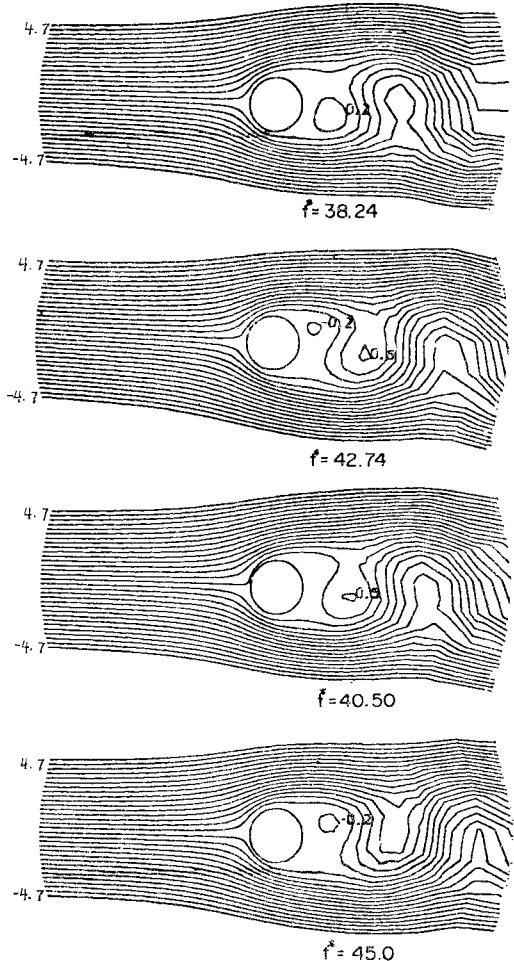


図-14 上下振動する円まわりの流れ

$$\left(Re=80, T=12.5, q_{Ay}/u=0.28 \sin \frac{2\pi}{T} t^* \right)$$

グラムでは、HITAC-8500 を使用して、節点数 1600 程度で 1 時間刻み当り 5 秒かかり、高いレイノルズ数に適用するためにはより速い計算機を使用するか、ソフトの改良が必要である。今後、F.F.T. 法²⁹⁾、重みつき残差法等を使用した非常に高次の内挿関数を用いる方法³⁰⁾、あるいはレイノルズ方程式を使用する方法³¹⁾等を検討する必要がある。

