

単一ケーブルの三次元線形自由振動

LINEAR THEORY OF FREE VIBRATIONS OF AN INCLINED CABLE IN THREE DIMENSIONS

山口 宏 樹*・伊 藤 学**

By Hiroki YAMAGUCHI and Manabu ITO

1. はじめに

ケーブルの自由振動に関する研究は古くは 19 世紀前半、弦についての研究を含めれば 18 世紀前半にまで遡る古典的問題であるが、いまだに多くの論文が発表されている。最近の研究としては、サグ比 β が 1/8 程度までの偏平ケーブルを扱った Irvine らの研究^{1),2)}、水平ケーブルをピン結合された直棒より成るリンケージとしてモデル化し、面内固有振動を扱った West らの研究³⁾、さらには初期の静的非線形性を考慮して接線剛性を求め、有限要素法によって三次元固有振動解析を行った Henghold らの研究⁴⁾等が代表的であろう。この他にも、特にここ数年の間に数多い研究が報告されているが、これは斜張橋の長大化、係留式海洋構造物の発展等に伴い、剛性が小さく、質量の大きな長大ケーブルが単体として用いられることが多くなり、その動的挙動を把握する必要性が高まりつつあることにもよると考えられる。

West らの研究は水平ケーブルのみを扱い、しかも面内振動に限った研究であるが、サグ比の比較的小さな範囲でのモードの遷移を説明した最初のものとして評価されよう。また Henghold らの研究は有限要素法による最初の三次元解析を試み、支点間傾斜角をパラメーターに採り入れてパラメーター解析を行っているもので、この研究でケーブルの固有振動性状についてはほとんど明確になった感もある。しかし、パラメーター解析において多少不備な点があるように思われる。一方、Irvine らの研究は、初期形状を放物線で近似した偏平ケーブルをあくまで連続体として扱い、定式化したもので、面内振動と面外振動とが連成しないことを示し、パラメーター解

析も比較的簡単になることなど、実用的な利点は多い。しかし、傾斜ケーブルの場合にも座標変換を用いて水平ケーブルと同等に扱う²⁾ところに疑問が残る。

ところで、固有振動解析は微小振動の仮定のもとに存在する線形自由振動を扱うものであるが、サグ比の大きな、剛性の小さいケーブルにおいてはその非線形挙動が問題となり、ケーブルの動特性を議論するには動的非線形特性の把握が不可欠である。しかし、そのようなサグ比の大きなケーブルについても、固有振動性状を明らかにしてこそ非線形挙動が調べられるのであって、サグ比の小さなものから大きなものまで、つまり弦に近い場合から極端に弛緩した状態のものまでにわたって、固有振動性状を把握しておくことはそれなりに意味をもつものと思われる。

そこでここでは、完全可撓性、伸張性を仮定したケーブルについて、連続体として振動を扱う場合の厳密な定式化を行ったのちに、微小変位の仮定により非線形項を無視して線形化した支配方程式を求め、Galerkin 法を用いて固有振動解析を行う。また、この解析法を用いて 3 つのパラメーター、つまり、2 個の形状パラメーター（サグ比、傾斜角）、および 1 個の材料パラメーター（伝播速度比）に関するパラメーター解析を行い、考察を加えた。ここでの扱いは Irvine らのそれより厳密であり、West ら、Henghold らのそれより計算が簡単で、それらのもつ不備な点を補うべく考察を加えた。

2. 基礎方程式

ケーブルの曲げ剛性は無視し、断面一定、かつ長さに沿って等分布質量であるものとする。

(1) ひずみの定義式

任意時刻におけるケーブルの伸びひずみ ϵ （無応力状態基準）は次式で定義される。

* 学生会員 工修 東京大学大学院博士課程

** 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

† 図-2 における f/l であって、正式にはサグ・スパン比というべきであるが、本論文ではわが国における慣用に従い、サグ比と称する。

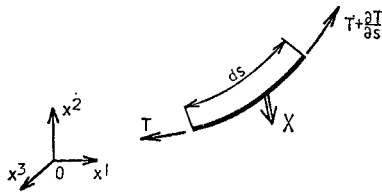


図-1 ケーブル要素

$$\epsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 s は任意時刻のケーブルに沿う曲線座標、 s_0 は無応力状態におけるケーブルに沿う曲線座標である。式(1)で s_0 の代わりに初期状態(静的つり合い状態)でのケーブルに沿う曲線座標 s_e を考えれば、初期状態基準ひずみ ϵ^* が同様に定義される。さらに初期ひずみ ϵ_e を導入すれば次式を得る。

$$\epsilon = \epsilon^*(1 + \epsilon_e) + \epsilon_e \dots\dots\dots (2)$$

また、Green のひずみテンソル成分 e は次式で定義される。

$$e = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2 ds_0^2} = \frac{1}{2} \{ (1 + \epsilon)^2 - 1 \} \dots\dots\dots (3)$$

