

# 非定常井戸の波動解

## WAVE PHENOMENON ON INTAKE FROM THE WELL

萩原 国宏\*  
By Kunihiko OGIHARA

### 1. はじめに

現在まで井戸の非定常の取水問題は Theis の方法が解析解のもっとも著名なものとして知られ、利用されてきている。その後、この手法のある条件下で使用できる Jacob (ヤコブ) の方法等も紹介されている。

これらの手法の使用されるのは地層の透水係数等を野外実験によって決めようとする場合に利用されている。

この場合に井戸よりの汲み上げ量と、井戸へ浸出してくる水の流量の間に大きな差がある場合。また、汲み上げ量が一定に行えない場合には、どうしても誤差が入ってくる欠点がある。

また、変数変換  $\xi \propto r/\sqrt{t}$  によって、場所の変数  $r$  と、時間の変数  $t$  とを結合した解であるため、初期の井戸のところでの変化に応じて、 $r = \infty$  の点でも変化を受けるタイプの解になってしまっている。実用的には、その変化は微小であるので問題がないが、解のうえでは実際の現象とずれていると考えられる。

そこで本論文では、井戸よりの取水現象が、間けつ的な取水現象である点に注目して、地下水層における波動現象として問題を解析してみた。

### 2. 基礎方程式と解

流れの領域を 図-1 のごとく考えて、準一様流とし、Darcy (ダルシイ) の式および連続の式を導くと、

$$\begin{cases} v = -k \frac{\partial h}{\partial r} \dots\dots\dots(1) \\ \frac{\partial}{\partial r} [r \cdot v \cdot h] + \lambda_1 r \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

となる<sup>2)</sup>。この両式より  $v$  を消去すると、井戸の非定常流れの運動方程式が導かれる。ただし、 $\lambda_1$  は空隙率。

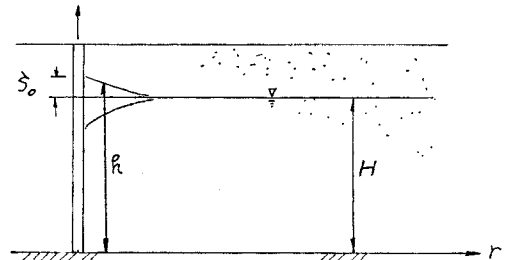


図-1

$$\lambda_1 r \frac{\partial h}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \cdot h \frac{\partial h}{\partial r} \right] = 0 \dots\dots\dots(3)$$

被圧地下水の場合には、 $h$  を圧力水頭と考え、初項に貯留係数を乗じ、第 2 項の  $rh \frac{\partial h}{\partial r}$  の項を  $r \cdot d \cdot \frac{\partial h}{\partial r}$  とすることによって、

$$\lambda_1 r \frac{\partial h}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial r} \left[ r d \frac{\partial h}{\partial r} \right] = 0 \dots\dots\dots(3)'$$

となる。

$d$  は透水層の厚さである。また、自由地下水における通常の井戸のように、間けつ的に取水をしている場合には、時間的に平均された一様流れに、間けつ取水による波動現象が加わっていると考える。すなわち、平均流の水深を  $H$ 、波動現象による水位変化を  $\zeta$  とすれば、

$$h = H + \zeta; H \gg \zeta \dots\dots\dots(4)$$

となり、式 (3) は、

$$\lambda_1 r \frac{\partial \zeta}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \cdot (H + \zeta) \frac{\partial (H + \zeta)}{\partial r} \right] = 0 \dots\dots\dots(5)$$

となる。ここでさらに式を線形化するために  $H \gg \zeta$  および  $\frac{\partial H}{\partial r} \approx 0$  の仮定をする。すなわち、帯水層の厚さはかなり厚く、その層はほぼ水平であり、 $H$  より  $\zeta$  の変化の方がはるかに大きいとする。したがって、式 (5) は、

$$\lambda_1 r \frac{\partial \zeta}{\partial t} - k H \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right] = 0 \dots\dots\dots(3)''$$

\* 正会員 工博 東洋大学教授 工学部土木工学科

の形の式となり、(3)', (3)'' は同じタイプの式となる。

$$(3)' \text{ で, } \frac{kd}{\lambda_1 s} = \bar{k}, (3)'' \text{ で } \frac{kH}{\lambda_1} = \bar{k} \dots\dots (6)$$

