

単一走行車両による道路橋の二乗平均応答解析

MEAN SQUARE RESPONSE ANALYSIS OF HIGHWAY
BRIDGES UNDER A SINGLE MOVING VEHICLE

岡 林 隆 敏*

By Takatoshi OKABAYASHI

1. はじめに

走行車両による道路橋の動的応答は、車両の諸特性、車間距離、さらに、路面凹凸および伸縮継手による車両の接地力の変化等によって、再現性のない不規則な形状を呈する。そこで、橋梁に作用する荷重を確率・統計的観点から分析し、この観点から橋梁の動的応答を検討する研究が進められてきた。たとえば、構造強度に関するものとして、衝撃係数^{1)~3)}、疲労強度⁴⁾の研究があり振動感覚^{5)~8)}に関する研究も最近発表されている。これらの研究は、いずれも、不規則路面凹凸上を走行する質量ばね系でモデル化された車両によって加振される橋梁の動的応答解析を基礎とするものである。

ところで、このような橋梁の動的応答は、単一走行車両の場合でも、走行する車両の影響を受けて非定常不規則応答となる。さらに、一般的な荷重条件の下では、橋梁は極めて複雑な応答性状を呈する。したがって、一般的な解を得ることは困難であるために、応答解析はシミュレーションに依存するものが多かった。ただし、一般的な荷重条件を考えるうえで最も基本的な単一走行車両による応答に関して、不規則振動論を適用した解析がいくつか提案されている。

山田・小堀⁹⁾は、固定した位置で車両が、走行中の不規則振動を橋桁に及ぼすものとして、車両の走行による非定常性を無視した定常応答理論による解法を示した。小堀・梶川¹⁰⁾は、車両の走行によって生じる非定常な接地力による橋梁応答を、一種の非定常外力が作用する力学系の非定常応答(過渡振動)と考え、橋梁-車両の連成効果を無視した非定常解析を行った。吉村・彦坂・内谷¹¹⁾は橋梁の応答を車両と橋梁の連成非定常不規則振動の問題と考えた。そこで、確率過程のサンプル関数の時間領域でのフーリエ級数展開を利用して、連成を考慮し

た解析を行い、橋梁と車両の連成効果について言及している。

非定常応答解析に着目すれば、これらの解析は、基本的に外力の自己相関関数と 1 自由度系のインパルス応答関数に基づく、いわゆる Duhamel の積分を基礎とするものである。しかし、実際の現象では車両により加振された橋梁の振動は、同時に車両の振動に影響し、両系は連成系となる。また、車両の走行による非定常性により橋梁-車両系は、その振動性状が時間とともに変化する時変系となる。さらに、不規則路面凹凸上を走行し定常状態に達した車両が、橋梁に進入することを考慮すると初期条件は確率変数となる。このような系に対して従来の不規則振動論に基礎を置く解法は、橋梁の動的挙動を厳密に反映したものと言ひ難い。本論文では、走行車両による橋梁の動的性状を解析する基本となる、単一車両が走行する橋梁を対象として、非定常性および連成効果を厳密に評価し得る解析手法を提示した。

まず、路面凹凸関数として、従来のモデルと異なった確率過程を仮定する。すなわち、白色雑音過程を入力とする一種のフィルターである路面系を導入し、この定常応答過程により路面凹凸をモデル化する。次に、橋梁-車両系と路面系を合成して 1 つの系と考え、状態空間でベクトル表示すると、合成系の運動方程式は変数係数を有する伊藤型の確率微分方程式^{11), 18), 20)}で表現できた。この確率微分方程式から誘導される共分散方程式を基礎式とする、非定常応答解析の手法を示し、従来の解析手法との関係について論じた。

本解法の妥当性は単純桁道路橋を対象として、本法による解析と対応するシミュレーションにより検証した。次に、この解法を適用した解析モデル(連成効果を考慮した非定常モデル、連成効果を無視した非定常モデル、連成効果を考慮した定常モデル)に基づいて、橋梁と車両の固有振動数比、走行速度、スパン長の各パラメーターが、非定常性および連成効果に及ぼす影響について検

* 正会員 工修 長崎大学助手 工学部土木工学科

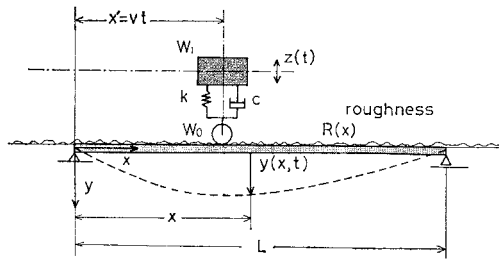


図-1 橋梁-車両系のモデル化

討した。さらにスパン長 20~100 m の橋梁に対し、各解析モデルの結果を最大 r.m.s. 応答 (root mean square) で整理し、各モデルの妥当性ならびに近似解法について考察した。

2. 橋梁-車両系の運動方程式

不規則路面凹凸を有する橋梁上を、1 自由度系でモデル化された車両が、一定速度 v で走行する様子を 図-1 に示した。この橋梁-車両系の運動方程式を導く。

支点から距離 x にある着目点の橋梁の動的たわみ $y(x, t)$ は、 n 次固有モードの基準関数 $\varphi_n(x)$ と基準座標 $q_n(t)$ により、

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot q_n(t) \dots\dots\dots (1)$$

となる。橋梁に作用する車両の接地力を $P(t)$ とすると $q_n(t)$ は次式より得られる。

$$\ddot{q}_n(t) + 2h_n\omega_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2q_n(t) = P(t)\varphi_n(vt)/M_n \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $M_n = \int_0^L \rho\varphi_n(x)^2 dx$ 、また、 ω_n, h_n, ρ および L は、それぞれ、橋梁の n 次の固有円振動数、減衰定数、単位長さ当りの質量 およびスパン長である。なお、“ $\ddot{}$ ” は時間微分を表すものとする。

基準点から距離 x にある路面凹凸を $R(x)$ とすると、一定速度 v で走行する車両では、これは $R(vt)$ となり時間関数 $r(t)$ に変換される。そこで、支点から距離 $x = vt$ にある、走行車両位置の橋梁の動的たわみを $y_v(t)$ 、車両の垂直変位を $z(t)$ 、路面凹凸を $r(t)$ とすると、1 自由度系でモデル化された車両の運動方程式は、次式で記述できる。

$$W_1\ddot{z} + c(\dot{z} - \dot{y}_v - \dot{r}) + k(z - y_v - r) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 W_1, c および k は、車両ばね上質量、減衰係数、ばね定数である。

次に、車両の接地力は、ばね下質量を W_0 とすると、次式で表わされる。

$$P(t) = (W_0 + W_1)g - W_0\ddot{y}_v - W_1\ddot{z} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 g は重力加速度である。しかし、解析では、ばね下質量は、ばね上質量に比べて小さいものと考え、以

後これを無視する。

車両の固有円振動数および減衰定数をおのおの ω_0, h_0 とすると、式 (2)、(3) はあらためて次式で表わされる。以後、上式を橋梁系、下式を車両系と称する。

$$\ddot{q}_n + 2h_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = R_n(g - \ddot{z})\varphi_n(vt) \dots\dots (5)$$

$$\ddot{z} + 2h_0\omega_0(\dot{z} - \dot{y}_v - \dot{r}) + \omega_0^2(z - y_v - r) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $R_n = W_1/M_n$ である。

路面凹凸関数 $r(t)$ は、従来、実測データの統計的処理に基づき、確率・統計論的観点^{2), 22), 23)}から検討されている。本論文においても、これを特定のパワースペクトル密度を有する定常確率過程と仮定する。また、初期条件は次のように考える。橋梁系においては、車両が橋梁に進入するまで橋梁は静止しているものとする。一方、車両系においては、車両は不規則路面凹凸上を走行し、定常状態に達して橋梁に進入するものとする。すなわち、車両系の初期値は、次式で表わされる車両系の橋梁に進入する直前の値であり、一般的に確率変数となる。

$$\ddot{z} + 2h_0\omega_0(\dot{z} - \dot{r}) + \omega_0^2(z - r) = 0 \dots\dots\dots (7)$$

他に、橋梁の応答に影響する条件として、伸縮継手による凹凸力がある。これは、実測により特性を決定すべき確率変数として、初期条件の中に組み込むことが可能である。これらの不規則性を考慮すると、橋梁-車両系の方程式は確率微分方程式となり、その応答は確率過程となる。

そこで、このような応答の確率特性について説明する。橋梁のたわみ応答は式 (1) で示したが、 n 次モードまで考慮した基準座標 $q(t)$ および基準関数 $\varphi(x)$ を次式で定義すると、

$$q(t) = \{q_1(t), \dots, q_n(t)\}^T \dots\dots\dots (8)$$

$$\varphi(x) = \{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}^T \dots\dots\dots (9)$$