したがって、微小ひずみを仮定すれば、伸びひずみ ϵ とひずみテンソル成分 e とは近似的に等しくなる。

(2) 構成方程式

完全弾性体を仮定し、次の構成方程式を用いる。

$$T = EA\epsilon \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 T は任意時刻のケーブル張力、 EA はケーブルの伸び剛性である。

(3) 運動方程式

図-1 のように空間固定デカルト座標 $\{x^1, x^2, x^3\}$ を考えれば、任意時刻のケーブル諸点の空間位置ベクトル \mathbf{x} は、その時刻のケーブルに沿う曲線座標 s によって確定される。ケーブルの微小要素 ds を考えれば、Euler 表示の運動方程式が次のように得られる。

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x^i}{\partial s} \right) + X^i = \rho \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} \quad i=1, 2, 3 \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 X^i, ρ はそれぞれ、 s に沿う単位長さ当りの外力成分、およびケーブル質量である。

運動中のケーブル諸点の空間位置 $\{x^i\}$ は埋込座標 s_0 と時刻 t の関数であることを考慮して式(5)を書き直せば、Lagrange 表示の運動方程式が求まる。

$$\frac{\partial}{\partial s_0} \left(\frac{T}{1 + \epsilon} \frac{\partial x^i}{\partial s_0} \right) - \rho_0 \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} + (1 + \epsilon) X^i + X_e^i = 0 \quad i=1, 2, 3 \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 ρ_0 は s_0 に沿う単位長さ当りのケーブル質量、 X_e^i は初期状態に作用する静的外力成分である。

式(6)を静的つり合い位置 $\{x_e^i\}$ からの動の変位 $\{u^i\}$ に関する運動方程式に変換し、任意時刻のケーブル張力 T を初期張力 T_e と変動張力 ΔT とで表わして静的つり合い式を考慮すれば、次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial s_0} \left\{ \frac{T_e + \Delta T}{1 + \epsilon} \left(\frac{dx_e^i}{ds_0} + \frac{\partial u^i}{\partial s_0} \right) - T_e \frac{dx_e^i}{ds_e} \right\} - \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} + (1 + \epsilon) X^i = 0 \quad i=1, 2, 3 \dots\dots\dots (7)$$

変動張力 ΔT は、任意時刻のケーブル張力 T を考えて式(2)、(4)を用いれば、

$$T = T_e + \Delta T = EA \{ \epsilon^* (1 + \epsilon_e) + \epsilon_e \} = EA \epsilon^* (1 + \epsilon_e) + T_e \dots\dots\dots (8)$$

となるから、

$$\Delta T = EA \epsilon^* (1 + \epsilon_e) \dots\dots\dots (9)$$

となる。式(9)を式(7)に代入し、微小ひずみ ($\epsilon_e \ll 1, \epsilon^* \ll 1$) を仮定すれば、

$$\frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ EA \epsilon^* \frac{dx_e^i}{ds_e} + T_e \frac{\partial u^i}{\partial s_e} \right\} - \rho_0 \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} + X^i = - \frac{\partial}{\partial s_e} \left(EA \epsilon^* \frac{\partial u^i}{\partial s_e} \right) \quad i=1, 2, 3 \dots\dots\dots (10)$$

を得る。ただし、ここでは、初期ひずみの定義から導かれる関係式、 $ds_e = (1 + \epsilon_e) ds_0 \doteq ds_0$ を用いた。式(10)において、右辺が運動方程式における幾何学的非線形項で、物理的には変動張力の動の変形による成分を意味する。

(4) ひずみ-変位関係式

微小ひずみの仮定のもとにひずみ-変位関係式を求めると次のようになる。

$$\epsilon^* \doteq e^* = \frac{ds^2 - ds_e^2}{2 ds_e^2} = \frac{dx_e^j}{ds_e} \frac{\partial u^j}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^j}{\partial s_e} \frac{\partial u^j}{\partial s_e} \right) \quad (j: \text{ダミー}) \dots\dots\dots (11)$$

式(11)の右辺第2項が、ひずみ-変位関係における幾何学的非線形項である。

3. 単一ケーブル自由振動の支配方程式

図-2 に示すように、ケーブルは初期状態において $x-y$ 面内(鉛直面内)に静止しているものとし、自由振動を考えれば、微小ひずみを仮定した運動方程式(10)は次のように書き直される。

$$\frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ EA \epsilon^* \frac{dx_e}{ds_e} + T_e \frac{\partial u}{\partial s_e} \right\} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial s_e} \left(EA \epsilon^* \frac{\partial u}{\partial s_e} \right) \dots\dots\dots (12 \cdot a)$$

