

初期荷重を有する変断面任意形アーチの 面内自由振動解析

FREE IN-PLANE VIBRATION OF NONUNIFORM ARCHES WITH
VARIOUS SHAPES OF AXIS AND INITIAL LOAD

崎 山 毅*

By Takeshi SAKIYAMA

1. 序 言

本論文は、変断面任意形アーチに関する、死荷重などの方向不変の初期荷重とそれに伴う初期断面力および初期荷重による有限変形を考慮した、面内自由振動の一解析法と振動性状について述べたものである。

大スパンのリブアーチ橋などのごとく、全体的剛性が比較的低い、いわゆる柔構造アーチにおいては、アーチ完成時に導入される死荷重などの初期荷重と、それに伴う初期断面力とが、アーチ完成後における活荷重などの付加荷重作用時の静的挙動に対して、重要な影響を及ぼすことが知られているが、このような柔構造アーチの面内自由振動性状に対する、死荷重などの初期荷重および初期断面力の影響あるいは初期荷重導入の際に生じる有限変形に基づく、無応力時アーチ軸線形状の変化の影響などについては、現在までのところ、ほとんど明らかにされていないようである。

リブアーチの軸面内自由振動に関しては、今日までに数多くの研究が行われてきているが、その大部分は、次のように円弧状の軸線を有する一様断面アーチを対象としている。Den Hartog¹⁾ は Rayleigh 法により 2 ヒンジアーチおよび固定アーチの基本振動数を算定した。三浦²⁾ は単ヒンジアーチに関する理論的および実験的研究を行い、単ヒンジアーチの振動数は片側半分の片持桁としての振動数とほぼ一致することなどを明らかにした。また、Waltking³⁾ は 2 ヒンジアーチの振動性状に及ぼす部材軸縮性の影響を解析し、細長比の小さな、偏平アーチの対称型振動においてその影響を無視しえないことを指摘している。高橋⁴⁾ は円弧棒の軸面内振動に関して、ラグランジュアン極小の条件から、2 ヒンジアーチの振動数方程式を誘導し、Waltking の解との一致を確

認のうえ、同一手法により固定アーチの振動性状を解析し、対称型および逆対称型のそれぞれ 3 次までの固有振動数を算定した。Rao⁵⁾ らはせん断変形および回転慣性を考慮した円弧アーチの自由振動方程式を提示している。著者⁶⁾ らは任意位置に中間ヒンジ断面を有する 3 ヒンジアーチの振動解法を提示し、第 4 次までの固有振動数を算定した。Wolf⁷⁾ は直線要素を用いた有限要素法により、2 ヒンジアーチおよび固定アーチの第 6 次までの固有振動数を算定し、また Petyl⁸⁾ らは曲線要素を用いた有限要素法により、固定アーチを解析し、3 種の変位関数について解の収束性の比較を行った。その結果、曲線要素を用いる場合には、その剛体的変位を表わす項を変位関数に含ませる必要のあることなどを明らかにしている。2 ヒンジアーチおよび固定アーチに関して Veletsos⁹⁾ らは軸伸縮性を考慮して、また、Bellow¹⁰⁾ らは非圧縮性の仮定のもとに、8~10 次までの固有振動数を算定し、Austin¹¹⁾ は自由振動性状に及ぼすせん断変形および回転慣性の影響などを明らかにしている。これらの諸研究によって、一様断面を有する円弧アーチの面内自由振動の本質が明らかにされ、また、固有振動数や振動モードなどに関する数値的データも数多く得られている。

非円弧アーチの軸線形状として、放物線、カテナリーあるいはサイクロイドなどが考えられるが、円弧アーチに関する研究に比して、円弧以外の軸線を有するアーチの面内自由振動に関しては、必ずしも十分な研究は行われていない。最上²⁾ は偏平な 2 ヒンジ放物線アーチに関して、鉛直変位のみを考慮した自由振動解析を行っている。Volterra^{13), 14)} らは Den Hartog の手法を用いて、放物線、カテナリーおよびサイクロイド形軸線を有する 2 ヒンジアーチおよび固定アーチの基本振動数を算定している。Romanelli¹⁵⁾ らは Rayleigh 法により、偏平な放物線、カテナリー、サイクロイドおよび螺旋形軸線を

* 正会員 長崎大学助教授 工学部構造工学科

有する2ヒンジアーチの基本振動数を算定している。これらの、拱矢比が0.2程度以下の非円弧アーチに関する研究のほか、高橋^{16),17)}らは文献4)の方法を進展させ、楕円、正弦曲線、カタナリー、双曲線、放物線およびサイクロイドの各軸線を有する両端固定の一樣断面曲線棒の自由振動性状を解析しているが、橋梁に用いられる拱矢比の範囲における、非円弧アーチの自由振動に関する数値的データの集積はまだ不十分のように思われる。

また、橋梁主構として用いられるアーチ部材は、合理的設計の要求から、変断面部材となることが多いが、従来、アーチの自由振動に関する研究は、ほとんどの場合、一樣断面アーチに対して行われている。変断面アーチに関しては、わずかに、特別の変断面性を有する固定放物線アーチの基本振動数を算定した Wang¹⁸⁾の研究が見受けられる程度であり、変断面アーチの汎用解法に関する研究は不十分であるといえよう。

本研究は、死荷重などの方向不変の初期荷重とそれに伴う初期断面力の影響、および初期荷重による有限変形に基づくアーチ軸線形状の変化を考慮した変断面任意形アーチの面内自由振動の一解析法を提示するとともに、放物線、カタナリー、円およびサイクロイド形の各軸線を有する2ヒンジアーチの自由振動性状を解析し、これらに関する数値的データを取りまとめたものである。

本解析法によれば、変断面任意形アーチを、等価置換系などにモデル化することなしに、アーチ部材軸等分点における曲率半径、接線傾斜角、断面積、断面2次モーメントあるいは初期荷重強度、初期断面力などの諸量を用いて、直接的に解析することが可能である。

2. 有限変形平衡方程式

骨組構造物の架設時に導入される死荷重などの方向不変の初期荷重とそれに対する初期断面力とは、構造物完成時の骨組軸線状態においてつり合いを保つ。したがって、完成後に作用する活荷重などの付加荷重による変形の発生により、初期軸線形状が変化し、初期荷重平衡状態は乱される。

長大アーチ系橋梁においては、付加荷重による付加断面力に比べて、死荷重などの初期荷重による初期断面力が非常に大きなものとなるが、このような構造物においては、弾性変形の範囲内であっても、付加荷重変形に伴う初期荷重平衡状態の変化を無視することはできず、その解析は骨組の変形後の状態においてつり合いを考える、いわゆる有限変形理論によらねばならないことは周知のとおりである。したがって、はじめに方向不変の荷重を受けるアーチ部材微小要素の変形後の状態における

つり合いを考えた有限変形平衡方程式を誘導する。なお、本文においては、アーチ部材図心軸をアーチ(部材)軸と称することとする。

一般的な平面曲線を軸線とするアーチ部材において、その任意の微小部分は十分正確に円弧とみなすことができる。図-1(a)に示すごとく、任意の微小要素の変形前、および変形後の弧長、曲率半径、中心角をそれぞれ $ds, R, d\phi$, および $ds^*, R^*, d\phi^*$ とすれば、図-1(b)の荷重変形状態にあるアーチ微小要素 ds^* に関する力の平衡条件は次の3式にて与えられる。

$$\frac{dQ}{ds^*} + \frac{N}{R^*} + p^* = 0 \dots\dots\dots(1.a)$$

$$\frac{dN}{ds^*} - \frac{Q}{R^*} + q^* = 0 \dots\dots\dots(1.b)$$

$$\frac{dM}{ds^*} - Q - m^* = 0 \dots\dots\dots(1.c)$$

ここに、 Q, N および M は、それぞれせん断力、軸力および曲げモーメントである。また、 p^* および q^* はアーチに作用する方向不変の荷重の変形微小要素 ds^* の法線方向および接線方向強度であり、 m^* は分布モーメント荷重強度である。