なお、たわみ応答は次式でベクトル表示される。

$$y(x, t) = \varphi(x)^T q(t) \dots\dots\dots (10)$$

さらに、速度応答は次式で表される。

$$\dot{y}(x, t) = \varphi(x)^T \dot{q}(t) \dots\dots\dots (11)$$

ただし、“ T ” は転置行列の記号である。

ここで、不規則路面凹凸関数をガウス確率過程と仮定すると、橋梁-車両系の応答はガウス確率過程となる。したがって、その時刻 t における確率特性は、平均値と共分散により規定される。

a) 応答の平均値

$$\begin{bmatrix} \overline{y(x, t)} \\ \overline{\dot{y}(x, t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x)^T \overline{q(t)} \\ \varphi(x)^T \overline{\dot{q}(t)} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

b) 応答の分散・共分散

ここに、記号 \sim と $\bar{}$ は、 $\overline{y(x, t)} = E[y(x, t)]$ 、 $\overline{\dot{y}(x, t)} = E[\dot{y}(x, t)]$ の関係を表わし、また $E[\]$ は集合平均の演算子である。

$$\begin{bmatrix} E[\tilde{y}(x, t)^2] & E[\tilde{y}(x, t) \cdot \tilde{y}(x, t)] \\ E[\tilde{y}(x, t) \cdot y(x, t)] & E[\tilde{y}(x, t)^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x)^T E[\tilde{q}(t) \tilde{q}(t)^T] \varphi(x) & \varphi(x)^T E[\tilde{q}(t) \tilde{q}(t)^T] \varphi(x) \\ \varphi(x)^T E[\tilde{q}(t) \tilde{q}(t)^T] \varphi(x) & \varphi(x)^T E[\tilde{q}(t) \tilde{q}(t)^T] \varphi(x) \end{bmatrix} \dots\dots (13)$$

3. 不規則応答解析の理論

(1) 共分散方程式

共分散方程式は、制御の分野ではカルマンフィルタ一^{17), 18)}等に、また不規則外力を受ける各種の振動問題^{12)~15)}に適用されている。ここでは、橋梁の応答解析に必要な、不規則応答解析理論の概要について述べる。

線形系の運動方程式は、一般に、状態空間において、次式で記述される。

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + W(t) \quad X(t_0) = X_0 \dots\dots (14)$$

ただし、 $X(t)$ 、 $W(t)$ はおのおの n 次元ベクトル、 $A(t)$ は $(n \times n)$ 行列である。

$W(t)$ を次のような確率特性を有するガウス白色雑音過程と考えると、式 (14) の厳密な数学的表現は、伊藤型の確率微分方程式^{11), 17), 18), 20)}で記述される。しかし本論文では、この形式的表現である式 (14) を基礎式^{17), 18)}とする。

$$\textcircled{1} \quad E[W(t)] = \mathbf{0} \dots\dots (15.1)$$

$$\textcircled{2} \quad E[\tilde{W}(t_1) \tilde{W}(t_2)^T] = Q(t_1) \delta(t_1 - t_2) \dots\dots (15.2)$$

ただし、 $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数、 $Q(t)$ は $(n \times n)$ 行列、さらに初期条件は、外力と独立な平均値 \bar{X}_0 を有するガウス確率変数である。

運動方程式の解過程は、線形微分方程式の理論より、次式で表される^{17), 18)}。

$$X(t) = \Phi_X(t, t_0) X_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) W(\tau) d\tau \dots\dots (16)$$

ここで、 $\Phi_X(t, t_0)$ は $(n \times n)$ の状態遷移行列であり、次の性質を有するものである¹⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Phi}_X(t, t_0) &= A(t) \Phi_X(t, t_0) \\ \Phi_X(t_0, t_0) &= I \end{aligned} \right\} \dots\dots (17)$$

$W(t)$ がガウス白色雑音過程であれば、解過程 $X(t)$ は、ガウス過程となる。したがって、時刻 t における解過程の確率特性は、平均値と分散・共分散により規定される。

a) 解過程の平均値

平均値の解析は、確定論による応答解析に相当する。

$$\bar{X}(t) = A(t) \bar{X}(t) \quad \bar{X}(t_0) = \bar{X}_0 \dots\dots (18)$$

b) 解過程の分散・共分散

$X(t)$ の共分散行列 $P_X(t)$ は、

$$P_X(t) = E[\tilde{X}(t) \tilde{X}(t)^T] \dots\dots (19)$$

で定義される。 $P_X(t)$ は、式 (14) の確率微分方程式より誘導される共分散方程式の解として得られる。なお、共分散方程式の誘導については、付録 (A) に記した。

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}_X(t) &= A(t) P_X(t) + P_X(t) A(t)^T + Q(t) \\ P_X(t_0) &= P_{X_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots (20)$$

共分散行列は、その特性より対称行列である。

次に、状態変数 X で表わされる系が、次式のような状態変数 Y, Z で構成される場合、すなわち、連成系について考える。

$$X(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \dots\dots (21)$$

ここに、 Y, Z を、おのおの n_1, n_2 次元ベクトルとすると、 $X(t)$ の次元は $n = n_1 + n_2$ である。

そこで、 Y, Z に対応して、 A, B, W を分割すると、 X 系の運動方程式はあらためて、次式で記述できる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{Y}(t) \\ \dot{Z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_Y(t) & A_{YZ}(t) \\ A_{ZY}(t) & A_Z(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} W_Y(t) \\ W_Z(t) \end{bmatrix} \dots\dots (22) \end{aligned}$$

ただし、 A_Y, A_{YZ}, A_{ZY}, A_Z はおのおの $(n_1 \times n_1)$ 、 $(n_1 \times n_2)$ 、 $(n_2 \times n_1)$ 、 $(n_2 \times n_2)$ 行列、 W_Y, W_Z は n_1, n_2 次元のガウス白色雑音過程ベクトルで、それぞれ、共分散は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E[\tilde{W}_Y(t_1) \tilde{W}_Y(t_2)^T] &= Q_Y(t_1) \delta(t_1 - t_2) \\ E[\tilde{W}_Y(t_1) \tilde{W}_Z(t_2)^T] &= Q_{YZ}(t_1) \delta(t_1 - t_2) \\ E[\tilde{W}_Z(t_1) \tilde{W}_Z(t_2)^T] &= Q_Z(t_1) \delta(t_1 - t_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots (23)$$

ここに、 Q_Y, Q_{YZ}, Q_Z はおのおの $(n_1 \times n_1)$ 、 $(n_1 \times n_2)$ 、 $(n_2 \times n_2)$ 行列である。なお、共分散行列の対称性より $Q_{YZ} = Q_{ZY}^T$ である。

連成系の平均値応答は、従来の確定論による手法で解析される。そこで、以後、解析は分散・共分散応答に着目する。 $X(t)$ の共分散行列は、 $Y(t), Z(t)$ の変数を用いると、次式で表わされる。

$$P_X(t) = \begin{bmatrix} P_Y(t) & P_{YZ}(t) \\ P_{ZY}(t) & P_Z(t) \end{bmatrix} \dots\dots (24)$$

ただし、 P_Y, P_{YZ}, P_{ZY}, P_Z はおのおの Y, Z に関する共分散行列を表わし、それぞれ、 $(n_1 \times n_1)$ 、 $(n_1 \times n_2)$ 、 $(n_2 \times n_1)$ 、 $(n_2 \times n_2)$ 行列である。

既述のように、確率微分方程式と共分散方程式の対応関係から、次の連成系に関する共分散方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{P}_Y(t) & \dot{P}_{YZ}(t) \\ \dot{P}_{ZY}(t) & \dot{P}_Z(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_Y(t) & A_{YZ}(t) \\ A_{ZY}(t) & A_Z(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_Y(t) & P_{YZ}(t) \\ P_{ZY}(t) & P_Z(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} P_Y(t) & P_{YZ}(t) \\ P_{ZY}(t) & P_Z(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_Y(t)^T & A_{ZY}(t)^T \\ A_{YZ}(t)^T & A_Z(t)^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \begin{bmatrix} Q_Y(t) & Q_{YZ}(t) \\ Q_{ZY}(t) & Q_Z(t) \end{bmatrix} \\
 & \begin{bmatrix} P_Y(t_0) & P_{YZ}(t_0) \\ P_{ZY}(t_0) & P_Z(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{Y_0} & P_{Y_0 Z_0} \\ P_{Z_0 Y_0} & P_{Z_0} \end{bmatrix} \dots\dots(25)
 \end{aligned}$$

(2) 従来の解法と共分散方程式による解法の関係

$Z(t)$ をガウス定常確率過程，任意の確定関数を $A_{YZ}(t)$ とした場合，これらの積で表わされる非定常確率過程を外力とする系の運動方程式は，一般に，次の形の式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 \dot{Y}(t) &= A_Y(t)Y(t) + A_{YZ}(t)Z(t) \quad Y(0) = Y_0 \\
 & \dots\dots\dots(26)
 \end{aligned}$$

