

付加外力を用いて効率化した一非線形応答解析法

AN EFFICIENT NONLINEAR DYNAMIC RESPONSE ANALYSIS
BY USE OF ADDITIONAL FORCES

水田 洋 司*・平井 一 男**
By Yoji MIZUTA and Itio HIRAI

1. ま え が き

構造物を設計する場合、その構造物に部分的な設計変更を加えることはよく行われることである。修正としては、このように最初から設計変更を目的とした積極的な修正以外に、構造物中に生じる亀裂、破損、部材の降伏などの消極的な修正、復元力特性曲線がある区間ごとに直線で近似できるなめらかな曲線で表わされるような場合等が考えられる。これらの修正が部分的な小範囲に限られる場合であっても、修正された構造物 (=system B) の撓性マトリックス、固有値等を求める場合には原構造物 (=system A) を解くのと同じ量の計算を必要とする。最近、system A の解が得られているならば、その解の特性 (たとえば、静的問題では撓性マトリックス、動的問題では固有値、固有モードなど) を利用して system B の解を簡単に求める研究が発表されている^{1)~3), 8)}。

本研究は、多質点系の応答を逐次積分法で求める場合、system A の応答にある量だけ補正することにより、system B の応答を簡単に求めようとするものである。この解析法では、system A の修正に伴って生じる不平衡力を、等価な外力 (=付加外力) に置換し、その外力を system A に作用させて system B の応答を求めている。この解析法によれば、system B に対して求められた基礎式のマトリックスの大きさが、修正された部分にのみ関係しているので、system A のマトリックス次数が大きいか、また変更部分が小さいほど便利に使用できるであろう。ここでは、まず、system A の動特性を利用して system B の動的応答を求める基礎式を導いている。次に、塑性域における復元力特性曲線の変化を修正量とみなし弾塑性状態を system B と考え

て、提案法を弾塑性応答解析に適用している。数値計算例では、トラス橋をとりあげ、任意の部材が塑性域にはいった場合を想定して弾塑性応答を求めている。本解析では、計算手法として、Newmark の β 法¹⁾を用いているが、他の逐次積分法^{12)~15)}を用いてもよい。2. の基礎式の誘導は実際の問題に則するように減衰振動について行っているが、4. の数値計算では非減衰振動を扱っている。

2. 基 礎 式

まず構造物要素の修正量 (=質量変化、剛性変化) に相当する付加外力の求め方について検討する。

強制外力が作用する減衰多自由度質点系の運動方程式をマトリックス表示すると、

$$M\ddot{W} + C\dot{W} + KW = F \dots\dots\dots(1)$$

となる。ここに、

$$\begin{aligned} M &: \text{質量マトリックス} & C &: \text{減衰マトリックス} \\ K &: \text{剛性マトリックス} & \dot{W} &: \text{加速度ベクトル} \\ \dot{W} &: \text{速度ベクトル} & W &: \text{変位ベクトル} \\ F &: \text{外力ベクトル} \end{aligned}$$

式(1)を Newmark の β 法を用いて逐次に解いたときの n 時間点での応答は、 $(n-1)$ 時間点での応答を使用して、次式より求めることができる。

$$\ddot{W}_n = AF_n - B_n \dots\dots\dots(2 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} \dot{W}_n &= D_n + \frac{h}{2} \ddot{W}_n \\ &= \frac{h}{2} AF_n - \frac{h}{2} B_n + D_n \dots\dots\dots(2 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_n &= E_n + \beta h^2 \ddot{W}_n \\ &= \beta h^2 AF_n - \beta h^2 B_n + E_n \dots\dots\dots(2 \cdot c) \end{aligned}$$

ここに、

$$A = \left(M + \frac{h}{2} C + \beta h^2 K \right)^{-1}$$

* 正会員 工修 八代工業高等専門学校講師 土木建築工学科
** 正会員 工博 熊本大学教授 工学部土木工学科

$$B_n = A \left[C \left(\dot{W}_{n-1} + \frac{h}{2} \ddot{W}_{n-1} \right) + K \left\{ W_{n-1} + h \dot{W}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) h^2 \ddot{W}_{n-1} \right\} \right]$$

$$D_n = \dot{W}_{n-1} + \frac{h}{2} \ddot{W}_{n-1}$$

$$E_n = W_{n-1} + h \dot{W}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) h^2 \ddot{W}_{n-1}$$

F_n : n 時間点における外力ベクトル

$\ddot{W}_n, \dot{W}_n, W_n$: それぞれ, n 時間点における加速度ベクトル, 速度ベクトル, 変位ベクトル

h : 刻み時間間隔

β : 0 から 1/2 までの間で変化するパラメータ

また, 外力 $F + \Delta F$ が作用したときの運動方程式および Newmark の β 法による解は, 式 (1), 式 (2・a)~(2・c) と同様に

$$M \ddot{W} + C \dot{W} + K W = F + \Delta F \dots\dots\dots (3)$$

$$\ddot{W}_n = A(F_n + \Delta F_n) - B_n \dots\dots\dots (4 \cdot a)$$

$$\dot{W}_n = \frac{h}{2} A(F_n + \Delta F_n) - \frac{h}{2} B_n + D_n \dots\dots\dots (4 \cdot b)$$

$$W_n = \beta h^2 A(F_n + \Delta F_n) - \beta h^2 B_n + E_n \dots\dots\dots (4 \cdot c)$$

と表わせる. 構造物の質量変化を ΔM , 剛性変化を ΔK とすると, system B の運動方程式は次式で表わせる.

$$M \ddot{W} + C \dot{W} + K W = F - \Delta M(\ddot{W} - \ddot{W}_{MA}) - \Delta K(W - W_K) \dots\dots\dots (5)$$

ここに,

ΔM : 質量の変化量を表わす. 変化した部材に関する部分のみに非零要素をもち, 他は零要素である. 質量の増加に対して正の符号を, 減少に対して負の符号をもつ.

