

## 微生物の作用を直接考慮した河川自浄作用の一理論式

## A FORMULA ON SELF-PURIFICATION OF RIVERS

日 野 幹 雄\*

By Mikio HINO

## 1. 序 論

## (1) 従来の理論について

水質汚濁および自浄作用あるいは水処理過程等における微生物の作用が知られてからすでに久しい。これらに関する従来からの理論で、微生物の働きが直接ないしは間接的に考慮されているのは、

(i) 河川の BOD (生物化学的酸素要求量) および DO (溶存酸素量) の流下に伴う変化、

(ii) 活性汚泥法による下水処理における BOD の変化、  
などである。

このうち前者(河川の流下に伴う BOD の低下)すなわち、河川の自浄作用に関する理論は、Streeter & Phelps (1925) に始まるもので、ここでは微生物活動—微生物による有機物の分解 (BOD の低下) とそれに要する酸素の消費 (DO 低下)—は脱酸素係数ないしは自浄作用  $K_1$  として間接的に考慮されている。

基礎方程式は  $L$  (BOD) と  $D$  (Oxygen Deficit) に関する連立微分方程式系

$$\frac{\partial L}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - U \frac{\partial L}{\partial x} - K_1 L \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} - U \frac{\partial D}{\partial x} + K_1 L - K_2 D \dots\dots (2)$$

(ここに、 $K_x$ : 流下方向の拡散係数、 $U$ : 平均流速、 $K_1$ : 脱酸素係数、 $K_2$ : 再曝気係数) の形をとるが、実質的には、この第一方程式は  $L$  のみに関する微分方程式で  $D$  とは独立に解け、 $D$  との相互作用は取り入れられていない。それは、脱酸素係数  $K_1$  は実際には  $L$  や  $D$  あるいは水理量・微生物量などに関係するはずであるにもかかわらず、単なる定数として扱われていることによる。

基礎方程式の第二式は  $D$  に関するもので、これには第一式の解である  $L$  を含み、これを解くことにより  $L$  の変化に伴う  $D$  の増減すなわち Oxygen Sag が求められる。

Streeter-Phelps の定式化にはその後多くの研究者による改良や解析解が提出されてきているが、基本的には式 (1)、(2) と同じ考え方であり、微生物の作用は間接的に不完全な形でしか考慮されていない。すなわち、 $L$  および  $D$  の変化により、微生物活動は当然変化するはずであり、自浄係数  $K_1$  は定数ではありえない。

最近、biokinetics の考え方を河川の自浄作用に導入し、 $L \cdot D$  のほかに微生物量  $Y$  に関する方程式も考え、これらを連立させて解くことが二、三試みられている<sup>(12),(14)</sup>。しかし、特殊の場合の解か、次の項でも述べるように種々のケースについて非線形連立方程式を数値的に解いて解を求めているのであり、現象の理解という点からはほど遠いものと著者は考える。

一方、活性汚泥法による水処理に関しては最近 biokinetics の導入、すなわち微生物の作用を直接的に考慮することが試みられている。しかし、この場合には、多くの要素 (BOD, DO, 微生物) を同時に考慮し、しかもそれらの相互関係が非線形であるために、closed form solution を求めることは難しく、単に連立常微分方程式系を数値的に解くことにとどまり、内部機構の理解にまでは至っていないと考えられる。

## (2) 本論文の目的

現在までのところ、著者の知る範囲では、自浄係数  $K_1$  を他の因子との関連で与える理論式として提出されているものはきわめて少なく (Novotný 1969 や日野 1977)、実験式ないしは経験式にも確固としたものはない。このことは、再曝気係数  $K_2$  について種々の理論が提出され、実験・実測による検討も多数行われているのと対照的である。これは再曝気が純然たる物理現象であり従来の方

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科

で種々の要因が輻輳しているためである。

ここに発表する一連の論文では、微生物の増殖を考慮した BOD の変化および  $K_1$  の変化を closed form solution として導き、自浄作用過程の理解を得たいと考えた。これはすでに述べたように、従来の河川自浄作用の理論が微生物の作用を直接的に考慮していないのに対して、本論文では微生物増殖と BOD 変化を関連して考慮したこと、微生物増殖式について理論的考察から帰着される式 (Contois の実験式と一致) を採用したことによるものである。

(3) 本論文の考え方

さて、自然科学における思考法はよく知られているように「演繹法」と「帰納法」があり、最近では、これに「仮説法 abduction」を加えることもある。力学は前者の代表例であり、生物学は後者の代表例である。また、現象の解明にあたっては、大きく分類して次の二つの立場がある。

(I) あくまでも現実を重視し、理論や計算式も具体的実際の範囲で現象を正確に説明しうることを求める。

(II) 対象をできるだけ単純化抽象化し、一般の本質的な原理を求める。それゆえに、現実には生じないケースも一つの極限として含んだ理論を重視し、その一つの帰結として具体的数値的なものは消去するか、無次元化などにより陽に表われないようにする。

I の立場は生物系や化学系そして設計を主とする工学系に多く、II の立場は力学物理系的と大雑把にいえるであろう。II の立場の有用性は、たとえば、流体力学においては、現実には存在しない「非粘性」の“完全流体”の力学を取扱い、その一つの結論として「このような流れの中の物体には抵抗が働かない」というまったく現実とは反するダランベールの背理が導かれ、しかも今日なお大切な理論（粘性の作用についての理解を深めるために）として教えられていることから明らかである。

本論文は、河川の自浄作用という生物化学的問題を物理学的観点から解析しようとするもので、現実の場合を“量的”に捉えようとしたものではなく、自浄作用の“質的”理解を深めようとしたものである。したがって、(i) まず自浄作用をできるだけ単純化し、(ii) 現実には生じないであろうケースも自浄作用の質的理解のための一つの極限として含んで解析した。また、(iii) 具体的数値的なものはできる限り露わにしないようにした。これは上述の II の立場によるものであるが、同時に式中の係数や定数には現段階では同定しえないものや値の変化範囲の大きいものがあり、こうした不確定性を除くためでもある。

2. 細菌の増殖

河川の自浄作用のうちその主要なものは細菌による有機物の好気性分解である。この他河川の汚濁の低下には沈澱や吸着あるいは稀釈のような物理的作用もあるが、ここではわれわれが「河川の自浄作用」とよぶとき暗にそれを意味し、また自浄作用の真の意味にふさわしく、それにもかかわらずわれわれの理解の十分ではない細菌による有機物の分解作用について考える。

さて、単位体積の媒質中の細菌量を  $Y$  とすれば、その増殖は次式で表わされる。

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + U \frac{\partial Y}{\partial x} = \mu Y - \beta Y \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\mu$  はバクテリアの増殖率、 $\beta$  は死滅率ないしは除去率である。除去とは食物連鎖の上位の生物 (= 原生動物) などによる捕捉を意味する。多細胞生物とは異なり、単細胞生物で細胞分裂により増殖を行うバクテリアについては、通常の意味での死滅の概念は適当ではないであろう。バクテリアの死滅には、(i) 栄養分の欠如、(ii) 呼吸のための酸素の欠乏のほか、たとえこれらが十分な場合にも、(iii) 自己の産出する排出物毒素や、(iv) 細胞分裂の繰り返しの複製機能の欠陥等による死滅があり、この点まだ微生物学上の未解決点といわれる<sup>1)</sup>。本論文では死滅の生物学的機構には立入らず、単純な意味で用いる (なお、醗酵工学における連続培養槽の場合には、 $\beta$  は dilution rate である)。