一般性を失うことなく， Y 系の初期条件を 0 ， $Z(t)$ の平均値を 0 と仮定する。 Y 系の状態遷移行列を $\Phi_Y(t, \tau)$ とすると，従来の解法による解過程の分散・共分散は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 P_Y(t) &= \int_0^t \int_0^t \Phi_Y(t, \tau_1) A_{YZ}(\tau_1) P_Z(\tau_1 - \tau_2) \\
 & \cdot A_{YZ}(\tau_2)^T \Phi_Y(t, \tau_2)^T d\tau_1 d\tau_2^{21)} \dots(27)
 \end{aligned}$$

ただし， $P_Z(\tau_1 - \tau_2)$ は， $Z(\tau_1)$ と $Z(\tau_2)$ の相関関数行列である。

他方，共分散方程式による解法では，ある分散・共分散を有する定常確率過程は，白色雑音過程を入力とする定数係数の線形微分方程式

$$\dot{Z}(t) = A_Z Z(t) + W_Z(t) \dots\dots\dots(28)$$

の定常解過程より構成されるものと考ええる。そこで，式(26)の Y 系と式(28)の Z 系を合成した系を構成すると，これは，式(22)の連成系の特別な場合となる。しかし， Z 系は Y 系と独立であり，定数係数である。したがって，定常状態の Z 系の共分散方程式は，次式で表わされる連立方程式になる。

$$A_Z P_Z(t) + P_Z(t) A_Z^T + Q_Z = 0 \dots\dots\dots(29)$$

しかるに，合成系の共分散方程式は， $P_Y(t)$ ， $P_{YZ}(t)$ に関する微分方程式となり，この微分方程式の未知数は $n_1(n_1 + 2n_2 + 1)/2$ となる。

次に定常応答について述べる。これは， A_Y ， A_{YZ} を定数行列と考えて， $t \rightarrow \infty$ とした場合の応答である。従来の定常応答解析は，式(27)で $t \rightarrow \infty$ とした時間領域の解析か，または，次式の周波数領域の解析によるものである。

$$\begin{aligned}
 E[Y(t)Y(t)^T] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_Y(i\omega) S_Z(\omega) \\
 & \cdot H_Y(i\omega)^* d\omega^{21)} \dots\dots(30)
 \end{aligned}$$

ここに， $S_Z(\omega)$ は $Z(t)$ のパワースペクトル密度行列であり ($n \times n$) 行列， $H_Y(i\omega)^*$ は $H_Y(i\omega)$ の複素共役である。なお i は $\sqrt{-1}$ を表わす虚数単位である。

他方，共分散方程式による解法では，共分散方程式は， $A_X P_X + P_X A_X^T + Q_X = 0 \dots\dots\dots(31)$

となり，解は P_Y 要素として得られる¹⁸⁾。

4. 路面凹凸のパワースペクトル密度とそのモデル化

路面の凹凸については，これまで，自動車の強度および乗心地等の研究^{22)~24)}の基礎資料として，実測されている。これらの研究は，路面凹凸を平均値0の定常確率過程と仮定して，実測データをパワースペクトル密度を用いて分類し，考察するものであった。この結果，路面凹凸のパワースペクトル密度は，近似的に次式で表わされることが知られている²⁴⁾。

$$S_R(\varrho) = A\varrho^{-n} \dots\dots\dots(32)$$

ここに， A は路面の良否によって決まる定数， ϱ は単位長さ当りの凹凸数， n はパワースペクトル密度の分布形状を表わす指数である。

ところで，基準点からの距離 x における路面凹凸を $R(x)$ とすると，一定速度 v m/s で走行する車両上では，これは時間関数に変換される。

$$R(x) = R(vt) = r(t) \dots\dots\dots(33)$$

ゆえに， ϱ cycle/m で表わしたパワースペクトル密度 $S_R(\varrho)$ と，角周波数 ω rad/s で表わした $S(\omega)$ の間には，次の関係が成立する。

$$S(\omega) = A v^{n-1} / (\omega/2\pi)^n \dots\dots\dots(34)$$

ここに， $\omega = 2\pi v\varrho$ である。なお，パラメーター n と A は，川合・森崎の実測を参考にして，小堀・梶川⁹⁾ および，吉村・彦坂らが用いた値とする。すなわち， $n=2$ また， $S_R(\varrho)$ を $\text{cm}^2/\text{cycle/m}$ で表わした $A=10^{-3} \text{cm}^2/\text{m}$ である。

しかし，上記のパワースペクトル密度を有する確率過程は，分散が無限大となり，解析的な特性があいまいである。そこで，本論文では，時間微分の定義が可能で，かつ，厳密に特性が定義できる確率過程として，次の確率微分方程式の解過程を考える。

$$\dot{r}(t) + \beta r(t) = w(t) \dots\dots\dots(35)$$

ここに， $w(t)$ は平均値0，パワースペクトル密度 S_0 を有するガウス白色雑音過程である。

この定常解過程でモデル化された路面凹凸関数は，平均値0，分散 $S_0/2\beta$ の定常確率過程となり，

$$S_n(\omega) = S_0 / (\omega^2 + \beta^2) \dots\dots\dots(36)$$

のパワースペクトル密度を有する。 β および S_0 は，従来のパワースペクトル密度との関係より，

$$\beta = 2\pi v a \quad S_0 = 2\pi v A \dots\dots\dots(37)$$

となる。ただし， a は実測結果より決定する定数である。本論文で定義したパワースペクトル密度は， $\omega > \beta$ の範囲では従来の式とほぼ一致する。なお，式(36)において $\beta \rightarrow 0$ とした極限が，従来の式である。

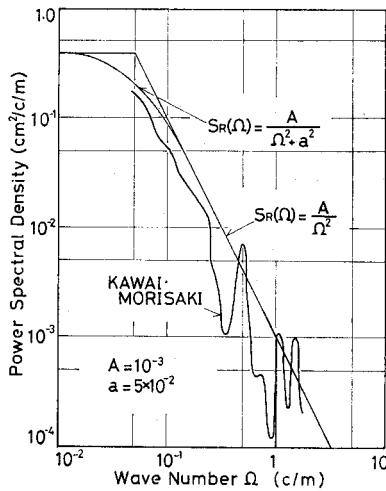


図-2 路面凹凸のパワースペクトル密度

図-2 は、文献 9) を参考にして、下記のパワースペクトル密度を図示したものである。

- ① 川合・森崎の実測²³⁾
- ② 従来のパワースペクトル密度
 $S_R(\Omega) = A/\Omega^2$ (38)
- ③ 本論文のパワースペクトル密度
 $S_R(\Omega) = A/(\Omega^2 + a^2)$ (39)
- ④ シミュレーションに用いたパワースペクトル密度
 $S_R(\Omega) = \begin{cases} 0.4 & \Omega \leq 0.05 \\ A/\Omega^2 & 1 \geq \Omega > 0.05 \end{cases}$ (40)

式 (37), (39) の a は、パワースペクトル密度の分布形状に関するパラメーターであるが、この a は、実測結果に適合させて決定する。本論文では、図-2 に示した実測と従来のモデルを参考にして $a=0.05$ とした。図示した曲線は、この値を用いたものである。

5. 橋梁の二乗平均応答解析

(1) 運動方程式の状態空間表示

橋梁の力学モデルは、本論文では 2 次以上の高次振動を無視して、1 自由度系と仮定した。

橋梁、車両および路面の変数を、おのおの次のような状態変数で表示する。

$$\{q, \dot{q}, z, \dot{z}, r\}^T = \{q, q_2, z_1, z_2, z_3\}^T \dots\dots(41)$$

すると、式 (5), (6) より、橋梁-車両系の運動方程式は、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2 \\ \dot{q}_2 &= b_{21}q_1 + b_{22}q_2 + b_{23}z_1 + b_{24}z_2 + b_{25}z_3 + b_{26}\dot{z}_3 \\ \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= b_{41}q_1 + b_{42}q_2 + b_{43}z_1 + b_{44}z_2 + b_{45}z_3 + b_{46}\dot{z}_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(42)$$

ただし、 $b_{21} = -(\omega_1^2 + \omega_0^2 R_1 \varphi_1(vt)^2)$, $b_{22} = -(2h_1\omega_1 + 2h_0\omega_0 R_1 \varphi_1(vt)^2)$, $b_{23} = b_{25} = \omega_0^2 R_1 \varphi_1(vt)$, $b_{24} = b_{26} = 2h_0\omega_0 R_1 \varphi_1(vt)$, $b_{41} = \omega_0^2 \varphi_1(vt)$, $b_{42} = 2h_0\omega_0 \varphi_1(vt)$, $b_{43} = b_{45} = -\omega_0^2$, $b_{44} = b_{46} = -2h_0\omega_0$ である。