とおくと、結局、方程式は、

$$r \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \bar{k} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) = 0 \dots\dots\dots (7)$$

となる。

さて、この式に変数分離法による解法を適用する。

$$\zeta = F(t)G(r) \dots\dots\dots (8)$$

とし、これを (7) に代入し変数分離をしその定数を  $\tilde{\lambda}$  とすると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \tilde{\lambda} F \\ \frac{d^2G}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG}{dr} - \frac{\tilde{\lambda}}{\bar{k}} G &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

を得る。

これらのそれぞれの解は、

$$F = C_1 \exp(\tilde{\lambda} t) \dots\dots\dots (10)$$

$$G = C_2 I_0(\bar{r}) + C_3 K_0(\bar{r}), \bar{r} = \sqrt{\frac{\tilde{\lambda}}{\bar{k}}} r \dots\dots\dots (11)$$

となる。I<sub>0</sub>, K<sub>0</sub> はそれぞれ0次の変形ベッセル関数である<sup>3)</sup>。

いま、井戸での取水を開けつ的行っている場合を考えると、式 (10) の  $\tilde{\lambda}$  は次式のような表示を行う必要がある。

$$\tilde{\lambda} = i\sigma, i = \sqrt{-1} \dots\dots\dots (12)$$

したがって、

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{i\sigma}{\bar{k}}} r = \sqrt{i} \sqrt{\frac{\sigma}{\bar{k}}} r \dots\dots\dots (13)$$

となり式 (11) での、0次の変形ベッセル関数も、おのずから変形する必要がある。

そこで、これらを Kelvin 関数を使って表現すると<sup>4)</sup>、

$$\left. \begin{aligned} I_0(\sqrt{i} x) &= berx + ibeix \\ K_0(\sqrt{i} x) &= kerx + ikeix \\ x &= \sqrt{\frac{\sigma}{\bar{k}}} r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

となる。したがって、式 (8) の解は、

$$\zeta = C_1 [\exp(i\sigma t)] \cdot [C_2 (berx + ibeix) + C_3 (kerx + ikeix)] \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $r \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$  で水面変動  $\zeta \rightarrow 0$  であることを考えるとき、 $berx \rightarrow \infty, beix \rightarrow \infty$  であるので、 $C_2 = 0$  とする必要がある。よって式 (15) の  $C_1, C_3$  の積分定数は1つとしてまとめてよくなり、これを  $\tilde{C}_1$  とおけば、

$$\zeta = \tilde{C}_1 [\exp(i\sigma t)] (kerx + ikeix) \dots\dots\dots (16)$$

となる。

この式はさらに、

$$\left. \begin{aligned} R(x) &= [ker^2 x + kei^2 x]^{1/2} \\ \varphi(x) &= \tan^{-1} \left[ \frac{keix}{kerx} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

とおくことによって、

$$\zeta = \tilde{C}_1 [\exp\{i(\sigma t + \varphi(x))\}] R(x) \dots\dots\dots (18)$$

となる。

この式に、井戸での境界条件

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0, \zeta = \zeta_0 \exp(i\sigma t) \\ x_0 &= \sqrt{\frac{\sigma}{\bar{k}}} r_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

を適用して  $\tilde{C}_1$  を決めると、

$$\tilde{C}_1 = \frac{\zeta_0}{R(x_0) \exp[i\varphi(x_0)]} \dots\dots\dots (20)$$

となり、境界条件を満たす解を求めることができる。

### 3. 解についての検討

波動解として求まった解について、二、三の検討を試みる。その前に解の表示を整理しておく。

Kelvin 関数は次のような展開式で書ける。

$$\left\{ \begin{aligned} kerx &= -\log\left(\frac{x}{2}\right) berx + \frac{\pi}{4} beix \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{((2n)!)^2} \left(\sum_{r=1}^{2n} \frac{1}{r} - r\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{4n} \\ keix &= -\log\left(\frac{x}{2}\right) beix - \frac{\pi}{4} berx \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{((2n)!)^2} \left(\sum_{r=1}^{2n+1} \frac{1}{r} - r\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2} \\ berx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{((2n)!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{4n} \\ beix &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{((2n+1)!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2} \end{aligned} \right. \dots\dots\dots (21)$$