河川自浄作用の場合には、醸造槽などと異なり微生物濃度も低いから (iii) は考えなくともよいであろうし、(i) は増殖率として考慮されており、また、細菌は酸素不足に対して比較的耐性が高いので、本論文では  $\beta$  を一定と考える。

微生物の作用を考慮するうえでの問題点は、むしろ増殖率  $\mu$  にある。 $\mu$  の関数形については、通常 Monod 式<sup>2),3)</sup> が用いられている。これは、一種の触媒である酵素反応に関して導かれた Michaelis-Menten 式<sup>1)</sup> を細菌による有機物分解に拡張した実験式である。

$$\mu = \mu_{\max} \frac{L}{k+L} \dots\dots\dots (4)$$

増殖式については、このほか種々の実験式が提案されている。しかし、ほとんどの場合 Monod 式が用いられている。

著者は、数年前理論的考察に基づいて、 $\mu$  は  $L$  ではなく  $L/Y$  の関数でなければならないことを指摘し<sup>3)</sup>、Monod 式とは基本的に異なる増殖式として次式を提案した<sup>4)~6)</sup>。

$$\mu = \mu_{\max} \frac{L/Y}{a+L/Y} \dots\dots\dots (5)$$

微生物学や生物化学工学・biokinetics の本にも紹介されていないので気付かなかったが、その後、本式と同形の式が実験に基づいて Contois<sup>2)</sup> によりすでに提案されていることがわかった（筑波大・向高祐邦氏に負う、1978.2）。式（5）はいつけん Monod 式と似かよっているように思われるが、単に式（4）の  $L$  を  $L/Y$  に換えたというのではなく理論的考察により得られたという点でこれとは根本的に異なるものであり、本報および次報以後に展開する自浄作用についての理論も、もとはといえば Monod 式が不適でないかと気付いたことにある。

### 3. 自浄作用の理論

#### (1) 基礎方程式

河川の自浄作用を論ずる基礎方程式は BOD( $L$ ) および溶存酸素不足量 OD( $D$ ) の平衡方程式および細菌の増殖式である\*。

$$\frac{\partial L}{\partial t} + U \frac{\partial L}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \mu' Y + \beta' Y \dots\dots\dots(6)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + U \frac{\partial D}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + (\mu + m) Y - K_2 D \dots\dots\dots(7)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + U \frac{\partial Y}{\partial x} = \mu Y - \beta Y \dots\dots\dots(8)$$

ここに、 $L$  および  $D$  は断面平均の BOD および OD である。微生物反応の速度が乱流拡散作用に比べてきわめて遅いため、川の中の水が澱んでいる場所や湖沼以外では、 $L$  や  $D$  は断面内では一様である。また、 $t$  は時間、 $x$  は流下方向距離、 $U$  は断面平均流速、 $K_x$ ：流下方向の拡散係数、 $\mu$ ：細菌の増殖率、 $\mu'$ ：細菌の増殖等に要する栄養摂取、 $m$ ：細菌の自己維持のためのエネルギー消費率、 $\beta$ ：系からの除去および死滅率、 $\beta'$ ： $\beta$  に対応する BOD 再負荷率。 $L \cdot D \cdot Y$  の単位には mg/l や ppm などが用いられるが、本論文では特にこれを固定せず、相互に矛盾のない共通の単位系を用いることにする。

#### (2) 仮定および条件

式（6）～（8）が河川の自浄作用を論ずる基礎方程式であるが、本論文の目的は河川の自浄作用について微生物の作用を考慮した closed form solution を求めることにあり、数式の展開を容易にするために次のような仮定および条件を付する。

- ① 流れは一様定常流である。
- ② 流下方向の拡散項は移流項に比べて無視できる。

③ 河川への新たな（途中からの）汚濁物の流入はなく、上流端における BOD は一定とする。

④ 微生物の増殖活動は平衡状態に達しており、したがって、BOD や微生物量は定常である。

⑤ 細菌は河水中に生息し、流れとともに流下する。

⑥ 溶存酸素は（飽和状態とは限らないが）微生物活動に障害とならない程度に十分あると考える。

以上の条件や仮定のうち①～④は特別なものではなく、理論の一般性の妨げとなるものではない。有機物の分解細菌が河水中に生息するのか、または河底に附着しているのかは、自浄作用の理論を立てるうえできわめて重要であるが、明確なことはわからないようである。したがって、本論では細菌は河水中に生息増殖するとして理論を進める。河底に附着している場合の取扱いは次報で述べる。

しかし、条件⑥については、少々検討を要するであろう。Hynes<sup>7)</sup> のテキストなどによりよく知られているように、有機物の混入により分解者である細菌は流入点直後において急増し、これに伴って溶存酸素量は急減する。流下に伴う BOD の減少、自由表面からの再曝気作用により溶存酸素量は徐々に回復する。ところで、細菌の増殖率と酸素濃度の関係は、たとえば図-1に示すとおりで、高等動物の場合とは異なり、細菌は酸素不足に対して比較的耐久性が強く少々の溶存酸素の不足は微生物の増殖の妨げとはならないといえる。したがって本論文のように河水中の生物としては微生物のみを考える場合には、流入 BOD 濃度が特に高い場合を除いて溶存酸素の変化を特に考慮する必要はない。もし必要ならば、BOD と微生物量の変化を連立して解を求めたのちその結果を用いて式（7）により溶存酸素量の変化を求め、条件⑥が許容しうるものか否かを確認すればよい。

#### (3) 基礎連立常微分方程式およびその解

以上の仮定および条件から基礎方程式は、BOD( $L$ ) と微生物量 ( $Y$ ) に関する次の二式となる。

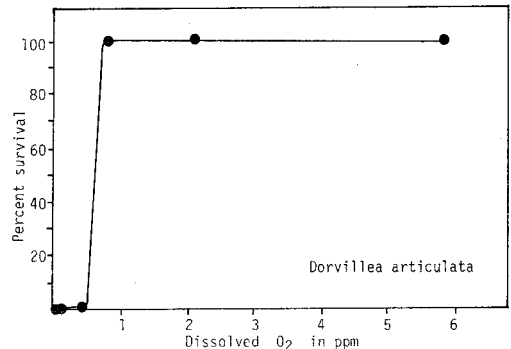


図-1 微生物の生存率と容存酸素濃度 (Reich<sup>10)</sup> より)

\* 上式の記号は、微生物化学の慣用記号に必ずしも一致していない。

$$\frac{dL}{dt} = -\mu'Y + \beta'Y \dots\dots\dots(9)$$

$$\frac{dY}{dt} = \mu Y - \beta Y \dots\dots\dots(10)$$

ここに、 $t=x/U$ 、 $\beta \cdot \beta'$  は細菌の死滅効果を表わす係数(定数)、 $\mu \cdot \mu'$  は細菌の増殖率および細菌による有機物の分解率で、次式で表わされる。

$$\mu = \mu_{\max} \frac{L/Y}{a + L/Y} \dots\dots\dots(11)$$

$$\mu' = \mu'_{\max} \frac{L/Y}{a' + L/Y} \dots\dots\dots(12)$$

さきにも述べたように、分解される有機物成分のうち微生物体として再構成される効果を考慮して  $\mu$  と  $\mu'$  とを区別してある。また、細菌のうち一部は食物連鎖上位の生物による捕捉により系から除外されることを考え、 $\beta$  と  $\beta'$  を区別してある。

