

# 条件付間接測定における区間推定

## INTERVAL ESTIMATION IN THE PROBLEM OF CONDITIONAL INDIRECT OBSERVATION

三 池 亮 次\*  
By  $\square$  Ryoji  $\square$  MIKI

### 1. はじめに

従来、誤差論においては、平均二乗誤差をもって解の精度を評価するのが慣例であった。平均二乗誤差は統計学では不偏分散の平方根であり、誤差の目安を与えるものであるが、母標準偏差の推定値として必ずしも適正であるといえない。むしろ未知量の取り得る範囲のある確率で推定することが望ましい。そのような解析は区間推定の手法といわれ、Linnik<sup>1)</sup> は条件付直接推定における未知量の信頼区間の定式化を試みている。

しかしながら、たとえば三角測量において、三角形の内角の最確値を得て三角網の測点座標を推定するように、条件付直接測定における未知量のある関数の区間推定は、条件付直接測定の形式のままでは困難である。条件付直接測定は条件付間接測定の特殊な場合として包括されるから、これを条件付間接測定として取り扱うことにより初めて条件付直接測定の未知量の任意の関数の区間推定が厳密に可能となる。

ここでは、条件付間接測定の問題における未知量すなわち回帰係数の区間推定と、この回帰係数と線形の関係にある任意の値の信頼区間を、ある信頼係数で誘導する基礎式を誘導した。三角網の三角形の内角は間接測定における回帰係数として推定されるが、この内角の線形変換として与えられる三角網の測点座標の信頼区間などを応用例として解析した。測量の目的は測角ではなく、測点座標を求めることに帰着するから、測量条件式の設定が測点座標の取り得る信頼区間に及ぼす影響を、区間推定の手法により推測することは意義がある。

また、たとえば工学上重要な課題である安全性とは、設計者の推定し期待する値の誤差の程度を表現したものとみえるが、土木構造物の設計誤差には測量の成果である測点座標の精度が大きく関係するから、測点座標の

区間推定は、構造物の安全性、信頼性を決定する一つの要素として無視することはできない問題でもある。

### 2. 条件付間接測定のマトリックス解析<sup>2),3)</sup>

確定変数マトリックス  $X(n \times p)$  と従属変量ベクトル  $y(n \times 1)$  との間に、線形回帰モデル(観測方程式)

$$y = X\beta + e \dots\dots\dots(1)$$

が成立するものとする。ここに  $\beta(p \times 1)$  は(偏)回帰係数、 $e(n \times 1)$  は偏差ベクトルである。偏差  $e$  について、その期待値および分散共分散マトリックス

$$\left. \begin{aligned} E[e] &= 0 \\ \text{Cov}[e] &= E[ee^{(t)}] \\ &= \sigma^2 Q^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

が成立するものとする。 $\sigma^2$  は単位の重さの母分散で、 $Q$  はその  $i$  番目の要素が  $q_i$  である重さのマトリックスで

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & & \\ & q_2 & 0 \\ 0 & & \ddots \\ & & & q_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3)$$

とする。(偏)回帰係数  $\beta$  について

$$\left. \begin{aligned} \phi &= a_0 + A\beta = 0 \\ \hat{\phi} &= a_0 + A\hat{\beta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4)$$

の条件式が成立するものとする。ここに  $a_0(r \times 1)$  は定数ベクトル、 $A(r \times p)$  は係数マトリックスである。 $\hat{\beta}$  は条件式(4)の下での  $\beta$  の推定値で

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}_0 - S_{q^{-1}} A^{(t)} S_{Aq^{-1}} w \dots\dots\dots(5)$$

である。ここに、添字  $(t)$  は転置記号であり

$$\left. \begin{aligned} S_q &= X^{(t)} Q X, S_{Aq} = A S_q^{-1} A^{(t)} \\ \hat{\beta}_0 &= S_q^{-1} X^{(t)} Q y, w = a_0 + A\hat{\beta}_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

である。また、単位の重さの母分散  $\sigma^2$  の不偏推定値すなわち不偏分散  $V$  と残差平方和  $S_E$  は

$$\left. \begin{aligned} S_E &= y^{(t)} Q y - \hat{\beta}_0^{(t)} X^{(t)} Q y + w^{(t)} S_{Aq^{-1}} w \\ V &= \frac{S_E}{n - (p - r)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

\* 正会員 工博 熊本大学教授 工学部土木工学教室

で、 $\hat{\beta}$  の分散共分散マトリックスは

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\hat{\beta}] &= \sigma^2 [S_q^{-1} - (AS_q^{-1})^{(t)} S_{Aq}^{-1} (AS_q^{-1})] \\ &\equiv \sigma^2 S_{\hat{\beta}} \end{aligned} \quad (8)$$

である。

### 3. 条件付間接測定における区間推定

単に間接測定における回帰係数  $\beta$  および  $\beta$  と線形の関係にある関数の区間推定の試みはすでに行われている<sup>4),5)</sup>。ここでは条件付間接測定における区間推定の問題を解析する。

#### (1) 回帰係数 $\beta$ の区間推定

式 (1) を式 (6) の第 3 式に代入して

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= S_q^{-1} X^{(t)} Q (X\beta + e) \\ &= \beta + S_q^{-1} X^{(t)} Q e \end{aligned} \quad (9)$$

したがって式 (6) の第 4 式は、式 (9) を用いて、

$$\begin{aligned} w &= a_0 + A(\beta + S_q^{-1} X^{(t)} Q e) \\ &= AS_q^{-1} X^{(t)} Q e \end{aligned} \quad (10)$$

であり、また式 (5) に式 (9) と式 (10) を代入して、

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \beta + S_q^{-1} X^{(t)} Q e \\ &\quad - S_q^{-1} A^{(t)} S_{Aq}^{-1} AS_q^{-1} X^{(t)} Q e \\ &= \beta + S_{\hat{\beta}} X^{(t)} Q e \end{aligned} \quad (11)$$

を得る。これより  $\hat{\beta}$  と  $e$  とは線形の関係にあることがわかる。したがって偏差  $e$  が式 (2) を満足する正規分布に従い、

$$e \in n(0, \sigma^2 Q^{-1}) \quad (12)$$

であるときには、正規分布の再生性によって  $\hat{\beta}$  もまた正規分布に従うことになる。式 (11) の両辺の期待値をとり、かつ式 (2) の第 1 式を用いて

$$E[\hat{\beta}] = \beta \quad (13)$$

すなわち、 $\hat{\beta}$  は  $\beta$  の不偏推定値であること、および式 (8) を勘案して、 $\hat{\beta}$  は母平均が  $\beta$  で分散共分散マトリックスが  $\sigma^2 S_{\hat{\beta}}$  の正規分布に従い

$$\hat{\beta} \in n(\beta, \sigma^2 S_{\hat{\beta}}) \quad (14)$$

である。したがって  $\sigma^2 S_{\hat{\beta}}$  の対角要素は  $\hat{\beta}$  の分散となり、 $S_q^{-1}$  第  $i$  行  $i$  列要素を  $C_{ii}$  とし

$$AS_q^{-1} = [s_1 s_2 \dots s_p] \quad (15)$$

とすると、 $\hat{\beta}$  の第  $i$  番目の要素  $\hat{\beta}_i$  の平均二乗誤差は、

$$\epsilon_{\hat{\beta}_i} = \sqrt{(C_{ii} - s_i^{(t)} S_{Aq}^{-1} s_i)} V \quad (16)$$