$$r = 0.57721 \dots \text{ Euler 数}$$

また、 $x$  が十分に大きいときには漸近展開の式で次のごとく書ける。

$$\left\{ \begin{aligned} kerx &= \frac{\exp \alpha(-x)}{\sqrt{2x/\pi}} \cos \beta(-x) \left[ |\arg x| < \frac{5\pi}{4} \right] \\ keix &= \frac{\exp \alpha(-x)}{\sqrt{2x/\pi}} \sin \beta(-x) \left[ |\arg x| < \frac{5\pi}{4} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}x} - \frac{25}{384\sqrt{2}x^3} \\ &- \frac{13}{128x^5} \dots\dots \\ \beta(x) &= \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2}x} - \frac{1}{16x^3} \\ &- \frac{25}{384\sqrt{2}x^5} \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots (23)$$

さて、これらの展開の近似式をどの程度まで考えるか

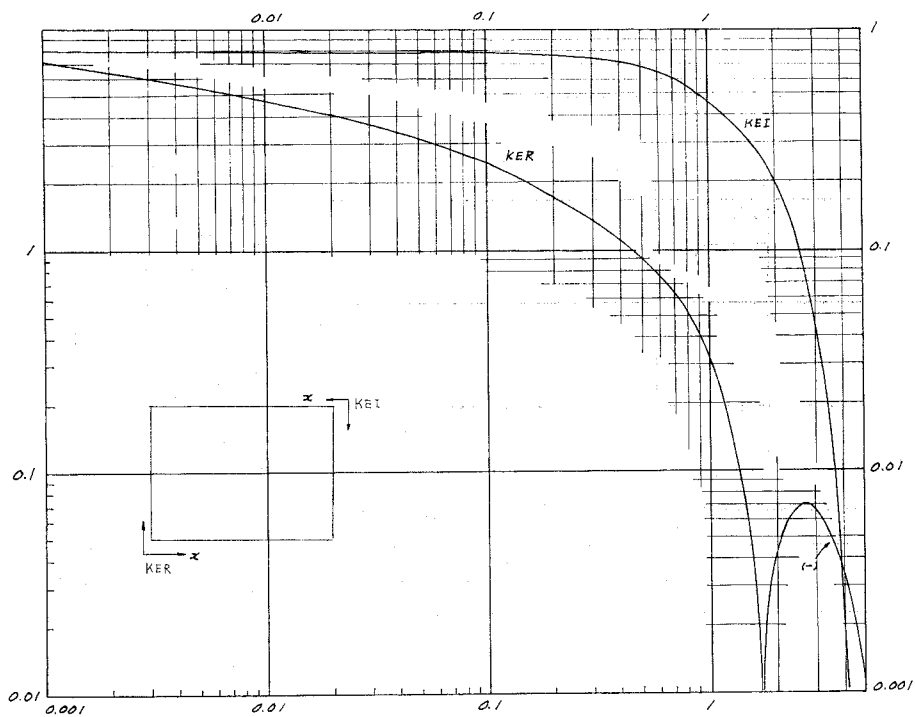