路面凹凸関数は、4. で述べたように、次式で表わされる路面系の定常解過程でモデル化される。

$$\dot{z}_3 = -\beta z_3 + w(t) \dots\dots(43)$$

橋梁系および車両-路面系の変数ベクトルをおのおの $Y(t)$, $Z(t)$, それを合成した橋梁-車両-路面系の変数ベクトルを $X(t)$ とし、次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= \{q_1, q_2\}^T \\ Z(t) &= \{z_1, z_2, z_3\}^T \\ X(t) &= \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots(44)$$

これより、3. で示した運動方程式が構成されて、共分散応答解析が可能になる。この合成系の運動方程式は、次式で記述される確率微分方程式となる。

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + W(t) \dots\dots(45)$$

ここに、 $A(t)$, $W(t)$ は次式で与えられる。

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

$$W(t) = \{0, -a_{24}w(t), 0, -a_{44}w(t), w(t)\}^T$$

ただし、 $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$, $a_{23} = b_{23}$, $a_{24} = b_{24}$, $a_{41} = b_{41}$, $a_{42} = b_{42}$, $a_{43} = b_{43}$, $a_{44} = b_{44}$, $a_{25} = (2h_0\omega_0\beta - \omega_0^2)R_1\varphi_1(vt)$, $a_{45} = -(2h_0\omega_0\beta - \omega_0^2)$ である。

このように、運動方程式を状態空間で表示すると、橋梁-車両系の非定常性ならびに連成の関係が明瞭になる。すなわち、 a_{21} , a_{22} は、橋梁の固有振動数と減衰に関係する係数である。 a_{23} , a_{24} , a_{25} は、橋梁に外力として作用する車両-路面系の係数である。また、 a_{41} , a_{42} は、橋梁の振動と車両の振動が干渉する、いわゆる連成項の係数である。これらの係数はすべて $\varphi_1(vt)$ を含み、橋梁-車両-路面系を時変係数系にしている。

ところで、連成項 a_{41} , a_{42} と a_{21} , a_{22} の時間変化する項を無視し、車両は橋梁に進入する際、定常状態に達していると考え、このような仮定の下では、橋梁の応答解析は、定常過程を時間関数で変調した非定常不規則外力を受ける、1 自由度系の解析の問題となる²⁾。すなわち、この仮定は、橋梁-車両-路面系の運動方程式の係数を、次の係数で置き換えたものに等しい。なお、文献 9) の解析は、この仮定に基づくものである。

$$a_{21} = -\omega_1^2, a_{22} = -2h_1\omega_1, a_{41} = a_{42} = 0 \dots\dots(46)$$

以後、非定常性および連成を厳密に考慮した本論文の解析モデルを連成モデル、連成を無視した式 (46) の仮定に基づく従来の解析モデルを非連成モデルと称する。

(2) 共分散方程式

確率微分方程式と共分散方程式の関係に対応して、橋梁-車両-路面系の共分散方程式が得られる。式の簡略化のために、次の記号を定義する。

$$\left. \begin{aligned} E[q_i q_j] &= m_{ij}, \quad E[q_i z_k] = m_{i, k+2}, \\ E[z_k, z_l] &= m_{2+k, l+2} \\ i, j &= 1, 2, k, l = 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(47)$$

a) 連成モデル

15 個の未知数で表わされる連立微分方程式になる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{m}_{11} &= 2m_{12} \\ \dot{m}_{12} &= a_{21}m_{11} + a_{22}m_{12} + m_{22} + a_{23}m_{13} + a_{24}m_{14} \\ &\quad + a_{25}m_{15} \\ \dot{m}_{22} &= 2a_{21}m_{12} + 2a_{22}m_{22} + 2a_{23}m_{23} + 2a_{24}m_{24} \\ &\quad + 2a_{25}m_{25} + a_{24}^2 S_0 \\ \dot{m}_{13} &= m_{14} + m_{23} \\ \dot{m}_{14} &= a_{41}m_{11} + a_{42}m_{12} + a_{43}m_{13} + a_{44}m_{14} \\ &\quad + a_{45}m_{15} + m_{24} \\ \dot{m}_{15} &= -\beta m_{15} + m_{25} \\ \dot{m}_{23} &= a_{21}m_{13} + a_{22}m_{23} + m_{24} + a_{23}m_{33} + a_{24}m_{34} \\ &\quad + a_{25}m_{35} \\ \dot{m}_{24} &= a_{41}m_{12} + a_{21}m_{14} + a_{42}m_{22} + a_{43}m_{23} \\ &\quad + (a_{22} + a_{44})m_{24} + a_{45}m_{25} + a_{23}m_{34} \\ &\quad + a_{24}m_{44} + a_{25}m_{45} + a_{24}a_{44}S_0 \\ \dot{m}_{25} &= a_{21}m_{15} + (a_{22} - \beta)m_{25} + a_{23}m_{35} + a_{24}m_{45} \\ &\quad + a_{25}m_{55} - a_{24}S_0 \\ \dot{m}_{33} &= 2m_{34} \\ \dot{m}_{34} &= a_{41}m_{13} + a_{42}m_{23} + a_{43}m_{33} + a_{44}m_{34} \\ &\quad + a_{45}m_{35} + m_{44} \\ \dot{m}_{35} &= -\beta m_{35} + m_{45} \\ \dot{m}_{44} &= 2a_{41}m_{14} + 2a_{42}m_{24} + 2a_{43}m_{34} + 2a_{44}m_{44} \\ &\quad + 2a_{45}m_{45} + a_{44}^2 S_0 \\ \dot{m}_{45} &= a_{41}m_{15} + a_{42}m_{25} + a_{43}m_{35} + (a_{44} - \beta)m_{45} \\ &\quad + a_{45}m_{55} - a_{44}S_0 \\ \dot{m}_{55} &= -2\beta m_{55} + S_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(48)$$

b) 非連成モデル

共分散方程式は、上式を式(46)の係数で置き換えたものである。この条件の下では、車両-路面系は橋梁系と独立となり、かつ定常状態となっている。そこで、車両-路面系に関する分散・共分散は、定常状態の共分散方程式を解くことにより、次の値となる。

$$\left. \begin{aligned} m_{33} &= (2h_0 A_1 + \beta \omega_0) S_0 / 4 h_0 \beta A_2 \\ m_{34} &= 0 \\ m_{35} &= A_1 S_0 / 2 \beta A_2 \\ m_{45} &= \omega_0 (\omega_0^2 + 4 h_0 A_1) S_0 / 4 h_0 A_2 \\ m_{45} &= A_1 S_0 / 2 A_2 \\ m_{55} &= S_0 / 2 \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots(49)$$

ただし、 $A_1 = \omega_0^2 + 2 h_0 \omega_0 \beta$, $A_2 = \omega_0^2 + \beta (2 h_0 \omega_0 + \beta)$ である。

したがって、非連成モデルの共分散方程式は、9 個の未知数で構成される連立微分方程式となる。

ここで、この共分散方程式の初期条件について説明する。橋梁は車両が進入するまで静止しているの、橋梁に関する初期条件の分散・共分散はすべて 0 である。

$$m_{1p} = m_{2p} = 0 \quad t = t_0, \quad p = 1, 2, \dots, 5 \dots\dots(50)$$

次に車両系の初期条件について考える。ガウス確率過程を仮定した路面凹凸上を走行する車両の応答は、ガウス確率過程となる。したがって、車両-路面系の初期値は平均値 0 のガウス確率変数となり、分散・共分散は、車両-路面系の共分散方程式の定常解より決定される。なお、この値は式(49)と一致する。

6. 本解法のシミュレーションによる検討

(1) シミュレーションの方法

不規則路面凹凸関数を、三角級数モデルにより²⁵⁾、

$$z(t) = \sum_{k=1}^M \sigma_k \sin(\omega_k t + \phi_k) \dots\dots(51)$$

で表現する。ここに $\sigma_k^2 = 4 S(\omega_k) / 2 \pi v \Delta \Omega$, $\omega_k = 2 \pi v \Omega_k$, $\Omega_k = \Omega_L + \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta \Omega$, $\Delta \Omega = (\Omega_U - \Omega_L) / M$ である。ただし、 $S(\omega_k)$ は、路面凹凸のパワースペクトル密度、 Ω_L および Ω_U は、合成する波形の上限および下限の波数である。 $\dot{z}(t)$ は $z(t)$ を直接微分した次式で定義する。

$$\dot{z}(t) = \sum_{k=1}^M \sigma_k \omega_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \dots\dots(52)$$