ΔK : 剛性変化量を表わす. 変化した部材に相当する部分のみに非零要素をもち, 他は零要素である. 剛性の増加に対しては正の符号をもち, 減少に対しては負の符号をもつ.

\ddot{W}_{MA} : 質量変化時の加速度ベクトル

W_K : 剛性変化時の変位ベクトル

式 (3), (5) の比較より

$$\Delta F = -\Delta M(\ddot{W} - \ddot{W}_{MA}) - \Delta K(W - W_K) \dots\dots\dots (6)$$

式 (6) の関係を満足するような付加外力 ΔF を定めることができるならば, 式 (4・a)~(4・c) に示す修正前の式を用いて, 修正後の応答を求めることができる. n 時間点においても式 (6) は成立するはずであるから,

$$\Delta F_n = -\Delta M(\ddot{W}_n - \ddot{W}_{MA}) - \Delta K(W_n - W_K) \dots\dots\dots (7)$$

式 (4・a), (4・c) を上式に代入し, 整理すると,

$$\Delta F_n = -\{I + (\Delta M + \beta h^2 \Delta K) A\}^{-1}$$

$$\begin{aligned} & \times \{ \Delta M(A F_n - B_n - \ddot{W}_{MA}) \\ & + \Delta K[\beta h^2(A F_n - B_n) + E_n - W_K] \} \\ & \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

となる. ここで, $\Delta M, \Delta K$ は同一の部材に相応じて生ずるとすれば, $\Delta M, \Delta K$ の非零要素, 零要素の配列は類似したものとなる. それゆえ, 上式で求めた付加外力 ΔF_n は質量マトリックス, 剛性マトリックスの行列次数と同じ列ベクトルであるが, 修正部分に相当する所だけが非零要素で他は零要素である. これらの零要素を取り除いた非零要素のみよりなる縮約された列ベクトルを $\overline{\Delta F_n}$ と表わせば, $\overline{\Delta F_n}$ は次式で求められる.

$$\begin{aligned} \overline{\Delta F_n} = & -\{ \overline{I} + (\overline{\Delta M} + \beta h^2 \overline{\Delta K}) \overline{A} \}^{-1} \\ & \times \{ \overline{\Delta M}(\overline{A F_n} - \overline{B_n} - \overline{\ddot{W}_{MA}}) \\ & + \overline{\Delta K}[\beta h^2(\overline{A F_n} - \overline{B_n}) + \overline{E_n} - \overline{W_K}] \} \\ & \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\Delta F_n} = & -\{ \overline{I} + (\overline{\Delta M} + \beta h^2 \overline{\Delta K}) \overline{A} \}^{-1} \\ & \times \{ \overline{\Delta M}(\overline{X_n} - \overline{\ddot{W}_{MA}}) \\ & + \overline{\Delta K}(\beta h^2 \overline{X_n} + \overline{E_n} - \overline{W_K}) \} \\ & \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここに,

$$\overline{X_n} = \overline{A F_n} - \overline{B_n}$$

\overline{I} : 大きさが $m \times m$ の単位マトリックス

式 (9), (10) 中の $\overline{\Delta M}, \overline{\Delta K}$ はそれぞれ $\Delta M, \Delta K$ から零要素のみからなる行と列を除いて作った縮約マトリックスで, その大きさは修正部分に関する変位 (\overline{W}_n) と同じ行列次数をもつ. また, ここでは修正量 $\Delta M, \Delta K$ が同一部材に生じると考えているため, 非零要素を含む $\overline{\Delta M}, \overline{\Delta K}$ は次式に示すような関係にある.

$$\Delta M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c & d \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \dots\dots a \dots\dots b \dots\dots (11 \cdot a)$$

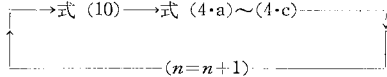
$$\Delta K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta K & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots a \dots\dots b \dots\dots (11 \cdot b)$$

通常, $M, K, \Delta M, \Delta K$ は対称マトリックスである. その場合, $a=c, b=d$ であるから

$$b-a=m \dots\dots\dots (12)$$

となる. a, b は修正によって影響をうける行と列の最初と最後を示し, m は $\overline{\Delta M}, \overline{\Delta K}$ の行列の大きさを表わす. \overline{A} は A において, $\Delta M, \Delta K$ の非零要素の行と列に対応する要素からなるマトリックスである. また, $\overline{B_n}, \overline{E_n}, \overline{X_n}, \overline{\ddot{W}_{MA}}, \overline{W_K}$ は, $\overline{\Delta M}, \overline{\Delta K}$ の各行に対応する要素からなるベクトルである. 式 (10) の下に記して

いる値は、行列の大きさを示している。したがって、式(10)の $\{\bar{I}+(\Delta\bar{M}+\beta h^2\Delta\bar{K})\bar{A}\}^{-1}$ は $\Delta\bar{M}$ 、 $\Delta\bar{K}$ の行列次数と等しい大きさの逆マトリックス計算となる。本法は、system A の計算と修正範囲の大きさに等しいマトリックス演算を行うことにより、system B の応答を求めることができる。また、 $\Delta\bar{F}_n$ に零要素を加えて外力ベクトル F_n の大きさに等しい $\Delta\bar{F}_n$ が得られる。修正後の応答は、次の手順で求めることができる。