図-2

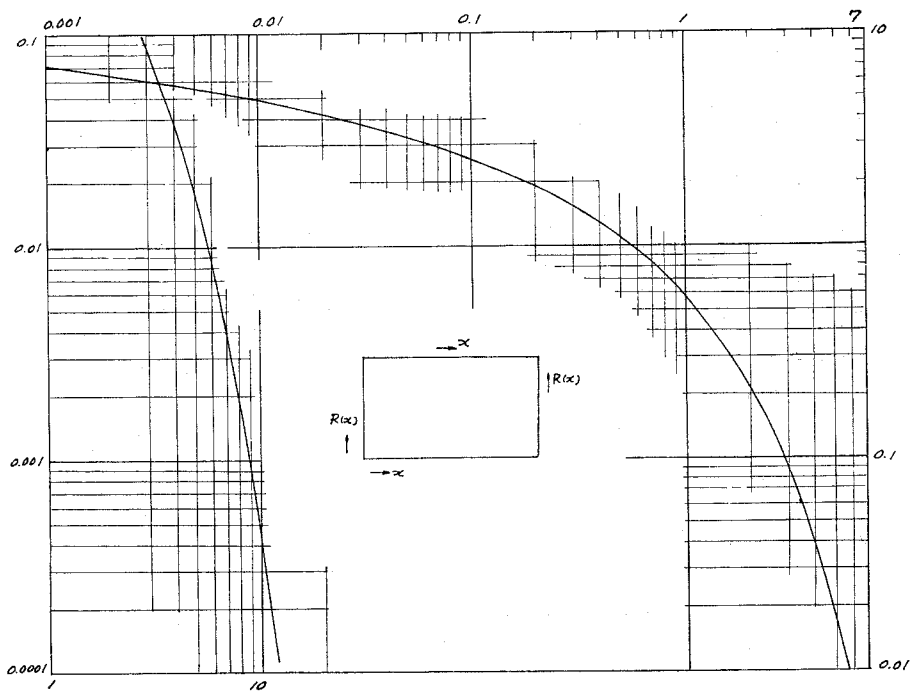


図-3

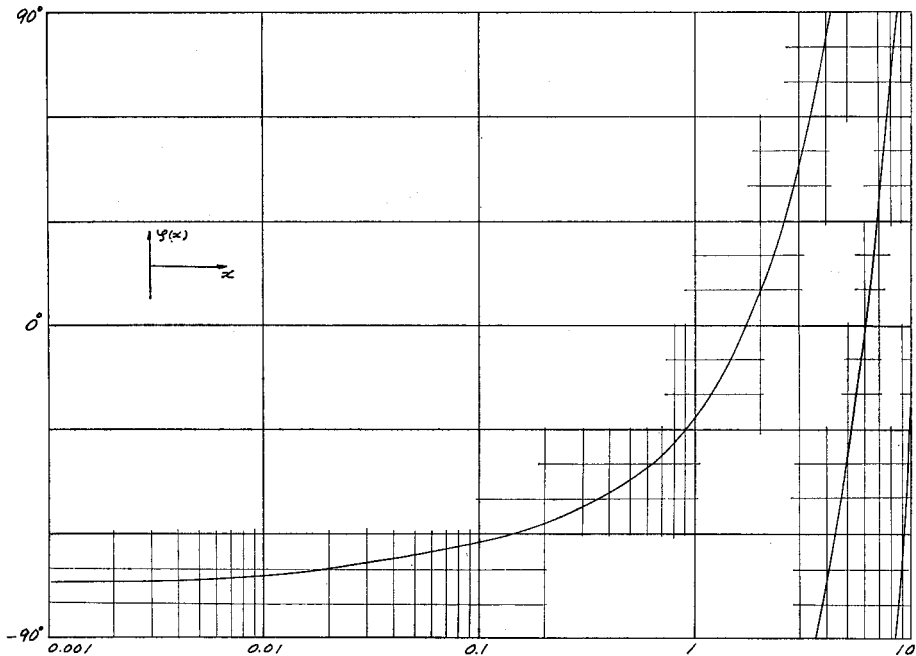


図-4

によって、現象への適応度の良否が決まってくるが、式(21)、(22)によって  $x=0.001\sim 10$  までを計算してみると、 $x < 1$  のときは式(21)、 $x > 1$  のときは式(22)の近似で十分であることがわかった。この結果をグラフにしたのが図-2である。なお、図-2で、 $x > 1.8$  ではKERの値が負になるので絶対値をとり表示し、線上に(−)の記号をつけてある。

また、式(17)に相当する  $R(x)$ 、 $\varphi(x)$  を求めたのが図-3、4である。

このことを考えると、 $x$  が1に比してかなり小さい場合とか、1に比してはるかに大きいときには、式(21)、(22)で、級数展開項のいくつかを省略して、次のような近似をしてもよいことがわかる。

$x \ll 1$  の場合、式(21)は、

$$\left. \begin{aligned} beix &\approx 0, \quad ber \approx 1.0 \\ kerx &= -\log\left(\frac{x}{2}\right) \\ keix &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