なお、波形合成の条件は、波数の範囲 0~1 cycle/m、分割数 $M=100$ とした。

このような合成波形に基づいて、シミュレーションは、次の順序で実行する。車両が発進して一定速度 v で走行し、定常状態に達する時間を T_1 、その車両が橋梁に進入して通過する時間を T_2 とする。路面凹凸は道路上も連続していると考えて、車両が一定速度で $T_1 + T_2$ 時間走行する距離の路面凹凸関数を合成する。次に、この合成波形を用いて T_1 部分で車両の応答を計算する。その T_1 時刻の変位と速度を初期条件として、 T_2 部分に対する橋梁-車両系の応答を計算する。

以後、数値計算では、表-1 の車両と、表-2 の単純桁道路橋²⁾を対象とした。

(2) 車両系の初期条件

ここでは、車両が定常状態に達したとみなしうる時間を仮定し、続いて、車両-路面系の初期条件について検討した。車両-路面系の共分散方程式は、次式で表わされる。

表-1 路面凹凸と車両諸元

路面凹凸のパワースペクトル密度 $S(\varrho)$ (cm ² /c/m)	
共分散方程式	$S(\varrho) = 0.001/(\varrho^2 + \alpha^2)$ $\alpha = 0.05$
シミュレーション	$S(\varrho) = \begin{cases} 0.04 & \varrho \leq 0.05 \\ 0.001/\alpha^2 & 1 \geq \varrho > 0.05 \end{cases}$
走行速度	$V: 10$ (m/s)
車量総重量	$W: 13.6$ (t)
車量固有振動数	$f_0: 3.5$ (Hz)
車量減衰定数	$h_0: 0.03$

表-2 道路橋の諸元表

スパン長 L (m)	総重量 W ($\times 10^4$ kg)	曲げ剛性 EI ($\times 10^{12}$ kg \cdot cm ²)	固有振動数 f_1 (Hz)
20	4.84	6.21	6.23
30	7.76	12.42	3.79
40	10.68	24.41	2.94
50	13.60	42.20	2.45
60	15.52	65.78	2.11
70	19.44	80.15	1.70
80	23.36	130.31	1.66
90	25.28	171.26	1.50
100	28.20	218.01	1.37

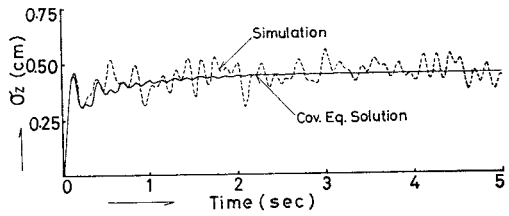
$$\left. \begin{aligned} \dot{m}_{33} &= 2 m_{34} \\ \dot{m}_{34} &= a_{34} m_{33} + a_{44} m_{34} + a_{45} m_{35} + m_{44} \\ \dot{m}_{35} &= -\beta m_{35} + m_{45} \\ \dot{m}_{44} &= 2 a_{43} m_{43} + 2 a_{44} m_{44} + 2 a_{45} m_{45} + a_{44}^2 S_0 \\ \dot{m}_{45} &= a_{43} m_{35} + (a_{44} - \beta) m_{45} + a_{45} m_{55} - a_{44} S_0 \\ \dot{m}_{55} &= S_0 / 2 \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

この方程式の定常解が、すでに示した式 (49) である。

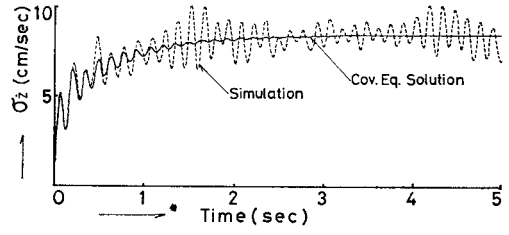
数値計算は、車両が発進して定常状態に達すると考えられる時間区間で行った。この時間は、車両の固有振動数の 15 倍程度、すなわち 5 秒間とした。またシミュレーションは、50 本の応答標本関数を平均した結果である。図-3 (a), (b) は車両の変位および速度の r.m.s. 応答について、共分散方程式による解を実線、シミュレーションの結果を破線で示したものである。5 秒近傍では、共分散方程式の過渡解は定常応答に十分収束していることから、車両はこの区間でほぼ定常状態に達しているものと考えられる。次に、変位および速度の両応答について見れば、共分散方程式による解は、シミュレーションの結果と全区間でよく一致している。特に、5 秒付近で両解法の解が接近していることは、式 (49) で表わされた共分散方程式の初期条件が妥当な値であることを示している。

(3) 橋梁の応答

数値計算は、スパン長 30 m および 50 m の橋梁を対象として、連成モデル、非連成モデルについて行った。図-4 (a), (b) は、スパン長 30 m と 50 m の橋梁に關



(a) 変位応答



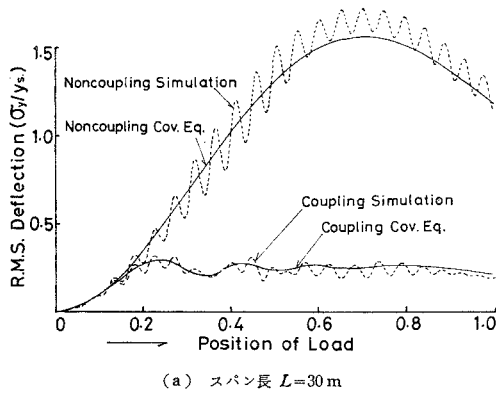
(b) 速度応答

図-3 走行車両の r.m.s. 応答 (走行速度 $v=10$ m/s)

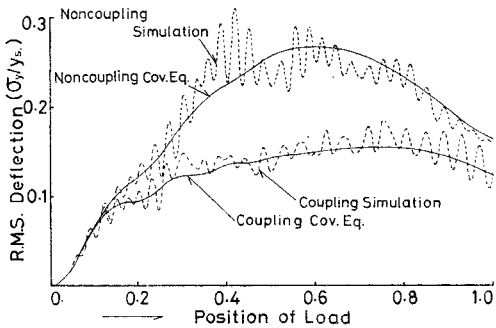
する計算結果であり、スパン中点の r.m.s. たわみ応答を示したものである。図において、共分散方程式の解を実線、シミュレーションを破線で示した。なお、r.m.s. たわみ応答は、車両が静的に作用した場合の橋梁の最大たわみで基準化した値である。以後、たわみ応答はこの基準化した値で表わすものとする。また、横軸は走行車両の橋梁上の位置を、スパン長で基準化した値である。

スパン長 30 m、さらに 50 m のいずれの場合でも、連成および非連成モデルの共分散方程式による解は、対応するシミュレーションにより得られた応答曲線の平均値付近に位置し、両解法の結果は良好な一致を示している。また、図-5 (a), (b) は速度応答であるが、たわみ応答と同じく、両モデルに対する両解法の結果は良く一致している。これらの計算結果より、橋梁-車両-路面系の力学モデルに対する基本的な仮定、さらにこのモデルを用いた本解法の妥当性が検証できたものと考えられる。

次に、連成モデルと非連成モデルによる解析結果について検討する。両モデルの応答の値を比較すると、スパン長 30 m、50 m いずれの場合でも、全区間で連成モデルに比べ非連成モデルによる結果が、大きな値を示している。応答曲線の形状について見れば、非連成モデルの応答曲線は、スパン長に関係なく比較的単調である。これに対して、連成モデルの場合は、スパン長 30 m と 50 m では著しく異なった形状を示している。このように、両モデルの応答の間には、顕著な差異が認められる。この傾向は、橋梁と車両の固有振動数が接近する、スパン長 30 m の場合にはなほだしい。すなわち、橋梁と車両の固有振動数が接近すると、両系の連成による影響が無視できないことを示唆している。

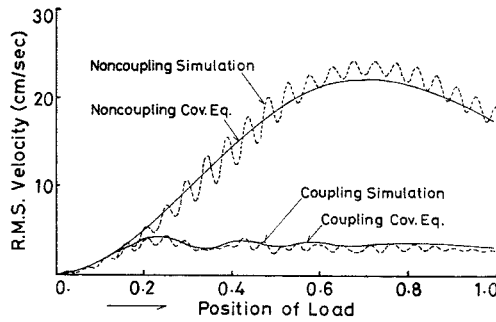


(a) スパン長 $L=30$ m

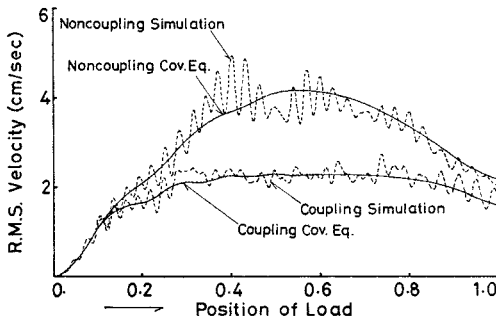


(b) スパン長 $L=50$ m

図-4 共分散方程式による解とシミュレーションの比較：r.m.s. 変位応答



(a) スパン長 $L=30$ m



(b) スパン長 $L=50$ m

図-5 共分散方程式による解とシミュレーションの比較：r.m.s. 速度応答

7. 数値計算結果と考察

(1) 定常応答解析

定常な路面凹凸により加振された車両の全接地力が、橋梁の中心に作用するものと考え、車両の走行による非定常性を無視した定常理論が適用できる。(文献 2) は、このような条件のもとで、車両を 2 自由度系と仮定して、定常過程理論より橋梁の r.m.s. たわみ応答の解析を行った。この定常理論によれば、r.m.s. 応答は橋梁の周波数伝達関数 $H(i\omega)$ と路面凹凸のパワースペクトル密度 $S_n(\omega)$ より

$$\sigma_y = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(i\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega \right)^{1/2} \dots\dots\dots (54)$$