閉じた形の、あるいは陽な表現での解析解を得るために、増殖率曲線式(11)、(12)を次の2本の折れ線で近似する。

(i)  $L/Y > \theta$  の範囲で、

$$\mu = \mu_{\max} \dots\dots\dots(13 \cdot a)$$

$$\mu' = \mu'_{\max} \dots\dots\dots(14 \cdot a)$$

(ii)  $0 \leq L/Y \leq \theta$  の範囲で、

$$\mu = \mu_{\max} \frac{1}{\theta} \frac{L}{Y} \dots\dots\dots(13 \cdot b)$$

$$\mu' = \mu'_{\max} \frac{1}{\theta} \frac{L}{Y} \dots\dots\dots(14 \cdot b)$$

また、初期条件は次のように与えられるものとする。

$$t=t_0 : L=L_0, Y=Y_0 \quad (L_0/Y_0 > \theta \text{ の場合}) \dots\dots(15)$$

または、

$$t=t_* : L=L_*, Y=Y_* \quad (L_*/Y_* \leq \theta \text{ の場合}) \dots\dots(16)$$

a) 第一ステップ ( $L_0/Y_0 > \theta$ )

まず、 $t=t_0$  での初期値  $L_0, Y_0$  が、

$$L_0/Y_0 > \theta$$

の関係を満たす範囲にあるとすると、式(9)、(10)は式(13・a、14・a)により次のように書き換えられる。

$$\frac{dL}{dt} = (-\mu'_{\max} + \beta')Y \dots\dots\dots(17)$$

$$\frac{dY}{dt} = (\mu_{\max} - \beta)Y \dots\dots\dots(18)$$

式(18)の解は簡単に次のように求まる。

$$\blacksquare Y = Y_0 e^{(\mu_{\max} - \beta)(t - t_0)} \dots\dots\dots(19)$$

次に、これを式(17)に代入する。

$$\frac{dL}{dt} = -(\mu'_{\max} - \beta')Y_0 e^{(\mu_{\max} - \beta)(t - t_0)} \dots\dots(20)$$

これを積分すれば、 $L$ は次式のように得られる。

$$\blacksquare L = L_0 + \alpha Y_0 \{1 - e^{(\mu_{\max} - \beta)(t - t_0)}\} \dots\dots\dots(21)$$

ここに、

$$\alpha = (\mu'_{\max} - \beta') / (\mu_{\max} - \beta) \dots\dots\dots(22)$$

さて、時間の経過とともに、 $Y$ は増加し $L$ は減少するから、ある時刻  $t=t_1 (> t_0)$  で  $L/Y=L_1/Y_1$  が、次の関係を満たすようになる。

$$\frac{L_1}{Y_1} = \theta \dots\dots\dots(23)$$

ここに、

$$L_1 = L_0 + \alpha Y_0 \{1 - e^{(\mu_{\max} - \beta)(t_1 - t_0)}\} \dots\dots\dots(24)$$

$$Y_1 = Y_0 e^{(\mu_{\max} - \beta)(t_1 - t_0)} \dots\dots\dots(25)$$

以上3つの関係式から  $t_1$  を求めると、

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{\mu_{\max} - \beta} \ln \frac{L_0/Y_0 + \alpha}{\theta + \alpha} \dots\dots\dots(26)$$

となる。このとき、 $L_1$  および  $Y_1$  は次のように書き換えられる。

$$L_1 = L_0 - \frac{\alpha}{\theta + \alpha} \left( \frac{L_0}{Y_0} - \theta \right) Y_0 \dots\dots\dots(27)$$

$$Y_1 = \frac{L_0/Y_0 + \alpha}{\theta + \alpha} \cdot Y_0 \dots\dots\dots(28)$$

なお、上式(28)からも  $L_0/Y_0 > \theta$  ならば、 $Y$  は時間とともに増加し  $Y_1 > Y_0$  であることがわかる。

b) 第二ステップ ( $L_*/Y_* \leq \theta$ )

初期条件が  $L_0/Y_0 > \theta$  を満たす場合で時間が  $t > t_1$  となったとき、または、最初から  $L_*/Y_* \leq \theta$  の条件が満たされている場合には、基礎微分方程式は、

$$\frac{dL}{dt} = -\frac{\mu'_{\max}}{\theta} L + \beta' Y \dots\dots\dots(29)$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\mu_{\max}}{\theta} L - \beta Y \dots\dots\dots(30)$$

である。上式を変形して  $L$  および  $Y$  それぞれについての常微分方程式を立てる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 L}{dt^2} + \left( \beta + \frac{\mu'_{\max}}{\theta} \right) \frac{dL}{dt} \\ + \left( \frac{\mu'_{\max}}{\theta} \beta - \frac{\mu_{\max}}{\theta} \beta' \right) L = 0 \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y}{dt^2} + \left( \beta + \frac{\mu'_{\max}}{\theta} \right) \frac{dY}{dt} \\ + \left( \frac{\mu'_{\max}}{\theta} \beta - \frac{\mu_{\max}}{\theta} \beta' \right) Y = 0 \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

原微分方程式(9)~(12)は非線形であるが、 $\mu \cdot \mu'$  について式(13)、(14)のような折れ線近似表現を導入した結果、式(29)、(30)あるいは式(31)、(32)は線形常微分方程式となった。このとき初期条件は、

$$t=t_*, L=L_*, Y=Y_*$$

(あるいは、 $t=t_1 : L=L_1, Y=Y_1$ 、この場合には  $t_1, L_1, Y_1$  をそれぞれ  $t_*, L_*, Y_*$  とみなす)であるが、これを  $L \cdot Y$  のそれぞれについて書き直すと、

$$\begin{aligned} t=t_* : L=L_*, L' = -\frac{\mu'_{\max}}{\theta} L_* + \beta' Y_* = L_*' \\ \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t=t_* : Y=Y_*, Y' = \frac{\mu_{\max}}{\theta} L_* - \beta Y_* = Y_*' \\ \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

である。

式 (31), (32) はまったく同じ形であるので,  $L$  または  $Y$  を  $f$  で代表して, これを,

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + a_1 \frac{df}{dt} + a_2 f = 0 \dots\dots\dots(35)$$

$$f = f_*, \quad \frac{df}{dt} = f_*' \quad (t=t_*) \dots\dots\dots(36)$$

と置く。ここに,

$$a_1 = \beta + \frac{\mu'_{\max}}{\theta} \dots\dots\dots(37)$$

$$a_2 = \frac{\mu'_{\max}}{\theta} \beta - \frac{\mu_{\max}}{\theta} \beta' \dots\dots\dots(38)$$

である。このとき解は,  $a_1 \cdot a_2$  の値により次のようになる。

(i)  $a_1^2 > 4 a_2$  の場合

$$f = \frac{k_2 f_* + f_*'}{k_1 - k_2} e^{-k_1(t-t_*)} + \frac{k_1 f_* + f_*'}{k_1 - k_2} e^{-k_2(t-t_*)} \dots\dots\dots(39)$$