また、

$x > 1$  の場合、式(23)は、

$$\left. \begin{aligned} a(x) &= x/\sqrt{2} \\ \beta(x) &= x/\sqrt{2} - \frac{\pi}{8} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

とすることができる。

したがって、式(17)の  $R(x)$ 、 $\varphi(x)$  はこれらに従って、それぞれ次のごとくなる。

$x \ll 1$  の場合

$$\left. \begin{aligned} R(x) &= \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left[\log\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2} \\ \varphi(x) &= \tan^{-1}\left[\frac{\pi/4}{\log\left(\frac{x}{2}\right)}\right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

$x \gg 1$  の場合

$$\left. \begin{aligned} R(x) &= \frac{\exp(-x/\sqrt{2})}{\sqrt{2}x/\pi} \\ \varphi(x) &= \tan^{-1} \tan \beta(-x) = -\frac{\pi}{8} - \frac{x}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

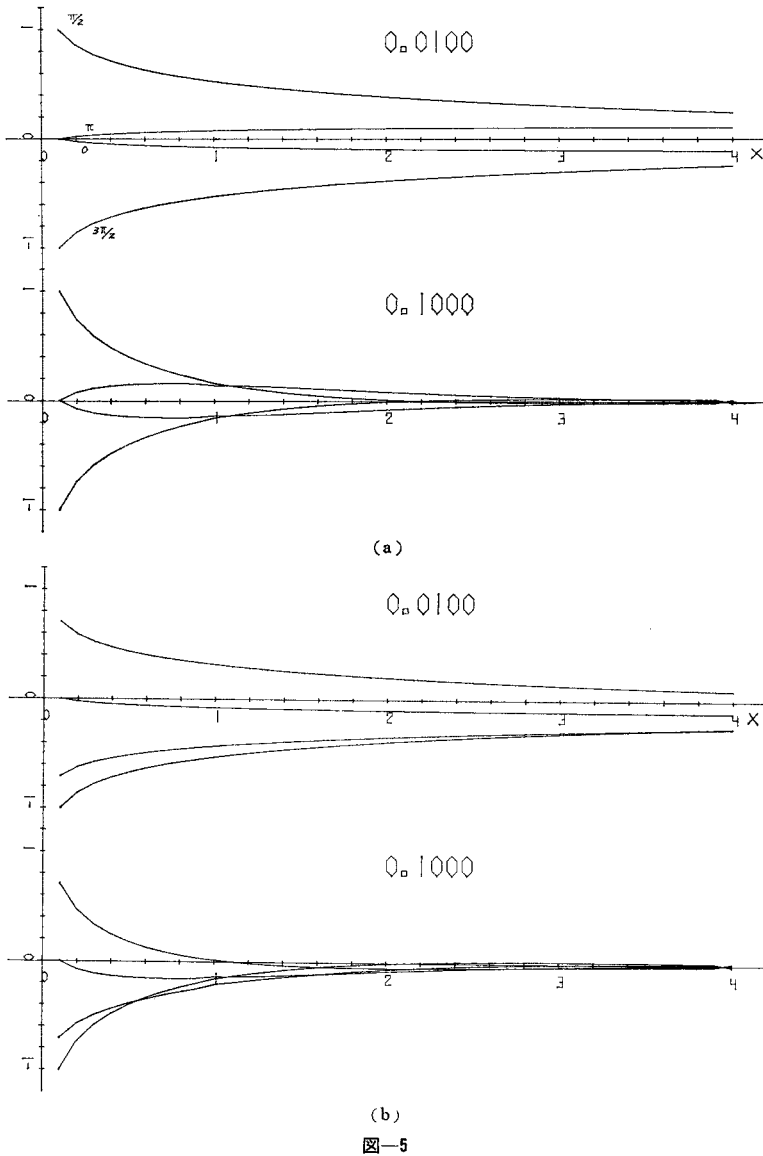
#### 4. 現地観測結果への適用方法

まず、この解析結果による水面変化の様子を、無次元化した距離  $x$  と式(18)の  $\zeta$  の関係でグラフにしてみた。ここでは、井戸での振幅を無次元化して表示してある。