アーチ部材軸のひずみを ϵ とすれば、変形前後の微小要素 ds, ds^* に関して、

$$ds^* = (1 + \epsilon) ds \dots\dots\dots(2.a)$$

$$ds = R d\phi \dots\dots\dots(2.b)$$

$$ds^* = R^* d\phi^* \dots\dots\dots(2.c)$$

なる関係が成立する。

また、アーチに作用する荷重の変形前微小要素 ds の法線および接線方向強度を p および q とし、分布モーメント荷重の強度を m とすれば、 p^*, q^*, m^* と p, q, m との間には次の関係が成立する。

$$p^* = (p \cos \theta - q \sin \theta) \cdot ds / ds^* = (p \cos \theta - q \sin \theta) / (1 + \epsilon) \dots\dots\dots(3.a)$$

$$q^* = (p \sin \theta + q \cos \theta) ds / ds^* = (p \sin \theta + q \cos \theta) / (1 + \epsilon) \dots\dots\dots(3.b)$$

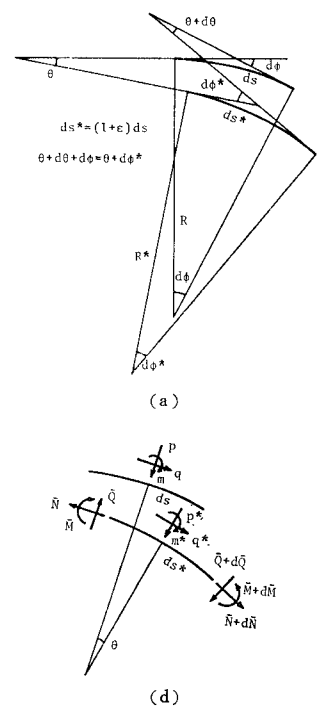


Fig. 1 Arch Element

$$m^* = m \cdot ds/ds^* = m/(1+\epsilon) \dots\dots\dots(3.c)$$

ここに、 θ はアーチ部材軸の接線回転角である。

次に、微小要素の変形前後の曲率半径 R, R^* 間の関係が次のごとく求められる。微小要素 ds^* において、

$$\frac{1}{R^*} = \frac{d\phi^*}{ds^*} = \frac{1}{(1+\epsilon)} \frac{d\phi^*}{ds} \dots\dots\dots(4.a)$$

が成立し、また、図-1(a) より、 $d\phi^* = d\theta + d\phi$ なる関係が得られるゆえ

$$\frac{d\phi^*}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{R} \dots\dots\dots(4.b)$$

となる。(4.a) および (4.b) の両式より、所要の R, R^* 間の関係式として次式が誘導される。

$$\frac{R}{R^*} = \left(1 + R \frac{d\theta}{ds}\right) / (1+\epsilon) \dots\dots\dots(5)$$

微小要素の変形前後における諸量関係式 (2.a)~(2.c), (3.a)~(3.c) および (5) を用いて、式 (1.a)~(1.c) を書き換えれば、変形前の状態における部材軸座標 s 、曲率半径 R および荷重強度 p, q, m で表わされた、次のごとき有限変形平衡方程式が求められる。

$$\frac{dQ}{ds} + \left(1 + R \frac{d\theta}{ds}\right) \frac{N}{R} + p \cos \theta - q \sin \theta = 0 \dots\dots\dots(6.a)$$

$$\frac{dN}{ds} - \left(1 + R \frac{d\theta}{ds}\right) \frac{Q}{R} + p \sin \theta + q \cos \theta = 0 \dots\dots\dots(6.b)$$

$$\frac{dM}{ds} - (1+\epsilon)Q - m = 0 \dots\dots\dots(6.c)$$

3. 増分形平衡方程式

有限変形平衡方程式 (6.a)~(6.c) の応用により、変断面任意形アーチの有限変形の線形解析を可能ならしめる、増分形の平衡方程式が誘導される。

法線および接線方向荷重強度 p および q 、分布モーメント荷重強度 m なる初期荷重に対する平衡状態におけるアーチ軸線の曲率半径を R とし、断面力を Q, N, M とすれば、微小要素 ds に関する平衡条件は、式 (1.a)~(1.c) と同形の次の式で与えられる。

$$\frac{dQ}{ds} + \frac{N}{R} + p = 0 \dots\dots\dots(7.a)$$

$$\frac{dN}{ds} - \frac{Q}{R} + q = 0 \dots\dots\dots(7.b)$$

$$\frac{dM}{ds} - Q - m = 0 \dots\dots\dots(7.c)$$

次に、十分小さな増分荷重 $\Delta p, \Delta q, \Delta m$ の付加により、荷重状態がわずかに変化し、 $p + \Delta p, q + \Delta q, m + \Delta m$ なる荷重状態になった場合の断面力を $Q + \Delta Q, N + \Delta N, M + \Delta M$ とし、そのときに生じる、アーチ軸接線回転角、接線方向変位および法線方向変位を、それぞ

れ、 $\Delta \theta, \Delta w$ および Δu とする。このとき、初期荷重 p, q, m に対する平衡位置からの変位を考慮した微小要素の平衡条件は、有限変形平衡方程式 (6.a)~(6.c) を応用して求められ、次の3式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d(Q + \Delta Q)}{ds} + \left(1 + R \frac{d\Delta \theta}{ds}\right) \frac{(N + \Delta N)}{R} \\ + (p + \Delta p) \cos \Delta \theta - (q + \Delta q) \sin \Delta \theta = 0 \dots\dots\dots(8.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(N + \Delta N)}{ds} - \left(1 + R \frac{d\Delta \theta}{ds}\right) \frac{(Q + \Delta Q)}{R} \\ + (p + \Delta p) \sin \Delta \theta + (q + \Delta q) \cos \Delta \theta = 0 \dots\dots\dots(8.b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(M + \Delta M)}{ds} - (1 + \Delta \epsilon)(Q + \Delta Q) - (m + \Delta m) = 0 \dots\dots\dots(8.c) \end{aligned}$$

したがって、式 (8.a)~(8.c) から式 (7.a)~(7.c) を、それぞれ、辺々差し引けば、荷重増分 $\Delta p, \Delta q, \Delta m$ に対する断面力増分 $\Delta Q, \Delta N, \Delta M$ を規定する微分方程式として、次のごとく、増分形の平衡方程式が求められる。

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta Q}{ds} + \frac{\Delta N}{R} + N \frac{d\Delta \theta}{ds} - q \Delta \theta + \Delta p + \Delta p_c = 0 \dots\dots\dots(9.a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta N}{ds} - \frac{\Delta Q}{R} - Q \frac{d\Delta \theta}{ds} + p \Delta \theta + \Delta q + \Delta q_c = 0 \dots\dots\dots(9.b) \end{aligned}$$

$$\frac{d\Delta M}{ds} - \Delta Q - Q \Delta \epsilon - \Delta m - \Delta m_c = 0 \dots\dots\dots(9.c)$$

ここに、 $\Delta \epsilon$ はアーチ部材軸のひずみ増分である。また、 $\Delta p_c, \Delta q_c, \Delta m_c$ は不平衡力項であり、次の各式にて与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta p_c = \Delta N \frac{d\Delta \theta}{ds} - \Delta q \Delta \theta + (p + \Delta p) (\cos \Delta \theta - 1) \\ - (q + \Delta q) (\sin \Delta \theta - \Delta \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta q_c = -\Delta Q \frac{d\Delta \theta}{ds} + \Delta p \Delta \theta + (p + \Delta p) (\sin \Delta \theta - \Delta \theta) \\ + (q + \Delta q) (\cos \Delta \theta - 1) \end{aligned}$$

$$\Delta m_c = \Delta Q \Delta \epsilon$$

次に、変断面任意形アーチの断面力増分 $\Delta Q, \Delta N, \Delta M$ と変位増分 $\Delta \theta, \Delta w, \Delta u$ との間には次の関係が成立する。

$$\Delta M = -EI \frac{d\Delta \theta}{ds} \dots\dots\dots(9.d)$$

$$\Delta N = EA \Delta \epsilon = EA \left[\frac{d\Delta w}{ds} - \frac{\Delta u}{R} \right] \dots\dots\dots(9.e)$$

$$\Delta Q = \frac{GA}{\kappa} \left[\frac{d\Delta u}{ds} + \frac{\Delta w}{R} - \Delta \theta \right] \dots\dots\dots(9.f)$$