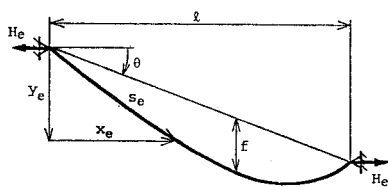


図-2 単一ケーブル

$$\frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ EA\epsilon^* \frac{dy_e}{ds_e} + T_e \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial s_e} \left(EA\epsilon^* \frac{\partial w}{\partial s_e} \right) \dots\dots\dots (12 \cdot b)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ T_e \frac{\partial w}{\partial s_e} \right\} - \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 x_e'^2 \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + c_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right\} = c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial u}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(x_e' + \frac{\partial u}{\partial s_e} \right) \right] \dots\dots\dots (13 \cdot a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left\{ \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} + c_1^2 y_e'^2 \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + c_1^2 x_e' y_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} \right\} = c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial v}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \left(y_e' + \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \right] \dots\dots\dots (13 \cdot b)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial s_e} \left(c_0^2 \frac{1}{x_e'} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right) = c_1^2 \frac{\partial}{\partial s_e} \left[\left(x_e' \frac{\partial u}{\partial s_e} + y_e' \frac{\partial v}{\partial s_e} \right) \frac{\partial w}{\partial s_e} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s_e} \right)^2 \right\} \frac{\partial w}{\partial s_e} \right] \dots\dots\dots (13 \cdot c)$$

ここで、 $c_0 (= \sqrt{H_e / \rho_0})$ 、 $c_1 (= \sqrt{EA / \rho_0})$ はそれぞれ、弦の横波、縦波の伝播速度、' は s_e に関する常微分を意味する。また、各式の右辺は、運動方程式ならびにひずみ-変位関係式の見線形性に基づく幾何学的非線形項である。

式 (13・a, b, c) より、線形振動として扱えるような微小振動の範囲内では、各式の右辺が無視でき、ケーブル面内の水平振動 u (式 (13・a)) と鉛直振動 v (式 (13・b)) とは連成するものの、ケーブル面内振動 u, v (式 (13・a, b)) とケーブル面外振動 w (式 (13・c)) とは完全に分離されることがわかる。

4. 固有振動解析

上述のように、微小変位を仮定した線形振動として固

$$= - \frac{\partial}{\partial s_e} \left(EA\epsilon^* \frac{\partial w}{\partial s_e} \right) \dots\dots\dots (12 \cdot c)$$

ここで、 $\{x_e, y_e, 0\}$ は初期形状を表わし、 u はケーブル面内水平方向変位、 v はケーブル面内鉛直方向変位、 w はケーブル面外変位 (ケーブル面直角方向変位) である。つまり、式 (12・a, b) がケーブルの面内運動を、式 (12・c) が面外運動を表わす運動方程式である。

式 (12・a, b, c) にひずみ-変位関係式 (11) を代入し、初期水平張力 $H_e (= \text{一定})$ を用いれば、単一ケーブルの自由振動に関する、変位表示の支配方程式が次のように求まる。

有振動を考える場合には、面内振動と面外振動とを独立に扱えばよい。

(1) 面内固有振動

面内固有振動の解を、境界条件を考慮して、次のような級数に展開する。

$$u(s_e, t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_x^i(t) \sin \frac{i\pi s_e}{l^*} \dots\dots\dots (14 \cdot a)$$

$$v(s_e, t) = \sum_{i=1}^{\infty} p_y^i(t) \sin \frac{i\pi s_e}{l^*} \dots\dots\dots (14 \cdot b)$$

ここで、 p_x^i, p_y^i は x, y 方向の一般化変位、 l^* は初期のケーブル長である。

面内自由振動の支配方程式 (13・a, b) で非線形項を無視し、式 (14・a, b) を代入して Galerkin 法を適用する。さらに適当な無次元化を行えば、次式を得る。

$$\frac{1}{\frac{\pi^2}{l^2} c_0^2 \cos \theta} \ddot{p}_x^j + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{2i^2}{\sigma_l^3 \cos \theta} (I_1^* + k^2 I_2^*) - \frac{2i}{\pi \sigma_l^2 \cos \theta} (-I_3^* + 2k^2 I_4^*) \right\} p_x^i + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{2i^2}{\sigma_l^3 \cos \theta} k^2 I_5^* - \frac{2i}{\pi \sigma_l^2 \cos \theta} k^2 (I_6^* + I_7^*) \right\} p_y^i = 0 \dots\dots\dots (15 \cdot a)$$

$$\frac{1}{\frac{\pi^2}{l^2} c_0^2 \cos \theta} \ddot{p}_y^j + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{2i^2}{\sigma_l^3 \cos \theta} (I_1^* + k^2 I_8^*) - \frac{2i}{\pi \sigma_l^2 \cos \theta} (-I_3^* + 2k^2 I_9^*) \right\} p_y^i + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{2i^2}{\sigma_l^3 \cos \theta} k^2 I_5^* - \frac{2i}{\pi \sigma_l^2 \cos \theta} k^2 (I_6^* + I_7^*) \right\} p_x^i = 0 \dots\dots\dots (15 \cdot b)$$