グラフ中に 0.01、0.1 の数字が見出しとなっているが、これは横軸の  $x$  の1ステップの値である。すなわち横軸の目盛の1は、それぞれ、 $1 \times 0.01$  または  $1 \times 0.1$  に相当している。

このグラフよりは、波動性が見当らないようにみえるが、数値計算をした結果を細かく検討すると、波動性が表われていることがわかった。これは図-5(a)の0.1のグラフの  $x=3$  付近をみるとわずかに認められる。

次に、この解析結果を使って、地盤の透水係数を求める方法についてまとめておこう。



(1) 振幅の変化による方法

これは Theis の方法と同じ手法を使う。すなわち、図-3 の、 $x$  と振幅  $R(x)$  の関係のグラフと、現地観測の、井戸からの距離  $r$  と、観測井の水位変化の振幅  $\zeta_0$  を両対数グラフにプロットしたグラフを重ねて、両図のもっともよく一致したところを求める。

このとき、両グラフの一致点より、それぞれの座標値 ( $x, R(x)$ ) と ( $r, \zeta_0$ ) を読みとると、次の各式を使うことにより、地盤の透水係数が決められる。

$$x = \sqrt{\frac{\sigma}{k}} \cdot r, \quad \bar{k} = \frac{kH}{\lambda_1}, \quad \sigma = \frac{2\pi}{T} \dots\dots\dots (28)$$

この各式に、 $x, r$  の値を代入し、 $\bar{k}$  の値を求め、 $k$  の

値を求める手順とする。

(2) 水位変化の位相のずれによる方法

井戸と観測井の間がかなり離れていると、波動性のために、水位変化に時間的な位相のずれが観測される。このときには図-4 の  $x$  と  $\varphi(x)$  のグラフを使うことによって、透水係数を求めることができる。

すなわち、井戸より観測井までの距離が  $r$  で、そのときの位相のずれが  $\varphi^\circ$  であったとするとき、図-4 の  $\varphi^\circ$  に相当する  $x$  の値を求める。このとき  $x$  の値は、いくつかの値をとりうるが、観測井までの間に波がいくつあるかによって、最適と思われる  $x$  の値を求める。  $r$  と  $x$  の値がわかれば式 (28) によって  $k$  の値を求めることが可能である。

5. スポンジモデルの実験への本解析の適用

本研究室では、砂モデルよりは均一な透水地盤が作れる利点を考えて、ここ 2~3 年にわたりスポンジモデルによる透水実験を行ってきた<sup>3)</sup>。これらの一連の実験のうち、本解析に比較的似ている井戸の実験より、一

つのデータ解析をしてみる。

スポンジの大きさは  $190 \times 190 \times 60$  cm であり、60 cm の厚さを、地層に相当するものとし、このスポンジの中央に、 $\phi = 10$  cm の揚水、注水に使用する井戸をあげ、これより、20 cm 間隔に観測井 ( $\phi = 5$  cm) を放射状に配置し、一定量の流量で、注水、揚水を繰り返したときの水位変化を観測した。

その結果、図-6 のような 1 ステップについての結果を得た。No. 1 は中央の井戸であり、No. 3 は、井戸より 25 cm, No. 12 は 45 cm 離れた観測井の水位変化を示している。このグラフは、本解析で行ったほどよい sin 曲線を示していないが、解析方法の例として、適用してみる。