なお、式 (9.f) は平均せん断応力の概念に基づいて、Rao⁵⁾ らが導いたせん断力と変形との関係式である。ここに、 I, A, E, G および κ は、それぞれ、断面2次モ

ーメント、断面積、弾性定数、せん断弾性定数および平均せん断応力補正係数である。また、変位 $\Delta u, \Delta w, \Delta \theta$ の正方向は、図-1 (b) に示す荷重 p, q, m の正方向とそれぞれ同じとする。

4. 初期荷重平衡位置を基準とする自由振動方程式

死荷重などの方向不変の初期荷重とそれに伴う初期断面力の影響および初期荷重による有限変形に基づくアーチ軸線形状の変化を考慮した、変断面任意形アーチの微小変位自由振動は、初期荷重に対する有限変形平衡位置を基準とする自由振動方程式に基づいて解析される。

図-2 に示すごとく、アーチ部材軸接線の傾斜角を ψ とすれば、アーチ軸の単位長さ当たりの質量 ρ は、重力加速度を g として、

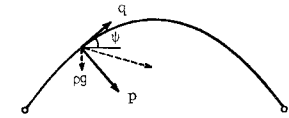


Fig. 2 Vertical Load Intensity

$$\rho = [p \cos \psi - q \sin \psi] / g \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。したがって、慣性力および回転慣性

$$\Delta p = -\rho \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2}, \Delta q = -\rho \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2},$$

$$\Delta m = -\rho \frac{I}{A} \frac{\partial^2 \Delta \theta}{\partial t^2}$$

を式 (9.a)~(9.c) に代入し、式 (9.d)~(9.f) を連立させることにより、初期荷重 p, q に対する有限変形平衡位置を基準とする、載荷アーチの微小変位自由振動方程式が求められ、次の6式となる。

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial s} + \frac{\Delta N}{R} + N \frac{\partial \Delta \theta}{\partial s} - q \Delta \theta - \rho \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (11 \cdot a)$$

$$\frac{\partial \Delta N}{\partial s} - \frac{\Delta Q}{R} - Q \frac{\partial \Delta \theta}{\partial s} + p \Delta \theta - \rho \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (11 \cdot b)$$

$$\frac{\partial \Delta M}{\partial s} - \Delta Q - Q \Delta \epsilon + \rho \frac{I}{A} \frac{\partial^2 \Delta \theta}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots (11 \cdot c)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta}{\partial s} = -\frac{\Delta M}{EI} \dots\dots\dots (11 \cdot d)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial s} = \frac{\Delta N}{EA} + \frac{\Delta u}{R} \dots\dots\dots (11 \cdot e)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial s} = \frac{\kappa}{GA} \Delta Q + \Delta \theta - \frac{\Delta w}{R} \dots\dots\dots (11 \cdot f)$$

式 (11.a)~(11.c) の中に含まれる初期せん断力 Q および初期軸力 N は、増分形基礎微分方程式 (9.a)~(9.f) に基づいて算定される。なお、第 $(i+1)$ 番目の荷重増分段階における曲率半径 R_{i+1} および接線傾斜角 ψ_{i+1} と前段階の諸量 $R_i, \psi_i, \Delta \theta_i, \Delta \epsilon_i$ との間には次の関係が成立する。

$$\frac{1}{R_{i+1}} = \frac{1}{[1 + \Delta \epsilon_i]} \left[\frac{1}{R_i} + \frac{d \Delta \theta_i}{ds} \right], \psi_{i+1} = \psi_i - \Delta \theta_i$$

また、初期荷重とそれに基づく初期断面力および有限変形による軸線形状の変化を無視した、アーチの通常の自由振動方程式は、式 (11.a) および (11.b) の第 3, 4 項と式 (11.c) の第 3 項、すなわち、初期断面力および初期荷重の影響を表わす各項を削除することにより求められる。

5. 基礎微分方程式の離散的一般解

初期荷重などの影響を考慮した変断面任意形アーチの面内自由振動方程式 (11.a)~(11.f) は、アーチ部材の曲率半径 R 、部材軸接線の傾斜角 ψ 、伸び剛性 EA 、曲げ剛性 EI あるいは荷重強度関数 p, q 、初期断面力 Q, N などの変数を係数とする連立微分方程式である。アーチ部材の幾何学的形状や荷重形態などに任意性を保持したまま、これらの変数係数連立微分方程式の一般解を解析的に求めることはほとんど不可能であろうと判断されるゆえ、なんらかの近似的手法に基づいて一般解を求めなければならない。

本論文においては、数値解析の簡易化¹⁹⁾を目的として、① 正規型基礎微分方程式の積分方程式への変換と、② 積分方程式の近似解析法の応用とにより、変数係数連立微分方程式の、アーチ軸 m 等分点における解を求めることとし、得られた、積分定数を含む、離散点における一般解を離散的一般解と称することとする。

アーチ軸長、アーチ支間、基準曲げ剛性および基準伸び剛性を、それぞれ、 l, L, EI_0 および EA_0 として、

$$\Delta \bar{Q} = -L^2 \Delta Q / EI_0, \Delta \bar{N} = -L^2 \Delta N / EI_0,$$

$$\Delta \bar{M} = -L \Delta M / EI_0, \Delta \bar{w} = \Delta w / L,$$

$$\Delta \bar{u} = \Delta u / L, \eta = s / l$$

なる無次元量 $\Delta \bar{Q}, \Delta \bar{N}, \dots, \Delta \bar{u}, \eta$ を導入する。次に、調和振動の前提のもとに、時間変数 t を分離し、無次元諸量 $\Delta \bar{Q}, \Delta \bar{N}, \dots, \Delta \bar{u}$ の規準関数を、再び、 $\Delta Q, \Delta N, \dots, \Delta u$ と記することにすれば、基礎微分方程式 (11.a)~(11.f) は次のごとく無次元表示される。

$$\frac{d \Delta Q}{d \eta} = \nu \left\{ -\frac{L}{R} \cdot \Delta N - \frac{EI_0}{EI} N \cdot \Delta M - k^2 \frac{q}{p_0} \cdot \Delta \theta + \lambda^4 T \cdot \Delta u \right\} \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

$$\frac{d \Delta N}{d \eta} = \nu \left\{ \frac{L}{R} \cdot \Delta Q + \frac{EI_0}{EI} Q \cdot \Delta M + k^2 \frac{p}{p_0} \cdot \Delta \theta + \lambda^4 T \cdot \Delta w \right\} \dots\dots\dots (12 \cdot b)$$

$$\frac{d \Delta M}{d \eta} = \nu \left\{ \Delta Q - \frac{1}{a^2} \frac{EA_0}{EA} \cdot \Delta N - \frac{\lambda^4}{a^2} \frac{EA_0}{EA} \frac{EI}{EI_0} T \cdot \Delta \theta \right\} \dots\dots\dots (12 \cdot c)$$

$$\frac{d\Delta\theta}{d\eta} = \nu \frac{EI_0}{EI} \cdot \Delta M \dots\dots\dots(12 \cdot d)$$

$$\frac{d\Delta w}{d\eta} = \nu \left\{ \frac{L}{R} \cdot \Delta u - \frac{1}{a^2} \frac{EA_0}{EA} \cdot \Delta N \right\} \dots\dots(12 \cdot e)$$

$$\frac{d\Delta u}{d\eta} = \nu \left\{ -\frac{L}{R} \cdot \Delta w + \Delta\theta - \frac{1}{\mu a^2} \frac{EA_0}{EA} \cdot \Delta Q \right\} \dots\dots\dots(12 \cdot f)$$