3. 弾塑性応答解析への適用

弾塑性応答解析においては、塑性域での応答は新たに作成した塑性域での剛性マトリックスを用いて求める方法が、一般に用いられているようである^{17),18)}。ここではその手順を踏まずに、弾性域での剛性マトリックスと前述の付加外力を用いて、塑性域での応答を求める手法について述べる。すなわち、弾性域から塑性域にはいるときの復元力特性曲線の変化を修正量とみなして解こうとするものである。力学的には、弾性域から塑性域に移行したときの非線形効果を付加外力として運動方程式に導入し、線形問題として解析しようとするものである。

復元力特性曲線を Fig.1 に示すような Bi-Linear 型とすると、剛性マトリックスは、OA 区間、BC 区間、DE 区間で K 、EAB 区間、CD 区間で $K+\Delta K$ として表わすことができる。弾性域から塑性域にはいったときの非線形効果を ΔK と表わすことができるため、前章の考えを適用して計算を進めることができる。すなわち、前章において $\Delta M=0$ とおいた場合に等しい、弾性域における減衰運動方程式は

$$M\ddot{W}+C\dot{W}+KW=F \dots\dots\dots(13)$$

と表わせる。また、塑性域 (AB 区間) での運動方程式は、剛性変化を ΔK 、弾性限界ひずみ (ϵ_e , Fig.1 参照) 時の変位ベクトルを W_e とすると

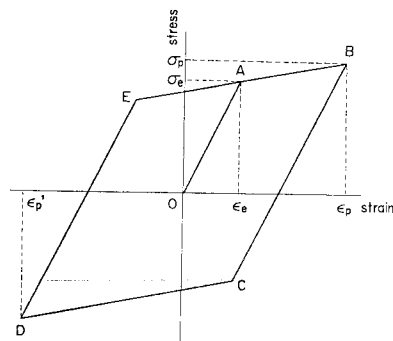


Fig. 1 Hysteresis curve of Bi-Linear type

$$M\ddot{W}+C\dot{W}+KW+\Delta K(W-W_e)=F \dots\dots(14)$$

と表わせる。ここに、 ΔK は剛性マトリックス K の次数と同じ次数をもつマトリックスであるが、塑性域に達した部材に対応する要素のみが非零値をもち、他はすべて零である。式(13),(14)と式(3),(5)の比較より、満足すべき付加外力は次式で表わせる。

$$\Delta F_n = -(\bar{I}+\beta h^2\Delta KA)^{-1} \times \Delta K(\beta h^2 X_n + E_n - W_e) \dots\dots\dots(15)$$

前章と同様に、 ΔK の特殊性 (=零要素からなる行と列を多く含むこと) を考慮して

$$\Delta F_n = -(\bar{I}+\beta h^2\Delta KA)^{-1} \times \Delta K(\beta h^2 \bar{X}_n + \bar{E}_n - \bar{W}_e) \dots\dots\dots(16)$$

を得る。式(16)中の ΔK は、 ΔK において零要素のみからなる行と列を取り除いて作った縮約マトリックスである。すなわち、塑性域にはいった部材に関する変位の数 (= \bar{W}_n の要素数) に等しい次数をもつマトリックスである。したがって、式(16)の $(\bar{I}+\beta h^2\Delta KA)^{-1}$ は、 ΔK のマトリックス次数に等しい逆マトリックス演算となる。また、 \bar{W}_e は塑性域にはいった部材の弾性限界ひずみ時の変位ベクトルである。式(16)で求められる付加外力 ΔF_n は、Fig.1 の AB 区間で作用する付加外力であるが、BC 区間、CD 区間、DE 区間、EB 区間についても、同様の考えで付加外力を導くことができる。以下にその結果のみを記す。

付加外力

○BC 区間

$$\Delta F_n = -\Delta K(\bar{W}_B - \bar{W}_e) \dots\dots\dots(17)$$

ここに、 \bar{W}_B : 復元力特性曲線 (Fig.1) における B 点 (= ϵ_p) での変位ベクトルで、 \bar{W}_e と同様に塑性域にある部材の変位要素数と同じ次数のベクトルである。

○CD 区間

$$\Delta F_n = -(\bar{I}+\beta h^2\Delta KA)^{-1} \times \Delta K\{\beta h^2(\bar{A}\bar{F}_n - \bar{B}_n) + \bar{E}_n + \bar{W}_e\} \dots\dots\dots(18)$$

○DE 区間

$$\Delta F_n = -\Delta K(\bar{W}_D' + \bar{W}_e) \dots\dots\dots(19)$$

ここに、 \bar{W}_D' : Fig.1 の復元力特性曲線における D 点 (= ϵ_p') での変位ベクトルで \bar{W}_e と等しい次数をもつベクトルである。

○EB 区間

$$\Delta F_n = -(\bar{I}+\beta h^2\Delta KA)^{-1} \times \Delta K\{\beta h^2(\bar{A}\bar{F}_n - \bar{B}_n) + \bar{E}_n - \bar{W}_e\} \dots\dots\dots(20)$$

注) AB 区間と同一の式である。

式(17)~(20)中の \bar{W}_e は、式(16)中の \bar{W}_e と同

じものである。

4. 数値計算

鉛直外力の作用するトラス橋について、非減衰弾塑性応答解析を行った。作用外力は、外力近似の誤差が数値計算結果に影響を及ぼさないように一定外力 (Fig. 2) とした。塑性域で剛性マトリックスを作り直し、そのときの変位、速度、加速度を初期条件として応答を求める一般的手法と本法の比較検討を、変位 (Fig. 6)、部材応力 (Fig. 7)、計算時間 (Table 10) 等について行っている。本論文では