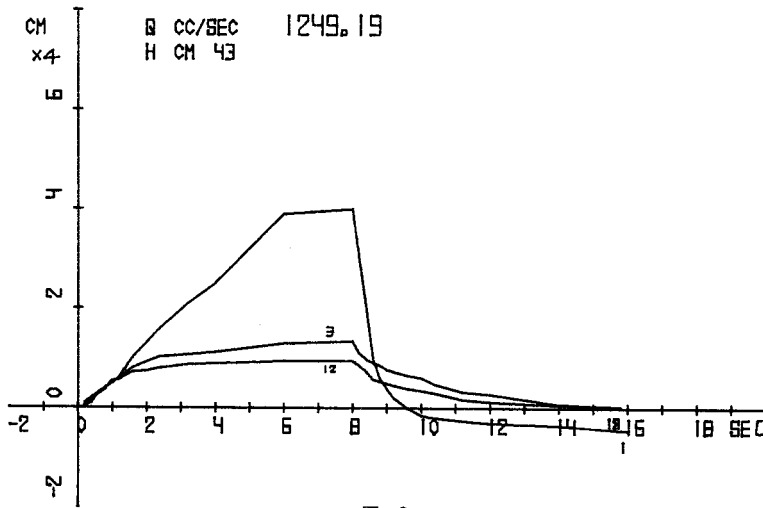


図-6

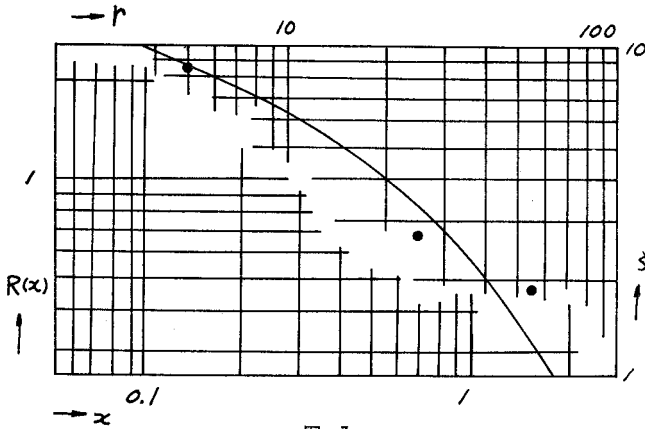


図-7

振幅変化と  $r$  の関係のグラフに  $R(x)$ ,  $x$  のグラフを重ね合せたのが 図-7 である。測点が3点と若干少ないが、まずよい相関と考えてよい。

このグラフより、 $r=10$  cm のときの  $x$  の値は  $x=0.28$  となっていることがわかる。

この実験での水深は、 $H=43$  cm,  $T=16$  sec, 空隙率  $\lambda=0.68$  であったので、式 (28) より、

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} = 2\pi/16 = 0.393 \text{ 1/sec,}$$

$$\bar{k} = \frac{r^2}{x^2} \cdot \sigma = \frac{10^2}{0.28^2} \cdot 0.393 = 501.3 \text{ cm}^2/\text{sec}$$

$$k = \bar{k} \cdot \frac{\lambda_1}{H} = 501.3 \times \frac{0.68}{43} = 7.93 \text{ cm/sec}$$

を得る。このスポンジモデルについて、Theis の方法、

Jacob の方法、Tiem の方法等によった透水係数の値は次のようになっている。

Theis の方法

$$k = 1.68 \sim 6.2 \text{ cm/sec}$$

Jacob の方法

$$k = 6.06 \sim 8.77 \text{ cm/sec}$$

Tiem の方法

$$k = 5.68 \sim 8.36 \text{ cm/sec}$$

Theis の方法が小さく出ているが、これは標準曲線を散らばったデータにあてはめる手法によって出てきているわけである。 $k$  の値はオーダーで合えばよいとも考えられるので、上記の手法によって求めた値は、他の方法のものよりよい結果を示している。

位相のずれによる方法は、今回は、ここで取り扱われぬが、いずれ現地データ等に適用してみたいと考えている。

### 6. ま と め

井戸に関する波動解を求めることができた。スポンジモデルの実験に適用したところ、他の方法によって求めた、透水係数の値とよい相関を示していることがわかった。

なお、この解によって、現場の透水係数を求めるのに、既設の井戸の取水によって周辺部の井戸の水位変化が生じている場合には、ただちに透水係数を求めることが可能である。

また、水位変化の振幅のデータによる方法と、水位変化の位相のずれによって求める方法の双方が使えるので、場所に応じて、もっとも適した方法が使える。

### 参 考 文 献

- 1) 水理公式集, 昭和46年度版, 土木学会.
- 2) 嶋 祐之論文選集編集委員会: 流れの研究, 技報堂.
- 3) 理工学のための数学ハンドブック, 丸善.
- 4) 数学公式集III, 岩波全書.
- 5) 小久保泰三・小田孝博: スポンジモデルによる井戸の非定常取水実験, 昭和52年度東洋大学工学部土木工学科卒業論文.

(1978.5.30・受付)