

吊橋の鉛直非線形振動について

ON VERTICAL NONLINEAR VIBRATIONS OF SUSPENSION BRIDGES

高橋 和雄*
By Kazuo TAKAHASHI

1. まえがき

著者は先に吊橋の補剛桁の鉛直変位、水平横変位およびねじりの各変位ならびにケーブルの鉛直変位および水平横変位の連成を考慮

した基礎方程式を提案のうえ、得られた非線形方程式を逐次近似法を用いて数値解析することによって風荷重を受けた場合の連成現象を評価した¹⁾。引き続き、本研究は吊橋の鉛直振動に含まれる非線形項の影響を検討したものである。従来の吊橋の鉛直振動性状の解析にあたってはケーブルの活荷重水平張力 H_p が死荷重水平張力 H_w に比較してはるかに小さいとみなされて無視されている²⁾。この仮定は線形振動として取り扱うためであるが、振幅の大きい場合には検討の余地がある。しかしながら、これまでのところ本題に関する報告は見受けられないようである。そこで、本研究は著者が連続体の非線形振動の解析に採用している手法³⁾を用いて吊橋の鉛直非線形振動を取り扱った結果を報告するものである。

2. 運動方程式

図-1 に示すような対称な側径間を有する 3 径間単純吊橋を対象とすれば、吊橋の鉛直たわみ振動の運動方程式は静力学的な撓度理論の基礎方程式に補剛桁とケーブルの質量による慣性力および一様分布の外力を加えれば次のように与えられる²⁾。

$$L(u, H_p) = EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2(H_w + H_p) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{g} (w_t + w_c) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{16f}{l^2} H_p - \bar{p}(t) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

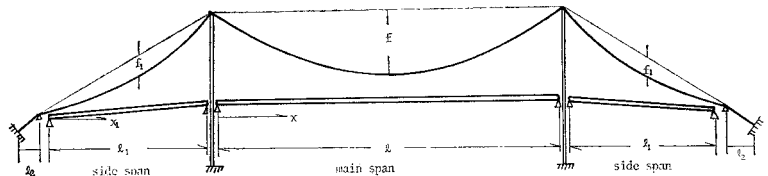


図-1 吊橋一般図

ここに、 E : 補剛桁のヤング率、 I : 断面 2 次モーメント、 H_w : ケーブル 1 本当りの死荷重水平張力、 H_p : ケーブル 1 本当りの活荷重水平張力、 w_t : 補剛桁の単位長さ当りの重量、 w_c : ケーブル 2 本分の単位長さ当りの重量、 g : 重力の加速度、 f : ケーブルサグ、 $\bar{p}(t)$: 外力の荷重強度、 u : 鉛直たわみ、 l : 支間、 t : 時間、 x : スパン方向の座標。

ケーブルの活荷重水平張力 H_p は補剛桁の鉛直たわみ u を用いて次のように表わされる。

$$H_p = - \frac{E_C A_C}{L_E} \Sigma \frac{8f}{l^2} \int_0^l u(x, t) dx \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 E_C : ケーブルのヤング率、 A_C : ケーブル 1 本分の断面積、 L_E : ケーブルの形状長さ(全径間の合計)、 Σ は各スパンについての和を表わす。

以上は主径間の場合であるが、側径間の場合にはサフィックス "1" を付ければよい。

3. 運動方程式の解法³⁾

主径間および側径間の運動方程式を解くために、鉛直たわみを補剛桁の単純支持の境界条件を満足するように次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= T_1(t) \sin \pi \xi + T_3(t) \sin 3 \pi \xi \\ u_1 &= T_5(t) \sin \pi \xi_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $T_1(t)$ 、 $T_3(t)$ および $T_5(t)$: 未知の時間関数、 $\xi = x/l$ 、 $\xi_1 = x_1/l_1$ 。

式 (1) を解くために、Galerkin 法を適用する。すな

* 正会員 工修 長崎大学助教授 工学部土木工学科

わち,

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 L(u, H_p) \sin \pi \xi d\xi &= 0 \\ \int_0^1 L(u, H_p) \sin 3 \pi \xi d\xi &= 0 \\ \int_0^1 L(u, H_p) \sin \pi \xi_1 d\xi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

上式より次の3個の非線形連立常微分方程式が求められる.