となる。なお、 $H(i\omega)$ の詳細は付録 (B) に示した。

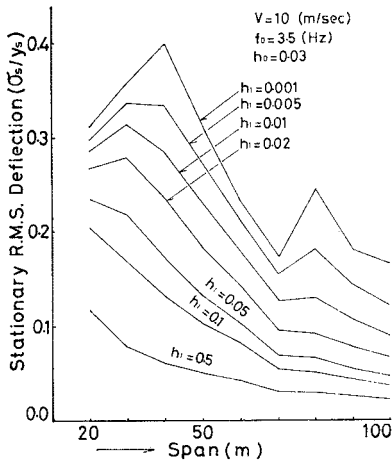
一方、本解法では、この仮定に従えば橋梁-車両-路面系の運動方程式が定数係数となるので、定常解は、共分散方程式の微分項を 0 とした連立方程式より得られる。以後、文献 2) の仮定に基づく共分散方程式による定常解析モデルを定常モデルと称することにする。

ここで、両解法による解析を比較するために、橋梁の減衰定数 h_1 をパラメーターとして、橋梁の定常 r.m.s. たわみ応答解析を行った。図-6 (a) は従来の解法の結果であり、図-6 (b) は本法の結果である。なお、 h_1 は 0.001~0.5 の範囲で変化させ、車両は表-1 で示した諸元を有する 1 自由度系モデルと仮定した。両図を比較すると、 $h_1=0.01$ 以上では、両解法による応答はほとんど一致する。しかし、 $h_1=0.001\sim 0.005$ では、振動数領域における解析法による応答は小さな値を示している。これは、次のような理由によるものと考えられる。すなわち、従来の解法は式 (54) を数値積分するものであるが、 h_1 が小さな値となると、 $|H(i\omega)|^2$ は鋭いピークを示す曲線となり、数値積分の誤差は大きくなる。これに対して本法は、連立方程式の解法に帰着するので、比較的安定した解が得られるからである。

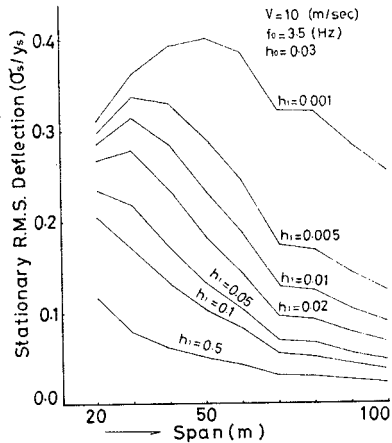
(2) 橋梁と車両の固有振動数比による影響

歩行者の振動感覚を評価する場合、速度応答が基本的な量になることを、小堀・梶川^{5),6),8)} は指摘している。このような観点から、小堀・梶川⁸⁾ および吉村・彦坂¹⁰⁾ らは、不規則路面上を走行する車両により加振された橋梁の非定常不規則応答解析について報告している。本研究では、非定常応答解析については、速度応答に着目した。

図-7 (a) は、図中に記した固有振動数比 f_0/f_1 に対する、非連成モデルの r.m.s. 速度応答を示したものである。ここで、固有振動数比 f_0/f_1 は、スパン長 50



(a) 定常過程理論による解

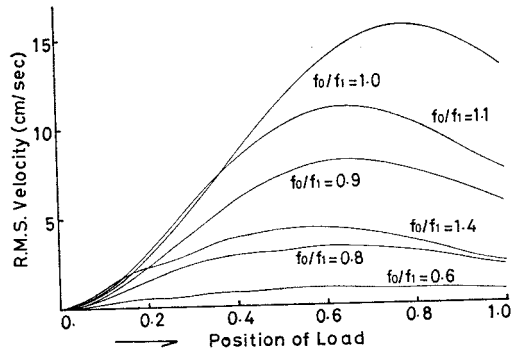


(b) 共分散方程式の定常解

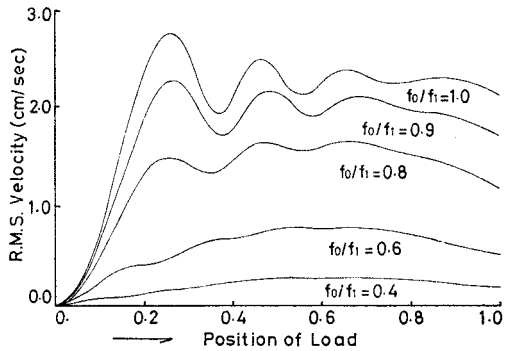
図-6 定常 r.m.s. 変位応答

mの橋梁の固有振動数と車両の固有振動数が一致する場合を $f_0/f_1=1$ として、車両の固有振動数を変化させたものである。応答の最大値は、 f_0/f_1 の増加に伴って増大し、 $f_0/f_1=1$ をピークに、その後単調に減少する。また、応答が最大になる車両位置は、 f_0/f_1 が1に近づくにつれて橋梁後方に移動する。図-7 (b)に、連成モデルの r.m.s. 速度応答を示した。この図は、 f_0/f_1 を0.4から1まで変化させたものである。 f_0/f_1 が0.6以下では、応答曲線は $0.7L$ 付近で最大となるが、 f_0/f_1 が1に接近すると、最大値は前方に移動して、 $0.2L$ 付近の最初のピークで生じるようになる。 f_0/f_1 を1から2と、さらに増加させると、応答は図-7 (c) のようになる。すなわち、 $0.2L$ 付近のピークは急激に減少し、応答の最大値は再び $0.7L$ 付近に移動する。

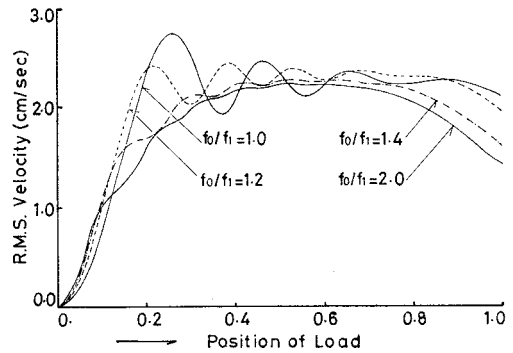
両モデルによる応答曲線を比較すると、 $f_0/f_1 > 0.6$ 、 $f_0/f_1 < 1.5$ の範囲では、形状と共に応答の値も著しく異なったものとなっている。すなわち、非連成モデル



(a) 非連成モデルの場合 (スパン長 $L=50$ m)



(b) 連成モデルの場合 (スパン長 $L=50$ m, $f_0/f_1=0.4\sim 1.0$)



(c) 連成モデルの場合 (スパン長 $L=50$ m, $f_0/f_1=1.0\sim 2.0$)

図-7 r.m.s. 速度応答の固有振動数比 f_0/f_1 による影響

は、従来^{9), 11), 12)}指摘されていたように、 $f_0/f_1=1$ 近傍では橋梁系と車両系は共振することになり、非現実的な振幅の増大を示す。他方、連成モデルでは橋梁-車両系の顕著な非定常性および連成効果により、振幅の増大が抑止されているものと考えられる。

さらに、固有振動数比 f_0/f_1 が各モデルに及ぼす影響について、より詳細に検討するために、最大 r.m.s. 速度応答と固有振動数比の関係を図示した。これが図-8 である。 $f_0/f_1 < 0.6$ では、各モデルの応答はほぼ一

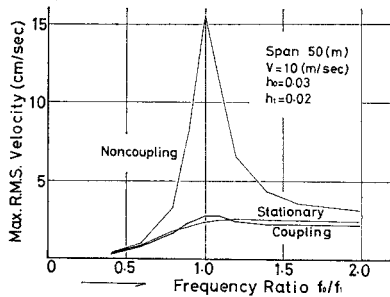


図-8 固有振動数比 f_0/f_1 と最大 r.m.s. 速度応答の関係

致する。 $f_0/f_1 > 1.5$ では、 f_0/f_1 の増加に伴って、各モデルの応答は一定の間隔を保ち、一定の値に接近する。 $f_0/f_1 = 1$ 近傍では、非連成モデルの応答は現実的でない過大な値を示し、このモデルによる解析の限界を示している。図において定常モデルによる定常 r.m.s. 速度応答を併記したが、これは、 f_0/f_1 の全範囲で、非連成モデルと比べてはるかに連成モデルに近い値となっている。このことは、応答に及ぼす影響として、非定常性による効果より連成による効果が大であることを示唆している。なお、 $f_0/f_1 = 1$ において、定常モデルより連成モデルの応答が大きくなっているが、これは、図-7に見られるように、連成モデルの強い非定常性によるものであると考えられる。