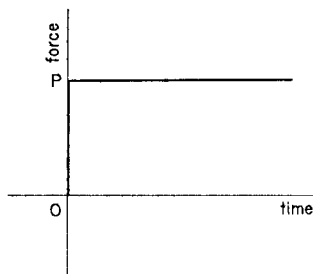


Fig. 2 Step function force

Fig. 3~5 に示す 3 つのトラス橋を計算例として用いているが、Fig. 4, 5 のトラス橋については、計算時間の比較のみを記している。

降伏後の部材の剛性はいずれのモデルにおいても弾性域の剛性の 0.1 とし、復元力特性曲線は Bi-Linear 型 (Fig. 1) としている。初めて弾性域から塑性域に移る点 (Fig. 1 の A 点) の判断は、部材の降伏条件より行っている。塑性域から弾性域に移る点 (Fig. 1 の B 点, D 点), さらに弾性域から塑性域に移る点 (Fig. 1 の C 点, E 点) の判定は、速度による判定条件を用いている⁷⁾。 \bar{W}_e , \bar{W}_p はそれぞれ降伏した部材の復元力特性曲線の A 点, B 点における変位ベクトルである。

(1) モデル 1 (Fig. 3)

Fig. 3 に示す 9 節点トラス橋の節点 5 に鉛直下向きに、80 t のステップ外力が作用している。逐次積分法の刻み時間間隔 (h) の大きさは、解の安定性、位相遅れのために、離散化されモデル化された構造物の最小固有周期 (T) に左右される。計算に用いた Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) では、 $h=0.002$ 秒 ($T/4.3$) としている。Table 1 には部材の断面積, Table 2 には各節点の質量, Table 3 には固有振動数, Table 4 には主要部材の死荷重による部材応力を示している。また鋼材は

Table 1 Area of cross section

member	area of cross section (cm ²)	
1-3	7-9	50.0
1-2	8-9	30.0
2-3	7-8	50.0
2-4	6-8	30.0
3-4	6-7	30.0
3-5	5-7	80.0
4-5	5-6	50.0
4-6		50.0

Table 2 Mass of joint

joint	mass (kg·s ² /cm)
2	0.45
3	13.09
4	0.64
5	13.29
6	0.64
7	13.09
8	0.45
9	6.45

Table 3 Natural frequencies of truss bridge (model 1) (Hz)

k^*	natural frequency	k^*	natural frequency
1	3.654	9	66.012
2	6.575	10	71.618
3	9.023	11	72.348
4	12.819	12	82.627
5	18.617	13	87.081
6	26.335	14	93.469
7	32.577	15	117.159
8	42.734		

Table 4 Member stress by dead load (kg/cm²)

member	stress
3-4	231
3-5	-303
4-5	-131
4-6	554

(-)...compression

* order of natural frequency

4-6 部材のみが SS 41 で他の部材は SS 50 である。

(2) モデル 2 (Fig. 4)

Fig. 4 に示す 19 節点トラス橋 (幅員 6.5 m) の路面

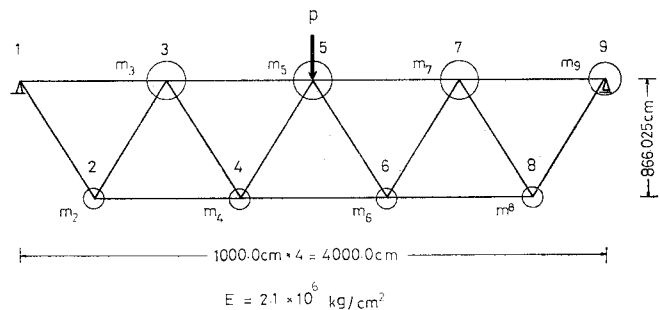


Fig. 3 Truss bridge (model 1)

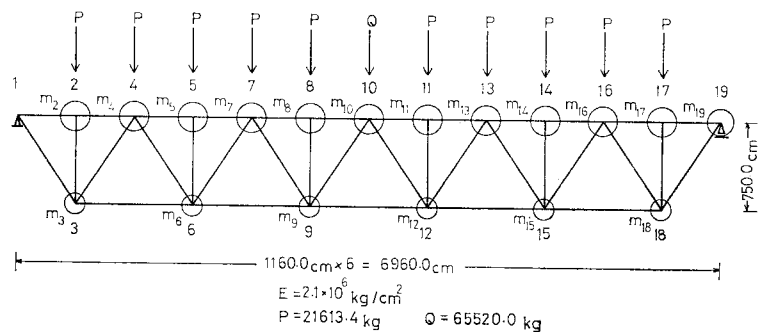


Fig. 4 Truss bridge (model 2)

Table 5 Area of cross section (cm²)

member					area of cross section
1-2	2-4	16-17	17-19		257.0
4-5	5-7	13-14	14-16		325.0
7-8	8-10	10-11	11-13		391.0
3-6	15-18				178.0
6-9	12-15				262.5
1-3	4-6	15-16	18-19		182.6
3-4	6-7	13-15	16-18		250.8
7-9	12-13				82.8
9-10	10-12				115.6
9-12					294.0
2-3	5-6	8-9	14-15		102.0
11-12	17-18				

Table 6 Mass of joint (kg·s²/cm)

joint	mass	joint	mass
2	30.69	11	31.31
3	2.78	12	3.65
4	32.19	13	32.12
5	31.01	14	31.01
6	4.00	15	4.00
7	32.12	16	32.19
8	31.31	17	30.69
9	3.65	18	2.78
10	31.88	19	15.89