$$\left. \begin{aligned} \ddot{T}_1 + a_1 T_1 + a_2 T_3 + a_3 T_5 + a_4 T_1^2 \\ \quad + a_5 T_1 T_3 + a_6 T_1 T_5 = a_7 \bar{p}(t) \\ \ddot{T}_3 + b_1 T_3 + b_2 T_1 + b_3 T_5 + b_4 T_3^2 \\ \quad + b_5 T_1 T_3 + b_6 T_3 T_5 = b_7 \bar{p}(t) \\ \ddot{T}_5 + c_1 T_5 + c_2 T_1 + c_3 T_3 + c_4 T_5^2 \\ \quad + c_5 T_1 T_5 + c_6 T_3 T_5 = c_7 \bar{p}_1(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに, $a_1 \sim a_7, b_1 \sim b_7, c_1 \sim c_7$: 時間関数の係数, たとえば,

$$\begin{aligned} a_1 &= \left\{ EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^4 + 2 H_w \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{l} \left(\frac{16f}{\pi l} \right)^2 \frac{E_C A_C}{L_E} \right\} / \frac{1}{g} (w_t + w_c) \\ a_2 &= \frac{4}{3l} \left(\frac{16f}{\pi l} \right)^2 \frac{E_C A_C}{L_E} / \frac{1}{g} (w_t + w_c) \\ a_3 &= \frac{8}{l} \left(\frac{16f}{\pi l} \right) \left(\frac{16f_1}{\pi l_1} \right) \frac{E_C A_C}{L_E} / \frac{1}{g} (w_t + w_c) \\ a_4 &= 2 \left(\frac{16f}{\pi l} \right) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{E_C A_C}{L_E} / \frac{1}{g} (w_t + w_c) \\ a_5 &= \frac{2}{3} \left(\frac{16f}{\pi l} \right) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{E_C A_C}{L_E} / \frac{1}{g} (w_t + w_c) \\ a_6 &= 4 \left(\frac{16f_1}{\pi l_1} \right) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{E_C A_C}{L_E} / \frac{1}{g} (w_t + w_c) \\ a_7 &= \frac{4}{\pi} / \frac{1}{g} (w_t + w_c) \end{aligned}$$

上式の非線形項は2次の項からなるが, この復元力は非対称な特性をもつ. 式(5)の荷重 $\bar{p}(t)$ が周期荷重の場合(すなわち, $\bar{p}(t) = p \cos \omega t$)の定常解を求めるために式(5)の解を次のように仮定する注).

$$T_i = q_0^i + q_1^i \cos \omega t + q_2^i \cos 2 \omega t \dots\dots\dots (6)$$

ここに, q_0^i, q_1^i および q_2^i : 未定定数, $i=1, 3, 5$.

上式を式(5)に代入して調和バランス法を適用すれば未定定数を求めるための非線形連立代数方程式が求められる. たとえば, 式(5)の第1式に関する方程式は次のとおりである.

注: 線形の場合には荷重の時間関数 $\cos \omega t$ と同じ時間関数をもつ応答 $T_i = a_i \cos \omega t$ のみが生ずるが, 本題では2次の非線形項が存在するためにこの非線形項をかいして2倍角の公式より $\cos^2 \omega t = (1 + \cos 2 \omega t)/2$ のように定数項と2倍の高調波が生ずる. したがって式(6)のように解を仮定することが必要である.

$$\left. \begin{aligned} a_1 q_0^1 + a_2 q_0^3 + a_3 q_0^5 + a_4 f_{11} + a_5 f_{13} + a_6 f_{15} &= 0 \\ (a_1 - \omega^2) q_1^1 + a_2 q_1^3 + a_3 q_1^5 + a_4 g_{11} + a_5 g_{13} \\ \quad + a_6 g_{15} &= a_7 p \\ (a_1 - 4 \omega^2) q_2^1 + a_2 q_2^3 + a_3 q_2^5 + a_4 h_{11} + a_5 h_{13} \\ \quad + a_6 h_{15} &= 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots (7) \end{aligned} \right\}$$

ここに,

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \frac{1}{2} (2 q_0^i q_0^j + q_1^i q_1^j + q_2^i q_2^j) \\ g_{ij} &= \frac{1}{2} (2 q_0^i q_1^j + 2 q_1^i q_0^j + q_1^i q_2^j + q_2^i q_1^j) \\ h_{ij} &= \frac{1}{2} (2 q_0^i q_2^j + 2 q_2^i q_0^j + q_1^i q_1^j) \end{aligned}$$

上式のように得られた非線形連立代数方程式は適当な初期値のもとに Newton-Raphson 法を用いて数値解析することができる.