であり、

$$\hat{\beta}_i \in n\{\beta_i, \sigma^2 (C_{ii} - s_i^{(t)} S_{Aq}^{-1} s_i)\} \quad (17)$$

したがって

$$u = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{(C_{ii} - s_i^{(t)} S_{Aq}^{-1} s_i)} \sigma^2} \in n(0, 1^2) \quad (18)$$

である。残差平方和  $S_E$  と  $\sigma^2$  の商は自由度が  $n - (p - r)$  の  $\chi^2$  分布に従い、

$$\frac{S_E}{\sigma^2} \in \chi^2\{n - (p - r)\} \quad (19)$$

であることが【補遺 2】に証明され、また  $S_E/\sigma^2$  と  $u$  は互いに独立の確率分布に従うので、

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{(C_{ii} - s_i^{(t)} S_{Aq}^{-1} s_i)} V} \in t\{n - (p - r)\} \quad (20)$$

ここに、 $t\{n - (p - r)\}$  は自由度が  $n - (p - r)$  の  $t$  分布である。したがって信頼係数が 95% の  $\beta_i$  の信頼区間は  $t\{n - (p - r); 0.05\}$  を自由度  $n - (p - r)$  の  $t$  分布の両側 5% 点とし、式 (16) の  $\epsilon_{\hat{\beta}_i}$  を用いて

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_i - t\{n - (p - r); 0.05\} \epsilon_{\hat{\beta}_i} &< \beta_i < \hat{\beta}_i \\ &+ t\{n - (p - r); 0.05\} \epsilon_{\hat{\beta}_i} \end{aligned} \quad (21)$$

である。条件付直接測定の問題で Linnik は同様の式を誘導している。

#### (2) 回帰係数 $\beta$ と線形の関数ベクトル $\mu'$ の区間推定

$\beta$  と  $\mu'$  との間に、確定変数ベクトル  $x_0$  とマトリックス  $X'$  に対して

$$\mu' = x_0 + X' \beta \quad (22)$$

の関係があり、 $\mu'$  の推定値が

$$\hat{\mu}' = x_0 + X' \hat{\beta} \quad (23)$$

で与えられるものとする。式 (23) に式 (11) を代入して

$$\hat{\mu}' = \mu' + X' S_{\hat{\beta}} X^{(t)} Q e \quad (24)$$

である。 $e$  の要素が互いに独立に正規分布に従うときは、 $\hat{\mu}'$  もまた正規分布に従う。その期待値、

$$E[\hat{\mu}'] = \mu' \quad (25)$$

で、 $\hat{\mu}'$  は  $\mu'$  の不偏推定値であり、その分散共分散マトリックス

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\hat{\mu}'] &= E[(\hat{\mu}' - \mu')(\hat{\mu}' - \mu')^{(t)}] \\ &= E[X'(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)^{(t)} X^{(t)}] \end{aligned}$$

上式に式 (8) を代入して

$$\text{Cov}[\hat{\mu}'] = X' S_{\hat{\beta}} X^{(t)} \sigma^2 \quad (26)$$

したがって、 $D' = X' S_{\hat{\beta}} X^{(t)}$  の対角要素を  $D'_{\alpha\alpha}$ 、 $\alpha = 1, 2, \dots, n$  とすれば、 $\hat{\mu}'$  の要素  $\hat{\mu}'_{\alpha}$  の分散は

$$V[\hat{\mu}'_{\alpha}] = D'_{\alpha\alpha} \sigma^2 \quad (27)$$

であるから、

$$\hat{\mu}'_{\alpha} \in n(\mu'_{\alpha}, D'_{\alpha\alpha} \sigma^2) \quad (28)$$

あるいは

$$u' = \frac{\hat{\mu}'_{\alpha} - \mu'_{\alpha}}{\sqrt{D'_{\alpha\alpha} \sigma^2}} \in n(0, 1^2) \quad (29)$$

式 (19) の  $S_E/\sigma^2$  と上式の  $u'$  は【補遺 1】に証明されるように独立の確率分布に従うから

$$\frac{\hat{\mu}'_{\alpha} - \mu'_{\alpha}}{\sqrt{D'_{\alpha\alpha} V}} \in t\{n - (p - r)\} \quad (30)$$

したがって、式 (21) の誘導と同様にして  $\mu'_{\alpha}$  の信頼係数が 95% の信頼区間は

$$\hat{\mu}'_a - t\{n-(p-r); 0.05\} \sqrt{D'_{aa}V} < \mu'_a < \hat{\mu}'_a + t\{n-(p-r); 0.05\} \sqrt{D'_{aa}V} \dots\dots\dots(31)$$

となる。X' が式 (1) の X に一致し

$$\mu = X\beta \dots\dots\dots(32)$$

でその推定値を  $\hat{\mu}$  とするとき、 $\mu$  の信頼区間は、もちろん、D' の代わりに  $D = XS_3X^{(t)}$  を用いればよい。

4. 適用例

(1) 1測点のまわりの角の調整<sup>9)</sup>

図-1 に示す角 X, Y, Z を測定して次の値を得た。

- X : 44° 2' 2"
- X+Y : 117°54'51"
- X+Y+Z : 179°59'57"
- Y : 73°52'56"
- Y+Z : 135°57'54"
- Z : 62° 5'10"

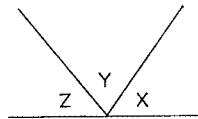


図-1 一測点のまわりの測角の調整

各測定は等重であるものとして、X, Y, Z の最確値の誘導についてはすでに報告<sup>9)</sup>の通りであるが、その信頼係数 95% の信頼区間を求めてみよう。

式 (1) の観測量  $y$  および係数マトリックス  $X$  および  $\beta$  は

$$y = \begin{bmatrix} 44^\circ 2' 2'' \\ 117^\circ 54' 51'' \\ 179^\circ 59' 57'' \\ 73^\circ 52' 56'' \\ 135^\circ 57' 54'' \\ 62^\circ 5' 10'' \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

であり、条件式は

$$\phi = a_0 + A\beta = -180^\circ + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = 0$$

である。

式 (6) において等重の場合は  $Q$  は単位マトリックス  $I$  となり、

$$S_q = X^{(t)}X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S_q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$S_{A_0} = AS_q^{-1}A^{(t)} = 1/2$  であり、式 (5) により  $\beta$  の最確値  $\hat{\beta}^{(t)} = [\hat{X} \hat{Y} \hat{Z}]$  は、