Table 7

Member stress by dead load

(kg/cm ²)	
member	stress
3-4	-617.8
7-9	623.7
8-10	-943.3
9-12	1290.6

(-)…compression

に等分布荷重 ($p=350 \text{ kg/cm}^2$) と T-20 荷重 (線荷重として) が作用²⁰⁾ したときの節点荷重の 3.28 倍の荷重をステップ外力として作用させ弾塑性応答の計算時間の比較を行っている。刻み時間間隔は 0.005 秒 ($T/1.7$) とし、文献 15) に示す逐次積分法を用いている。Table 5 には部材の断面積、Table 6 には各節点の質量、Table 7 には主要部材の死荷重による部材応力を示している。このモデルの最小固有振動数は 1.560 Hz, 最大固有振動数は 116.9 Hz (Jacobi 法による) である。また、鋼材は垂直材のみが SS 41 で、他の部材は SM 50 Y である。

(3) モデル 3 (Fig. 5)

Fig. 5 に示す 25 節点トラス橋についても、ステップ外力が作用するときの弾塑性応答に要する計算時間の比較を行っている。刻み時間間隔は 0.002 sec ($T/4$) と

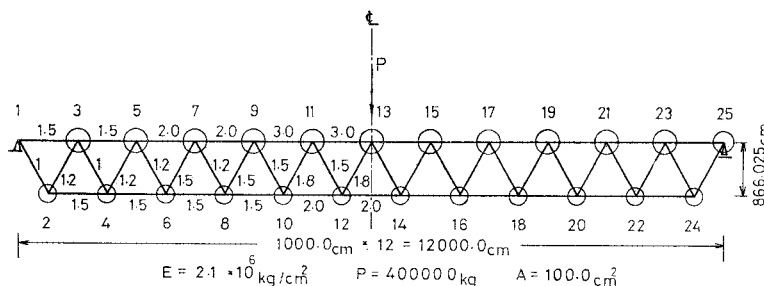


Fig. 5 Truss bridge (model 3)

Table 8 Mass of joint (kg·s/cm²)

joint	mass	joint	mass
2 24	1.45	9 17	15.45
3 23	14.33	10 16	2.93
4 22	2.08	11 15	15.97
5 21	14.61	12 14	2.93
6 20	2.29	13	16.09
7 19	14.93	25	7.12
8 18	2.48		

Table 9 Member stress by dead load (kg/cm²)

member	stress
11 12	46.2
11 13	-819.8
12 13	-46.2
12 14	1247.1

(-)…compression

し、Newmark の β 法 ($\beta=1/4$) を用いている。このモデルの最小固有振動数は 0.9536 Hz, 最大固有振動数は 123.7 Hz (Jacobi 法による) である。Table 8, 9 には、それぞれ各節点の質量、主要部材の死荷重による部材応力を示している。なお、Fig. 5 において各部材に記している値は、基準断面積 $A=100 \text{ cm}^2$ に対する部材の断面積比を表わしている。鋼材はすべて SS 41 としている。

(4) 計算結果

Fig. 6(a),(b) にはモデル 1 のトラス橋の節点 5 の水平変位応答と鉛直変位応答を、Fig. 7(a),(b) には 4-6 部材 (引張), 3-5 部材 (圧縮) の部材応力を、Fig. 8 には 4-6 部材の応答時の復元力履歴曲線を表わしている。モデル 1 では、4-6 部材のみが降伏するため、Fig. 6(a)~Fig. 7(b) に示す弾性応答と弾塑性応答のずれは 4-6 部材の影響のみによるものである。ここで用いている弾性応答とは部材応力が降伏域に達しても部材は弾性挙動を示すものとして計算したものであり、作用外力その他の条件は弾塑性応答の場合と同じである。本法、一般的手法による弾塑性応答は、一致するため Fig. 6(a)~Fig. 7(b) では区別できずただ単に弾塑性応答と記している。

モデル 1 では、弾塑性応答は弾性応答に比して中央節点の y 方向最大変位が大きくなり、 x 方向変位、 y 方向変位、3-5 部材応力、4-6 部材応力の振幅は小さく、最大部材応力は引張、圧縮に関係なく小さくなっている。弾塑性応答 (変位、部材応力) の位相は、弾性応答の場合より遅れている。応答の図は載せていないが、モデル 2 については 9-12 部材が、モデル 3 では 12-14 部材が降伏し、これらの場合も変位、部材応力の応答はモデル 1 の場合と同様な傾向を示している。

Table 10 には、モデル 1, 2, 3 のトラス橋の弾塑性応答解析に必要な計算時間を示している。本法 (Proposed Method =PM) と一般的手法 (Reanal-