ここで、 l はスパン長、 θ は支点間傾斜角、 σ_l は無次元ケーブル長 ($=l^*/l$)、 k は縦波-横波伝播速度比 ($=c_l/c_0$) で、 \cdot は時間に関する 2 階常微分を意味する。また $I_1^* \sim I_9^*$ は Galerkin 法による積分項で、初期形状に依存する無次元定数 (i, j の関数) である。

式 (15・a, b) において級数を有限項で打ち切り、マトリックス表示すれば、

$$\frac{1}{\frac{\pi^2}{l^2} c_0^2 \cos \theta} [I] \{\dot{p}\} + [A] \{p\} = \{0\} \dots\dots\dots(16)$$

ここで、 $\{p\}$ は一般化変位ベクトル、 $[I]$ は単位行列、 $[A]$ は係数行列である。

式 (16) に $\{p\} = \{\phi\} \exp(i\omega t)$ (i : 虚数単位) を代入すれば、

$$\left[[A] - \frac{\omega^2}{\frac{\pi^2}{l^2} c_0^2 \cos \theta} [I] \right] \{\phi\} = \{0\} \dots\dots\dots(17)$$

したがって、 $[A]$ の固有値として無次元固有振動数 ω^{*2} が求まる。

$$\omega^{*2} = \frac{\omega^2}{\frac{\pi^2}{l^2} c_0^2 \cos \theta} \dots\dots\dots(18)$$

傾斜した弦の n 次固有振動数は $\frac{n\pi}{l} c_0 \sqrt{\cos \theta}$ であるので、式 (18) で定義されるケーブルの無次元固有振動数は、弦の基本振動数で無次元化されていることになる。

なお、長さ l^* の弦の n 次基準関数は $\sin \frac{n\pi s_e}{l^*}$ であるから、式 (14・a, b) はケーブルの固有振動を弦の基準関数で展開することを意味している。したがって、ここで示した解析法は、弦に近い偏平ケーブルの場合、級数の項数が少なくとも、低次固有振動が比較的精度よく求まるという特徴を有する。

(2) 面外固有振動

面外固有振動の解を、やはり弦の基準関数で展開する。

$$w(s_e, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q^i(t) \sin \frac{i\pi s_e}{l^*} \dots\dots\dots(19)$$

ここで、 q^i は面外 z 方向の一般化変位である。

面外自由振動の支配方程式 (13・c) で非線形項を無視し、式 (19) を代入して Galerkin 法を適用する。さらに前と同様の無次元化を行えば、次式を得る。

$$\frac{1}{\frac{\pi^2}{l^2} c_0^2 \cos \theta} \ddot{q}^j + \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{2i^2}{\sigma_l^2 \cos \theta} I_1^* + \frac{2i}{\pi \sigma_l^2 \cos \theta} I_3^* \right\} q^i = 0 \dots\dots\dots(20)$$

級数を有限項で打ち切り、マトリックス表示すれば、

$$\frac{1}{\frac{\pi^2}{l^2} c_0^2 \cos \theta} [I] \{\ddot{q}\} + [B] \{q\} = \{0\} \dots\dots\dots(21)$$

ここで、 $\{q\}$ は面外一般化変位ベクトル、 $[B]$ は係数行列である。したがって、 $[B]$ の固有値として面外無次元固有振動数 ω^{*2} が求まる。

(3) 無次元パラメーター

一般化変位に関する無次元化された支配方程式 (15・a, b)、および (20) をみると、その係数は伝播速度比 k と無次元ケーブル長 σ_l 、および無次元定数 $I_1^* \sim I_9^*$ である。 $\sigma_l, I_1^* \sim I_9^*$ は初期形状により決定されるもので、補遺 A に示すようにサグ比 $r (=f/l)$ 、および傾斜角 θ にも依存する。したがって、ケーブルの固有振動特性を支配する無次元パラメーターは、形状パラメーターとしてのサグ比 r 、傾斜角 θ と、材料パラメーターとしての伝播速度比 k ということになる。

無次元パラメーターの選定にはこれまでにいくつか提案がなされている。Henghold ら⁴⁾ はケーブルの固有振動特性を支配するものとして 3 個の無次元パラメーター、サグ比、傾斜角、伸び剛性・重量比を採っている。また伊藤ら⁵⁾ はケーブルの換算弾性定数を決めるパラメーターとして水平張力・重量比、傾斜角、水平張力・伸び剛性比を採っている。しかし、本質的にはどれも 2 個の形状パラメーター、1 個の材料パラメーターを採っていることに変わりはない。

Henghold らは上述のパラメーターにつき、かなり詳しく解析を行っているが、材料パラメーターの効果、傾斜角の影響、モード形についての考察等に、後に述べるような不備があるように思われる。そこで、ここでは支配方程式から決定された無次元パラメーターについて解析し、より詳しい考察を加えた。

なお、計算にはすべて 10 項までの級数近似を用いているが、近似の精度は特にサグ比 r に依存し、 $r=1.0$ 程度より大きなサグを有するケーブルでは、その高次振動において誤差が大きくなる。級数項数による近似の精度については補遺 B に示している。