4. 数値結果

式(5)の係数 $a_1 \sim a_7$ に示すようにケーブルのサグ比 f/l が時間に関する運動方程式に含まれる. すなわち, 吊橋の鉛直振動を支配するパラメーターはケーブルのサグ比である. $H_w = (w_t + w_c) l^2 / 16 f$ の関係によりサグ比が小さくなればケーブルの死荷重水平張力 H_w が増大し, 逆に式(2)よりケーブルの活荷重水平張力 H_p が減少する. また, サグ比が大きくなれば H_w が減少し, H_p が増大する. したがって, 式(1)の左辺の第2項 $(H_w + H_p) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ においてサグ比が大きくなれば非線形項 $H_p \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の影響が大きくなり, 線形項 $H_w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の影響が小さくなる結果となる. いままでの長支間吊橋のサグ比 f/l の実績はほとんど $1/9 \sim 1/12$ の範囲に入っており, サグ比は小さいことが確認されている⁹⁾. したがって, 本題の非線形性はあまり強くないことが予想される.

本論文では, 具体的な吊橋の特性計算のために, 次の諸元(関門大橋)を採用したが, 以下はその演算結果をもとに考察をすすめることにする⁹⁾.

$$\begin{aligned} l &= 703.5 \text{ m}, \quad l_1 = 167.75 \text{ m}, \quad f = 64.0 \text{ m}, \\ f_1 &= 3.906 \text{ m}, \quad L_E = 1216.056 \text{ m}, \\ I &= 3.44 \text{ m}^4/\text{Bridge}, \quad I_1 = 2.582 \text{ m}^4/\text{Bridge}, \\ H_w &= 11682.6 \text{ t/Cable}, \quad w_t = 19.04 \text{ t/m/Bridge}, \\ w_{t1} &= 20.814 \text{ t/m/Bridge}, \quad w_c = 5.132 \text{ t/m/Bridge}, \\ E &= 2.1 \times 10^7 \text{ t/m}^2, \quad E_C = 2.0 \times 10^7 \text{ t/m}^2, \\ A_C &= 0.2796 \text{ m}^2/\text{Cable}. \end{aligned}$$

式(5)の線形項のみを取り出して微小振動の対称1次固有振動数 f および固有周期 T を求めれば表-1に示すとおりである. なお, 表には起振機試験による鉛直

表-1 対称1次振動の固有振動数 f および固有周期 T

Calc.		Exp.		Exp. Calc.
f (Hz)	T (sec)	f (Hz)	T (sec)	
0.205	4.878	0.212	4.72	1.03

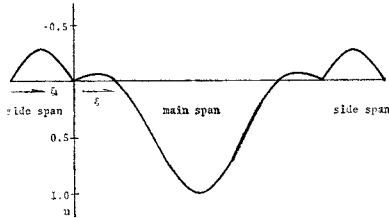


図-2 対称1次振動の固有振動形

たわみ振動の実測値⁹⁾が併記されている。計算値(Calc.)と実測値(Exp.)はよく合致しており、微小振動の範囲では式(3)による変位の仮定で十分であることが確認される。また、本題の固有振動数に対応する固有振動形は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sin \pi \xi - 0.499 \sin 3 \pi \xi \\ u_1 &= -0.413 \sin \pi \xi_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

式(8)の結果をプロットすれば、図-2に示すとおりである。両端ヒンジはりの対称1次振動の固有振動形は $\sin \pi \xi$ で表わされるが、サグをもつ単一ケーブルの対称1次振動の固有振動形は2つの節をもつことが West⁹⁾らによって指摘されている。本例のケーブルの質量は補剛桁の質量の27%程度であるが、ケーブルの固有振動の影響が吊橋の全体系に影響を及ぼしているものと考えられる。

吊橋の非線形振動の基本的な性質を明らかにするために、まず主径間のみを取り出し、かつ系を1自由度系と仮定した場合(すなわち、式(3)において $u = T_1(t) \sin \pi \xi$)を取り扱う。補剛桁とケーブルの重量の10%の強度をもつステップ荷重が作用した場合(すなわち、式(5)の第1式の右辺 $\bar{p} = 0.1(w_t + w_c)$)の径間中央点の動的応答を Runge-Kutta-Gill 法により直接シミュレーションした結果を図-3に示す。図において点線は線形応答