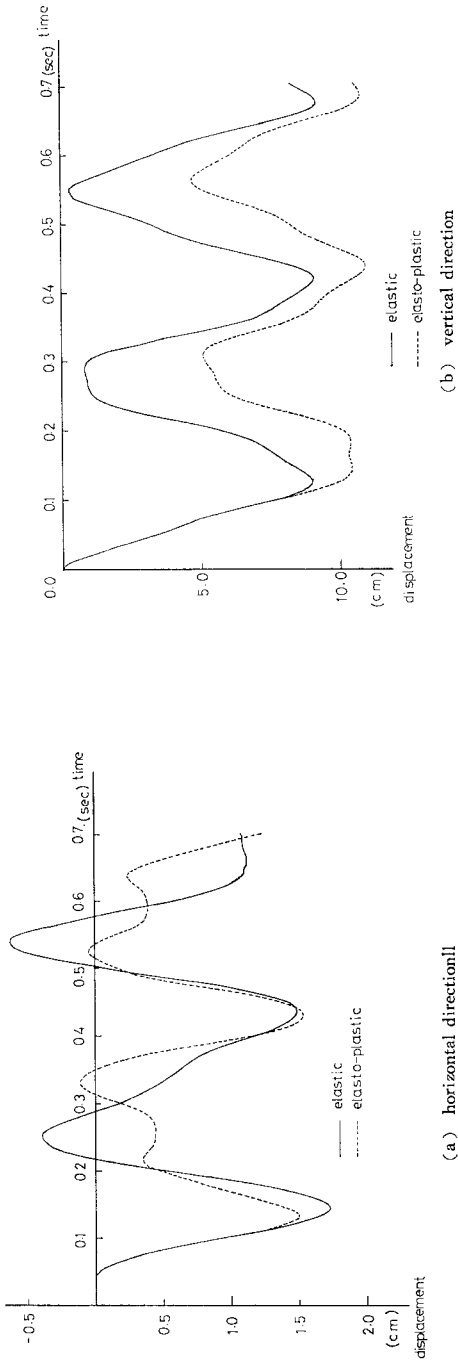


Fig. 6 Response of displacement at point 5

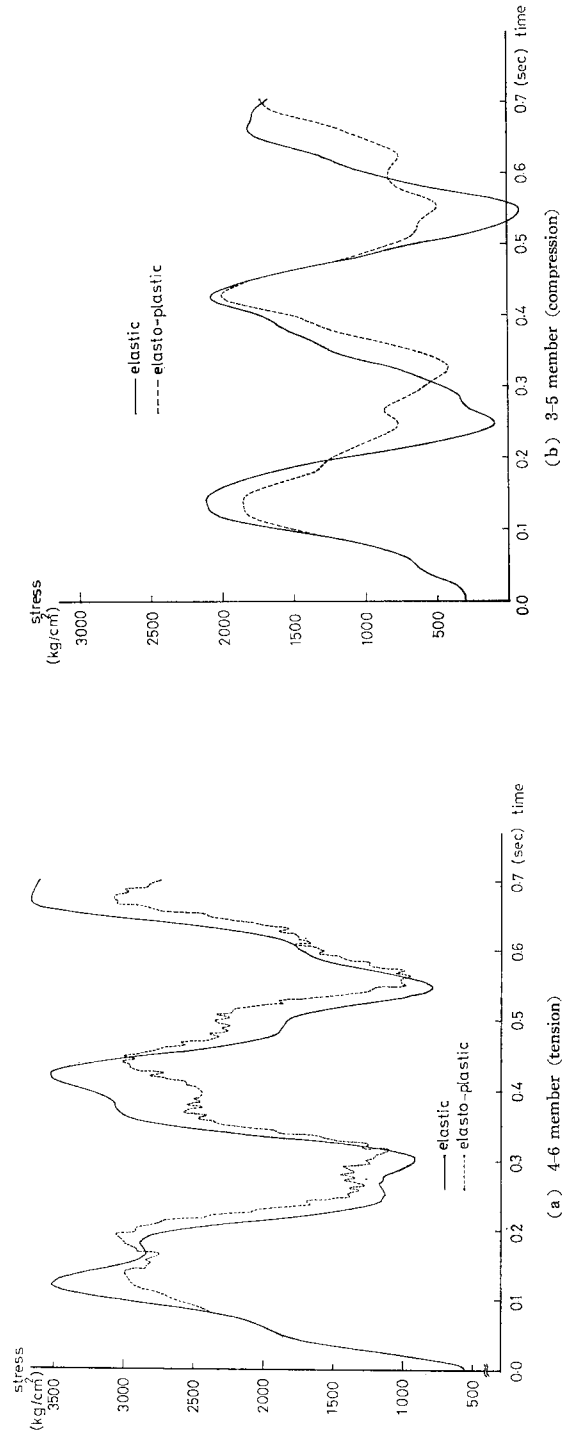


Fig. 7 Member stress

Table 10 Comparison of C.P.U. time

		Elasto-Plastic (a)	Elastic (b)	Difference (c)=(a)-(b)
model 1	PM	3M 6S	2M 56S	10S
	RM	3M 8S	2M 56S	12S
model 2	PM	7M 23S	6M 43S	40S
	RM	8M 19S	6M 43S	1M 36S
model 3	PM	10M 22S	9M 20S	1M 2S
	RM	11M 33S	9M 20S	2M 13S

PM=Proposed Method RM=Reanalysis Method
M=minute S=second

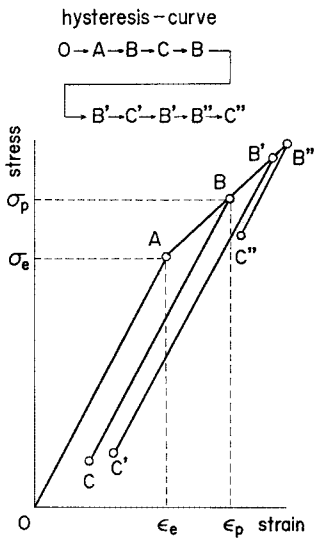


Fig. 8 Restoring force hysteresis curve of member 4-6

は 1.7 秒, モデル 3 は 0.6 秒まで計算したときの必要時間である. 各モデルの違いは構造物の全自由度が異なる, すなわち扱うマトリックスサイズが異なることであるが, マトリックスサイズが大きい場合に本法の利点が出ているように思われる. ちなみに剛性マトリックスの変化する回数は, モデル 1 が 6 回, モデル 2 が 8 回, モデル 3 が 6 回である. また, 計算には八代工業高等専門学校 の FACOM 230-28 を用いている.