(3) 走行速度の影響

車両の走行速度を 2.5, 5.0, 7.5, 10, 20, 40 m/s と変化させた場合、スパン長 50 m の橋梁について連成モデルを用いて r.m.s. 速度応答解析を行った。この結果を図-9 に示した。なお、車両の固有振動数 f_0 は橋梁の固有振動数 f_1 と一致させた。応答曲線の形状について見れば、 $v = 2.5$ m/s では、車両が橋梁に進入すると応答は増加し、車両が 0.1 L 付近に達した後は、定常状態に近い挙動を示す。 $v = 10$ m/s では、最初に大きく変動し、その後の変動は車両が橋梁を通過するまで残っている。 $v = 40$ m/s では、応答が最大に達したとき車両はすでに 0.6 L 付近に到達しており、応答曲線は比較的単純な形状になっている。走行速度が増加すると最大応答となる車両位置は橋梁の後方に移動し、応答曲線は順次異なった曲線に移行することがわかる。

次に、走行速度に対する連成モデル、非連成モデルの最大 r.m.s. 速度応答と定常 r.m.s. 速度応答を図-10 に示した。連成モデルの最大 r.m.s. 応答と定常モデルの r.m.s. 応答は、 $v^{1/2}$ に比例して単調に増加する。このことは、車両上で観測した路面凹凸のパワースペクトル密度が、走行速度 v に比例していることに起因している。また、定常モデルの応答が、連成モデルの応答より

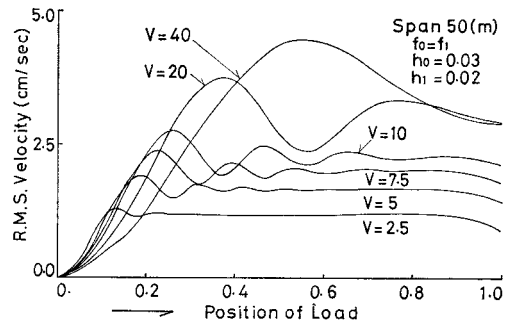


図-9 r.m.s. 速度応答の走行速度による影響 (スパン長 $L = 50$ m, $f_0 = f_1$)

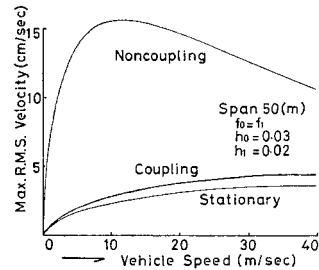


図-10 走行速度 v と最大 r.m.s. 速度応答の関係

小さな値を示していることは、両モデルの $f_0/f_1 = 1$ 付近の特性によるものである。非連成モデルの場合では、最大 r.m.s. 応答が、 $v = 10$ m/s 付近で最大となる特異な傾向¹¹⁾を示す。この原因は、次のように考えられる。すなわち、非連成モデルの応答曲線は図-7 (a) で示されるように、走行速度 $v = 10$ m/s では車両位置が 0.8 L 付近でピークに達する。速度を 10 m/s より減少させると、この範囲では応答は $v^{1/2}$ に比例する。しかし、速度を 10 m/s より増加させると、応答が十分成長するまでに車両は橋梁を通過するので最大応答は減少する傾向を示すものと思われる。実用的な走行速度の範囲では、一般に、速度の増加に伴って応答も増加するものと考えられている¹²⁾。したがって、連成モデルおよび定常モデルでは、走行速度に対する最大 r.m.s. 速度応答の特性は、妥当なものと考えられるが、非連成モデルの場合は、実際の現象を反映しているとは言い難い。

(4) 橋梁の最大 r.m.s. 応答

表-1 に示したスパン長 20~100 m の橋梁に、連成モデルおよび非連成モデルによる非定常解析、さらに定常モデルによる定常解析を適用して、r.m.s. 速度応答を計算した。連成、非連成モデルの非定常応答解析ではその代表値として最大 r.m.s. 応答を、定常モデルの定常解析では定常 r.m.s. 応答を用いて、各モデルの応答とスパン長の関係を図-11 に示した。なお、図中に記した条件では、橋梁と車両の固有振動数が最も接近する橋

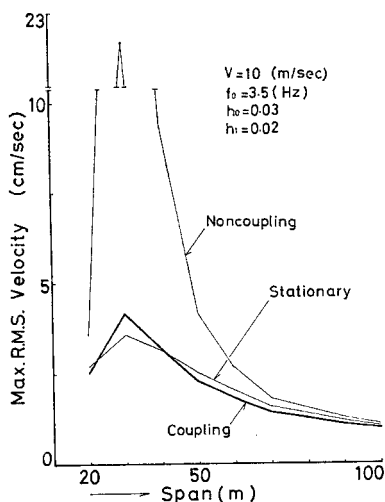


図-11 スパン長 L と最大 r.m.s. 速度応答の関係

梁は、スパン長 30 m の場合である。スパン長 30 m の場合は、ここで対象としている橋梁の中で、いずれのモデルによる応答でも最大となっている。スパン長 60 m 以上では、スパン長が長くなるのに伴って各モデルの応答は徐々に減少し、それらは互いに接近する傾向にある。したがって、スパン長の長い橋梁においては、いずれのモデルで解析しても、最大 r.m.s. 応答の結果は、ほぼ同じ値となることがわかる。

次に、各モデルによる応答の相互関係について検討する。連成モデルによる応答は、6. のシミュレーションとの比較の結果、最も信頼性のある解析とみなすことができる。非連成モデルによる応答は、連成モデルによる応答に比べ、いずれのスパン長でも、大きな値となっている。特に、スパン長 30 m では、この応答は、現実的でない異常に過大な値を示し、連成モデルとの差は著しい。この原因は、7. (2) で述べたように、橋梁と車両の連成効果によるものと考えられる。したがって非連成モデルによる解析は、橋梁と車両の固有振動数が接近するような橋梁には、適用できないものと思われる。定常モデルによる応答は、スパン長 30 m で、連成モデルよりわずかに小さな値となるが、非連成モデルの応答に比べ、はるかに連成モデルの応答に近い値を示している。このことにより、最大 r.m.s. 応答のみに注目すれば煩雑な非定常解析を行うまでもなく、定常応答解析より、十分信頼性のある近似解を得ることが可能であるものと考えられる。

8. む す び

路面凹凸を確率過程と仮定すると、路面凹凸を考慮した走行車両による橋梁の応答は、車両と橋梁の連成効果

により、複雑な非定常確率過程になることが知られている。このような橋梁の応答解析における課題は、車両と橋梁の連成効果を考慮した、解析モデルを構成することであることが指摘されている。しかし、従来の非定常応答解析は、基本的に 1 自由度系の解析理論に立脚したものであるために、連成および時変係数を有する複雑な系の解析に対して、系の動的挙動を厳密に反映した解析とは言い難い。本論文では、従来の解析と異なった観点から、車両と橋梁の連成効果および非定常性を厳密に表現し得る解析モデルを提示した。すなわち、路面凹凸関数を白色雑音過程を入力とする、路面系と称する一種のフィルターの定常解過程でモデル化することにより、橋梁-車両-路面系を伊藤型の確率微分方程式で表現した。次に、この確率微分方程式より誘導される共分散方程式に基づいて、橋梁の二乗平均応答解析の基礎式を誘導した。さらに、この解法を手掛りとして、連成効果および非定常性の原因について考察するとともに、これらが応答に及ぼす影響について検討した。得られた結果を要約すると、以下のようである。

(1) 本解法によれば、非定常応答解析は確定論の場合と同様に微分方程式の解法に帰着し、さらに、車両の走行による非定常性を無視した定常応答解析は、同じ基礎式より統一的に把握できる。

(2) 従来の定常過程理論による応答解析と同じ仮定の下では、本解法の定常解は従来の解法による解とほぼ一致した。しかし、本法は連立方程式の解法に帰着されるので、従来の解法に比べて簡便であると考えられる。

(3) 連成モデルと非連成モデルによる非定常応答解析では、本法による r.m.s. 応答と対応するシミュレーションの結果は良好な一致を示し、本法の妥当性が検証できた。さらに、連成モデルによる解法は、連成効果および非定常性を厳密に評価し得る解析であることが確認できた。