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 44^\circ & 2' & 1\frac{5}{8}'' \\ 73^\circ & 52' & 51\frac{1}{4}'' \\ 62^\circ & 5' & 7\frac{1}{8}'' \end{bmatrix}$$

また、式 (7) に従って、残差平方和  $S_E = 62.625$  (秒)<sup>2</sup> であり、不偏分散  $V = S_E/n - (p-r) = 15.656$  (秒)<sup>2</sup> を得る。

$$AS_q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

であるから、式 (8) で定義される

$$S_{\hat{\beta}} = S_q^{-1} - (AS_q^{-1})^{(t)} S_{A_0}^{-1} (AS_q^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

であり、最確値  $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$  の平均二乗誤差は、式 (16) により、

$$\epsilon_{\hat{X}} = \pm \sqrt{\frac{3}{8} \times 15.656} = \pm 2.4''$$

$$\epsilon_{\hat{Y}} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \times 15.656} = \pm 2.8''$$

$$\epsilon_{\hat{Z}} = \pm \sqrt{\frac{3}{8} \times 15.656} = \pm 2.4''$$

である。信頼係数が 95% の  $\beta$  の信頼区間は、式 (21) を用いて求める。すなわち、 $n=6, p=3, r=1$ 、したがって自由度が  $n-(p-r)=4$  の  $t$  分布の両側 5% 点  $t(4; 0.05) = 2.78$  であるから、先に求めた平均二乗誤差  $\epsilon_{\hat{X}}, \epsilon_{\hat{Y}}, \epsilon_{\hat{Z}}$  にこれに乗じて

$$X = 44^\circ 2' 1\frac{5}{8}'' \pm 7''$$

$$Y = 73^\circ 52' 51\frac{1}{4}'' \pm 8''$$

$$Z = 62^\circ 5' 7\frac{1}{8}'' \pm 7''$$

である。

帰関数  $\mu = X\beta$  の信頼区間は、式 (22) において  $x_0 = 0, X' = X$  とおいて求める。すなわち

$$D = XS_3X^{(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \text{sym.} & & & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ & & & & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

である。なお sym. は対称マトリックスを意味する。その対角要素は  $D_{\alpha\alpha}$  であり、 $\alpha=1, 2, 5, 6$  に対して

$$t(4; 0.05) \sqrt{D_{\alpha\alpha} V} = 2.78 \times \sqrt{\frac{3}{8} \times 15.656} = 7(\text{秒})$$

また

$$t(4; 0.05) \sqrt{D_{33} V} = 0$$

$$t(4; 0.05) \sqrt{D_{44} V} = 2.78 \times \sqrt{\frac{1}{2} \times 15.656} = 8(\text{秒})$$

である。回帰関数の推定値は

$$\hat{\mu} = \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{X} + \hat{Y} \\ \hat{X} + \hat{Y} + \hat{Z} \\ \hat{Y} \\ \hat{Y} + \hat{Z} \\ \hat{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44^\circ 2' 1\frac{5}{8}'' \\ 117^\circ 54' 52\frac{7}{8}'' \\ 180^\circ \\ 73^\circ 52' 51\frac{1}{4}'' \\ 135^\circ 57' 58\frac{3}{8}'' \\ 62^\circ 5' 7\frac{1}{8}'' \end{bmatrix}$$

であるから、これらの値を式 (31) に用いて信頼係数 95% の回帰関数  $\mu$  の信頼区間が求められる。回帰関数としての  $X, Y, Z$  の信頼区間は、先に誘導された回帰係数としての信頼区間に同じとなる。また、回帰関数  $X+Y, X+Y+Z, Y+Z$  の信頼区間は

$$X+Y = 117^\circ 54' 52\frac{7}{8}'' \pm 7''$$

$$X+Y+Z = 180^\circ \pm 0''$$

$$Y+Z = 135^\circ 57' 58\frac{3}{8}'' \pm 7''$$

である。 $X+Y, Y+Z$  のように和をとれば、誤差伝播の法則に従うなら信頼区間幅が増大することになるが、 $X+Y+Z=180^\circ$  の条件が設定されているときは和をとることによって信頼区間幅が拡大することにはならない。すなわち  $X+Y+Z$  は必ず  $180^\circ$  で誤差は零である。また、 $Y+X, Y+Z$  の信頼区間幅はいずれも  $\pm 7''$  であって、単独の  $X, Z$  また  $Y$  の信頼区間幅  $\pm 7''$  または  $\pm 8''$  と同程度の値となる。

(2) 三角網の測点座標の区間推定一

図-2 に示す単列三角網において角  $\alpha_i, \beta_i, i=1, 2, 3$  と基線長  $D_1$  および検基線長  $D_2$  を測定して、観測値

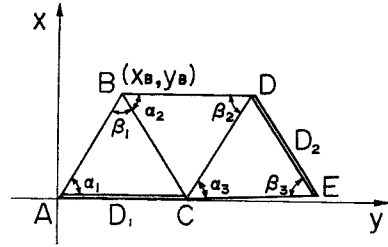


図-2 単列三角網の測点座標の区間推定一

$$y_{\alpha_i} = y_{\beta_i} = 60^\circ, i=1, 2, 3$$

$$D_1 = 50 \text{ m}, D_2 = 50.01 \text{ m}$$

を得た。角度の測定は等重として、測点  $B$  の座標  $(x_B, y_B)$  の区間推定を試みる。

角度  $\alpha_i, \beta_i$  およびその測定値  $y_{\alpha_i}, y_{\beta_i}$  をベクトルで表示して

$$\beta^{(t)} = [\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3],$$

$$y^{(t)} = [y_{\alpha_1}, y_{\beta_1}, y_{\alpha_2}, y_{\beta_2}, y_{\alpha_3}, y_{\beta_3}]$$

とすると、観測方程式 (1) において  $X=I$  であり、直接測定の問題となる。その辺条件式を線形化するために  $\beta = \bar{\beta} + \Delta\beta, y = \bar{y} + \Delta y, \bar{\beta}$  と  $\bar{y}$  の要素  $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i = 60^\circ, \bar{y}_{\alpha_i} = \bar{y}_{\beta_i} = 60^\circ, i=1, 2, 3$  とおくと観測方程式は

$$\Delta y = \Delta\beta + e \dots\dots\dots(33)$$

であつ  $\Delta y = 0$  となる。また条件式は

$$\phi = a + A\Delta\beta = 0 \dots\dots\dots(34)$$

である。ここに、

$$a = \log D_1 - \log D_2 + \sum \log \sin \bar{\alpha}_i - \sum \log \sin \bar{\beta}_i \\ = \log \frac{50.00}{50.01} = -8.7 \times 10^{-5}$$

$\Delta\beta$  を秒で表わし、

$$\Delta\beta^{(t)} = [\Delta\alpha_1'', \Delta\beta_1'', \Delta\alpha_2'', \Delta\beta_2'', \Delta\alpha_3'', \Delta\beta_3'']$$