$L$  と  $Y$  のそれぞれについて記せば,

$$\blacksquare L = -\frac{k_2 L_* + L_*'}{k_1 - k_2} e^{-k_1(t-t_*)} + \frac{k_1 L_* + L_*'}{k_1 - k_2} e^{-k_2(t-t_*)} \dots\dots\dots(39 \cdot a)$$

$$\blacksquare Y = -\frac{k_2 Y_* + Y_*'}{k_1 - k_2} e^{-k_1(t-t_*)} + \frac{k_1 Y_* + Y_*'}{k_1 - k_2} e^{-k_2(t-t_*)} \dots\dots\dots(39 \cdot b)$$

ここに,

$$k_1 = \frac{1}{2} (a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4 a_2}) \dots\dots\dots(40)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} (a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4 a_2}) \dots\dots\dots(41)$$

(ii)  $a_1^2 = 4 a_2$  の場合

$$f = \{f_* - (f_*' + l f_*) t_*\} e^{-l(t-t_*)} + (f_*' + l f_*) t_* e^{-l(t-t_*)} \dots\dots\dots(42)$$

ここに,

$$l = a_1/2 \dots\dots\dots(43)$$

(iii)  $a_1^2 < 4 a_2$  の場合

$$f = \frac{1}{h_2} \{f_* (-h_1 \sin h_2 t_* + h_2 \cos h_2 t_*) - f_*' \sin h_2 t_*\} e^{-h_1(t-t_*)} \cos h_2 t + \frac{1}{h_2} \{f_* (h_1 \cos h_2 t_* + h_2 \sin h_2 t_*) + f_*' \cos h_2 t_*\} e^{-h_1(t-t_*)} \sin h_2 t \dots\dots\dots(44)$$

ここに,

$$h_1 = a_1/2, \quad h_2 = \sqrt{4 a_2 - a_1^2}/2 \dots\dots\dots(45)$$

#### (4) 溶存酸素不足量の変化

以上の理論は, 溶存酸素量は細菌の分解作用の制限因子とはなっていないという条件で導かれた。このとき, oxygen deficit  $D$  はすでにこれとは独立に求められた

$L \cdot Y$  を用いて次式で表わされる。

$$\frac{dD}{dt} = (\mu' + m) Y - K_2 D \dots\dots\dots(46)$$

もし,  $L/Y > \theta$  ならば,

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} + K_2 D &= (\mu'_{\max} + m) Y \\ &= (\mu'_{\max} + m) Y_0 e^{(\mu_{\max} - \beta)(t-t_0)} \dots\dots\dots(47) \end{aligned}$$

これを解いて,

$$\blacksquare D = \left\{ D_0 - \left( \frac{\mu'_{\max} + m}{\mu_{\max} - \beta} \right) \right\} e^{-K_2(t-t_0)} + \left( \frac{\mu'_{\max} + m}{\mu_{\max} - \beta} \right) Y_0 \cdot e^{(\mu_{\max} - \beta)(t-t_0)} \dots\dots\dots(48)$$

が得られる。ここに,  $D_0$  は  $t=t_0$  における  $D$  の値。

また,  $L/Y \leq \theta$  ならば,

$$\frac{dD}{dt} + K_2 D = \left( \frac{\mu'_{\max}}{\theta} \cdot \frac{L}{Y} + m \right) Y \dots\dots\dots(49)$$

実際上, もっともありうるケース (i) について考えると,

$$\frac{dD}{dt} + K_2 D = -b_1 e^{-k_1(t-t_*)} + b_2 e^{-k_2(t-t_*)} \dots\dots\dots(50)$$

である。

ここに,

$$b_1 = \frac{1}{k_1 - k_2} \left[ \left( \frac{\mu'_{\max}}{\theta} \right) \cdot (k_2 L_* + L_*') + m (k_2 Y_* + Y_*') \right] \dots\dots\dots(51)$$

$$b_2 = \frac{1}{k_1 - k_2} \left[ \left( \frac{\mu'_{\max}}{\theta} \right) \cdot (k_1 L_* + L_*') + m (k_1 Y_* + Y_*') \right] \dots\dots\dots(52)$$

式 (50) の解は, 次のようになる。

$$\blacksquare D = \left\{ D_* + \frac{b_1}{k_1} - \frac{b_2}{k_2} \right\} e^{-K_2(t-t_*)} - \frac{b_1}{k_1} e^{-k_1(t-t_*)} + \frac{b_2}{k_2} e^{-k_2(t-t_*)} \dots\dots\dots(53)$$

ここに,  $D_*$  は  $t=t_*$  における  $D$  の値を表わす。

## 4. 検 討

### (1) 解析解の特長

以上に導いた理論式のパラメーターに種々数値を与えて具体的な例を示す前に, 一般式のままの形で理論的検討を加える。われわれが, いわゆる数値計算のみでは満足せず, コンピュータにより方程式の数値解が容易に求まる今日でも, 解析解を導く努力をし, しかも, これに高い価値を認めるのは, いちいち数値を与えるまでもなく解析解の式形をみるだけで現象の一般的特性を判断し理解しようという点にある。しかも, 数値解では与えた数値やパラメーターの範囲内でしか特性を云々し得ない

のに反し、解析解からは仮定や条件の成立する広い範囲にわたってさまざまな特徴が確固としたものとして引き出せるからである。

(2) パラメーター間の関係

微生物により分解された河川中の汚濁有機物のうち、一部は微生物体に、残りは無機物として河水中に放出される。このことから一般に、

$$\left. \begin{aligned} \mu'_{\max} > \mu_{\max} > 0 \\ \mu'_{\max}/\theta > \mu_{\max}/\theta > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (54)$$

の関係がある。また、微生物の一部は食物連鎖を経て系から除外されることを考えると、

$$0 \leq \beta' < \beta \dots\dots\dots (55)$$

の関係がある。したがって、

$$\frac{\mu'_{\max}}{\theta} \beta > \frac{\mu_{\max}}{\theta} \beta' \dots\dots\dots (56)$$

あるいは、

$$a_2 > 0 \dots\dots\dots (57)$$

細菌が増殖していくためには、最大増殖率  $\mu_{\max}$  は死滅・除去率  $\beta$  より大きい。

$$\mu_{\max} > \beta > 0 \dots\dots\dots (58)$$

細菌の増殖能は一般に非常に高く、20分ないし1時間に一回の細胞分裂により娘細胞を作り出す。したがって、10時間後には1個の細胞が億の数に増殖する。このような大きな増殖能を考えると、単位体積中で細菌量に比べて栄養分(有機物)が相当多くはないと、自己の増殖限界  $\mu_{\max}$  に達しないであろう。したがって、 $L$  と  $Y$  を同じ次元・単位で表わすとき、

$$\theta \gg 1 \dots\dots\dots (59)$$

であると推定される。

また、以上と同様の理由により、細菌の自己維持に必要なエネルギー消費率  $m$  は最大増殖率  $\mu_{\max}$  に比べてきわめて低い。

$$\mu_{\max} \gg m > 0 \dots\dots\dots (60)$$

(3) 理論的検討—BODおよび細菌量の変化特性

さて、十分きれいで、細菌の少ない河川にBOD負荷が与えられると、

(i) まずはじめは、 $L_0/Y_0$  は大きく、すなわち単位体積細菌量当りの栄養分は十分であるから、有機物分解細菌は式(19)に従い指数的に急増し、またこれによりBODも式(21)で示されるように急減する。