ここに、 p_0 は基準荷重強度であり、

$$\lambda^4 = \frac{p_0 \omega^2 L^4}{gEI_0}, \quad k^2 = \frac{p_0 L^3}{EI_0}, \quad a^2 = \frac{A_0 L^2}{I_0}$$

$$\nu = \frac{l}{L}, \quad \mu = \frac{C}{\kappa E}$$

$$T = [\psi \cos \psi - q \sin \psi] / p_0, \quad \omega : \text{固有円振動数}$$

である。

アーチ部材軸上の無次元変数 η の原点を部材左端にとり、基礎微分方程式 (12・a)～(12・f) を変域 $[0, \eta]$ で積分して積分方程式に変換する。次に、全変域 $[0, 1]$ 、すなわちアーチ部材軸を m 等分し、図-3 に示すごとく、左側等分点より順に、0, 1, 2, ..., i , ..., m なる番号を付け、任意点 i における諸量に添字 i を付与することとして、積分方程式に等間隔の数値積分手法を繰り返し適用し、左側等分点より順に解を求めてゆけば、任意等分点 i における離散的な一般解は、次の各式となる。

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_i \\ \Delta N_i \\ \Delta M_i \\ \Delta \theta_i \\ \Delta w_i \\ \Delta u_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} & a_{4i} & a_{5i} & a_{6i} \\ b_{1i} & b_{2i} & b_{3i} & b_{4i} & b_{5i} & b_{6i} \\ c_{1i} & c_{2i} & c_{3i} & c_{4i} & c_{5i} & c_{6i} \\ d_{1i} & d_{2i} & d_{3i} & d_{4i} & d_{5i} & d_{6i} \\ e_{1i} & e_{2i} & e_{3i} & e_{4i} & e_{5i} & e_{6i} \\ f_{1i} & f_{2i} & f_{3i} & f_{4i} & f_{5i} & f_{6i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_0 \\ \Delta N_0 \\ \Delta M_0 \\ \Delta \theta_0 \\ \Delta w_0 \\ \Delta u_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(13 \cdot a) \sim (13 \cdot f)$$

任意等分点 i における諸量 $\Delta Q_i, \dots, \Delta u_i$ を、左支点における諸量 $\Delta Q_0, \dots, \Delta u_0$ に関係づける要素 a_{ki}, \dots, f_{ki} は、伝達マトリックス法におけるいわゆる伝達マトリックスに相当するもので、次の内容を有する。

$$\begin{aligned} a_{ki} &= \delta_{ki} + \sum_{j=0}^i \beta_{ij} \cdot \nu (-r_j \cdot b_{kj} - \bar{I}_j N_j \cdot c_{kj} - k^2 \bar{q}_j \cdot d_{kj} + \lambda^4 T_j \cdot f_{kj}) \\ b_{ki} &= \delta_{k2} + \sum_{j=0}^i \beta_{ij} \cdot \nu (r_j \cdot a_{kj} + \bar{I}_j Q_j \cdot c_{kj} + k^2 \bar{p}_j \cdot d_{kj} + \lambda^4 T_j \cdot e_{kj}) \\ c_{ki} &= \delta_{k3} + \sum_{j=0}^i \beta_{ij} \cdot \nu (a_{kj} - \bar{A} Q_j / a^2 \cdot b_{kj} - \lambda^4 \bar{A}_j T_j / (a^2 \bar{I}_j) \cdot d_{kj}) \\ d_{ki} &= \delta_{k4} + \sum_{j=0}^i \beta_{ij} \cdot \nu \bar{I}_j \cdot c_{kj} \end{aligned}$$

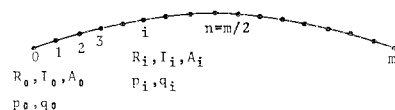


Fig. 3 Discrete Points of Arch

Table 1 Weight Coefficient α_{ij}

i	j								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	12	12							
2	8	32	8						
3	9	27	27	9					
4	8	32	16	32	8				
5	9	27	27	17	32	8			
6	8	32	16	32	16	32	8		
7	9	27	27	17	32	16	32	8	
8	8	32	16	32	16	32	16	32	8
⋮									

$$e_{ki} = \delta_{k5} + \sum_{j=0}^i \beta_{ij} \cdot \nu (r_j \cdot f_{kj} - \bar{A}_j / a^2 \cdot b_{kj})$$

$$f_{ki} = \delta_{k6} + \sum_{j=0}^i \beta_{ij} \cdot \nu (-r_j \cdot e_{kj} + d_{kj} - \bar{A}_j / \mu a^2 \cdot a_{kj})$$

$$r_j = L/R_j, \quad \bar{I}_j = EI_0/EI_j, \quad \bar{A}_j = EA_0/EA_j$$

$$\bar{p}_j = p/p_0, \quad \bar{q}_j = q/q_0, \quad \beta_{ij} = \alpha_{ij}/24m$$

δ_{ij} : クロネッカーのデルタ

なお、 β_{ij} は Simpson の多分割数値積分法における重み係数で、 α_{ij} 値は表-1 に示すとおりである。

次に、離散的な一般解 (13・a)～(13・f) を用いた、自由振動解析手順は次のとおりである。2 ヒンジアーチを例にとれば、左支点 0 の境界条件は、 $\Delta M_0 = \Delta w_0 = \Delta u_0 = 0$ であるゆえ、右支点 m の境界条件 $\Delta M_m = \Delta w_m = \Delta u_m = 0$ より、次の振動数方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} c_{1m} & c_{2m} & c_{3m} \\ e_{1m} & e_{2m} & e_{4m} \\ f_{1m} & f_{2m} & f_{4m} \end{vmatrix} = 0$$

したがって、方程式 (9・a)～(9・f) によってあらかじめ算定された初期荷重平衡状態における初期断面力やアーチ部材の幾何学的諸量を用いて、振動数方程式の左辺の各要素を算定し、試行錯誤法により、振動数方程式を満足する固有値 λ を決定することができる。

離散的な一般解 (13・a)～(13・f) を用いることにより、変断面任意形アーチを、等価置換系などにモデル化することなしに、部材軸等分点における曲率半径、接線傾斜角、断面 2 次モーメントあるいは断面積などの幾何学的諸量および初期荷重強度、初期断面力を用いて直接的に解析することができる。また、これらの幾何学的諸量および初期荷重強度の式表示ができないアーチに関しても、部材軸等分点における諸量が数値的に明らかであるならば、諸量の式表示可能なアーチとまったく同様に解析できることはいうまでもない。

6. 数値解析結果

(1) 数値解の収束性

変断面任意形アーチの離散的な一般解の精度はアーチ軸

等分数 m の増加に伴って高められ、理論的には、 $m \rightarrow \infty$ の極限において解析解（連続的一般解）と一致する。したがって、離散的一般解に基づく数値解の精度もまた、当然、等分数 m に依存することになるゆえ、数値解の収束性および精度の検討を目的として、初期荷重などの影響を無視した、アーチの通常自由振動において、等分数と自由振動固有値の収束性および精度との関係を検討し、十分な精度を有する数値解を得るための実用的な等分数を明らかにする。

非円弧アーチにおいては、拱矢比の増大に伴ってアーチ曲率の軸長方向への変化率が增大するため、高ライズアーチの収束解を得るためには、低ライズアーチの場合に比べて、より大きな等分数 m を必要とする。橋梁に用いられるアーチの拱矢比 f/L としては、ほぼ、 $f/L > 0.5$ の範囲の値が考えられるゆえ、悪条件下での数値解の収束性の検討のために、拱矢比 $f/L=0.5$ の高ライズカタナリーアーチについて固有値の収束性および精度を解析する。

- ① 一様断面を有する 2 ヒンジアーチ
- ② 一定幅と $h(\eta) = h_0(1 + \sin \pi \eta)$ で変化する高さをもつ、矩形変断面 2 ヒンジアーチ

について、逆対称型および対称型のそれぞれ 2 次までの固有値 λ を算定した。アーチの片側分割数 $m/2=40$ の場合の算定値に対する、 $m/2=6, 8, \dots, 20$ の各場合の算定値の比を表-2 に示す。本例においては、アーチ部材細長比 $a=200$ とした。