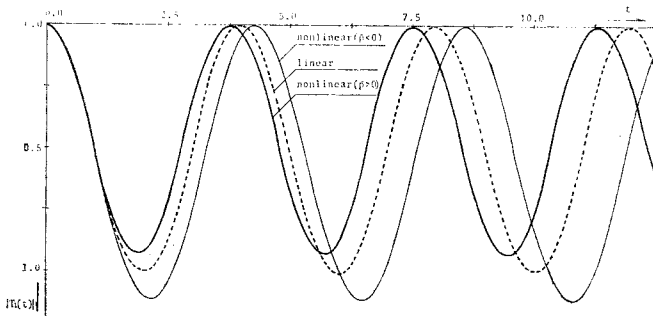


図-3 ステップ荷重に対する応答

表-2 非線形円振動数 ω と振幅成分 $\bar{q}_0^1, \bar{q}_1^1, \bar{q}_2^1$ および最大振幅 A との関係

ω (rad/s)	\bar{q}_0^1	\bar{q}_1^1	\bar{q}_2^1	A
1.5520	0.1308	1.4354	0.0440	1.4942
1.5560	0.1065	1.2976	0.0357	1.3341
1.5600	0.0822	1.1420	0.0276	1.1701
1.5640	0.0579	0.9599	0.0194	0.9795
1.5680	0.0335	0.7317	0.0112	0.7430
1.5720	0.0091	0.3822	0.0030	0.3852
1.5737	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

を示し、肉太の実線は荷重が鉛直下向きに作用した場合の非線形応答を、また、細い実線は荷重が鉛直上向きに作用した場合の非線形応答をそれぞれ示すものである。線形の場合には、応答振幅および振動数は荷重の作用方向に無関係である。これに対して非線形の場合には復元力特性が正の変位に対しては変位とともに吊橋の剛性が增大する硬化ばね特性、逆に負の変位に対しては剛性が減少する軟化ばね特性となる両特性をもつ。このために、荷重が鉛直下向きに作用する場合には線形の場合よりも構造的に剛になり、応答振幅は減少し、応答振動数は増大する。逆に荷重が上向きに作用する場合には構造的に柔になり、応答振幅は増大し、応答振動数が減少する。この原因は吊橋の構造特性から下向きの変位に対しては正のケーブルの活荷重水平張力が生ずるために、ケーブルの全水平張力 $2(H_w + H_p)$ が増大し、上向きの変位に対しては、逆に減少することによるものである。

次に $\bar{p}(t) = 0$ の場合の非線形自由振動数の特性を検討する。微小振動では固有振動数は振幅に無関係であるが、非線形振動では構造の剛性が変位に依存して変化するために固有振動数は振幅の大きさに伴って変動する。すなわち、本題の非線形を支配するパラメーターは振幅である。振動数と振幅の関係を求めるためには式(7)に示すような非線形連立代数方程式を与えられた円振動数 ω に対して振幅成分 q_0^1, q_1^1 および q_2^1 を適当な初期値のもとに Newton-Raphson 法によって解けばよい。このようにして得られた非線形固有円振動数 ω と径間中央点の無次元振幅成分 $\bar{q}_0^1, \bar{q}_1^1, \bar{q}_2^1$ および振動の変動成分を合成して得られる最大振幅 A (いずれも桁高 9.0 m で無次元化) との関係を求めれば表-2に示すとおりである。表において第2列目 \bar{q}_0^1 は振動の直流成分、第3列目 \bar{q}_1^1 は基本波の振幅成分および第4列目 \bar{q}_2^1 は2倍の高調波の振幅成分をそれぞれ示すものである。表において $A=0$ は対応する線形振動の解に一致するものである。表より明らかなように本題の振幅と振動数の関係は振幅の増大に伴って振動数が減少する軟化ばねの特性を示す。無次元最大振幅 $A=1$ 、すなわち吊橋中央点の振幅が桁高程度となっても固有円振動数は、