(ii) 細菌が増え過ぎると、単位体積中の細菌量当りの栄養分に不足をきたす。すなわちある流下時刻  $t=t_*$  で  $L_*/Y_* = \theta$  となり、これ以後  $L/Y < \theta$  のため細菌の増加はとどまる間もなく指数的に減少しはじめる。BODも同様に指数的に減少する。

(iii) BODの減少は従来の理論の与える単純な指数減衰

$$L = L_0 e^{-K_1(t-t_0)}$$

ではない。しかも、減衰曲線は一種類の曲線ではなく、式(21)と式(39・a)の二種の曲線で表示される。一般には  $t \rightarrow \infty$  で、

$$L_{\infty} \rightarrow 0, Y_{\infty} \rightarrow 0$$

となる。

(iv) BODが厳密に指数減衰をするのは、 $L/Y < \theta$  で、かつ  $\beta' = 0$  の場合である。このとき、 $k_1 = \frac{\mu'_{\max}}{\theta}$ 、 $k_2 = \beta$ 、 $k_1 L_* + L_*' = 0$  となり、式(39・a, b)より、

$$L = L_* e^{-\frac{\mu'_{\max}}{\theta}(t-t_*)} \dots\dots\dots (61 \cdot a)$$

$$Y = \frac{\frac{\mu'_{\max}}{\theta} L_*}{\left(\beta - \frac{\mu'_{\max}}{\theta}\right)} \cdot e^{-\frac{\mu'_{\max}}{\theta}(t-t_*)} + \left( Y_* + \frac{\frac{\mu'_{\max}}{\theta} L_*}{\left(\frac{\mu'_{\max}}{\theta} - \beta\right)} \right) e^{-\beta(t-t_*)} \dots\dots\dots (61 \cdot b)$$

である。また、このとき自浄係数は、

$$K_1 = \frac{\mu'_{\max}}{\theta} \dots\dots\dots (62)$$

この条件は、細菌のBODへの再負荷がなく、かつ汚濁度に対して細菌の増殖が十分活発になった場合である。逆にこの条件が満たされない場合には、BODの変化を指数減衰式で表わせるのは  $t$  が十分大きい場合である。

(v) 特別な場合として、細菌のBODへの完全な再負荷を認めると、すなわち、

$$\beta = \beta'$$

でかつ(生物学的にはあり得ないが、現象を理解するための極限操作として)

$$\mu_{\max}/\theta = \mu'_{\max}/\theta, m = 0$$

ならば、

$$a_2 = 0$$

$$k_1 = a_1 = \beta + \frac{\mu'_{\max}}{\theta},$$

$$k_2 = 0$$

となる。したがって、 $t \rightarrow \infty$  でBODと細菌量はそれぞれ次のような一定値に近づく。

$$L_{\infty} \rightarrow \frac{a_1 L_* + L_*'}{a_1} = \frac{\beta}{a_1} (L_* + Y_*) \dots\dots\dots (63)$$

$$Y_{\infty} \rightarrow \frac{a_1 Y_* + Y_*'}{a_1} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\mu_{\max}}{\theta} (L_* + Y_*) \dots\dots\dots (64)$$

このような状態は、一部の生態学者の指摘する「(系からの栄養分の除去がない限り)真の自浄作用はあり得

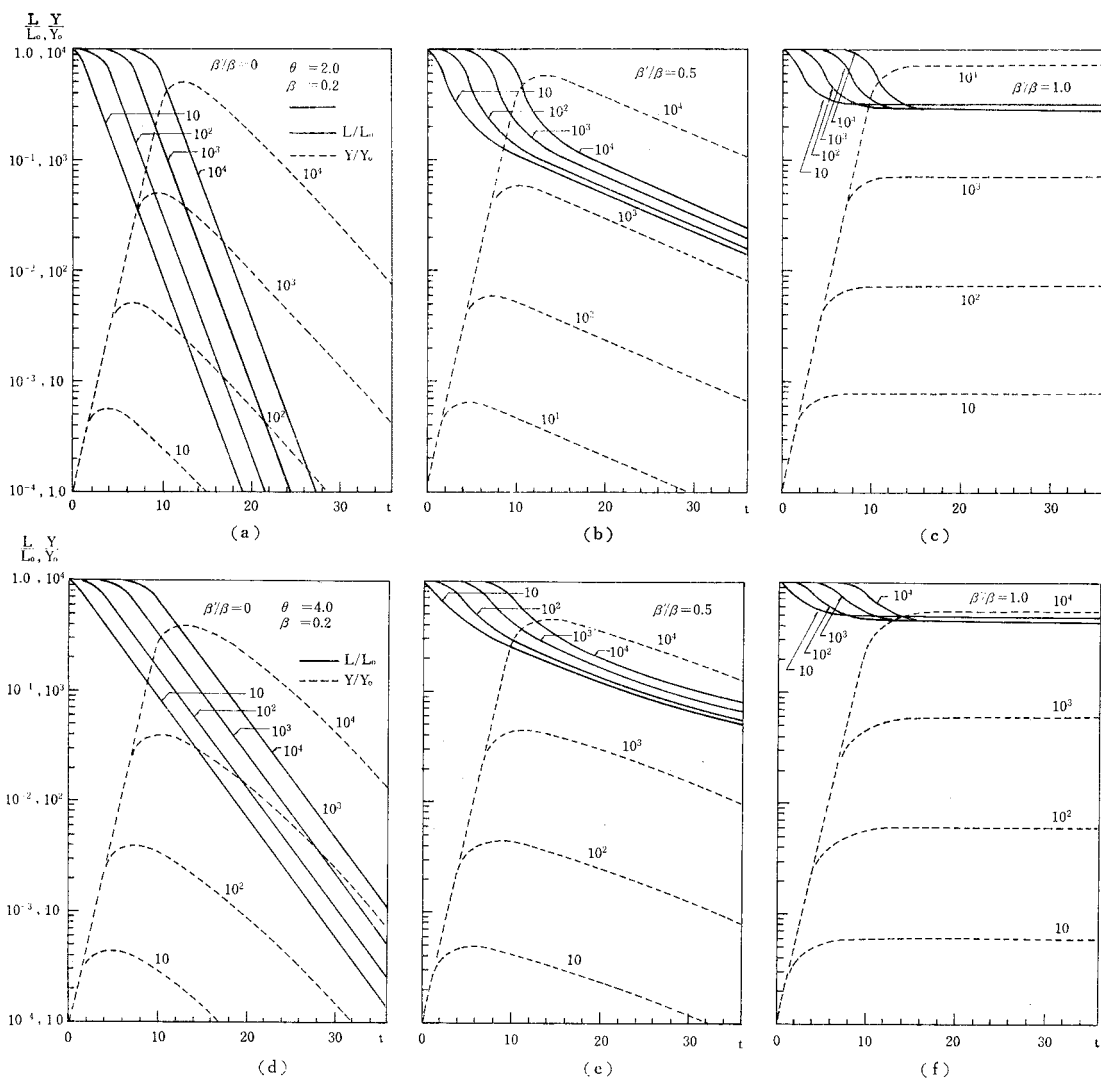


図-2 BOD および微生物量の流下時間に伴う変化；(a)(b)(c)- $\theta=2.0$ ,  $\beta=0.2$ , (d)(e)(f)- $\theta=4.0$ ,  $\beta=0.2$