5. 解析結果および考察

(1) サグ比の影響

$k^2=900, \theta=0^\circ$ の場合、サグ比に対する面内、面外振動の無次元固有振動数の変化をみたもの (以下、固有振動数曲線と呼ぶ) が図-3 である。横軸がサグ比で、対数目盛を採っている。図-3 により、サグ比が小さい範囲での各次 (n 次) の固有振動数は、面内、面外ともに弦のそれ、つまり n にほぼ一致して一定値をとっている

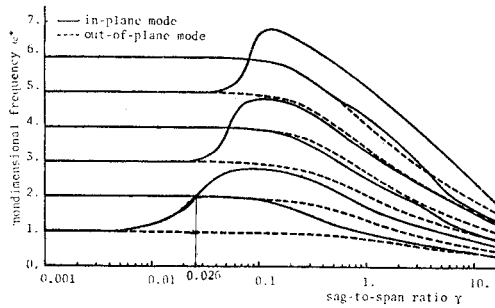


図-3 サグ比に対する固有振動数の変化
($\theta=0^\circ, k^2=900$)

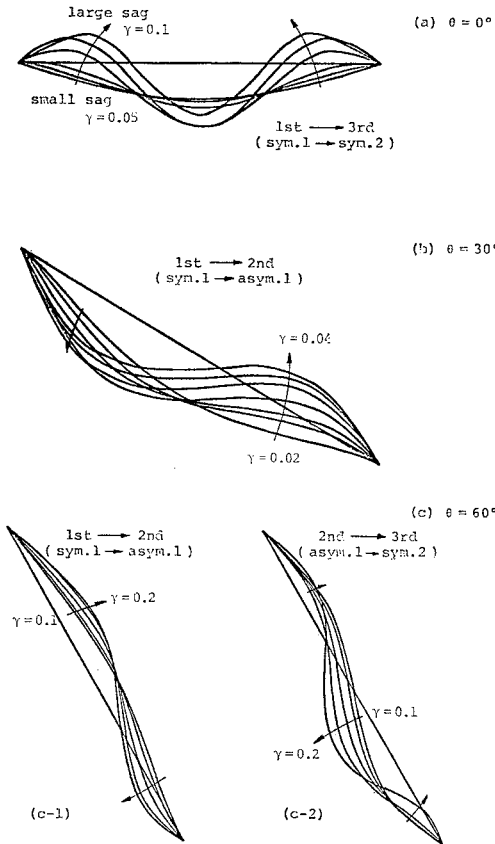


図-4 モード形の遷移

ことがわかる。特に偶数次(逆対称モード)の面内振動、および面外振動については、比較的大きなサグ比に対してもその値を保っている。

奇数次の面内モード(対称モード)についてはあるサグ比の範囲で1段階高次のモードに遷移し、それにつれて固有振動数も増加する。たとえば図-3で、 $r=0.005 \sim 0.08$ の範囲において最低次固有振動数が三次のそれに近づいているが、それがモード遷移領域であって、このときのモード形は図-4(a)のように一次モードから三次モード(対称一次→対称二次)へと遷移している。

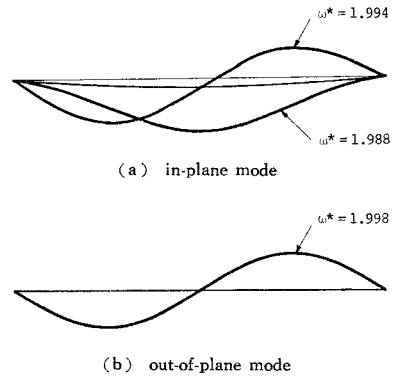


図-5 同一固有振動数に対する振動モード
($\gamma=0.026$)

したがってこのような領域では、奇数次面内モードと偶数次面内モードの固有振動数曲線は交点を持ち、固有振動数は同一で、振動モードが異なるような面内固有振動が発生するサグ比が存在する。また、そのときの面外モードも同じ固有振動数をとるので、結局、同一振動数に対して3つの固有モード(面内2, 面外1)が存在することになる。このことは Westらにより指摘され、Henghold らによっても確認されている。一例として図-3での最低次の交点($r=0.026$)近傍における3つの固有モードを図-5に示す。

サグ比が大きくなると、面内振動、面外振動のどのモードに対しても、固有振動数は単調に減少する。また、面内逆対称モードはスウェイモード(sway mode)となり、面外方向のスウェイモードとともに吊り下げられた弦の固有振動に近づく。図-3においてサグ比の増大に伴い、実線(面内モード)と破線(面外モード)とが漸近しているものがそのスウェイモードに相当する。実際、極端に弛緩したケーブルの固有モード、固有振動数を計算すると、図-6(a), (b)に示すように吊り下げられた弦のそれに近い。図-6は一例として $r=16.7$ の場合を示したものであるが、吊り下げられた弦の固有振動数はそれと対応するように無次元化しており(補遺C)、両者の最低次固有振動数はほぼ一致する。