5. 結 び

本論文では, 修正量として縮約されたマトリックス $\overline{\Delta M}$, $\overline{\Delta K}$ を用いているが, 修正がいくつかの部材にある場合には, 行列の入れ換えを行い式 (11.a), (11.b) に示すように修正量を 1 か所に集めれば, 同様に扱うことができる. また, 付加外力による解析の 1 例として弾塑性応答解析について述べているが, 剛性変化, 質量変化だけでなく入力データの誤り (剛性マトリックス, 質量マトリックス, 外力ベクトル, 初期条件) 等に対しても同様に適用することができる. 式 (10) に示すように,

ysis Method=RM) の違いは, 塑性域における剛性マトリックスの取り扱いである. どちらの手法を用いても最低限, 弾塑性応答解析に要する計算時間は必要となるため, 弾塑性応答解析に要した時間と弾性応答解析に要した時間との差が本法と一般的手法の計算時間比較の対象となるであろう. モデル 1 は, 0.7 秒まで計算したときの必要時間であり, モデル 2

修正量と等価な付加外力は修正マトリックス $\overline{\Delta M}$, $\overline{\Delta K}$ に等しい次数のマトリックス, ベクトルの積として定めることができる. したがって, 構造物の行列次数に比較して修正要素数が少なく, 一部の剛性が連続的に変化する場合には, 本法は一般的手法に比較して計算時間が短くて済むであろう. しかも修正量に相当する力を付加外力として修正前の系に作用させて修正後の系を解くことができるため, 手持ちの動的応答解析用プログラムの一部を手直すだけで修正された構造物の動的応答解析用のプログラムに拡張できよう. 本法の適用例として, 塑性域での剛性変化を修正による変化と考えると, 弾塑性応答解析について示したが, 静的あるいは動的荷重が作用したときの応力集中問題¹⁹⁾, 部材の破損等の問題にも適用できるであろう.

本論文では, Newmark の β 法を用いて理論の展開を行ったが, 他の逐次積分法^{12)~15)} あるいはモーダルアナリシス^{注)}に対しても同様に適用できるであろう¹⁶⁾. モーダルアナリシスを用いる場合には, 付加外力 ΔF を求める式が異なる.

本法では, 解の精度の面において逐次積分法自体に含まれる近似のみが問題となるが, 修正量 ΔM , ΔK の要素の値は必ずしも小である必要はない. 本法の利用価値を左右するのは修正範囲の大きさ ($=\overline{\Delta M}$, $\overline{\Delta K}$ のマトリックス次数) である.

【付 録】 モーダルアナリシスへの適用について

構造物の一部が修正されたとき, 修正後の応答を求める場合に, 本論では多自由度系の運動方程式を直接, 逐次積分によって解く方法について述べたが, ここではモーダルアナリシスを用いて解く方法について述べる. 弾塑性応答を想定し, 剛性が変化する場合について式を導く. 式 (3) をモーダルマトリックス Φ , 時間関数ベクトル q を用いて書き直すと

$$\ddot{q} + 2\zeta\omega\dot{q} + \omega^2q = \Phi^T(F + \Delta F_M) \dots\dots\dots(21)$$

と表わせる. ただし, Φ^T は Φ の転置マトリックス, Φ , q , ω , ζ , W は下記の関係を満足しているものとす.

$$\Phi^T M \Phi = I \dots\dots\dots(22.a)$$

$$\Phi^T K \Phi = \omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \omega_2^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \omega_r^2 \end{bmatrix} \omega_i : i \text{ 次の固有値} \dots\dots\dots(22.b)$$

$$\Phi^T C \Phi = 2\zeta\omega = 2 \begin{bmatrix} \zeta_1\omega_1 & & 0 \\ & \zeta_2\omega_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \zeta_r\omega_r \end{bmatrix}$$

注)【付録】参照.

ζ_i : i 次モードの減衰定数……(22・c)

$W = \Phi q$, W : 変位ベクトル……(22・d)

$\Phi = [\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_r]$, ϕ_i : i 次の正規化モード
……(22・e)

$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{bmatrix}$, q_i : i 次の時間関数 ……(22・f)

式(22・a)～(22・f)の関係より式(21)は独立な1自由度系に分解して解くことができる。不規則外力が作用すると考えて、式(21)をNewmarkの β 法を用いて解くと次式のようになる。

$$\ddot{q}_n = A_M \Phi^T (F_n + \Delta F_{Mn}) - B_{Mn} \quad \dots\dots(23・a)$$

$$\dot{q}_n = \frac{h}{2} A_M \Phi^T (F_n + \Delta F_{Mn}) - \frac{h}{2} B_{Mn} + D_{Mn} \quad \dots\dots(23・b)$$

$$q_n = \beta h^2 A_M \Phi^T (F_n + \Delta F_{Mn}) - \beta h^2 B_{Mn} + E_{Mn} \quad \dots\dots(23・c)$$

ここに、

$$A_M = (I + h \zeta \omega + \beta h^2 \omega^2)^{-1} \quad \dots\dots(24・a)$$

$$B_{Mn} = A_M \left[2 \zeta \omega \left(\dot{q}_{n-1} + \frac{h}{2} \ddot{q}_{n-1} \right) + \omega^2 \left\{ q_{n-1} + h \dot{q}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) h^2 \ddot{q}_{n-1} \right\} \right] \quad \dots\dots(24・b)$$

$$D_{Mn} = \dot{q}_{n-1} + \frac{h}{2} \ddot{q}_{n-1} \quad \dots\dots(24・c)$$

$$E_{Mn} = q_{n-1} + h \dot{q}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) h^2 \ddot{q}_{n-1} \quad \dots\dots(24・d)$$

であり、 \ddot{q}_n , \dot{q}_n はそれぞれ n 時間点における時間関数ベクトルの時間による2回微分, 1回微分である。塑性域での運動方程式(14)は、 Φ , q を用いて次式のように書ける。

$$\ddot{q} + 2 \zeta \omega \dot{q} + \omega^2 q = \Phi^T \{ F - \Delta K \Phi (q - q_e) \} \quad \dots\dots(25)$$