ない」という主張と一致する。

(vi) 式 (44) は振動減衰解である。しかし、実際現象として、BOD( $L$ ) や細菌量 ( $Y$ ) は非負であるから、この解は適切ではないし、また、 $a_1^2 - 4a_2 < 0$  となるようなパラメーター  $\mu_{\max} \cdot \mu'_{\max} \cdot \beta \cdot \beta' \cdot m$  の組合せは非現実的である。

事実、式 (38) において  $\beta' = 0$  の場合に、 $a_2$  はもっとも大きくなりうる。このとき、

$$a_1^2 - 4a_2 = \left( \beta - \frac{\mu'_{\max}}{\theta} \right)^2 - \frac{4\mu}{\theta} m$$

である。もし、自己維持のためのエネルギー  $m$  を無視しようとすれば、

$$a_1^2 - 4a_2 = \left( \beta - \frac{\mu'_{\max}}{\theta} \right)^2 \geq 0$$

で (iii) の振動減衰のケースは起り得ないことは明らか

である。

(vii) また、溶存酸素不足量  $D$  はいわゆる oxygen sag をなすことが式 (48), (53) より示される。

#### (4) 数値的検討

引き続き、理論式中のパラメーターに種々の値を代入して具体的検討を行う。ただし、パラメーターの数が多いので、勝手に選んだのでは十分意味を読み取れなくなるし、また、計算例が多ければよいというものではない。少ないケースで、現象の特性をつかむために、理想的な、また極限的ケースとその中間のケースにパラメーターを設定する。

数値計算に現れるパラメーター数を減ずるために、変数および係数を次のように置き直す。

$$\begin{aligned} (\mu_{\max}/\mu'_{\max})L \rightarrow L : \mu_{\max}t \rightarrow t \\ \mu'/\mu'_{\max} \rightarrow \mu' : \beta'/\mu'_{\max} \rightarrow \beta' \\ \mu/\mu_{\max} \rightarrow \mu : \beta/\mu_{\max} \rightarrow \beta \end{aligned}$$

このとき、基本式 (9), (10) の式形はそのままである。ただし、式 (11), (12) の  $\mu_{\max}$ ,  $\mu'_{\max}$  は 1 と考えなければならない。

$$\mu' = f_1(L/Y) = \frac{\left(\frac{\mu_{\max}}{\mu'_{\max}}L\right)/Y}{\left(\frac{\mu_{\max}}{\mu'_{\max}}a\right) + \left(\frac{\mu_{\max}}{\mu'_{\max}}L\right)/Y}$$

ここでは、主パラメーターを次のように、

$$\begin{aligned} \beta &= 0.2 \\ \theta &= 4 \text{ or } 2 \\ m &= 0 \end{aligned}$$

に固定し、BOD の再負荷率

$$n = \beta'/\beta$$

を  $n=1$ ,  $n=0$  の両極限とその中間  $n=0.5$  の三種類に変えた。

解 (式 (19), (21)) から明らかのように、 $L$  および  $Y$  の変化は、初期値の比  $L_0/Y_0$  をパラメーターとして、無次元形  $L/L_0 \cdot Y/Y_0$  の形で表示しうる。図-2 はこのような無次元表示、図-3 は  $L_0/Y_0$  をパラメーターとする生の表示である。

図-2 (c) (f) および 図-3 (c) は、細菌の BOD への完全な再負荷のケースで理論的検討 (3) の (v); 図-2 (a) (d) および 図-3 (a) は再負荷のまったくない場合で (3) (iv) に対応している。このとき、 $L$  の対数減衰率は、式 (61) より

$$\begin{aligned} -\frac{d(\ln L)}{dt} &= K_1 = \mu'_{\max}/\theta = 1/2, \\ -\frac{d(\log_{10} L)}{dt} &= \frac{k_1}{2.3} = \frac{1}{4.6} \end{aligned}$$

一方、 $Y$  もほぼ対数減衰を示し、この率は式 (30) の  $\beta$  にほぼ等しい。

$$-\frac{d(\ln Y)}{dt} = -\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt} \cong \beta = 0.2$$

あるいは、

$$-\frac{d(\log_{10} Y)}{dt} \cong \frac{\beta}{2.3} = \frac{1}{11.5}$$

図-2 (b) および 図-3 (b) は、中間のケースである。このとき、

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.7, \quad a_2 = 0.05 \\ k_1 &= 0.62, \quad k_2 = 0.08 \end{aligned}$$

で、 $k_1 \gg k_2$  であるので  $L \cdot Y$  とも対数減衰率は  $k_2$  である。

式 (39·a, b) より明らかのように、一般には  $L$  と  $Y$  の減衰率は等しいが、 $\beta' = 0$  の場合は式 (61·a, b), 図-2 (a) (d) のように  $L$  と  $Y$  の対数減衰率は等しくならない。

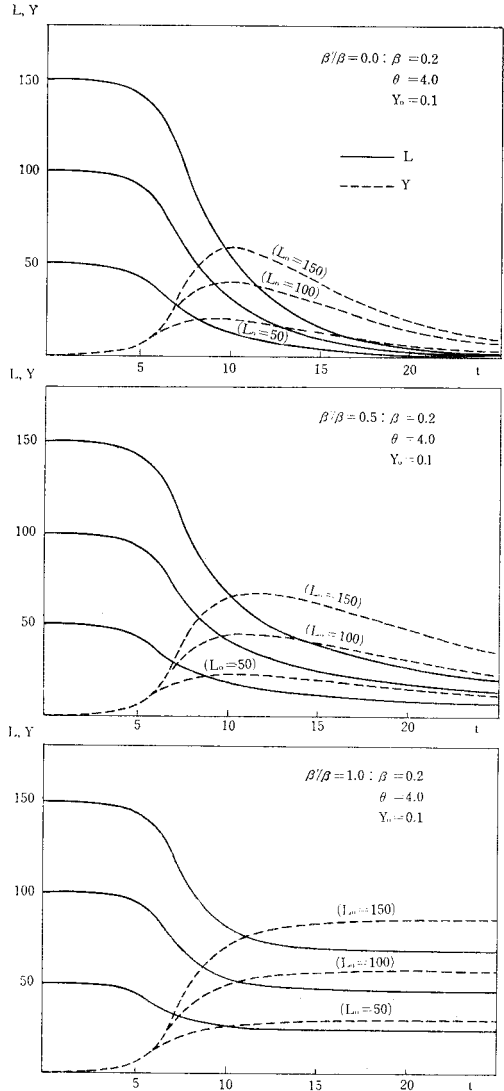


図-3 BOD( $L$ ) と微生物量 ( $Y$ ) の時間的变化 (単位は任意)