とすると

$$d = 21.055 \times 10^{-7} \cot \bar{\alpha}_i \\ = 1.216 \times 10^{-6}$$

に対して、 $A = d[1 - 11 - 11 - 1]$  である。これより

$$S_{Aq} = AA^{(t)} = 6d^2$$

$$\Delta\hat{\beta}_0 = \Delta y = 0$$

$$w = a + A\Delta y = a \dots\dots\dots(35)$$

であるから、 $\Delta\hat{\beta}$  の最確値

$$\Delta\hat{\beta} = \Delta y - A^{(t)} S_{Aq}^{-1} w \dots\dots\dots(36)$$

$$= -\frac{1}{6} \frac{a}{d} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \pm \{12.0''\}$$

したがって、 $\alpha_i, \beta_i$  の最確値

$$\hat{\alpha}_i = 60^\circ 12'', \hat{\beta}_i = 59^\circ 59' 48'', i=1, 2, 3$$

を得る。

残差平方和は

$$S_E = w^{(t)} S_{Aq}^{-1} w = \frac{1}{6 d^2} \cdot a^2 \dots\dots\dots (37)$$

であり、また

$$S_{\hat{\beta}} = I - d^2 \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & -1 \end{bmatrix} \left[ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \right] \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{d^2}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ & 5 & 1 & -1 & 1 & \\ & & 5 & 1 & -1 & \\ & & & 5 & 1 & \\ & & & & 5 & 1 \\ & & & & & 5 \end{bmatrix}$$

sym.

であるから、観測角の最確値  $\hat{\alpha}_i$  および  $\hat{\beta}_i$  の平均二乗誤差は等しく

$$\epsilon = \sqrt{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{d^2}} = 27''$$

である。

B点の座標は

$$\left. \begin{aligned} x_B &= D_1 \frac{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\sin \beta_1} \sin \alpha_1 \\ y_B &= D_1 \frac{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}{\sin \beta_1} \cos \alpha_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

である。先に求められた  $\alpha_1$  および  $\beta_1$  の最確値  $\hat{\alpha}_1 = 60^\circ 12'$ 、 $\hat{\beta}_1 = 59^\circ 59' 48''$  に対して B 点の推定値は、式 (38) を用いて

$$\hat{x}_B = 43.30 \text{ m}, \hat{y}_B = 25.00 \text{ m} \dots\dots\dots (39)$$

を得る。また  $\alpha_i = \bar{\alpha}_i + \Delta\alpha_i''$ 、 $\beta_i = \bar{\beta}_i + \Delta\beta_i''$ 、 $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_i = 60^\circ$  としたが、各測角が  $\bar{\alpha}_i$  および  $\bar{\beta}_i$  であるときの B 点の座標を  $\bar{x}_B$  および  $\bar{y}_B$  とすると、 $\Delta x_B = x_B - \bar{x}_B$  および  $\Delta y_B = y_B - \bar{y}_B$  は、式 (38) を  $\bar{\alpha}_1$  および  $\bar{\beta}_1$  のまわりに Taylor 展開して

$$\Delta x_B = \frac{1}{\rho''} \left\{ \left( \frac{\partial x_B}{\partial \alpha_1} \right)_{\alpha_1=60^\circ, \beta_1=60^\circ} \Delta\alpha_1'' + \left( \frac{\partial x_B}{\partial \beta_1} \right)_{\alpha_1=60^\circ, \beta_1=60^\circ} \Delta\beta_1'' \right\}$$

ここに  $\rho'' = 206265''$  であり、

$$\frac{\partial x_B}{\partial \alpha_1} = D_1 \frac{\sin(2\alpha_1 + \beta_1)}{\sin \beta_1} \left( \frac{\partial x_B}{\partial \alpha_1} \right)_{\alpha_1=60^\circ, \beta_1=60^\circ} = 0.0 \text{ m}$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial \beta_1} = -D_1 \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \beta_1} \left( \frac{\partial x_B}{\partial \beta_1} \right)_{\alpha_1=60^\circ, \beta_1=60^\circ} = -50.0 \text{ m}$$

同様に

$$\Delta y_B = \frac{1}{\rho''} \left\{ \left( \frac{\partial y_B}{\partial \alpha_1} \right)_{\alpha_1=60^\circ, \beta_1=60^\circ} \Delta\alpha_1'' + \left( \frac{\partial y_B}{\partial \beta_1} \right)_{\alpha_1=60^\circ, \beta_1=60^\circ} \Delta\beta_1'' \right\}$$

ここに、

$$\frac{\partial y_B}{\partial \alpha_1} = D_1 \frac{\cos(2\alpha_1 + \beta_1)}{\sin \beta_1} \left( \frac{\partial y_B}{\partial \alpha_1} \right)_{\alpha_1=60^\circ, \beta_1=60^\circ} = -57.74 \text{ m}$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial \beta_1} = -D_1 \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\sin^2 \beta_1} \left( \frac{\partial y_B}{\partial \beta_1} \right)_{\alpha_1=60^\circ, \beta_1=60^\circ} = -28.87 \text{ m}$$

したがって、 $\Delta \hat{\mu}^{(t)} = [\Delta x_B \ \Delta y_B]$  は、

$$\Delta \hat{\mu} = \frac{1}{\rho''} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial x_B}{\partial \beta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial y_B}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial y_B}{\partial \beta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\alpha_1=60^\circ, \beta_1=60^\circ} \begin{bmatrix} \Delta\alpha_1'' \\ \Delta\beta_1'' \\ \Delta\alpha_2'' \\ \Delta\beta_2'' \\ \Delta\alpha_3'' \\ \Delta\beta_3'' \end{bmatrix}$$

$$\equiv X' \Delta \hat{\beta}$$

ここに、

$$X' = \frac{1}{\rho''} \begin{bmatrix} 0 & -50.00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -57.74 & -28.87 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

これより

$$D' = X' S_{\hat{\beta}} X'^{(t)} = \frac{1}{6 \rho''^2} \begin{bmatrix} 12500 & 10105 \\ 10105 & 24170 \end{bmatrix}$$

その対角要素の平方根は

$$\sqrt{D'_{11}} = 2.21 \times 10^{-4} \quad \sqrt{D'_{22}} = 3.08 \times 10^{-4}$$

である。また  $t(1; 0.05) = 12.74$  で式 (37) により

$$\sqrt{V} = \sqrt{S_E} = 29.19$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} t(1; 0.05) \sqrt{D'_{11}} V &= 0.08 \text{ m} \\ t(1; 0.05) \sqrt{D'_{22}} V &= 0.11 \text{ m} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