参考文献

- 1) Roache, P.J.: Computational Fluid Dynamics, Albuquerque, N.M., 1972.
- 2) Fromm, J.E. and F.H. Harlow: Numerical solution of the problem of vortex street development, The Physics of Fluids, Vol. 6, No. 7, pp. 975~982, July, 1963.
- 3) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London, 1971.
- 4) Zienkiewicz, O.C., P. Mayer and Y.K. Cheung: Solution of anisotropic seepage problems by finite elements, Proc. ASCE, Vol. 92, No. EM. 1, pp. 111~120, 1966.
- 5) Tong, P.: Liquid Sloshing in an Elastic Container, Thesis California Institute of Technology, AFOSR 66-0943, 1966.
- 6) Nahavandi, A.N., Bohm, G.J. and R.R. Pedrido: Structurally compatible fluid finite element for solid fluid interaction studies, Nuclear Engineering and Design, 35, pp. 335~347, 1975.
- 7) Tong, P.: The finite element method for fluid flow, Japan-U.S. Seminar on Matrix Method of Structural Analysis and Design, Tokyo, Japan, Aug. 1969.
- 8) Oden, J.T. and L.C. Wellford Jr.: Analysis of flow of viscous fluids by the finite-element method, AIAA Journal, Vol. 10, No. 12, pp. 1590~1599, Dec. 1972.
- 9) Cheng, R.T.: Numerical solution of the Navier-Stokes equations by the finite-element method, The Physics of Fluids, Vol. 15, No. 12, pp. 2098~2105, Dec. 1972.
- 10) Baker, A.J.: Finite element solution algorithm for viscous incompressible fluid dynamics, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 6, pp. 89~101, 1973.
- 11) Smith, S.L. and C.A. Brebbia: Finite-element solution of Navier-Stokes equations for transient two-dimensional incompressible flow, Journal of Computational Physics, 17, pp. 235~245, 1975.
- 12) Usuki, S.: Application of finite element methods to unsteady viscous flow around a box girder bridge oscillating in uniform flow, Computational Methods in Nonlinear Mechanics, The Texas Institute for Computational Mechanics, pp. 593~602, 1974.
- 13) Bratanow, T., Ecer, A. and M. Kobiske: Finite element analysis of unsteady incompressible flow around an oscillating obstacle of arbitrary shape, AIAA 11th Aerospace Science Meeting, Washington D.C., U.S.A., Jan., 1973.
- 14) Bratanow, T., Ecer, A. and M. Kobiske: Numerical Calculations of Velocity and Pressure Distribution around Oscillating Airfoils, NASA Contractor Report, NASA CR-2368, Feb., 1974.
- 15) Bratanow, T. and A. Ecer: On the applications of the finite element methods in unsteady aerodynamics, AIAA Journal, Vol. 4, No. 4, pp. 503~510, Apr., 1974.
- 16) Bratanow, T. and A. Ecer: Analysis of three-dimensional unsteady viscous flow around oscillating wings, AIAA Journal, Vol. 12, No. 11, pp. 1577~1584, Nov., 1974.
- 17) 岡島 厚・高田 浩・浅沼 強: 振動する物体まわりの非定常粘性流れ, 日本機械学会論文集, 37 巻, 304 号, pp. 147~154, Dec., 1971.
- 18) 岡島 厚: 振動する円柱まわりの流れ 実験と数値計算, 構造物の耐風性に関する第 4 回シンポジウム論文集, pp. 2300~2318, Dec., 1976.
- 19) Lugt, H.J. and S. Ohring: Efficiency of numerical methods in solving the time dependent two-dimensional Navier-Stokes equations, Proc. of International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Southernptons, pp. 65~83, 1973.
- 20) Lugt, H.J. and S. Ohrig: Rotating thin elliptic cylinder in a parallel viscous fluid flow, Proc. of International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, pp. 257~262, 1974.
- 21) Lugt, H.J. and H.J. Haussling: Laminar flow past an abruptly accelerated elliptic cylinder at 45° incidence, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 65, Part 4, pp. 711~734, 1974.
- 22) Goddard, V.P.: Numerical Solutions of the Drag Response of a Cylinder to Stream-wise Velocity Fluctuations, Dissertation, Univ. of Notre Dame, Indiana, U.S.A., 1972.
- 23) Thoman, D.C. and A.A. Szewczyk: Time-dependent viscous flow over a circular cylinder, The Physics of Fluids Supplement II, II-76~85, 1969.
- 24) Takami, H. and H.B. Keller: Steady two-dimensional viscous flow of an incompressible fluid flow past a circular cylinder, The Physics of Fluids Supplement II, II-51~56, 1969.
- 25) Dennis, S.C.R. and Gau-zu Chang: Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds number up to 100, Journal of Fluid Mechanics, 42, Part 3, 1970.
- 26) Hirota, I. and K. Miyakoda: Numerical solution of Karman vortex behind a circular cylinder, Journal of the Meteorological Society of Japan, Vol. 43, No. 1, Feb., 1965.
- 27) Sears, W.R.: Theoretical Aerodynamics, Ithaca, New York, 1970.
- 28) Bathe, K.J. and E.L. Wilson: Stability and accuracy analysis of direct integration methods, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, 1973.
- 29) Hockney, R.W.: A fast direct solution of Poisson's equation using Fourier analysis, Journal of Association for Computing Machinery, Vol. 12, No. 1, pp. 95~113, Jan., 1965.
- 30) Weare, T.J.: Finite element or finite difference methods for the two-dimensional shallow water equations?, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 7, pp. 351~357, 1976.
- 31) Relf, E.F.: Discussion of the results of measurements of the resistance of wires, with some additional tests on the resistance of wires of small diameter, Aeronaut. Res. Coun. Rep. Mem. (GB), No. 102, 1914.
- 32) Tritton, D.J.: Experiments on flow past a circular

- cylinder at low Reynolds numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, 6, 1959.
- 33) Thom, A. : The flow past circular cylinders at low speeds, *Proc. of Royal Society, A* 141, 1933.
- 34) McCroskey, M.J. : Some current research in unsteady fluid dynamics—The 1976 Freeman Scholar Lecture, *Transaction of the ASME*, March, 1977.
- 35) Yano, T. and S. Takahara : Study on unsteady aerodynamic forces acting on an oscillating cylinder, *Proc. of the Third International Conference on Wind Effects on Buildings and Structures*, Tokyo, pp. 737~746, 1971.
- 36) Finlayson, B.A. : *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, New York and London, 1972.
- 37) 藤本盛久・大熊武司・赤木久真：角柱周辺の気流および風圧力に関する数値解析的研究，*日本建築学会論文報告集*，213号，pp. 11~20, Nov. 1973.

(1978.5.22・受付)