表-2 によれば、 $m/2=10$ のとき、解はすでに収束状態にあるとみなすことができる。本例は、数値解の収束性に対して悪条件を与える、比較的大きな曲率変化および変断面を有するアーチに関するものであるゆえ、離散的一般解に基づいて、拱矢比 $f/L < 0.5$ のアーチの面内自由振動を解析する場合、片側分割数 $m/2=10$ とすることにより、十分正確に第 4 次までの固有値を算定することができると思われるが、本文においては、 $m/2=20$ として以下の数値解析を行うこととする。

Table 2 Convergency of 2-hinged Catenary Arch

m/2	Uniform Section				Variable Section			
	Antisym.		Sym.		Antisym.		Sym.	
	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
6	1.000	1.000	1.000	0.981	1.000	1.000	0.997	0.998
8	1.000	1.000	1.000	0.995	0.999	0.999	0.998	0.998
10	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	0.999	0.999	0.999
12	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	0.999	0.999	0.999
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
λ	3.428	8.054	5.853	10.16	4.317	10.15	7.143	12.66

(2) 既往研究結果との比較

離散的一般解に基づく本解析法の実用性の検証を目的として、定断面アーチの面内自由振動固有値 λ と拱矢比 f/L との関係に関して、既往の理論値および実験値と本理論値との比較を行う。

2 ヒンジ円弧アーチに関する Wolf⁷⁾ のせん断変形を無視した理論値および高ライズ固定放物線アーチに関する鈴木¹⁷⁾ らの実験値と本理論値との比較を図-4, 5 に示す。これらによれば、本理論値と既往の理論値および実験値とは十分よく一致しており、離散的一般解に基づく本解析法の実用性を知ることができよう。

(3) アーチの面内自由振動性状

- a) 放物線アーチの自由振動特性および各種軸線形アーチの自由振動固有値
- アーチ系橋梁などにおいては、円弧以外の軸線を有するアーチが用いられることが多いが、従来、非円弧アー

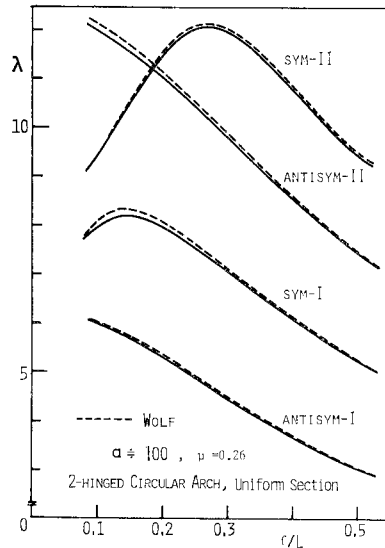


Fig. 4 Frequency Curve of 2-hinged Circular Arch

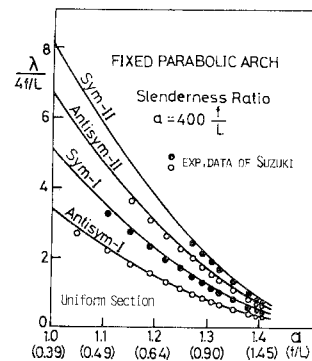


Fig. 5 Frequency Curve of Fixed Parabolic Arch

チの面内自由振動性状に関する詳細な解析は、ほとんど行われていない。したがって、ここではアーチ系橋梁にもっとも多く用いられる放物線アーチに関して、面内自由振動を解析し、また、円弧アーチと放物線、カタナリーおよびサイクロイド形の各アーチの固有振動数の比較を行う。

放物線形の軸線および定断面を有する、細長比 $a=100, 200, 300$ の 2 ヒンジアーチおよび $a=200$ の固定アーチに関する自由振動固有値 $\lambda = (\rho_0 \omega^2 L^4 / gEI_0)^{1/4}$ と拱矢比 f/L との関係を示す。各図中、固有値曲線の $f/L=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ の各点においてかっこ内に記入した数字は、左から順に、自由振動中のアーチにおける、せん断力、軸力および曲げモーメントによる各ひずみエネルギーの全ひずみエネルギーに対する百分率で、小数第 1 位を四捨五入したものである。また、図-6 (b), 図-7 中の ①~⑳ の記号は、各固有値曲線の $f/L=0.1, 0.2,$

0.3 点を表わしており、これらの各点におけるアーチの法線方向変位 u のモードは 図-8 (a), (b) に示すとおりである。

これらより明らかなごとく、リブアーチは固有値曲線の右上がり部、右下がり部および変曲点部の各部分において、それぞれ異なった振動形態で自由振動を行う。すなわち、対称振動固有値曲線の右上がり部分における振動は、振動中のひずみエネルギー分布が示すごとく、軸伸縮変形主体の振動であり、図-8 (a), (b) の u モード ⑧ および ⑩ に示すごとく、この場合の法線方向変位モードにおいては、節は生じない。対称振動固有値曲線の右下がり部分における振動および逆対称振動は、曲げ変形主体の振動であり、その u モードには、直線ばりの鉛直変位モードとの類似性が認められる。変曲点部分すなわち、対称振動固有値曲線における、右上がり部分と右下がり部分との接続部における振動は、曲げ変形と軸

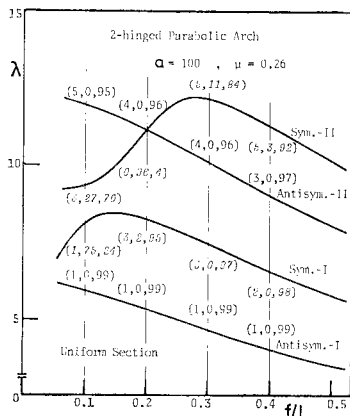


Fig. 6 (a) Frequency Curve and Strain Energy Distribution of 2-hinged Parabolic Arch ($a=100$)

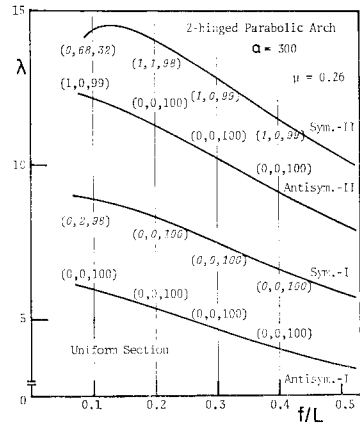


Fig. 6 (c) Frequency Curve and Strain Energy Distribution of 2-hinged Parabolic Arch ($a=300$)

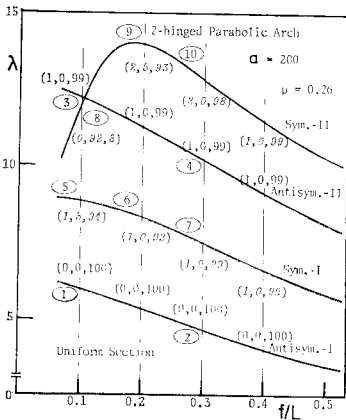


Fig. 6 (b) Frequency Curve and Strain Energy Distribution of 2-hinged Parabolic Arch ($a=200$)

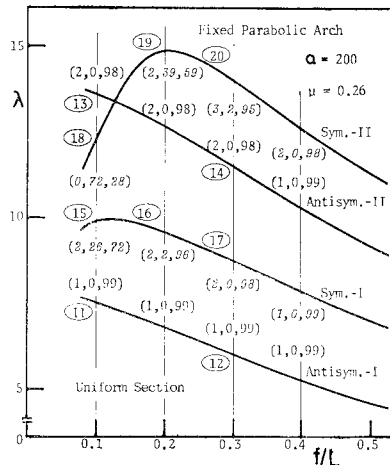


Fig. 7 Frequency Curve and Strain Energy Distribution of Fixed Parabolic Arch

伸縮変形の両変形を伴う連成振動である。その典型は、
 図-7 の ⑬ 点にみられ、その u モードは、図-8 (b)
 に示すごとく、⑳ の曲げ振動の u モードに比べて節が
 1 つ少ない。