ここに、 q_e は弾性限界ひずみ時の時間関数ベクトルである。いま、式(21), (25)より

$$\Delta F_M = -\Delta K \Phi (q - q_e) \quad \dots\dots(26)$$

と考えれば、式(23・a)～(24・d)が適用できる。式(23・c), (26)より次の関係式を得ることができる。

$$\Delta F_{Mn} = -(I + \beta h^2 \Delta K \Phi A_M \Phi^T)^{-1} \times \Delta K \Phi \{ \beta h^2 (A_M \Phi^T F_n - B_{Mn}) + E_{Mn} - q_e \} \quad \dots\dots(27)$$

式(26)の ΔF_M は縮約マトリックス $\overline{\Delta K}$ すなわち塑性域にはいった部材の変位要素数に等しいマトリックスサイズに対応して値をもつから式(16)と同様に、式(27)は、

$$\overline{\Delta F_{Mn}} = -(I + \beta h^2 \overline{\Delta K \Phi A_M \Phi^T})^{-1} \times \overline{\Delta K \Phi} \{ \beta h^2 (A_M \Phi^T F_n - B_{Mn}) + E_{Mn} - q_e \} \quad \dots\dots(28)$$

となる。 A_M は対角マトリックスのため容易に求めることができる。 $(I + \beta h^2 \overline{\Delta K \Phi A_M \Phi^T})$ の逆マトリックスは $\overline{\Delta K}$ のマトリックスサイズとなるため、塑性域にはいった部材要素数が少ない場合には簡単に求められるであろう。式(28)はFig. 1のAB区間の付加外力の式であるが、BC区間, CD区間, DE区間, EB区間についても同様に求めることができる。付加外力を求める式は、式(17)～(20)において、 $\overline{W}_p \rightarrow q_p$, $\overline{W}_e \rightarrow q_e$, $\overline{W}_p' \rightarrow q_p'$, $\overline{\Delta K} \rightarrow \overline{\Delta K}$, $\overline{A} \rightarrow \overline{\Phi A_M \Phi^T}$ と置換してできる式に等しい。また、 q_p , q_p' は復元力特性曲線(Fig. 1)におけるB点, D点での時間関数ベクトルで、応力が塑性域にある部材以外の要素も含む r 次のベクトルである。

参考文献

- 1) Argyris, J.H., et al. : A Direct Modification Procedure for the Displacement Method, AIAA Journal, pp. 1861～1864, Sept., 1971.
- 2) Kirsch, U. and M.F. Rubinstein : Reanalysis for Limited Structural Design Modification, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, pp. 61～70, Feb., 1972.
- 3) Jasbir, S.A. : Survey of Structural Reanalysis Techniques, Journal of the Structural Division, ASCE, pp. 783～802, April, 1976.
- 4) 伊藤哲次 : モーダルアナリシスの弾塑性応答解析への応用, 日本鋼構造協会第7回マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 557～564, 1973.
- 5) 中尾好昭・高野重昌 : 骨組構造物の弾塑性地震応答解析, 日本鋼構造協会第7回マトリックス構造解析法研究発表論文集, pp. 573～580, 1973.
- 6) Nakao, Y. and S. Takano : Elasto-Plastic Seismic Analysis of Framed Structures by Mode Superposition, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, Univ. of Tokyo Press, pp. 423～440, 1973.
- 7) 小高昭夫 : 耐震構造の総合研究(1), 宇野書店, pp. 309～362, 1966.
- 8) Hirai, I., Yoshimura, T. and K. Takamura : On a Direct Eigenvalue Analysis for Locally Modified Structures, Int. Jour. of Numerical Method in Engineering, Vol. 6, pp. 441～442, 1973.
- 9) 平井一男・水田洋司・古賀洋治 : 動的レスポンスを求める一解析法, 土木学会西部支部研究発表会論文集, pp. 49～50, 1974.
- 10) 前田幸雄・林正・前田研一 : 幾何学的非線形性を考慮した平面骨組構造物の動的応答計算法, 土木学会論文報告集第249号, pp. 71～80, 1976.
- 11) Newmark, N.M. : A Method of Computation for Structural Dynamics, Proc. of ASCE, Vol. EM3, pp. 67～74, 1959.
- 12) Clough, R.W. : Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response, Jap.—U.S. Seminar on Matrix Method of Structural Analysis and Design, Tokyo,

- 1969.
- 13) Bathe, K.J. and E.L. Wilson : Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Method, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, pp. 283~291, 1973.
- 14) Argyris, J.H., Dunne, P.C. and T. Angelopoulos : Dynamic Response by Large Step Integration, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 2, pp. 185~203, 1973.
- 15) 水田洋司・西山研一・平井一男 : Newmark の β 法における位相遅れ補正の一方法, 土木学会論文報告集, 第 268 号, pp. 15~21, 1977-12.
- 16) Nickell, R.E. : On the Stability of Approximation Operators in Problems of Structural Dynamics, Int. Jour. Solids and Structures, Vol. 7, pp. 301~319, 1971.
- 17) 田治見宏 : 建築振動学, コロナ社, pp. 140~152, 1965.
- 18) 小高昭夫 : 耐震構造の総合研究 (1), 宇野書店, pp. 403~417, 1966.
- 19) 平井一男, 水田洋司, 渡辺了栄 : 一部修正による応力集中問題の解析手法, 土木学会年次学術講演会概要集, pp. 6~7, 1974 年 10 月.
- 20) 日本道路協会 : 道路橋示方書同解説 I 共通編, 丸善, p. 14, 1978.

(1978.3.18・受付)