したがって、式 (39) と式 (40) を式 (31) に用いて信頼係数が 95% の B 点の座標の信頼区間は  $x_B = 43.30 \text{ m} \pm 0.08 \text{ m}$ 、 $y_B = 25.50 \text{ m} \pm 0.1 \text{ m}$  となる。同様の計算を進めることにより、D および E 点の座標の信頼区間  $x_D = 43.30 \text{ m} \pm 0.1 \text{ m}$ 、 $y_D = 75.00 \text{ m} \pm 0.16 \text{ m}$ 、 $x_E = 0.00 \text{ m} \pm 0.20 \text{ m}$ 、 $y_E = 100.00 \text{ m} \pm 0.11 \text{ m}$  を得る。例題のような測角に対して基線長と検基線長が等しいときには、測点座標の信頼区間幅は零であるから、その差が 1 cm である例題に対して、信頼区間幅  $\pm 8 \text{ cm} \sim \pm 20 \text{ cm}$  はかなり大きい。その理由の一つは条件式の数が 1 個であることで、これに正確な測角による角条件式等を加えて条件式の数を増すことによって、式 (40) における  $t$  値の自由度が増し、 $t$  値が小さくなり、したがって測点座標の信頼区間幅も狭くなるであろう。単列三角網において、例題のように辺条件式のみで両端の座標条件が設定されていないときは、検基線の実測長と計算長の食い違いは、座標には無関係に三角形の内角によって調整されることになる。したがって基線を基準にして、それより離れるに従って測点座標に影響する三角形の内角の数が

増大し、内角誤差が累積して測点座標の誤差が拡大することが推察される。例題の場合は三角形の数が少ないので僅かではあるが、基線より離れた  $D$  および  $E$  点の信頼区間幅は基線に近い  $B$  点のそれより大きいといえる。このことは次に述べる適用例 (3) の計算結果では、明らかである。

(3) 三角網の測点座標の区間推定-2<sup>3)</sup>

図-3 に示すような単列三角網の  $A$  および  $B$  点の座標、基線  $AB$  と検基線  $CD$  のおおよその方向角  $T_a$ ,  $T_d$  と辺長  $S_a$ ,  $S_d$  が既知であり、また  $n$  個の三角形の内角  $a_i, b_i, c_i, i=1, 2, \dots, n$  は実測されているものとする。条件式の数は、角条件式が  $n$  個、方向角の条件式と辺条件式がおおよそ 1 個、 $A, B$  点間の経緯距の座標条件式が 2 個の合計  $n+4$  個である。その内角が  $a_i = \bar{a}_i + \Delta a_i, b_i = \bar{b}_i + \Delta b_i, c_i = \bar{c}_i + \Delta c_i$  と表わすとき、微小量  $\Delta\beta^{(4)} = [\Delta a_1, \Delta b_1, \Delta c_1, \Delta a_2, \Delta b_2, \Delta c_2, \dots, \Delta a_n, \Delta b_n, \Delta c_n]$  についての条件式は次の通りである。

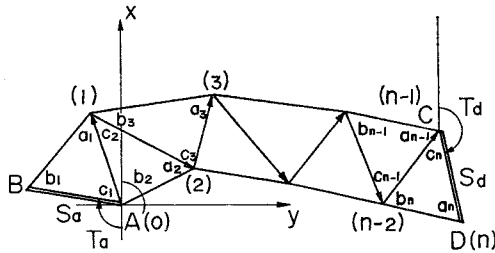


図-3 単列三角網の測点座標の区間推定-2

a) 角条件式

角度の単位をラジアンとして

$$\phi_i = w_i + \Delta a_i + \Delta b_i + \Delta c_i = 0 \dots (41)$$

ここに、

$$w_i = \bar{a}_i + \bar{b}_i + \bar{c}_i - \pi, i=1, 2, \dots, n \dots (41)'$$

b) 辺条件式

式 (34) の角度の単位をラジアンで表わし

$$\phi_{n+1} = w_{n+1} + \sum_{i=1}^n \cot a_i \cdot \Delta a_i - \sum_{i=1}^n \cot b_i \cdot \Delta b_i = 0 \dots (42)$$

ここに、

$$w_{n+1} = \left( \ln S_d + \sum_{i=1}^n \ln \sin \bar{a}_i \right) - \left( \ln S_a + \sum_{i=1}^n \ln \sin \bar{b}_i \right) \dots (42)'$$

c) 方向角の条件式

$$\phi_{n+2} = w_{n+2} + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot \Delta c_i = 0 \dots (43)$$

ここに、

$$w_{n+2} = (T_a - T_d) + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot \bar{c}_i$$

$$+ (n-1)\pi \dots (43)'$$

d) 座標の条件式

$A$  点の座標  $(x_a, y_a)$  と  $C$  点の座標  $(x_c, y_c)$  の間の緯距の条件式は、

$$\phi_{n+3} = w_{n+3} + \sum_{j=1}^{n-1} (\beta_{aj} \cdot \Delta a_j) - \sum_{j=1}^n (\beta_{bj} \Delta b_j) - \sum_{j=1}^{n-1} (\beta_{cj} \cdot \Delta c_j) = 0 \dots (44)$$

また経距の条件式は

$$\phi_{n+4} = w_{n+4} + \sum_{j=1}^{n-1} (\delta_{aj} \cdot \Delta a_j) - \sum_{j=1}^{n-1} (\delta_{bj} \cdot \Delta b_j) - \sum_{j=1}^{n-1} (\delta_{cj} \cdot \Delta c_j) = 0 \dots (45)$$

である。ここに、

$$\left. \begin{aligned} w_{n+3} &= x_c - x_a - \sum_{i=1}^{n-1} \bar{X}_{i-1,i} \\ w_{n+4} &= y_c - y_a - \sum_{i=1}^{n-1} \bar{Y}_{i-1,i} \\ \beta_{aj} &= \cot \bar{a}_j \sum_{i=j}^{n-1} \bar{X}_{i-1,i} \quad \delta_{aj} = \cot \bar{a}_j \sum_{i=j}^{n-1} \bar{Y}_{i-1,i} \\ \beta_{bj} &= \cot \bar{b}_j \sum_{i=j}^{n-1} \bar{X}_{i-1,i} \quad \delta_{bj} = \cot \bar{b}_j \sum_{i=j}^{n-1} \bar{Y}_{i-1,i} \\ \beta_{cj} &= (-1)^j \sum_{i=j}^{n-1} \bar{Y}_{i-1,i} \quad \delta_{cj} = (-1)^{j+1} \sum_{i=j}^{n-1} \bar{X}_{i-1,i} \\ &\dots \dots \dots (46) \\ \bar{X}_{i-1,i} &= S_a \prod_{k=1}^i \frac{\sin \bar{b}_k}{\sin \bar{a}_k} \cos \{ \widehat{(i-1, i)} \} \\ \bar{Y}_{i-1,i} &= S_a \prod_{k=1}^i \frac{\sin \bar{b}_k}{\sin \bar{a}_k} \sin \{ \widehat{(i-1, i)} \} \end{aligned} \right\} \dots (47)$$

であり、式 (47) の  $\widehat{(i-1, i)}$  は、図-3 において  $i-1$  点より  $i$  点に向かうベクトルの方向角である。

以上の  $n+4$  個の条件式の下に、各測点の座標

$$x_l = \bar{x}_l + \Delta x_l \quad y_l = \bar{y}_l + \Delta y_l$$

を推定する。ここに、

$$\bar{x}_l = \sum_{i=1}^l \bar{X}_{i-1,i} \quad \bar{y}_l = \sum_{i=1}^l \bar{Y}_{i-1,i}$$