(4) 車両と橋梁の固有振動数が接近すると、非連成モデルでは、応答曲線は連成モデルと比べ著しく異なった形状を呈し、さらに、最大 r.m.s. 応答は現実的でない過大な値を示す。したがって、このような両系の固有振動数の範囲では、連成効果が応答に及ぼす影響を無視することができないものと思われる。

(5) 連成モデルと非連成モデルの非定常解析による最大 r.m.s. 応答と定常モデルによる r.m.s. 応答を比較すると、定常モデルの応答は、非連成モデルに比べてはるかに連成モデルに近い値を示した。すなわち、定常モデルによる解法は、近似解法として見れば、十分信頼性のある解法と考えられる。

最後に、本研究を遂行するにあたり、九州大学 吉村 虎蔵教授、同彦坂 照助教授には常にご指導を賜わり、

さらに、長崎大学 小西保則教授、同花井正実教授、同高橋和雄助教授にはご助言を賜わり、ここに深く感謝の意を表します。また、数値計算および作図にご協力いただいた、元長崎大学学生 神原 隆氏（現：大村市役所）ならびに達木英一郎氏（現：藤永建設）に深く感謝いたします。

なお、本研究の計算には、九州大学大型計算機センター計算機（M 190）および長崎大学計算機室計算機（FACOM 270/20）を使用したことを付記する。

付録—A 共分散方程式の誘導¹⁷⁾

運動方程式 (14) の解過程は、式 (16) で与えられるが、ここで、この式を式 (A・1) とする。

$$X(t) = \Phi_X(t, t_0) X_0 + \int_{t_0}^t \Phi_X(t, \tau) W(\tau) d\tau \dots\dots\dots (A \cdot 1)$$

$X(t)$ の共分散行列 $P_X(t)$ は、式 (A・1) と式 (18) より

$$P_X(t) = \Phi_X(t, t_0) P_{X_0} \Phi_X(t, t_0)^T + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau_1) E[W(\tau_1) W(\tau_2)^T] \cdot \Phi(t, \tau_2)^T d\tau_1 d\tau_2 \dots\dots\dots (A \cdot 2)$$

となる。ここで、白色雑音過程の特性式 (15・2) を用いて、第2項の積分を遂行すると、次式を得る。

$$P_X(t) = \Phi_X(t, t_0) P_{X_0} \Phi_X(t, t_0)^T + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) Q(\tau) \Phi(t, \tau)^T d\tau \dots\dots\dots (A \cdot 3)$$

この式の両辺を t で微分して、式 (17) の状態遷移行列の性質を考慮すると、次式になる。

$$\dot{P}_X(t) = A(t) \Phi_X(t, t_0) P_{X_0} \Phi(t, t_0)^T + \Phi_X(t, t_0) P_{X_0} \Phi_X(t, t_0)^T A(t)^T + \int_{t_0}^t A(t) \Phi_X(t, \tau) Q(\tau) \Phi(t, \tau)^T d\tau + \int_{t_0}^t \Phi_X(t, \tau) Q(\tau) \Phi(t, \tau)^T A(t)^T d\tau + Q(t) \dots\dots\dots (A \cdot 4)$$

ここで、式 (A・3) を代入すると、共分散方程式が得られる。

$$\dot{P}_X(t) = A(t) P_X(t) + P_X(t) A(t)^T + Q(t) \dots\dots\dots (A \cdot 5)$$

なお、共分散方程式の誘導については、文献 13)~17) に、それぞれ異なった方法で示されている。

付録—B 橋梁-車両系の伝達関数

走行車両による非定常性を無視した定常応答解析で

は、不規則路面凹凸により加振された車両の接地力は、スパン中点に作用するものと考えている。すなわち、これは橋梁-車両系の運動方程式 (42) において、 $\varphi_1(vt)$ を $\varphi_1(1/2 L)$ としたものに对应する。したがって、この方程式は定数係数の微分方程式になる。ここで、変数 $q_1(t)$ 、 $z_1(t)$ および $z_3(t)$ に関するフーリエ変換を $Q(\omega)$ 、 $Z(\omega)$ 、 $N(\omega)$ として、式 (42) をフーリエ変換すると、

$$J_1 Q(\omega) + J_2 Z(\omega) + J_3 N(\omega) = 0 \dots\dots\dots (B \cdot 1)$$

$$J_4 Q(\omega) + J_5 Z(\omega) + J_6 N(\omega) = 0 \dots\dots\dots (B \cdot 2)$$

となる。ただし、 $J_1 = -\omega^2 + i\omega b_{21} - b_{22}$ 、 $J_2 = -i\omega b_{24} - b_{23}$ 、 $J_3 = -i\omega b_{26} - b_{25}$ 、 $J_4 = -i\omega b_{42} - b_{41}$ 、 $J_5 = -\omega^2 - i\omega b_{44} - b_{43}$ 、 $J_6 = -i\omega b_{46} - b_{45}$ である。

(B・1) と (B・2) より $Z(\omega)$ を消去すると

$$Q(\omega) = H(i\omega) N(\omega)$$

となり、橋梁-車両系の伝達関数 $H(i\omega)$ は、

$$H(i\omega) = (J_2 J_6 - J_5 J_3) / (J_1 J_5 - J_2 J_4) \dots\dots (B \cdot 3)$$

となる。

参 考 文 献

- 1) 山田・小堀：ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究，土木学会論文集第119号，pp. 1~9, 1965年7月。
- 2) 山田・小堀：活荷重に対する道路橋の動的応答-衝撃係数-に関する研究，土木学会論文集第148号，pp. 40~50, 1967年12月。
- 3) Nakai, H. and Kotoguchi, H.: Dynamic Response of Horizontally Curved Girder Bridges under Random Traffic Flows, 土木学会論文集第244号，pp. 117~128, 1975年12月。
- 4) Shinozuka, M. and Kobori, T.: Fatigue Analysis of Highway Bridges, 土木学会論文集第208号，pp. 137~148, 1972年12月。
- 5) 小堀・梶川：道路橋の振動とその振動感覚，土木学会論文報告集第222号，pp. 15~23, 1974年2月。
- 6) 小堀・梶川：橋梁振動の人間工学的評価法，土木学会論文報告集第230号，pp. 23~31, 1974年10月。
- 7) 星谷・中根：橋の振動による心理的反応の理論解析，土木学会論文報告集第246号，pp. 1~8, 1976年2月。
- 8) 小堀・梶川：単一動荷重に対する道路橋の振動感覚，土木学会論文報告集第248号，pp. 11~23, 1976年4月。
- 9) 吉村・彦坂ほか：不規則振動論による道路橋の走行荷重応答解析（第1報），九州大学工学集報，第48巻，第6号，pp. 741~746, 1975年12月。
- 10) 吉村・彦坂ほか：単一走行車両による道路橋の非定常ランダム応答の解析，土木学会論文報告集第258号，pp. 35~44, 1977年2月。
- 11) 伊藤 清：確率論，岩波書店，1969年。
- 12) Gaonkar, G.H.: A General Method with Shaping Filter to Study Random Vibration Statistics of Lifting Rotors with Feedback Controls, Journal of Sound and Vibration, Vol. 21, No. 2, pp. 213~225, 1972.
- 13) Wan, F.Y.M. and Lakshminantham, C: Rotor Blade Response to Random Loads: A Direct Time-Domain Approach, AIAA Journal, Vol. 11, No. 1, pp. 24~28, 1973.

- 14) Wan, F.Y.M. : Nonstationary Response of Linear Time Varying Dynamical Systems to Random Excitation, *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, Vol. 40, No. 2, pp. 422~428, 1973.
- 15) Gersch, W. : Mean-Square Responses in Structural Systems, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 48, No. 1, pp. 403~413, 1970.
- 16) 竹宮宏和：非線形履歴型復元力特性を有する多自由度構造物のランダム地震応答解析，土木学会論文報告集第245号，pp. 17~26, 1976年1月。
- 17) 榎木・添田ほか：確率システム制御の基礎，日新出版，1975年。
- 18) 有本 卓：カルマンフィルター，産業図書，1977年。
- 19) Schultz, D.G. and Melsa, J.L.・久村富持訳：状態関数と線形制御系，学献社，1970年。
- 20) Soong, T.T. : *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press, 1973年。
- 21) Lin, Y.K.・森ほか4名訳：構造動力学の確率論的方法，培風館，1972年。
- 22) 兼重一郎：パワースペクトル解析の自動車への応用，いすゞ技報，No. 33, pp. 1~9, 1960.
- 23) 川合・森崎：自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性，三菱重工技報，Vol. 2, No. 2, pp. 20~28, 1965年。
- 24) 兼重一郎：自動車走行中の振動データのとりあつかい，磯部 孝編：相関関数およびスペクトル，東京大学出版会，pp. 97~108, 1971年。
- 25) 星谷 勝：確率論手法による振動解析，鹿島出版会，1974年。

(1978.6.5・受付)