以上から、ここで示した比較的簡単な解析法でも、直線軸力部材に近いケーブルから極端に弛緩した状態のケーブルまでの固有振動を扱いうるといえる。

(2) 傾斜角の影響

$\theta=30^\circ$, および $\theta=60^\circ$ の場合の固有振動数曲線を示したものが図-7, 8である。

水平ケーブル($\theta=0^\circ$)の場合と特に異なる点はモード形の遷移である。つまり、 $\theta=0^\circ$ では奇数次モード(対称モード)だけが一次高い奇数次モードに移る(図-3, 4(a))のであったが、傾斜ケーブルの場合には奇数次

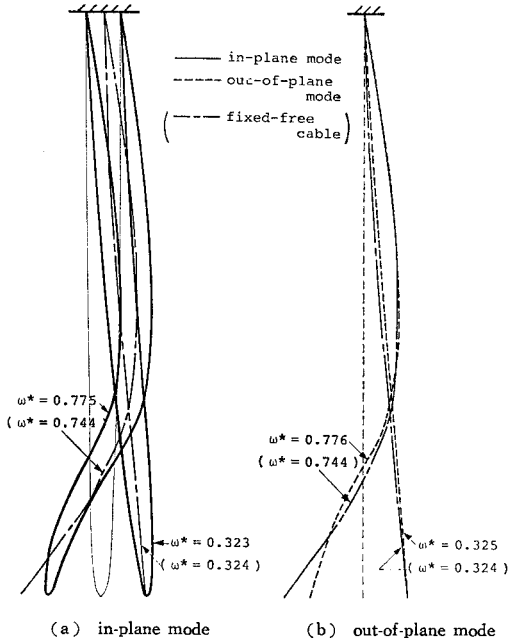


図-6 極端に弛緩したケーブルのスウェイモード ($\gamma=16.7$)

モードは一次高い偶数次モードへ、偶数次モードはさらに一次高い奇数次モードへと遷移する(図-7, 8 および図-4 (b), (c)). この特徴は θ が大きいほど顕著である。また、その遷移領域は、 θ の増加に伴いサグ比の大きい方向へ移動する傾向がみられる。さらに面外モードに着目すれば、固有振動数は θ が大きくなるほど、サグ比の比較的大きな範囲まで一定値をとり、それ以後単調に減少することがわかる。

傾斜ケーブルのモード形の遷移が水平ケーブルのそれと異なるということについて Henghold ら⁹⁾は触れていないが、このことは、傾斜ケーブルでは自重の影響が非対称となることに基づく本質的な違いと考えられる。したがって、Irvine²⁾による傾斜ケーブルの扱い、つまり水平ケーブルの拡張として傾斜ケーブルを扱う方法では本質的な特性は把握できないと思われる。しかし、自重の影響の少ない偏平ケーブルについては、その誤差は少ないであろう。

(3) 材料パラメーターの影響

面外振動の一般化座標に関する支配方程式 (20) をみると材料パラメーター (伝播速度比) k が入っていない。つまり、そのもとの運動方程式 (13・c) の線形項中に縦波の伝播速度 c_l が現われないのであって、面外振動では縦波は伝播しない(あくまで線形振動についてである)。このことは物理的には、面外振動は張力変化を伴わず、形状変化だけによる振動であるということを示

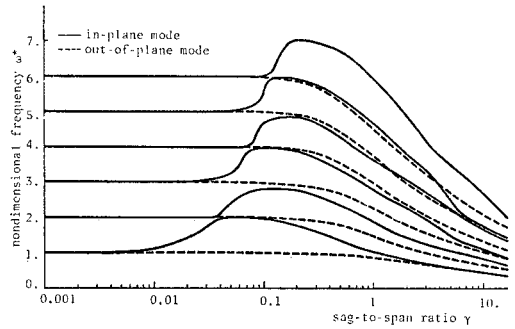


図-7 サグ比に対する固有振動数の変化 ($\theta=30^\circ, k^2=900$)

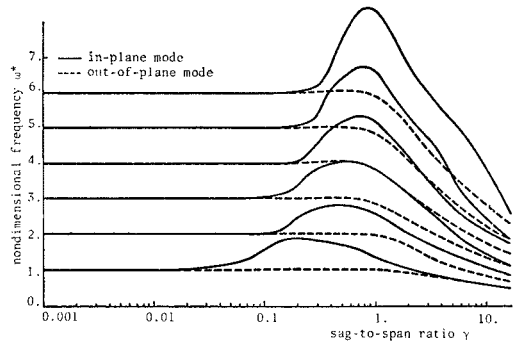


図-8 サグ比に対する固有振動数の変化 ($\theta=60^\circ, k^2=900$)