であり、式 (44), (45), (46) を参考にして

$$\begin{aligned} \Delta x_l &= - \sum_{j=1}^l (\beta_{aj} \cdot \Delta a_j) + \sum_{j=1}^l (\beta_{bj} \cdot \Delta b_j) \\ &\quad + \sum_{j=1}^l (\beta_{cj} \cdot \Delta c_j) \\ \Delta y_l &= - \sum_{j=1}^l (\delta_{aj} \cdot \Delta a_j) + \sum_{j=1}^l (\delta_{bj} \cdot \Delta b_j) \\ &\quad + \sum_{j=1}^l (\delta_{cj} \cdot \Delta c_j) \end{aligned}$$

である。その  $l=1, 2, \dots, n-1$  についての  $\Delta\beta$  にかかる係数マトリックスが式 (22) の  $X'$  となる。 $\Delta x_l, \Delta y_l$  の信頼区間はすなわち  $x_l, y_l$  の信頼区間である。

例題として土橋の観測データ<sup>8)</sup>である 表-1 および

$$T_a = 294^\circ 15' 16'' \quad T_d = 182^\circ 4' 41''$$

表-1 三角網の三角形の内角の測定値  $y = \bar{y} + \Delta y$

	$\bar{y}$				$\Delta y$				
$a_1$	37°	13'	10"	12"	$a_4$	72°	14'	0"	18"
$b_1$	79	34	40	10	$b_4$	57	7	40	18
$c_1$	63	11	10	18	$c_4$	50	37	30	12
$a_2$	78	32	50	10	$a_5$	32	21	40	18
$b_2$	32	0	20	12	$b_5$	79	1	10	10
$c_2$	69	26	0	18	$c_5$	68	37	0	10
$a_3$	31	4	30	16	$a_6$	106	17	30	10
$b_3$	45	4	0	10	$b_6$	25	56	10	14
$c_3$	103	51	0	12	$c_6$	47	46	0	10

$\log S_d = 3.044410$      $\log S_d = 2.993291$

$x_a = -24027.91 \text{ m}$      $y_a = 3796.38 \text{ m}$

$x_c = -21117.75 \text{ m}$      $y_c = 7377.58 \text{ m}$

を用いて、測点座標の推定値とその信頼係数が 95% の信頼区間を求めてみよう。信精度計算によれば<sup>9)</sup>、表-2 の値が得られたが、測点 (1), (2), (3), (4) の信頼区間幅は ±30 cm ~ ±40 cm 程度で基線長 1 000 m と比較して小さく、通常の縮尺では作図上問題とならない。

表-2 の (b) の欄は、辺、角および方向角の条件式のみの場合の値であるが、座標条件がないため明らかに基線より離れるに従って座標の信頼区間幅は拡大する。また (c), (d) 欄のように、条件式の数が少なくなるほど座標の信頼区間幅は大きくなる。

座標条件を加えた (a) 欄においては、信頼区間幅は基線からの距離のいかんにかかわらず拡大することなく、しかも C 点の信頼区間幅は零となる。一般に  $X'$  が  $A$  に一致すると

$$D' = X' S_{\beta} X'^{(t)}$$

$$= A (S_q^{-1} - S_q^{-1} A^{(t)} S_{A_q}^{-1} A S_q^{-1}) A^{(t)} = 0$$

であるから、式 (22) の  $\mu'$  の信頼区間幅は零となる。したがって、 $A$  のいずれかの行を  $X'$  とするような、

この例題の C 点の座標とか、適用例 (1) の角度  $X + Y + Z$  の信頼区間幅は零となるのである。

### 5. 結 論

(1) 条件付間接測定における観測方程式の回帰係数  $\beta$  および  $\beta$  と線形の関係にある任意の関数  $\mu' = x_0 + X'\beta$  の信頼区間を求める基礎式を誘導した。

(2) 適用例として三角測量における 1 測点のまわりの角の調整および単列三角網における測点座標の区間推定を試みた。測量の目的は測角ではなく、測点座標の作図にあるから、測点座標の区間推定は意義があると思われる。

(3) 信頼係数が 95% の信頼区間の幅 (一種の誤差) は、平均二乗誤差より大きくなる。その拡大の割合には条件式の数が  $t$  分布の自由度として関係してくる。この信頼区間の幅を小さくする一つの方法は、条件式をできるだけ多く設定することである。

(4) 単列三角網の測量においても、たんに辺条件式のみよりは、正確な測角による角条件式を加えて条件式の数を増す方がよい。辺条件式の外に、角条件式、基線と検基線の一端における座標条件および基線と検基線の方向角の条件を設定した例題の場合、各測点座標の信頼区間の幅は基線より離れるに従って拡大することなく、ほぼ同程度の値となる。

(5) 1 測点のまわりの角  $X, Y, Z$  の和  $X + Y + Z = 180^\circ$  の条件とか、単列三角網の基線 および 検基線の一端の座標が既知の条件が設定されているとき、当然ではあるが、それらの値すなわち  $X + Y + Z$  とか 検基線の一端の座標の信頼区間幅は零となることを証明した。

(6) 三角網の大きさ、条件式および測点の数がいか

表-2 単列三角網の測点座標の推定値と信頼区間

測 点	(a)		(b)		(c)		(d)	
	推 定 値 (m)	信 頼 区 間 (cm)	推 定 値 (m)	信 頼 区 間 (cm)	推 定 値 (m)	信 頼 区 間 (cm)	推 定 値 (m)	信 頼 区 間 (cm)
経 距 (Y)								
1	3 716.10	±29	3 716.20	±27	3 716.20	±28	3 716.20	±27
2	4 642.30	34	4 642.40	40	4 642.40	39	4 642.40	42
3	5 347.30	40	5 347.50	69	5 347.60	72	5 347.50	87
4	5 726.30	40	5 726.60	68	5 726.60	66	5 726.50	87
C	7 377.58	0	7 378.05	112	7 378.13	115	7 377.85	192
緯 距 (X)								
1	-22 229.00	±38	-22 228.80	±41	-22 228.80	±39	-22 228.80	±40
2	-22 530.00	30	-22 529.90	37	-22 529.90	37	-22 529.90	36
3	-21 395.60	35	-21 395.40	56	-21 395.40	60	-21 395.50	72
4	-22 510.90	26	-22 510.80	48	-22 510.90	57	-22 510.90	55
C	-21 117.75	0	-21 117.53	60	-21 117.71	106	-21 117.80	114

注) : (a) は、角、辺、方向角および座標条件を含む場合  
(b) は角、辺、方向角のみで座標条件を除く場合

(c) は角、辺条件式のみの場合  
(d) は角条件式のみの場合

に大きく、かつ多くても本論の適用は原理的には可能である。ただし、あまりに大次元マトリックスになれば、電子計算機の記憶容量、計算の過程で生ずる桁落ち、丸め誤差等の難点が生じ、またもちろん地球の規模の大三角網であれば測地的配慮が必要となる。三角網が複雑になれば、それだけ Taylor 展開が面倒である。また本論が成立する背景には、誤差は小さく Taylor 展開において 2 次以上のべき数をもつ項を省略できること、観測方程式における偏差  $e$  が正規分布に従うという前提が存在することに留意すべきである。