(5) 自浄係数

自浄係数もしくは脱酸素係数を

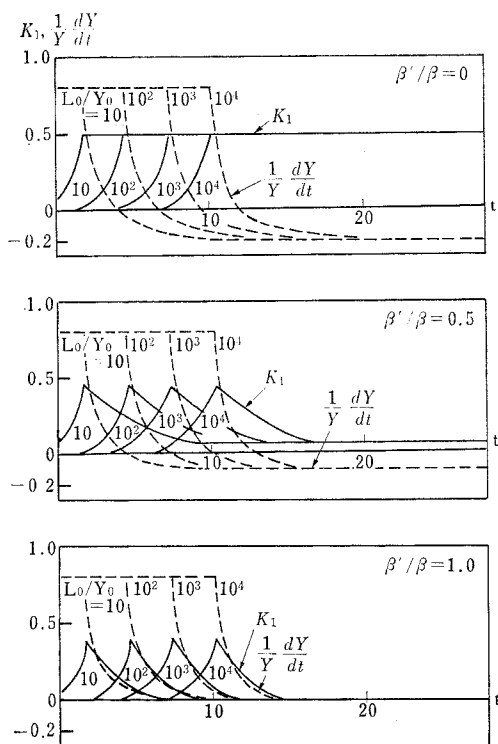
$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \\ &= (\mu' - \beta') \frac{Y}{L} \end{aligned}$$

により定義すれば、上述の理論より流下に伴う  $K_1$  の変化が求められる。結果を 図-4 に示す。同図には、細菌の実質増殖率  $\bar{\mu}$  の変化

$$\bar{\mu} = \frac{1}{Y} \frac{dY}{dt} = \mu - \beta$$

も同時に記入されている。





図—4 自浄係数と増殖速度

同図によれば、自浄係数は細菌の BOD への再負荷無しの場合 ( $\beta' = 0$ ) には比較的高い一定値 ( $\mu'_{\max}/\theta$ ) に達するが、一般には流下とともに一時増加し、すぐ減少して低い一定値になる。特に、完全再負荷のときには自浄係数は零となり、BOD と細菌量の間は平衡状態に達する。

もっとも、本論文では好気性の細菌のみを考えているので、上位捕食者や嫌気性細菌も共存する自然界では状態はもっと複雑であろう。

### 5. 結 論

微生物の活動を考慮して、河川の自浄作用を理論的に取り扱い、BOD(L)・細菌量(Y)・溶存酸素不足量(D)の流下に伴う変化の解析解を導いた。

このような解析的取り扱いが可能となったのは細菌の増殖率  $\mu$  を従来のように L の関数ではなく、L/Y の関数と考え、かつ  $\mu$  と L/Y の関係を折線で近似したことにある。そのほか、理論式の導出に用いた仮定は、従来のもと同じである。

この解析解に基づいて、河川自浄作用の一般特性を理論的に検討し、次に理論解のパラメーターに具体的数値を入れて数的に検討した。その結果、次のことが結論

された。

(1) 河川の汚濁に比べ、初期細菌量が少なければ、BOD および細菌量は指数的にそれぞれ減少および増加し、ある流下点で細菌量は極大に達する。

(2) この条件に達したのち、BOD・細菌量とも(1)とは異なる指数的減少を示す。

(3) 細菌の BOD への再負荷が大きい場合には、BOD・細菌量ともほぼ一定値となり、これらに間に平衡の関係が生じる。

(4) 自浄係数  $K_1$  は、一般に一定値ではなく、流下距離とともに BOD/細菌量の関係により変化する。したがって、BOD の減少は厳密には指数関数では表わし得ない。

(5) 河川の自浄作用には、細菌による有機物の自己生体への変換率 ( $\mu'/\mu$ ) および BOD への再負荷率、特に後者が強く関係する。したがって、好気性細菌のみならず、それを捕食する食物連鎖—原生動物・底生動物・魚類—がよく機能していることが、河川の自浄作用を有効なものとする条件である。

謝辞：本研究にあたり式の展開・数値計算については、東工大 助手 福嶋祐介氏、大学院生 歌原英明君(現・八幡製鉄(株))、学生 川端規之君の協力によるところが大きい。ここに厚く謝意を表する。

### 補遺 1 Monod 式を用いた場合

微生物の増殖式に Monod 式<sup>9)</sup>を用いれば、これは、

$$\mu = \mu_{\max} \frac{L}{K+L} \approx \begin{cases} \mu_{\max} (L \geq \theta') \\ \mu_{\max} \frac{L}{\theta'} (L < \theta') \end{cases} \dots (A-1)$$

と近似できる。その結果、微分方程式は次のように書き換えられる。

$$\begin{cases} \dot{L} = (-\mu'_{\max} + \beta')Y \\ \dot{Y} = (\mu_{\max} - \beta)Y \end{cases} (\theta' \leq L) \dots (A-2)$$

$$\begin{cases} \dot{L} = -\frac{\mu'_{\max}}{\theta'} \cdot LY + \beta'Y \\ \dot{Y} = \frac{\mu_{\max}}{\theta'} \cdot LY - \beta Y \end{cases} (0 \leq L < \theta') \dots (A-3)$$

$L \geq \theta'$  の範囲の解は、前述の解式 (21)、(22) と同じである。

$L < \theta'$  の範囲では、微分方程式は非線形となる。それゆえ、この場合には、Runge-Kutta-Gill 法により数値的に解を求めた ( $\beta = \beta' = 0$  の場合の解は文献 14))。

計算結果の例を図—A (1)~(3) に示す。再負荷率  $\beta'/\beta$  の値による BOD(L) と細菌量(Y) の定性的変化は、本文中の 図—1, 2 の場合とほぼ同一である。したがって、増殖関数が従来からの Monod 式が正しいのか、あ

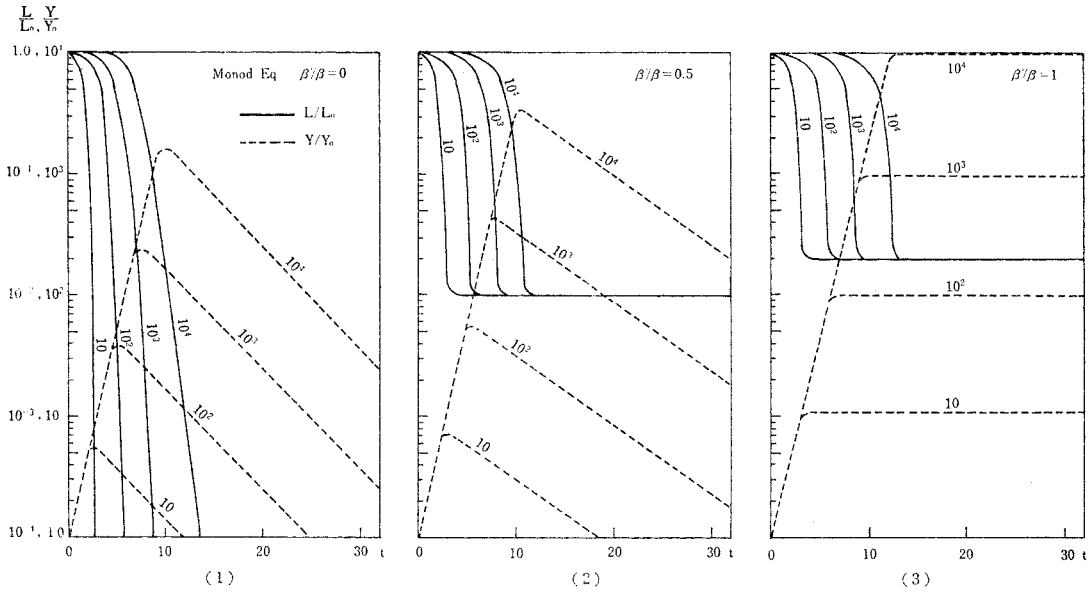


図-A Monod の増殖関数を用いた場合の L, Y の変化

るいはここで用いた式がよいのかにはかかわりなく、本論文の結果が定性的に成立すると考えられる。

なお、図-A (2) の  $\beta'/\beta=0.5$  によれば、時間の経過とともに微生物量 Y は指数的に減少し続ける一方、BOD(L) は一定値となってしまふ。これは、Monod 式では、ある L で  $\mu'(L)=\beta$  となり、