次に、拱矢比 $f/L=0.1, 0.2$ の 2 ヒンジ放物線アーチ
 における、自由振動固有値 λ と細長比 $a=(A_0L^2/I_0)^{1/2}$
 との関係を 図-9 (a), (b) に示す。本図における対称振
 動固有値曲線の水平部分は、振動中のひずみエネルギー

分布が示すごとく、曲げ変形主体の振動に対応し、傾斜
 部分は軸伸縮変形主体の振動に対応する。また、水平部
 分と傾斜部分との接続部分は曲げ変形と軸伸縮変形を伴
 う連成振動に対応する。なお、逆対称振動固有値曲線
 において、細長比の極端に小さな範囲で、わずかな傾斜部
 分があらわれているが、これはせん断変形の影響の増大
 に伴う振動数の低下であると考えられる。

定断面を有する非円弧アーチの面内自由振動に関する
 数値的データとして、図-10 に示すごとく、放物線、

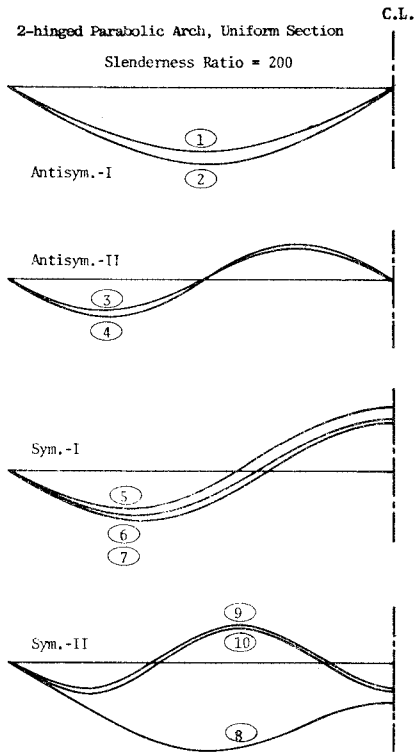


Fig. 8 (a) u -Mode of 2-hinged Parabolic Arch

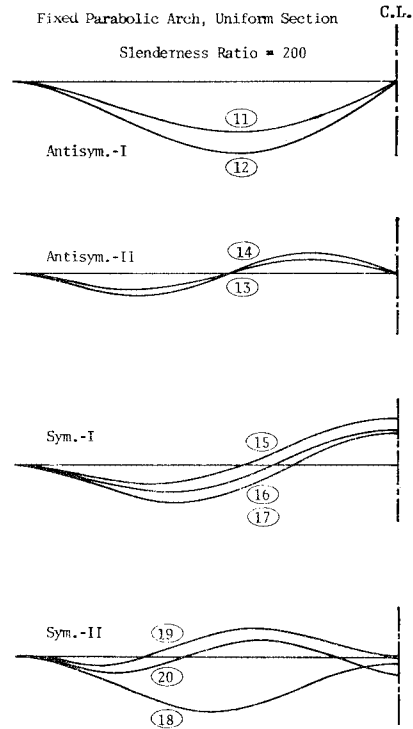


Fig. 8 (b) u -Mode of Fixed Parabolic Arch

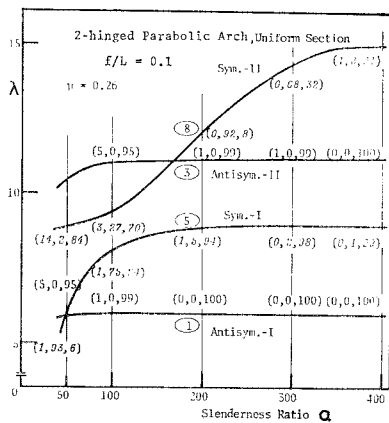


Fig. 9 (a) Effect of Slenderness Ratio and Strain Energy Distribution of 2-hinged Parabolic Arch ($f/L=0.1$)

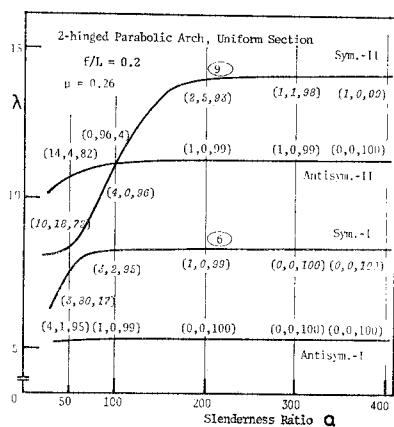


Fig. 9 (b) Effect of Slenderness Ratio and Strain Energy Distribution of 2-hinged Parabolic Arch ($f/L=0.2$)

カタナリー、円およびサイクロイド形の各軸線を有する、2ヒンジアーチの対称型および逆対称型それぞれ2次までの自由振動固有値 λ を表-3 (a)~(d) に示す。これらによれば、拱矢比 f/L が大きい場合には、放物

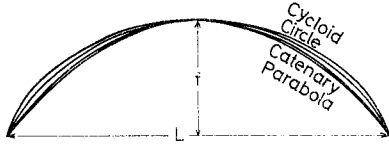


Fig. 10 Parabola, Catenary, Circle and Cycloid

Table 3 (a) Frequency Coefficient λ of Antisymmetric 1st Vibration of 2-hinged Arch

f/L	Axis	Slenderness Ratio				
		50	100	200	300	400
0.1	Parabola	5.901	5.982	6.004	6.007	6.008
	Catenary	5.899	5.979	6.001	6.005	6.006
	Circle	5.894	5.975	5.995	5.999	6.001
	Cycloid	5.891	5.972	5.993	5.997	5.998
0.2	Parabola	5.292	5.360	5.377	5.380	5.381
	Catenary	5.270	5.336	5.354	5.357	5.359
	Circle	5.215	5.282	5.299	5.302	5.303
	Cycloid	5.183	5.249	5.266	5.269	5.271
0.3	Parabola	4.623	4.676	4.689	4.691	4.692
	Catenary	4.562	4.612	4.625	4.628	4.629
	Circle	4.399	4.447	4.459	4.461	4.462
	Cycloid	4.276	4.321	4.332	4.335	4.336
0.4	Parabola	4.026	4.065	4.076	4.076	4.078
	Catenary	3.925	3.962	3.972	3.974	3.974
	Circle	3.631	3.662	3.671	3.673	3.673
0.5	Parabola	3.528	3.558	3.566	3.567	3.568
	Catenary	3.397	3.424	3.431	3.432	3.433
	Circle	2.984	3.004	3.009	3.011	3.011

Table 3 (c) Frequency Coefficient λ of Antisymmetric 2nd Vibration of 2-hinged Arch

f/L	Axis	Slenderness Ratio				
		50	100	200	300	400
0.1	Parabola	11.423	11.979	12.140	12.171	12.182
	Catenary	11.416	11.974	12.135	12.166	12.177
	Circle	11.399	11.965	12.126	12.157	12.169
	Cycloid	11.390	11.959	12.122	12.153	12.163
0.2	Parabola	10.678	11.135	11.266	11.292	11.301
	Catenary	10.639	11.104	11.237	11.262	11.270
	Circle	10.520	11.008	11.144	11.170	11.179
	Cycloid	10.429	10.933	11.072	11.099	11.108
0.3	Parabola	9.761	10.107	10.205	10.224	10.231
	Catenary	9.696	10.045	10.143	10.162	10.169
	Circle	9.410	9.780	9.882	9.902	9.908
	Cycloid	9.070	9.451	9.555	9.575	9.582
0.4	Parabola	8.805	9.067	9.139	9.153	9.159
	Catenary	8.733	8.988	9.060	9.073	9.078
	Circle	8.274	8.537	8.607	8.621	8.626
0.5	Parabola	7.907	8.109	8.164	8.175	8.178
	Catenary	7.834	8.024	8.076	8.086	8.089
	Circle	7.231	7.412	7.461	7.470	7.473