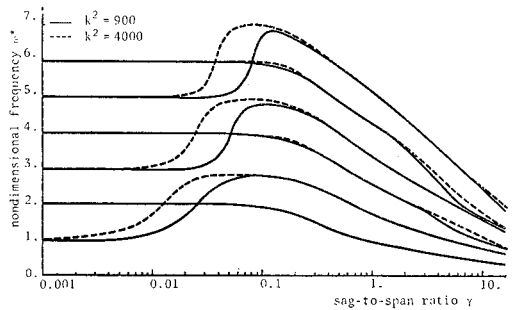


図-9 サグ比に対する固有振動数の変化 ($\theta=0^\circ$, 面内振動)

味している。したがって、面外振動の固有振動数、固有モードは k によらず一定となる。

一方、面内振動について $k^2=900, k^2=4000$ の場合の固有振動数曲線を示したものが図-9である。これを見ると、材料パラメーター k の効果は奇数次モードの遷移領域を移動させる点にあるということがわかる。つまり、 k の増加に伴い、遷移領域はサグ比の小さな方向に移動する。また、面内偶数次モードについては k の影響がほとんどみられないが、これは偶数次モードでは面外モードと同様、張力変化を伴わず、形状変化だけの振動であることを表わしている。

Henghold らは「伸び剛性-重量比 (材料パラメータ

一)の影響はどのモードに対してもかなり小さく、サグ比が同一であれば無次元固有振動数はほぼ一定値をとる」と結論している。しかし、図-9 に示されるように、モード形の遷移領域内のサグ比に対しては、面内奇数次モードへの材料パラメーターの影響はかなり大きい。これは Henghold らがモード遷移領域外のサグ比 ($r \doteq 0.12, 0.27$) についてしか、伸び剛性-重量比の影響を検討していないことによるものと思われる。

6. 結 論

完全可撓性、伸張性を仮定してケーブル振動の厳密な定式化を行い、初期において鉛直面内に静止した単一ケーブル自由振動の支配方程式を示した。その結果、面内振動と面外振動とはその幾何学的非線形項を介して連成するのであって、線形自由振動を考える限り独立に扱えることがわかった。

また、固有振動解析においては、試行関数として弦の基準関数で展開した級数を用い、Galerkin 法による近似解法を示してパラメーター解析を行った。その結果、ここで示した解析法で、広範囲のサグ比を有する単一ケーブルの固有振動性状を比較的簡単に把握し得ることが示せた。

さらに、パラメーター解析から、次のような単一ケーブルの固有振動特性が明らかにされた。

(1) 水平ケーブルは、奇数次面内モードのモード形が1段階高次のモードに遷移するようなサグ比の領域を有する。したがって、同一振動数に対して3つの固有モード(面内2, 面外1)が存在するようなサグ比がある(このことは既往の理論からも知られる)。

(2) 傾斜ケーブルの面内振動モードの様子は、水平ケーブルのそれと本質的に異なり、奇数次モードは一次高い偶数次モードへ、偶数次モードはさらに一次高い奇数次モードへと遷移する。

(3) 材料パラメーターの効果は、面内振動モードの遷移領域を移動させる点にある。

(4) 面外モードは張力変化を伴わず、形状変化のみの振動であって、材料パラメーターには依存しない。

補遺 A 単一ケーブルの初期形状

ケーブルの静的つり合い形状はケーブルに沿う長さ方向に等分布質量を考えればカタナリーとなる⁹⁾。その方程式を無次元化した形で表わせば、

$$\eta = -\frac{1}{8r^*} \cosh(8r^*(1-\xi) + a) + \tan \theta + \frac{1}{8r^*} \cosh a \dots\dots\dots (A-1)$$

$$a = \sinh^{-1} \left(\frac{4r^* \tan \theta}{\sinh 4r^*} \right) - 4r^* \dots\dots\dots (A-2)$$

ただし、 ξ, η は x_e, y_e をスパン長 l で無次元化したものであり、 r^* は形状を放物線で近似した場合のサグ比に相当する無次元パラメーターである。つまり、

$$\xi = \frac{x_e}{l} \dots\dots\dots (A-3)$$

$$\eta = \frac{y_e}{l} \dots\dots\dots (A-4)$$

$$r^* = \frac{\rho_e g l}{8 H_e} \dots\dots\dots (A-5)$$

真のサグ比 r は、ケーブルの弦からの鉛直距離が最大となるものをサグとして用いれば、

$$r = (\eta - \xi \tan \theta)_{\xi=1} + \{a - \sinh^{-1}(\frac{\tan \theta}{8r^*})\}_{8r^*} \dots (A-6)$$

また、ケーブルに沿う曲線座標 s_e を無次元化した $\sigma (=s_e/l)$ はその定義から、

$$\sigma = \int_0^\xi \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} d\xi = -\frac{1}{8r^*} \sinh \cdot (8r^*(1-\xi) + a) + \frac{1}{8r^*} \sinh(8r^* + a) \dots\dots\dots (A-7)$$

となるから、無次元ケーブル長 σ_l は、

$$\sigma_l = \sigma_{\xi=1} = \frac{1}{4r^*} \cosh(4r^* + a) \sinh 4r^* \dots\dots\dots (A-8)$$