$$dL/dt = -(\mu'(L) - \beta)Y = 0$$

となるためであるが、不自然である。これについては、すでに文献 6) で指摘した。

の利用しうるエネルギーのうち、ごく一部 ( $m$ ) は自己維持のために必要である。したがって、

$$\frac{dL}{dt} = -\mu'Y \dots\dots\dots (A-7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \mu Y - mY - \beta''Y \\ &= \mu Y - (m + \beta'')Y \\ &= \mu Y - \beta Y \dots\dots\dots (A-8) \end{aligned}$$

ここに、 $\mu = r\mu'$  ( $r$ : 変換率)、 $\beta''$  はいわゆる死滅率、 $\beta = m + \beta''$ 。

補遺 2 細菌の自己維持エネルギーについて

たとえば、Aiba (会葉) ら<sup>1)</sup>によると、substrate L の分解式の中に maintenance 分が考慮されている。本論文の記号により書き直すと、

$$\frac{dL}{dt} = -\mu'Y - mY \dots\dots\dots (A-4)$$

である。

他方、Stehfest<sup>12)</sup>によると、

$$\frac{dL}{dt} = -\mu'Y \dots\dots\dots (A-5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= r\mu'Y - mY \\ &= \mu Y - mY \dots\dots\dots (A-6) \end{aligned}$$

本論文では次のように考えた。細菌による有機物の分解能  $\mu'$  は L/Y の関数である。すなわち、これまで増殖率とよんできたのは正確には  $\mu'$  の意味である。有機物の分解により得られたエネルギーは、ある変換率を掛けて、細菌増殖のエネルギーとなる。しかし、細菌はそ

補遺 3 記号

- a, a' : 細菌の増殖率式に現れるパラメーター, 式 (11), (12)
- a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub> : 式 (37), (38)
- b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub> : 式 (51), (52)
- D : 溶存酸素不足量
- D<sub>0</sub> : D の初期値, t=t<sub>0</sub>
- D\* : D の初期値, t=t\*
- f : L または D に代わる記号
- h<sub>1</sub>, h<sub>2</sub> : 係数, 式 (45)
- k<sub>1</sub>, k<sub>2</sub> : 係数, 式 (40), (41)
- K<sub>1</sub> :  $(= -\frac{1}{L} \frac{dL}{dt})$  自浄係数 (自然対数ベース)
- K<sub>2</sub> : 再曝気係数
- K<sub>x</sub> : 流下方向の拡散係数
- l : 係数の式 (43)
- L : BOD [たとえば, ML<sup>-3</sup>]

$L_0$ :  $L$  の初期値 ( $t=t_0$ ,  $L_0/Y_0 > \theta$  の場合)

$L_*$ :  $L$  の初期値 ( $t=t_*$ ,  $L_*/Y_* \leq \theta$  の場合)

$L_1$ : 初期値が  $L_0/Y_0 > \theta$  のとき  $L/Y = \theta$  となったときの  $L$ , 式 (27)

$L_\infty$ :  $t \rightarrow \infty$  のときの  $L$ , 式 (63), ただし  $\beta = \beta'$

$m$ : 細菌の自己維持に必要な栄養分摂取率  
 $t$ : 時間

$t_1$ :  $L_0/Y_0 > \theta$  の場合,  $L/Y = \theta$  となる時刻

$U$ : 断面平均流速

$x$ : 流下距離

$Y$ : 単位体積中の細菌量 [たとえば,  $ML^{-3}$ ]

$Y_0(Y_*)$ :  $Y$  の初期値

$Y_1$ : 式 (28)

$Y_\infty$ :  $t \rightarrow \infty$  のときの  $Y$ ; 式 (64); ただし  $\beta = \beta'$

$\alpha$ : 係数, 式 (22)

$\beta$ : 細菌の死滅・除去率

$\beta'$ : 死滅細菌の BOD 再負荷率

$\theta$ : 細菌増殖関数に含まれるパラメーター, 式 (13·a, b), (14·a, b)

$\mu$ : 細菌の増殖率

$\mu_{\max}$ :  $\mu$  の最大値

$\bar{\mu}$ : 細菌の実質増殖率 ( $= \mu - \beta$ )

$\mu'$ : 細菌による有機物の分解速度 (= 栄養摂取率)

$\mu'_{\max}$ :  $\mu'$  の最大値

#### 参 考 文 献

1) Aiba, S., Humphrey, A.E. and Millis, N.F.: Biochemical Engineering, Academic Press & Univ. of Tokyo Press, 1965, 1973.

- 2) Contois, D.E.: Kinetics of bacterial growth; Relationship between population density and specific growth rate of continuous cultures, J. gen. Microbiol. Vol. 21, 40-50, 1959.
- 3) 日野幹雄: 生態水理学への試論-(I)-河川の自浄作用について, (private circulation) [東工大・土木工学科研究報告第 23 号に再録], 1975.
- 4) 日野幹雄: 生態水理学への試論-(VII)-生物濃縮の Biokinetics, 東京工業大学土木工学科研究報告, 第 21 号, p. 79-83, [p. 82, eq. (13)], 1976.
- 5) Hino, M.: Eco-Hydraulics, *An Attempt*, Proc. of the XVII-Congress of IAHR, Baden-Baden, Germany, 1977.
- 6) Hino, M.: Eco-System and system graph, IIASA, Austria, 1977. (limited circulation)
- 7) Hynes, H.B.N.: The Biology of Polluted Waters, Liverpool Univ. Press, 1974.
- 8) Novotný, V.: Boundary layer effect on the course of the self-purification of small streams, Advances in Water Pollution Research, (The IV-th Int. Conf.) Prague, 39-55, 1969.
- 9) Monod, J.: The growth of bacterial cultures, Ann. Rev. Microbiol. Vol. 3, 1949.
- 10) Reich, D.J.: Relationship of polychaetes to varying dissolved oxygen concentrations, Adv. in Water Pollution Res. (The III Conf.) Vol. 3, 199-216, Munich, 1966.
- 11) 坂崎利一: 細菌生理学の初歩, 一成堂, 1965.
- 12) Stehfest, H.: Mathematical modelling of self-purification of rivers, Professional Paper, PP-77-11, IIASA, Austria, 1977.
- 13) Streeter, H.W. and Phelps, E.B.: A study of pollution and natural purification of the Ohio River, Public Health Bulletin 146, U.S.P.H.S., 1925.
- 14) 杉木昭典: 水質汚濁, 技報堂, pp. 328~329, 1974.

(1978.5.25・受付)