線、カタナリー、円およびサイクロイド形の各アーチにおいて軸線形状の違いによる固有振動数の差異が認められるが、拱矢比の低下とともに小さくなり $f/L=0.1$ の場合には差異はわずかなものとなることがわかる。

b) 初期荷重とそれに基づく初期断面力および軸線形状の変化の影響

2ヒンジアーチ橋などのごとく、アーチリブの自重のほか、床版や床組などの死荷重を初期荷重として受けるアーチの面内振動性状の把握を目的として 図-11 に示すごとき、Deck Load p およびアーチリブ自重 p_d の

Table 3 (b) Frequency Coefficient λ of Symmetric 1st Vibration of 2-hinged Arch

f/L	Axis	Slenderness Ratio				
		50	100	200	300	400
0.1	Parabola	5.930	8.036	8.858	8.920	8.937
	Catenary	5.932	8.013	8.829	8.894	8.914
	Circle	5.932	7.964	8.765	8.838	8.860
	Cycloid	5.932	7.937	8.731	8.808	8.830
0.2	Parabola	7.607	8.252	8.330	8.343	8.349
	Catenary	7.526	8.178	8.268	8.283	8.288
	Circle	7.319	7.968	8.081	8.101	8.107
	Cycloid	7.191	7.824	7.949	7.970	7.978
0.3	Parabola	7.320	7.482	7.525	7.534	7.536
	Catenary	7.224	7.405	7.452	7.461	7.463
	Circle	6.823	7.054	7.111	7.121	7.125
	Cycloid	6.458	6.693	6.753	6.764	6.768
0.4	Parabola	6.536	6.651	6.683	6.689	6.690
	Catenary	6.470	6.587	6.617	6.623	6.626
	Circle	5.964	6.096	6.130	6.136	6.139
0.5	Parabola	5.806	5.892	5.915	5.919	5.920
	Catenary	5.757	5.840	5.862	5.866	5.868
	Circle	5.150	5.234	5.255	5.259	5.260

Table 3 (d) Frequency Coefficient λ of Symmetric 2nd Vibration of 2-hinged Arch

f/L	Axis	Slenderness Ratio				
		50	100	200	300	400
0.1	Parabola	8.839	9.363	12.020	14.327	14.999
	Catenary	8.843	9.395	12.061	14.333	14.979
	Circle	8.853	9.464	12.147	14.335	14.931
	Cycloid	8.858	9.500	12.192	14.330	14.903
0.2	Parabola	8.344	11.101	13.996	14.104	14.132
	Catenary	8.441	11.199	13.944	14.061	14.089
	Circle	8.682	11.449	13.767	13.908	13.944
	Cycloid	8.827	11.585	13.623	13.778	13.821
0.3	Parabola	8.715	12.157	12.788	12.831	12.847
	Catenary	8.822	12.188	12.720	12.764	12.779
	Circle	9.235	11.960	12.395	12.447	12.466
	Cycloid	9.494	11.521	11.932	11.995	12.016
0.4	Parabola	9.037	11.320	11.491	11.521	11.531
	Catenary	9.102	11.251	11.409	11.438	11.448
	Circle	9.453	10.717	10.896	10.927	10.938
0.5	Parabola	9.043	10.174	10.290	10.311	10.318
	Catenary	9.092	10.099	10.206	10.225	10.232
	Circle	8.918	9.409	9.517	9.537	9.544

載荷状態にある定断面2
ヒンジャーチの振動解析
を行った。無載荷状態で
の軸線形状を放物線形と
して、初期荷重 p およ
び p_d とそれに伴う初期

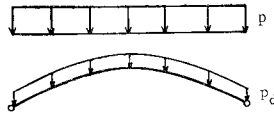


Fig. 11 Deck Load and Dead Load

断面力の影響および初期荷重に基づく有限変形による無載荷時軸線形状の変化を考慮した固有円振動数パラメーター λ と荷重強度 pL^3/EI および 拱矢比 f/L との関係を図-12 (a) および 図-12 (b), (c) に示す。図-12 (a) の対称型および逆対称型の1次振動における点線は、初期断面力などの影響を無視した、通常の振動理論に基づく固有値曲線である。図-12 (b), (c) 中に記入した数字は振動中のアーチにおける、全ひずみエネルギーに対する曲げひずみエネルギーの百分率である。これらより、定断面アーチの面内自由振動性状に対する、初期荷重などの影響として次の傾向が明らかになる。

(i) 図-12 (a) によれば、初期荷重 p の増大に伴って、アーチの固有円振動数は低下し、分岐座屈荷重作用状態において逆対称1次振動数は零となる。また、初期断面力や軸線形状の変化の影響を、考慮した場合と無視した場合との円振動数の比は（逆対称1次，対称1次，逆対称2次，対称2次）の各振動の順で、 $pL^3/EI_0=4, 8, 12$ の各場合について、(0.93, 0.98, 0.97, 1.00), (0.85, 0.97, 0.94, 0.99), (0.76, 0.95, 0.91, 0.98) となり、初期断面力と軸線形状の変化の固有振動数に対する影響は、逆対称1次振動においてもっとも大きく表わることが認められる。

(ii) 図-12 (b), (c) によれば、初期荷重が増大しても、自由振動中の曲げひずみエネルギーの比率には、ほとんど変化は認められない。このことから、初期荷重は、曲げ振動，軸振動あるいは両者の連成振動などの振動形態に対してはほとんど影響を及ぼさないものと判断される。ただし、拱矢比 $f/L=0.05$ の偏平アーチの対称1, 2次振動において、わずかながら振動形態の変化の傾向が認められる。

c) 変断面性の影響

合理的設計などの観点から、実橋においては、曲げモーメントの大きさに対応して、部材断面を変化させることが多い。2ヒンジャーチに関しても、文献21)において、部材軸1/4点および3/4点付近の断面を他断面に比べて太くすることにより、面内耐荷性を高めることができることが示されている。このような変断面アーチの一例として、幅 b ，高さ h_0 の矩形断面をもつ一様断面アーチと同一容積および同一断面幅を有し、高さが、 $h(\eta) = h_0(1 - \alpha \cos 4\pi\eta)$ ，と変化する変断面2ヒンジャーチの振動数曲線を 図-13 に示す。 $f/L=0.1, 0.2$,

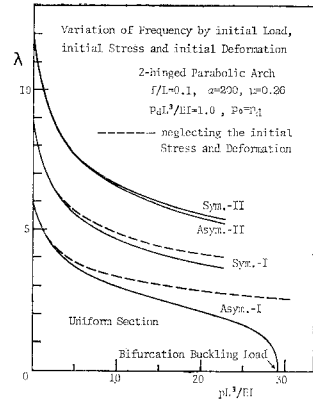


Fig. 12(a) Variation of Frequency by initial Load, initial Stress and initial Deformation

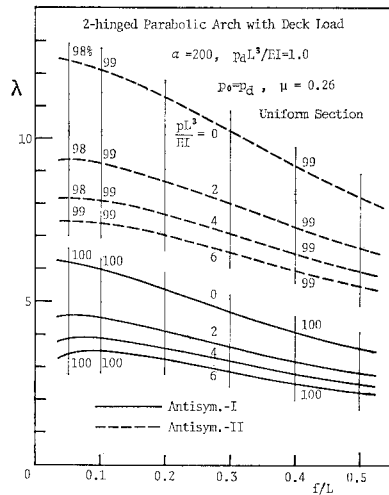


Fig. 12 (b) Frequency Curve of 2-hinged Parabolic Arch with Deck Load (Antisymmetric)

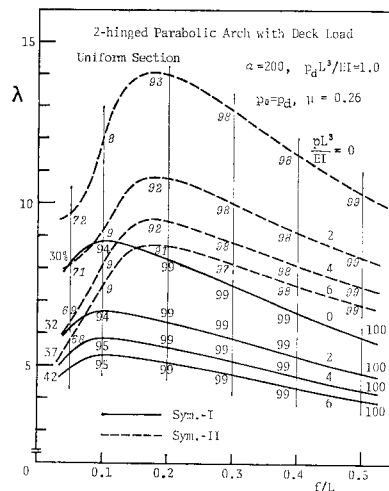


Fig. 12 (c) Frequency Curve of 2-hinged Parabolic Arch with Deck Load (Symmetric)