本研究の一部の例題は、比較解析の目的で筆者らがさきに発表した論文<sup>2)</sup>よりの引用である。また熊本大学の FACOM 230-60 による計算には、熊本大学大学院生築地澄男君を煩わした。関係各位に深甚な謝意を表する。

【補遺 1】

$u'$  と  $S_E/\sigma^2$  が互いに独立の確率分布に従うことの証明

式 (30) が成立するためには、 $u'$  と  $S_E/\sigma^2$  が互いに独立の確率分布に従うことが必要である。

" $e \in n(\mu, \sigma^2 I)$  であるとき、2 次形式  $e^{(t)} A e$  と  $e^{(t)} B e$  が互いに独立の確率分布に従うための必要十分の条件は、おのおのの 2 次形式のマトリックス  $A$  と  $B$  の積  $AB=0$  である。" という定理<sup>10)</sup>を適用して、 $D = (\hat{\mu}'_{\alpha} - \mu'_{\alpha})^2 / D'_{\alpha\alpha}$  と  $S_E$  の独立性を検討する。式 (29) により

$$\frac{D}{\sigma^2} = \frac{(\hat{\mu}'_{\alpha} - \mu'_{\alpha})^2}{D'_{\alpha\alpha} \sigma^2} \sim \chi^2(1) \dots \dots \dots (A.1)$$

である。また残差平方和

$$\begin{aligned} S_E &= (y - X\hat{\beta})^{(t)} Q (y - X\hat{\beta}) \\ &= \{X(\beta - \hat{\beta}) + e\}^{(t)} Q \{X(\beta - \hat{\beta}) + e\} \\ &= e^{(t)} Q e - (\hat{\beta} - \beta)^{(t)} X^{(t)} Q e \\ &\quad - e^{(t)} Q X (\hat{\beta} - \beta) + (\hat{\beta} - \beta)^{(t)} S_q (\hat{\beta} - \beta) \end{aligned}$$

式 (11) を上式に代入する。  $S_{\hat{\beta}}$  は対称マトリックスであるので上式の右辺第 2 項は

$$(\hat{\beta} - \beta)^{(t)} X^{(t)} Q e = e^{(t)} Q X S_{\hat{\beta}} X^{(t)} Q e$$

同様に、右辺第 3 項も

$$e^{(t)} Q X (\hat{\beta} - \beta) = e^{(t)} Q X S_{\hat{\beta}} X^{(t)} Q e$$

また、右辺第 4 項は

$$(\hat{\beta} - \beta)^{(t)} S_q (\hat{\beta} - \beta) = e^{(t)} Q X S_{\hat{\beta}} S_q S_{\hat{\beta}} X^{(t)} Q e$$

しかるに

$$\begin{aligned} S_{\hat{\beta}} S_q S_{\hat{\beta}} &= (S_q^{-1} - S_q^{-1} A^{(t)} S_{A_q} A S_q^{-1}) \\ &\quad \cdot S_q (S_q^{-1} - S_q^{-1} A^{(t)} S_{A_q} A S_q^{-1}) \\ &= S_{\hat{\beta}} \dots \dots \dots (A.2) \end{aligned}$$

であるから

$$(\hat{\beta} - \beta)^{(t)} S_q (\hat{\beta} - \beta) = e^{(t)} Q X S_{\hat{\beta}} X^{(t)} Q e$$

したがって

$$\begin{aligned} S_E &= e^{(t)} Q e - e^{(t)} Q X S_{\hat{\beta}} X^{(t)} Q e \\ &= (Q^{1/2} e)^{(t)} \cdot (I - Q^{1/2} X S_{\hat{\beta}} X^{(t)} Q^{1/2}) \cdot (Q^{1/2} e) \\ &\dots \dots \dots (A.3) \end{aligned}$$

のように、 $S_E$  は  $Q^{1/2} e$  の 2 次形式として表わすことができる。

次に  $D$  を  $Q^{1/2} e$  の 2 次形式として表わす。

$$J_{\alpha\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ \alpha & & & 1 \\ & & 0 & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{D_{11}} & & & 0 \\ & \frac{1}{D_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{1}{D_{nn}} \end{bmatrix}$$

を定義すれば

$$\begin{aligned} D &= \frac{(\hat{\mu}'_{\alpha} - \mu'_{\alpha})^2}{D'_{\alpha\alpha}} \\ &= (\hat{\mu}' - \mu')^{(t)} J_{\alpha\alpha} D^0 J_{\alpha\alpha} (\hat{\mu}' - \mu') \end{aligned}$$

しかるに、式 (24) において  $D'' = X' S_{\hat{\beta}} X^{(t)}$  とおいて

$$\hat{\mu}' - \mu' = D'' Q e$$

これより

$$\begin{aligned} D &= (Q^{1/2} e)^{(t)} \cdot Q^{1/2} D''^{(t)} J_{\alpha\alpha} D^0 J_{\alpha\alpha} D'' Q^{1/2} \cdot Q^{1/2} e \\ &\dots \dots \dots (A.4) \end{aligned}$$

式 (A.3) と式 (A.4) において、おのおのの 2 次形式のマトリックスの積

$$\begin{aligned} B &\equiv Q^{1/2} D''^{(t)} J_{\alpha\alpha} D^0 J_{\alpha\alpha} D'' Q^{1/2} \\ &\quad \cdot (I - Q^{1/2} X S_{\hat{\beta}} X^{(t)} Q^{1/2}) \\ &= Q^{1/2} D''^{(t)} J_{\alpha\alpha} D^0 J_{\alpha\alpha} D'' Q^{1/2} \\ &\quad - Q^{1/2} D''^{(t)} J_{\alpha\alpha} D^0 J_{\alpha\alpha} \cdot D'' Q X S_{\hat{\beta}} X^{(t)} \cdot Q^{1/2} \end{aligned}$$

しかるに式 (A.2) を用いて

$$\begin{aligned} D'' \cdot Q X S_{\hat{\beta}} X^{(t)} &= X' S_{\hat{\beta}} X^{(t)} \cdot Q X S_{\hat{\beta}} X^{(t)} \\ &= D'' \end{aligned}$$

であるから、 $B=0$  となり、 $Q^{1/2} e$  の 2 次形式である  $S_E$  と  $D$  は、したがってまた  $D/\sigma^2$  と  $S_E/\sigma^2$  は、互いに独立の確率分布に従うことが証明された。