となる。

以上より、単一ケーブルの初期形状は r^* (重量・水平張力比) と θ にのみ依存することがわかる。この2つのパラメーター r^*, θ の採り方は伊藤ら⁹⁾のそれと同じであり、形状等がこの2つの無次元パラメーターで explicit に表わせるために計算上は扱いやすい。しかし形状パラメーターとして考えるには、 r^* の代わりに真のサグ比 r を用いたほうが理解しやすいと思われるので、ここでは計算には r^*, θ を与え、結果の整理に r, θ を用いることにした。

補遺 B 級数近似の項数による固有振動数の収束性

級数近似の項数による収束性は、各パラメーター、特にサグ比 r に依存する。図-10~12 は3つの異なるサグ比を有するケーブルの無次元固有振動数の収束状況を示したものである。これを見ると、サグ比が小さな場合(図-10)には、面内、面外振動ともにどの振動次数に対しても10項で十分な近似が得られているが、サグ比が大きくなると(図-11, 12)、10項近似では高次振動で誤差が大きくなっていることがわかる。低次の二、三の固有振動数に限れば、サグ比に無関係に、面内、面外振動とも収束が速く、最低次振動では5項近似でも精度

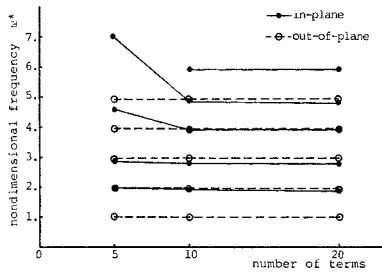


図-10 級数項数による固有振動数の収束性 (γ=0.101)

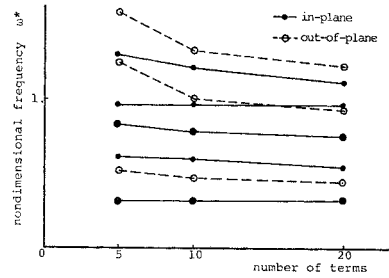


図-12 級数項数による固有振動数の収束性 (γ=16.7)

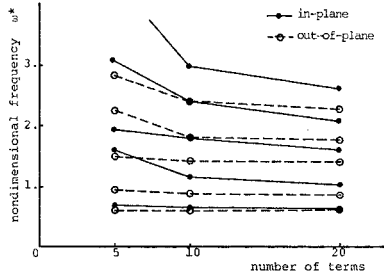


図-11 級数項数による固有振動数の収束性 (γ=3.29)

の良い値が得られている。また、面内振動と面外振動とでは後者のほうが収束性がよいことがいえる。

補遺 C 吊り下げられた弦の固有振動数

吊り下げられた弦の固有振動数 ω は次のようになる⁷⁾。

$$2\omega\sqrt{\frac{l'}{g}} = 2.405, 5.520, \dots \dots \dots (C-1)$$

ここで、l' は弦の長さである。

これをサグ比 r≐16.7 のケーブルの場合に対応させて無次元化すると、つまり、ω をスパン l の弦の固有振動数 (π/l) √(H_e/ρ₀)cos θ で無次元化すると、

$$2\omega\sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\omega^* \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{H_e}{\rho_0 g} l' \cos \theta}$$

$$\doteq \omega^* \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{8r^*} \cos \theta} \quad \left(\because \frac{l'}{l} \doteq \gamma \right)$$

..... (C-2)

したがって

$$\omega_1^* = 2.405 \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2r^*}{r \cos \theta}} = 0.324$$

$$\omega_2^* = 5.520 \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2r^*}{r \cos \theta}} = 0.744$$

⋮

..... (C-3)

となる。

参考文献

- 1) Irvine, H.M. and T.K. Caughey : The linear theory of free vibrations of a suspended cable, Proc. R. Soc. (London), A341, pp. 299~315, 1974.
- 2) Irvine, H.M. : Free vibrations of inclined cables, Proc. of ASCE, Vol. 104, No. ST 2, Technical Notes, pp. 343~347, 1978.
- 3) West, H.H., L.F. Geschwindner and J.E. Suhoski : Natural vibrations of suspension cables, Proc. of ASCE, Vol. 101, No. ST 11, pp. 2277~2291, 1975.
- 4) Henghold, W.M., J.J. Russell and J.D. Morgan, III : Free vibrations of cable in three dimensions, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. ST 5, pp. 1127~1136, 1977.
- 5) Ito, M. and Y. Maeda : Discussion to Commentary on the tentative recommendations for cable-stayed bridge structures, Proc. of ASCE, Vol. 104, No. ST 2, pp. 372~374, 1978.
- 6) Dean, D.L. : Static and dynamic analysis of guy cables, Proc. of ASCE, Vol. 87, No. ST 1, pp. 1~21, 1961.
- 7) 坪井忠二 : 振動論 (復刻版), 現代工学社, pp. 425~428, 1973.

(1978.7.11・受付)