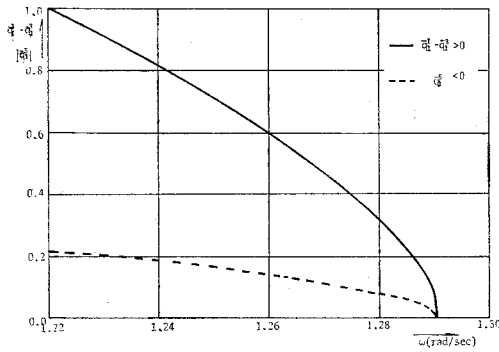


図-4 非線形円振動数 ω と基本波の振幅成分 $\bar{q}_1^1 - \bar{q}_1^3, |\bar{q}_1^5|$ との関係

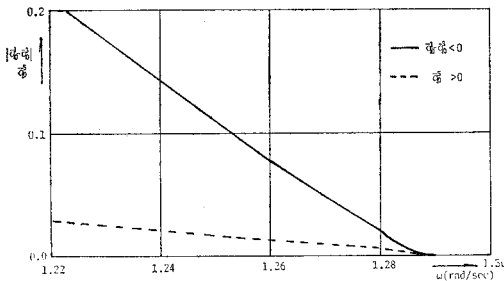


図-5 非線形円振動数 ω と振動の直流成分 $|\bar{q}_0^1 - \bar{q}_0^3|, \bar{q}_0^5$ との関係

線形の場合に比較して 1% 程度変化するのみである。正・負の両変位が存在する場合である自由振動数に及ぼす振幅の影響は正・負のいずれかの変位のみが生ずる場合よりも小さくなる。振動の直流成分 \bar{q}_0^1 は振幅の増大とともに増加するが、この項は振動の中立点の移動を示すもので、引張・圧縮の両ひずみエネルギーが等しい位置すなわち振動の中心が振幅の増大と共に吊橋の静的平衡点から上方へ移ることを意味するものである。この特性のために非線形項の存在が相殺されて、自由振動数に及ぼす吊橋の非線形項の影響は正・負のいずれかの領域の変位が生ずる場合よりも小さくなる。

式 (7) を解いて、吊橋の主および側径間を考慮した場合を取り扱えば次のとおりである。図-4 は対称 1 次振動の各スパンの中央点における非線形自由振動の固有

円振動数 ω と主径間の基本波の振幅成分 $\bar{q}_1^1 - \bar{q}_1^3$ および主径間の振幅成分の絶対値 $|\bar{q}_1^5|$ の関係をプロットしたものである。なお側径間の振幅成分 \bar{q}_1^5 の符号は負である。これは 図-2 に示すように、主径間の振動変位に対して、側径間の振幅が逆位相になることを意味するものである。図のように振幅と振動数の関係は軟化ばねの挙動を示すが、側径間のある場合でかつ主径間の振動について $T_3 \sin 3\pi t$ を考慮した場合の方が表-2 の場合に比較して非線形項の影響が大きくなる。また 図-5 は非線形自由振動の円振動数 ω と各径間の振幅の直流成分 $|\bar{q}_0^1 - \bar{q}_0^3|, \bar{q}_0^5$ との関係をプロットしたものである。

5. 結 語

本研究は吊橋の鉛直振動に含まれるケーブルの活荷重水平張力の影響を検討したものである。運動方程式に含まれる 2 次の非線形項の影響はステップ荷重のように正もしくは負のいずれかの変位のみが生ずる場合にはかなり効いてくるが、非線形自由振動のように正・負の両変位が存在する場合には非線形項の影響は相殺されて小さくなることを明らかにした。また、非線形項の影響は構造全体として軟化ばねの挙動を示し、振動の中立点が移動することを示した。

参 考 文 献

- 1) 高橋・室井・平野：連成を考慮した吊橋の基礎方程式および風荷重を受けた場合への応用，土木学会論文報告集，第 277 号，pp. 26~40，昭和 53 年 9 月。
- 2) 平井：鋼橋 (III)，技報堂，pp. 424~435，昭和 42 年。
- 3) Takahashi, K. : Nonlinear Free Vibrations of Beams, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 109~120, 1976.
- 4) 日本鋼構造協会編：吊 構造，コロナ社，pp. 55~58，昭和 50 年。
- 5) 日本道路公団：関門橋工事報告書，土木学会，pp. 1100~1112，昭和 52 年。
- 6) West, H.H., Geschwindner, L.F. and Suhoski, J.E. : Natural Vibrations of Suspension Cables, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 101, No. ST 11, Pro. Paper 11712, pp. 2277~2291, Nov. 1975.

(1978.6.9・受付)