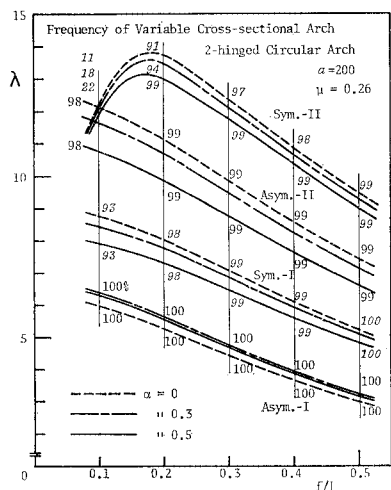


Fig. 13 Frequency Curve of Variable Cross-sectional Arch

…、0.5 の各点に記入の数字は、振動中のアーチにおける、全ひずみエネルギーに対する曲げひずみエネルギーの百分率で、小数第 1 位を四捨五入した値である。

容積を一定に保った本変断面アーチにおいて、対称 1, 2 次および逆対称 2 次の振動数は、 α の増加とともに、すなわち変断面性の増大とともに、一樣断面アーチの振動数よりも低下している。これとは異なり、逆対称 1 次振動数は変断面性の増大とともに上昇し、後わずかに低下している。変断面性の増大に伴う逆対称 1 次振動数の上昇は、アーチ軸 1/4 点および 3/4 点付近に最大変位を生じる変形に対して、断面の補強効果が表われるためと考えられる。また、変断面性の増大に伴い、軸振動が優勢な連成振動において、曲げの影響の高まりが認められる。

7. 結 語

大スパンのリブアーチ橋などのごとく、全体的剛性が比較的低い、いわゆる柔構造アーチに関して、死荷重などの初期荷重とそれに伴う初期部材力の影響および初期荷重に伴う有限変形に基づく、アーチ軸線形状の変化の影響などを考慮した、変断面任意形アーチの面内自由振動の一解析法を提示し、あわせて、面内自由振動性状の解析を行った。

得られたおまな結果を要約すれば次のとおりである。

(1) 任意平面曲線を軸線とする変断面アーチの一解析法として、基礎微分方程式の離散的な一般解に基づく解析法を提示した。本解析法によれば、部材の置換系などへのモデル化を行うことなしに、原変断面任意形アーチを、部材軸等分点における幾何学的諸量および初期荷重

強度などを用いて、直接的に解析することができる。

(2) 定断面および対称構造を有するアーチの逆対称振動においては曲げ振動が卓越する傾向がある。また、対称振動においては軸振動が卓越する場合、曲げ振動が卓越する場合および両者が強く連成する場合がある。一般に、低ライズアーチの対称振動においては軸振動が卓越する傾向があり、高ライズアーチの対称振動においては曲げ振動が卓越する傾向がある。また、低ライズアーチと高ライズアーチの境界部分において連成振動の傾向が強くなる。なお、連成振動が生じる境界部分の拱矢比は振動次数によって異なり、低次振動において小さく、高次になるにつれて大きくなる傾向がある。

(3) 放物線、カテナリー、円およびサイクロイド形の各アーチの軸線形状の違いによるアーチの固有振動数の差異は、高ライズアーチにおいては明瞭であるが、拱矢比の低下とともに小さくなり、拱矢比が 0.1 程度の扁平アーチにおいてはわずかなものとなる。

(4) 2 ヒンジアーチ橋などのように、死荷重などの初期荷重を有するアーチにおいては初期荷重による初期断面力および軸線形状の変化により、固有振動数は低下するが、それらの影響は逆対称 1 次振動においてもっとも大きいことが認められた。また初期荷重などは、曲げ振動、軸振動および両者の連成振動などの振動形態に対してはほとんど影響を及ぼさないことが認められた。ただし、拱矢比が 0.05 の扁平アーチの対称振動においては、わずかながら振動形態の変化の傾向が認められた。

(5) アーチ軸 1/4 点および 3/4 点付近に太断面を有する、変断面 2 ヒンジアーチにおいて変断面性の増大に伴い、軸振動が優勢な連成振動において、曲げの影響が若干高められる傾向が認められた。

謝 辞：本研究を行うにあたり、ご指導ご鞭撻いただいた吉村虎蔵九州大学教授に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) J.P. Den Hartog: The Lowest Natural Frequency of Circular Arches, Philos. Mag., Vol. 5, Series 7, pp. 400~408, 1928.
- 2) 三浦七郎: 単鉸拱振動に関する考究, 土木学会誌, 第 17 卷, 第 12 号, pp. 1181~1207, 1931.
- 3) Waltking, F.W.: Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern, Ing. Arch., Bd. 5, pp. 429~449, 1934.
- 4) 高橋 伸: 円弧形棒の平面内の振動(固定-固定), 日本機械学会論文集, 29 卷, 197 号, pp. 179~186, 1963.
- 5) Rao, S.S. and V. Sundararajan: In-Plane Flexural Vibrations of Circular Rings, Trans. ASME, pp. 620~625, Sept., 1969.
- 6) 山崎徳也・崎山 毅: 3 ヒンジアーチの自由振動解法, 土木学会論文集, 第 184 号, pp. 41~55, 1970.
- 7) Wolf, J.A.: Natural Frequencies of Circular Arches, Proc. ASCE, ST 9, pp. 2337~2349, 1971.

- 8) Petyt, M. and C.C. Fleischer : Free Vibration of a Curved Beam, Jour. Sound and Vibration, Vol. 18, pp. 17~30, 1971.
- 9) Veletsos, A.S., Austin, W.J., Pereira, C.A.L. and S.J. Wung : Free In-Plane Vibration of Circular Arches, Proc. ASCE, EM 2, pp. 311~329, 1972.
- 10) Bellow, D.G. and A. Semeniuk : Symmetrical and Unsymmetrical Forced Excitation of Thin Circular Arches, Int. Jour. Mech. Sci., Vol. 14, pp. 185~195, 1972.
- 11) Austin, W.J. and A.S. Veletsos : Free Vibration of Arches Flexible in Shear, Proc. ASCE, EM 4, pp. 735~753, 1973.
- 12) 最上武雄：低放物線2絞アーチの振動，土木学会誌，第23巻，第12号，pp. 1355~1358, 1937.
- 13) Volterra, E. and J.D. Morell : A Note on the Lowest Natural Frequency of Elastic Arcs, Trans. ASME, pp. 744~746, 1960.
- 14) Volterra, E. and J.D. Morell : Lowest Natural Frequencies of Elastic Hinged Arcs, Jour. Acous. Soci. Ame., Vol. 33, pp. 1787~1790, 1961.
- 15) Romanelli, E. and P.A. Laura : Fundamental Frequencies of Non-Circular, Elastic, Hinged Arcs, Jour. Sound and Vibration, Vol. 24, pp. 17~22, 1972.
- 16) 高橋 伸・鈴木勝義ほか2名：だ円弧棒およびサイン曲線棒の面内振動，日本機械学会論文集，43巻，366号，pp. 495~503, 1977.
- 17) 鈴木勝義・高橋 伸ほか1名：曲線棒の面内振動，日本機械学会論文集，43巻，372号，pp. 2914~2923, 1977.
- 18) Wang, T.M. : Lowest Natural Frequency of Clamped Parabolic Arcs, Proc. ASCE, ST 1, pp. 407~411, 1972.
- 19) 崎山 毅・栗原和夫：変断面梁柱の撓屈解法について，長崎大学工学部研究報告，第8号，pp. 25~32, 1977.
- 20) 後藤茂夫：有限変形法の理論と応用，九州大学提出学位論文，1969.
- 21) 岡部俊三・倉西 茂：変断面アーチの耐荷力について，土木学会年次学術講演会講演概要集，I-154, 1976.

(1978.6.23・受付)