【補遺 2】

$S_E/\sigma^2 \sim \chi^2\{n - (p-r)\}$  であることの証明

条件式が存在しないとき  $S_E/\sigma^2 \sim \chi^2(n-p)$  である<sup>11)</sup>。



条件式が  $r$  個存在するときは、独立の確定変数の数は  $p-r$  であるから、 $S_E/\sigma^2 \in \chi^2\{n-(p-r)\}$  であることは十分に推察されるところであるが、以下のような証明も可能である。

$$\text{Cov}[\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{e}] = E[\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{e}\mathbf{e}^{(t)}\mathbf{Q}^{1/2}] = \sigma^2$$

であるから

$$\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{e} \in n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}) \quad \text{.....(A.5)}$$

したがって

$$\frac{\mathbf{e}^{(t)}\mathbf{Q}\mathbf{e}}{\sigma^2} \in \chi^2(n) \quad \text{.....(A.6)}$$

また

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{X}\mathbf{S}_\beta\mathbf{X}^{(t)}\mathbf{Q}^{1/2} \quad \text{.....(A.7)}$$

を定義すると、式 (A.2) を用いて

$$\mathbf{D}^2 = \mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{X}\mathbf{S}_\beta\mathbf{X}^{(t)}\mathbf{Q}\mathbf{X}\mathbf{S}_\beta\mathbf{X}^{(t)}\mathbf{Q}^{1/2} = \mathbf{D} \quad \text{.....(A.8)}$$

であるから  $\mathbf{D}$  はべき等マトリックスである。また

$$\begin{aligned} \text{trace}(\mathbf{D}) &= \text{trace}\{\mathbf{X}^{(t)}\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{X}(\mathbf{S}_q^{-1} - \mathbf{S}_q^{-1}\mathbf{A}^{(t)}\mathbf{S}_{A_q^{-1}}\mathbf{A}_q^{-1})\} \\ &= \text{trace}(\mathbf{S}_q\mathbf{S}_q^{-1}) - \text{trace}(\mathbf{A}\mathbf{S}_q^{-1}\mathbf{A}^{(t)}\mathbf{S}_{A_q^{-1}}) \\ &= p-r \quad \text{.....(A.9)} \end{aligned}$$

式 (A.3) の第1式の右辺第2項を  $R$  とし、式 (A.7) の  $\mathbf{D}$  を用い、かつ直交マトリックス  $\mathbf{L}$  によって

$$\mathbf{w} = \mathbf{L}^{(t)}\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{e} \quad \text{.....(A.10)}$$

の変換を行えば

$$\begin{aligned} R &= (\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{e})^{(t)}\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{e}) \\ &= \mathbf{w}^{(t)}\mathbf{L}^{(t)}\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{w} \quad \text{.....(A.11)} \end{aligned}$$

とすることができる。上式において

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{L}^{(t)}\mathbf{D}\mathbf{L} \quad \text{.....(A.12)}$$

であるような対角マトリックス  $\boldsymbol{\lambda}$  を  $\mathbf{D}$  の固有値として求めることができる。式 (A.8) により

$$\boldsymbol{\lambda}^2 = \mathbf{L}^{(t)}\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{L}^{(t)}\mathbf{D}\mathbf{L} = \boldsymbol{\lambda} \quad \text{.....(A.13)}$$

であるが、 $\boldsymbol{\lambda}$  は対角マトリックスであるから  $\boldsymbol{\lambda}$  の要素  $\lambda_i=1$  または、0 である。しかるに式 (A.9) と (A.12) により

$$\begin{aligned} \text{trace}(\boldsymbol{\lambda}) &= \text{trace}(\mathbf{L}\mathbf{L}^{(t)}\mathbf{D}) \\ &= p-r \quad \text{.....(A.14)} \end{aligned}$$

であるから、 $\boldsymbol{\lambda}$  の対角要素が 1 であるものの個数が  $p-r$  で 0 であるものの個数が  $n-(p-r)$  である。

式 (A.10) において

$$\left. \begin{aligned} E[\mathbf{w}] &= \mathbf{0} \\ \text{Cov}[\mathbf{w}] &= \mathbf{L}^{(t)}\mathbf{Q}^{1/2}E[\mathbf{e}\mathbf{e}^{(t)}]\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{L} = \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad \text{.....(A.15)}$$

であるから

$$\mathbf{w} \in n(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}) \quad \text{.....(A.16)}$$

式 (A.12) を式 (A.11) に代入し、かつ  $\boldsymbol{\lambda}$  についての式 (A.14) と、式 (A.16) を考慮して

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sigma^2} &= \frac{\mathbf{w}^{(t)}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{w}}{\sigma^2} \\ &= \sum_{i=1}^{p-r} \frac{w_i^2}{\sigma^2} \in \chi^2(p-r) \quad \text{.....(A.17)} \end{aligned}$$

式 (A.3) に式 (A.7) を代入して

$$\mathbf{S}_E = (\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{e})^{(t)}(\mathbf{I}-\mathbf{D})(\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{e}) \quad \text{.....(A.18)}$$

であり、式 (A.11) の第1式と式 (A.18) において、その  $\mathbf{Q}^{1/2}\mathbf{e}$  の2次形式のマトリックスの積

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{I}-\mathbf{D}) &= \mathbf{D}-\mathbf{D}^2 \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

であるから、 $\mathbf{S}_E$  と  $R$  は互いに独立である。

式 (A.3) の第1式において、式 (A.6) と式 (A.17) の関係および  $\mathbf{S}_E$  と  $R$  の独立性を考慮して

$$\frac{\mathbf{S}_E}{\sigma^2} \in \chi^2\{n-(p-r)\}$$

であることがわかる。

参 考 文 献

- 1) Linnik, J.W. : Die Methode der Kleinsten Quadrate in Moderner Darstellung, Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften, s. 207~211, 1961.
- 2) 三池亮次・星田義治：条件付間接測定のマトリックス解析，土木学会論文報告集第199号，pp. 67~77, 1972年3月。
- 3) 中村慶一：技術者のための統計解析，山海堂，pp. 85~86, 1965.
- 4) Draper, N.R. and Smith, H. : Applied Regression Analysis, John Wiley & Sons, Inc. pp. 121~122, 1966.
- 5) 前掲 1) p. 131  
奥野忠一・芳賀敏郎・久米 均・吉澤 正：多変量解析法，日科技連，p. 79, 1975.
- 6) 宮本正太郎：誤差論及計算法，宇宙物理学研究会，pp. 96~99, 1949.  
前掲 2) pp. 70~71.
- 7) 石原藤次郎・森 忠次：測量学応用編，丸善，pp. 56~62, 1965
- 8) 土橋忠則：基準点測量，实用測量シリーズ，山海堂，p. 226, p. 228, 1967.
- 9) 三池亮次・築地澄男：三角網の測点座標の区間推定，昭和52年度土木学会西部支部研究発表会，1978.
- 10) 北川敏男編/塩谷 実：多変量解析論，第1章理論，共立出版，p. 36, 1966.  
三池亮次：マトリックス土木解析学 I，理工図書，p. 87, 1978.
- 11) 中村慶一：河川工学における情報量解析の応用に関する研究，土木研究所報告 118 号の1，pp. 6~7, 1963年3月。